Оглавление

Кратные интегралы

				№0()2(1)		
1	**1**	**Кратные интегралы**	**10(5)**	6		
1		Двойные интегралы. Полярная система координат.	2(1)			
		Двойные интегралы. Полярная система координат		№0()2(1)		

Семинар 1. Двойные интегралы

Задача. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y^3)dxdy$, область D ограничена прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$

$$\iint\limits_D (x+y^3)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 (x+y^3)dy,\quad \int\limits_0^2 (x+y^3)dy = \left(xy + \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^2 = x \cdot 2 + \frac{2^4}{4} = 2x+4$$

$$\int\limits_1^2 (2x+4)dx = \left(2\frac{x^2}{2} + 4x \right)\Bigg|_1^2 = 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 4 + 8 - 1 = 7$$

Задача. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$, область D ограничена прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$ (поставлена в билеты)

$$\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 (x+y)^3 dy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)dy,$$

$$\int\limits_0^2 (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)dy = \left(x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 + xy^3 + \frac{1}{4}y^4 \right)\Bigg|_0^2 = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 4$$

$$\int\limits_1^2 (2x^3 + 6x^2 + 8x + 4)dx = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4 \right)\Bigg|_1^2 = 8 + 16 + 16 + 4 - \frac{1}{2} - 2 - 4 = 37{,}5$$

Задача. Вычислить двойной интеграл по области D ограниченной параболами $y^2 = x$ и $y = x^2$ $\iint\limits_D (y^2 + x)dxdy$

$$\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2 + x)dy = \left(\frac{y^3}{3} + xy \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^6}{3} - x^3,\quad I = \int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^6}{3} - x^3 \right)dx = \frac{33}{140}$$

Пример 1. На плоскости Oxy построить область интегрирования D по заданным пределам изменения переменных в повторном интеграле $I = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2/8}^{3\sqrt{x}} dy$. Изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл при заданном и измененном порядках интегрирования.

▶ Область интегрирования D расположена между прямыми $x = 0$ и $x = 4$, ограничена снизу параболой $y = 3x^2/8$, сверху параболой $y = 3\sqrt{x}$ (рис. 13.8). Следовательно,

$$I = \int\limits_0^4 \left(y \Big|_{3x^2/8}^{3\sqrt{x}} \right) dx = \int\limits_0^4 \left(3\sqrt{x} - 3x^2/8\right) dx = \left(2x^{3/2} - x^3/8\right)\Big|_0^4 = 8.$$

С другой стороны, область интегрирования D расположена между прямыми $y = 0$ и $y = 6$, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном значении y от точек параболы $x = y^2/9$ до точек параболы $x = \sqrt{8y/3}$, т. е., согласно формуле (13.7), имеем

$$I = \int\limits_0^6 dy \int\limits_{y^2/9}^{\sqrt{8y/3}} dx = \int\limits_0^6 \left(\sqrt{\frac{8y}{3}} - \frac{y^2}{9} \right) dy =$$

$$= \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} - y^3 \cdot \frac{1}{27} \right)\Bigg|_0^6 = 8. \ ◀$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\,dy.$$

▶ Область интегрирования D ограничена линиями $x=0$, $x=1$, $y=x^2$ и $y=2-x$ (рис. 13.9). Так как правый участок границы области D задан двумя линиями, то прямая $y=1$ разбивает ее на области D_1: $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$ и D_2: $1 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2-y$. В результате получаем

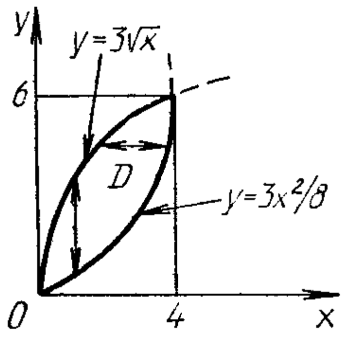


Рис. 13.8

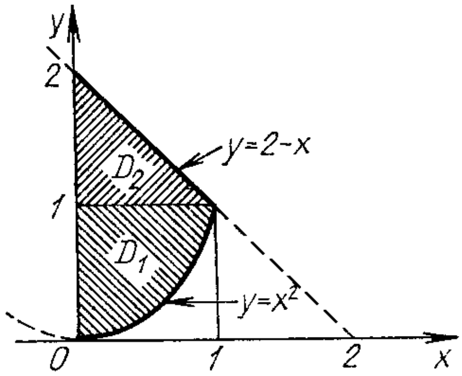


Рис. 13.9

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y)\,dx. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (x+y+3)\,dx\,dy,$$

если область D ограничена линиями $x+y=2$, $x=0$, $y=0$.

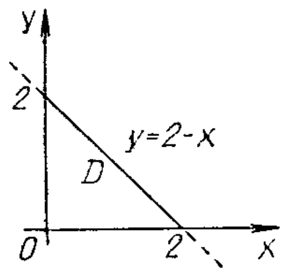


Рис. 13.10

▶ Область интегрирования D ограничена прямой $y=2-x$ и осями координат (рис. 13.10). Следовательно,

$$\iint_D (x+y+3)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y+3)\,dy =$$

$$= \int_0^2 \left.\frac{(x+y+3)^2}{2}\right|_{y=0}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (25-(x+3)^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(25x - \frac{(x+3)^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{26}{3}. \blacktriangleleft$$

АЗ-13.1

1. Вычислить следующие повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 (x^2+2y)dx$;

б) $\int\limits_{-3}^{8} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx$; в) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$.

(*Ответ:* а) 14/3; б) 50,4; в) 2,25.)

2. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного интеграла $\iint\limits_D (x, y)\,dxdy$, если известно, что область интегрирования D:

а) ограничена прямыми $x=1$, $x=4$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y-1=0$;

б) ограничена линией $x^2+y^2-4x=0$;

в) является треугольной областью с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(1, 3)$, $B(1, 5)$;

г) ограничена линиями $y=x^3+1$, $x=0$, $x+y=4$

3. Изменить порядок интегрирования в данных повторных интегралах:

а) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy$; б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{5x} f(x, y)\,dy$;

в) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx$.

4. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y=x^2$ и $y^2=x$. (*Ответ:* 33/140.)

5. Вычислить $\iint\limits_D x^3y^2 dxdy$, если область D ограничена линией $x^2+y^2=9$. (*Ответ:* 0.)

6. Вычислить $\iint\limits_D x\cos(x+y)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y=0$, $x=\pi$, $y=x$. (*Ответ:* $-\pi/2$.)

7. Вычислить $\iint\limits_D y\,dxdy$, если область D ограничена первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox. $\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{2}\pi a^3.\right)$

Записать с помощью двойных интегралов и вычислить площади, ограниченные линиями:

2292. $xy = 4,\ y = x,\ x = 4.$

2293. 1) $y = x^2,\ 4y = x^2,\ y = 4$; 2) $y = x^2,\ 4y = x^2,\ x = \pm 2.$

2294. $y^2 = 4 + x,\ x + 3y = 0.$

2295. $ay = x^2 - 2ax,\ y = x.$

2296. $y = \ln x,\ x - y = 1$ и $y = -1.$

2297. Построить области, площади которых выражаются интегралами:

$$1)\ \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy; \quad 2)\ \int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx; \quad 3)\ \int\limits_0^a dx \int\limits_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy.$$

Изменить порядок интегрирования.

Указание. Чтобы получить уравнения линий, ограничивающих область, нужно пределы интеграла по dx приравнять x, а пределы интеграла по dy приравнять y.

2298. Построить области, площади которых выражаются интегралами: 1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} dy$; 2) $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{y^2-4}^0 dx$. Изменить порядок интегрирования и вычислить площади.

2299. Вычислить площадь, ограниченную линиями $r = a(1 - \cos\varphi)$ и $r = a$ и расположенную вне круга.

2300. Вычислить площадь, ограниченную прямой $r\cos\varphi = a$ и окружностью $r = 2a$.

Вычислить площади, ограниченные линиями:

2301. $xy = \dfrac{a^2}{2},\ xy = 2a^2,\ y = \dfrac{x}{2},\ y = 2x.$

Указание. В задаче 2301 выгодно перейти к новым координатам $xy = u$ и $y = vx$, после чего площадь определяется по формуле

$\iint |J|\,du\,dv$, где $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ и называется якобианом. В задаче 2302 положить $y^2 = ux$, $vy^2 = x^3$, а в задаче 2303 перейти к обобщенным полярным координатам $x = r\cos^3\varphi$ и $y = r\sin^3\varphi$.

2302. $y^2 = ax$, $y^2 = 16ax$, $ay^2 = x^3$, $16ay^2 = x^3$.

2303. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Вычислить площади, ограниченные линиями:

2304. $y = x^2$, $y = x + 2$.

2305. $ax = y^2 - 2ay$ и $y + x = 0$.

2306. $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $x = 0$.

2307. $y^2 = a^2 - ax$, $y = a + x$.

2308. $r = 4(1 + \cos\varphi)$, $r\cos\varphi = 3$ (справа от прямой).

2309. $r = a(1 - \cos\varphi)$, $r = a$ и расположенную вне кардиоиды.

2310. $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.

2311. Построить области, площади которых выражаются интегралами:

$$1) \int\limits_a^b dx \int\limits_a^x dy; \quad 2) \int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx; \quad 3) \int\limits_0^4 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy.$$

Изменить порядок интегрирования и вычислить площади.

Сменить порядок интегрирования в интегралах

Полярная система координат

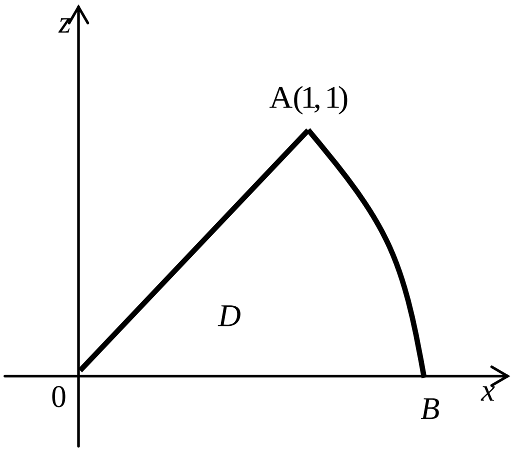
Задача. Вычислить площадь области D ограниченной прямыми $z = 0$ и $z = x$ и окружностью $x^2 + z^2 = 2x$ (поставлена в билеты)

Решить в декартовой системе координат и с переходом в полярную систему координат.

Переход в полярную систему координат $x = r\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi$

Уравнение окружности будет $r^2 = 2r\cos\varphi$ или $r = 2\cos\varphi$

Изменение меры интегрирования при переходе в полярную систему координат



$$J(r,\varphi)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} r\cos\varphi & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} r\cos\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} r\sin\varphi & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} r\sin\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r$$

Получится замена меры интегрирования $dydx \to rdrd\varphi$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr = \int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2} d\varphi\Big|_0^{2\cos\varphi} =$$

$$2\int_0^{\pi/4} \cos^2\varphi d\varphi = \left|2\cos^2 = 1+\cos 2\varphi\right| = \int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

2.1. Переходя к полярным координатам,

а) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$; б) $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

Решение. а) Область интегрирования представляет первую четверть круга. Переходя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\rho =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

б) Область интегрирования расположена в первой четверти и ограничена двумя окружностями: $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=ay$.(рис. 16.13)

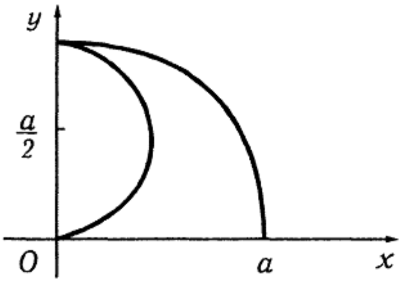


Рис. 16.13

Переходя к полярным координатам и учитывая, что уравнение внутренней окружности будет $\rho = a\sin\varphi$, получим

$$\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} \left(a^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(a^2-\rho^2\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{a\sin\varphi}^{a} d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = a\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a.$$

Задача. Преобразовать двойной интеграл в полярную систему координат

Задача. Преобразовать двойной интеграл в обобщённую полярную систему координат

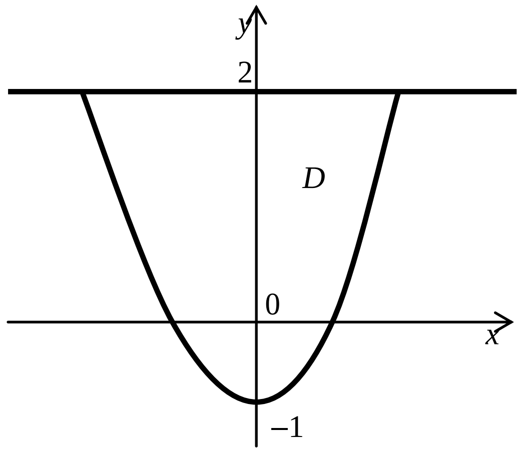
2		Применение двойных интегралов.	2(1)			
		Применение двойных интегралов		№0()2(1)		

Семинар 2. Применение двойных интегралов

Задача. Вычислить площадь фигуры D ограниченной кривыми $y = 2$ и параболой $y = x^2 - 1$

В силу симметрии графиков относительно оси возьмём пределы интегрирования только по одну сторону (поставлена в билеты)

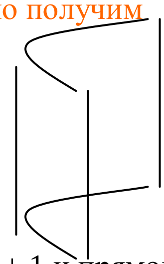
$$\frac{S}{2}=\int\limits_{-1}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y+1}}dx=\int\limits_{-1}^{2}x\Big|_{0}^{\sqrt{y+1}}dy=\int\limits_{-1}^{2}\sqrt{y+1}dy=\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2}=2\sqrt{3}$$, окончательно получим $S=4\sqrt{3}$



Задача. Вычислить площадь фигуры D ограниченной кривыми $y = 2$ и параболой $y = x^2 - 1$

В силу симметрии графиков относительно оси возьмём пределы интегрирования только по одну сторону

$$\frac{S}{2}=\int\limits_{-1}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y+1}}dx=\int\limits_{-1}^{2}x\Big|_{0}^{\sqrt{y+1}}dy=\int\limits_{-1}^{2}\sqrt{y+1}dy=\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2}=2\sqrt{3}$$, окончательно получим $S=4\sqrt{3}$



Задача. Вычислить площадь области D ограниченной параболой $y^2 = x + 1$ и прямой $y = -x + 1$

$$\iint\limits_{D}dxdy=\int\limits_{-2}^{1}dy\int\limits_{y^2-1}^{1-y}dx=\int\limits_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy=\frac{9}{2}$$ (поставлена в билеты)

Задача. Вычислить площадь области D ограниченной прямыми $z = 0$ и $z = x$ и окружностью $x^2 + z^2 = 2x$

Изменение меры интегрирования при переходе в полярную систему координат $dydx \to rdrd\varphi$

$$S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}rdr=\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{r^2}{2}d\varphi\Big|_{0}^{2\cos\varphi}=2\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos^2\varphi d\varphi=\int\limits_{0}^{\pi/4}(1-\cos\varphi)d\varphi=\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

27. Вычислить $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$, если область D — кольцо между окружностями $x^2+y^2=e^2$ и $x^2+y^2=e^4$.

△ Перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint\limits_D \ln\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=2\iint\limits_D \rho\ln\rho\,d\rho\,d\theta=2\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_e^{e^2}\rho\ln\rho\,d\rho.$$

Взяв по частям интеграл, зависящий от ρ, получим

$$2\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho-\frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2}d\theta=\pi e^2(3e^2-1).\ ▲$$

28. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy$, если область D — квадрат, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ (рис. 6).

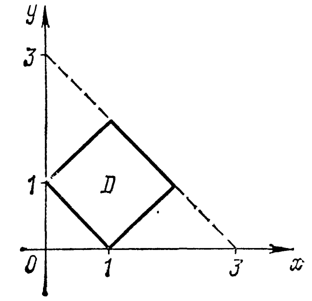


Рис. 6

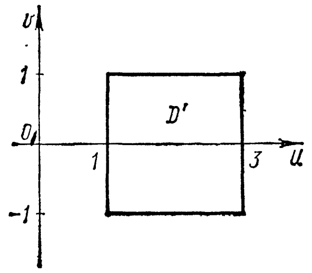


Рис. 7

△ Положим $x+y=u$, $x-y=v$, откуда $x=(1/2)(u+v)$, $y=(1/2)(u-v)$. Тогда якобиан преобразования

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},\ \text{т. е.}\ |J|=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}u^3v^2\,du\,dv$. Так как область D' также является квадратом (рис. 7), то

$$\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3\,du\int\limits_{-1}^1 v^2\,dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-1}^1 du=\frac{1}{6}\int\limits_1^3 u^3(1+1)\,du=\frac{1}{12}u^4\Big|_1^3=\frac{20}{3}.\ ▲$$

29. Вычислить $\iint\limits_D \frac{x^2\sin(xy/2)}{y}\,dx\,dy$, если область D ограничена четырьмя параболами $x^2=\pi y/3$, $x^2=2\pi y/3$, $y^2=2x$, $y^2=4x$ (рис. 8).

△ Произведем замену переменных так, чтобы $xy=uv$ и $x^2/y=v$; тогда $x=\sqrt[3]{uv^2}$, $y=\sqrt[3]{u^2v}$ и область D' окажется прямоугольником: $u=2$, $u=4$, $v=\pi/3$, $v=2\pi/3$ (рис. 9). Находим якобиан преобразования:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \dfrac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3}\\ \dfrac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \dfrac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3}\end{vmatrix}=\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{3},\ \text{т. е.}\ |J|=\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\iint_D \frac{x^2 \sin(xy/2)}{y}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\iint_{D'} \frac{u^{2/3} v^{4/3} \sin(uv/2)}{u^{2/3} v^{1/3}}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} v\,dv \int_{2}^{4} \sin(uv/2)\,du = \frac{2}{3}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} (\cos v - \cos 2v)\,dv =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Найти среднее значение функции $z = x + 6y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y = x$, $y = 3x$, $x = 2$.

▶ Средним значением функции $z = f(x, y)$ в области D является число (см. свойство 7 двойных интегралов)

$$\bar{f} = \frac{1}{S_D}\iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

Вычислим сначала площадь области D:

$$S_D = \iint_D dxdy = \int_0^2 dx \int_x^{3x} dy = \int_0^2 (3x - x)\,dx = x^2 \Big|_0^2 = 4.$$

Аналогично получаем

$$\iint_D (x + 6y)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_x^{3x} (x + 6y)\,dy = \int_0^2 \frac{1}{12}(x + 6y)^2 \Big|_x^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^2 ((19x)^2 - (7x)^2)dx = \frac{1}{12}\int_0^2 312x^2 dx = 26\int_0^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{26}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{208}{3}.$$

Таким образом,

$$\bar{f} = \frac{1}{4} \cdot \frac{208}{3} = \frac{52}{3}. \ \blacktriangleleft$$

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x, y)$, снизу плоскостью $z=0$ и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D, вычисляется по формуле

$$V=\iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

52. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=1+x^2$, $z=3x$, $y=5$, $z=0$ и расположенного в I октанте.

△ Тело, объем которого надо вычислить, ограничено сверху плоскостью $z=3x$, сбоку — параболическим цилиндром $y=1+x^2$ и плоскостью $y=5$. Следовательно, это — цилиндрическое тело. Область D ограничена параболой $y=1+x^2$ и прямыми $y=5$ и $x=0$. Таким образом, имеем

$$V=\iint_D 3x\,dx\,dy=3\int_0^2 x\,dx\int_{1+x^2}^{5} dy=3\int_0^2 x\cdot[y]_{1+x^2}^{5}\,dx=$$

$$=3\int_0^2 (4x-x^3)\,dx=3\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=12 \text{ (куб. ед.)}. \ ▲$$

53. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=1-x^2-y^2$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, $z=0$ и расположенного в I октанте.

△ Данное тело ограничено сверху параболоидом $z=1-x^2-y^2$. Область интегрирования D — круговой сектор, ограниченный дугой окружности $x^2+y^2=1$, являющейся линией пересечения параболоида с плоскостью $z=0$, и прямыми $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$. Следовательно,

$$V=\iint_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Поскольку областью интегрирования является часть круга, а подынтегральная функция зависит от x^2+y^2, целесообразно перейти к полярным координатам. Уравнение окружности $x^2+y^2=1$ в этих координатах примет вид $\rho=1$, подынтегральная функция равна $1-\rho^2$, а пределы интегрирования по θ определяем из уравнений прямых: $\operatorname{tg}\theta_1=1$, т. е. $\theta_1=\pi/4$; $\operatorname{tg}\theta_2=\sqrt{3}$, т. е. $\theta_2=\pi/3$. Таким образом, имеем

$$V=\iint_D (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\int_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left[\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta=\frac{\pi}{48} \text{ (куб. ед.)}. \ ▲$$

54. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$.

△ Рассмотрим восьмую часть заданного тела (рис. 12):

$$\frac{1}{8}V=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy=$$

$$=\int\limits_0^a (a^2-x^2)\,dx=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3.$$

Следовательно, $V=16a^3/3$. ▲

Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями:

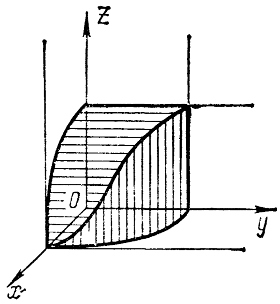


Рис. 12

55. $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$.

56. $x=2y^2$, $x+2y+z=4$, $y=0$, $z=0$.

57. $x^2+4y^2+z=1$, $z=0$.

58. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

59. $z=4-x^2$, $2x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

60. $z^2=xy$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=4$, $z=0$.

61. $z=5x$, $x^2+y^2=9$, $z=0$.

62. $x+y+z=6$, $3x+2y=12$, $3x+y=6$, $y=0$, $z=0$.

63. $z=x+y+1$, $y^2=x$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

64. $z=0$, $z=xy$, $x^2+y^2=4$.

65. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $y=0$, $z=x/2$, $z=x$.

77. Найти кооординаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$ (рис. 16).

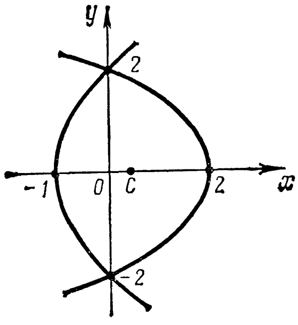


Рис. 16

△ Так как фигура симметрична относительно оси Ox, то $\bar{y}=0$. Остается найти $\bar{x}$. Найдем площадь данной фигуры;

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=2\int\limits_0^2 dy\int\limits_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} dx=$$

$$=2\int\limits_0^2\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=$$

$$=2\int\limits_0^2\left(3-\frac{3y^2}{4}\right)dy=6\left[y-\frac{1}{12}y^3\right]_0^2=8.$$

Тогда

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\iint\limits_D x\,dx\,dy=\frac{1}{8}\cdot 2\int\limits_0^2 dy\int\limits_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^2\left[\frac{1}{4}(4-y^2)^2-\frac{1}{16}(y^2-4)^2\right]dy=\frac{1}{8}\int\limits_0^2\left(3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\right)dy=$$

$$=\frac{1}{8}\left[3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right]_0^2=\frac{2}{5}.$$ ▲

78. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $x^2/25+y^2/9=1$ и его хордой $x/5+y/3=1$.

△ Найдем площадь сегмента:

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\int\limits_0^5 dx\int\limits_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\int\limits_0^5\left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}-3+\frac{3}{5}x\right)dx=\frac{15}{4}(\pi-2).$$

Тогда

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 x\,dx\int\limits_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5\left[\frac{3}{5}x\sqrt{25-x^2}-3x\left(1-\frac{x}{5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left[-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(25-x^2)^{3/2}-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{5}\right]_0^5=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left(25-\frac{75}{2}+25\right)=\frac{10}{3(\pi-2)};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 dx\int\limits_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} y\,dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^5\left[\frac{9}{25}(25-x^2)-9\left(1-\frac{x}{5}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{2\cdot 9\cdot 2}{15(\pi-2)\cdot 25}\int\limits_0^5(5x-x^2)\,dx=\frac{12}{125(\pi-2)}\left[\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^5=$$

$$=\frac{12}{125(\pi-2)}\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{2}{\pi-2}.\ ▲$$

79. Вычислить полярный момент инерции фигуры, ограниченной линиями $x/a+y/b=1$, $x=0$, $y=0$.

△ Момент инерции относительно начала координат равен

$$I_0=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{(b/a)(a-x)}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^a\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{(b/a)(a-x)}dx=\int\limits_0^a\left[\frac{b}{a}x^2(a-x)+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^3\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{3}bx^3-\frac{b}{4a}x^4-\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{1}{4}(a-x)^4\right]_0^a=\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.\ ▲$$

Задача. Определить статические моменты S_x и S_y однородной фигуры $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, лежащей в первой четверти ($x\ge 0,\ y\ge 0$) (Каплан ч3-4) (поставлена в билеты)

Задача. Определить центр тяжести однородной фигуры, ограниченной кривыми $y^2=2px,\ x=a$ (Каплан ч3-4) (поставлена в билеты)

2292. $xy = 4,\ y = x,\ x = 4$.

2293. 1) $y = x^2,\ 4y = x^2,\ y = 4$; 2) $y = x^2,\ 4y = x^2,\ x = \pm 2$.

2294. $y^2 = 4 + x,\ x + 3y = 0$.

2295. $ay = x^2 - 2ax,\ y = x$.

2296. $y = \ln x,\ x - y = 1$ и $y = -1$.

2297. Построить области, площади которых выражаются интегралами:

$$1)\ \int_0^a dx \int_0^x dy; \quad 2)\ \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx; \quad 3)\ \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy.$$

Изменить порядок интегрирования.

Указание. Чтобы получить уравнения линий, ограничивающих область, нужно пределы интеграла по dx приравнять x, а пределы интеграла по dy приравнять y.

2298. Построить области, площади которых выражаются интегралами: 1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} dy$; 2) $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{y^2-4}^0 dx$. Изменить порядок интегрирования и вычислить площади.

2299. Вычислить площадь, ограниченную линиями $r = a(1 - \cos\varphi)$ и $r = a$ и расположенную вне круга.

2300. Вычислить площадь, ограниченную прямой $r\cos\varphi = a$ и окружностью $r = 2a$.

Вычислить площади, ограниченные линиями:

2301. $xy = \dfrac{a^2}{2},\ xy = 2a^2,\ y = \dfrac{x}{2},\ y = 2x$.

Указание. В задаче 2301 выгодно перейти к новым координатам $xy = u$ и $y = vx$, после чего площадь определяется по формуле

Определить центр масс площади, ограниченной линиями:

2312. $y = 0$ и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$.

2313. $y = x^2,\ x = 4,\ y = 0$. **2314.** $y^2 = ax$ и $y = x$.

2315. $x^2 + y^2 = a^2$ и $y = 0$.

2316. Определить центр масс площади, ограниченной астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ и осью Ox.

Указание. Перейти к обобщенным полярным координатам

$$x = r\cos^3\varphi \quad \text{и} \quad y = r\sin^3\varphi.$$

2317. Определить моменты инерции J_x, J_y и J_0 площади прямоугольника, ограниченного линиями $x = 0,\ x = a,\ y = 0$ и $y = b$.

2318. Определить момент инерции относительно оси Ox площади, ограниченной линиями $y = x/2,\ x = a,\ y = a$.

2319. Определить момент инерции относительно оси Oy площади треугольника с вершинами $A(0;\,2a)$, $B(a;\,0)$ и $C(a;\,a)$.

В задачах 2320–2323 определить полярный момент инерции площади, ограниченной линиями:

2320. $x + y = a,\ x = 0,\ y = 0$. **2321.** $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

2322. Окружностью $r = a$.

2323. $y^2 = ax,\ x = a$.

Определить центр масс:

2324. Полусегмента параболы $y^2 = ax,\ x = a,\ y = 0$ (при $y > 0$).

2325. Полуэллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, отсеченного осью Ox.

2326. Определить момент инерции относительно оси Oy площади, ограниченной линиями $y = a + \dfrac{x^2}{a},\ y = 2x$ и $x = 0$.

2327. Определить момент инерции относительно оси Ox площади треугольника с вершинами $A(1;\,1)$, $B(2;\,1)$, $C(3;\,3)$.

Определить полярный момент инерции площади, ограниченной линиями:

2328. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,\ x = 0,\ y = 0$.

2329. $y = 4 - x^2$ и $y = 0$. **2330.** $r = a(1 - \cos\varphi)$.

§ 3. Вычисление объема с помощью двойного интеграла

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = F(x, y)$, снизу — плоскостью $z = 0$ и с боков — цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область (S), равен

$$V = \iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} F(x, y)\,dx\,dy.$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

2331. $z = x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

2332. $z = x + y + a,\ y^2 = ax,\ x = a,\ z = 0,\ y = 0$ (при $y > 0$).

2333. $(x + y)^2 + az = a^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (поверхность построить по сечениям: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = h \leqslant a$; см. задачу 546).

2334. $x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + z^2 = a^2$ (см. задачу 552).

2335. $z^2 = xy,\ x = a,\ x = 0,\ y = a,\ y = 0.$

2336. $az = x^2 - y^2,\ z = 0,\ x = a.$

2337. $z^2 = xy,\ x + y = a.$

2338. $x + y + z = 3a,\ x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0.$

Указание. В задачах 2338–2344 перейти к полярным координатам.

2339. $z = mx,\ x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0.$

2340. $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = 0.$

2341. $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,\ x^2 + y^2 = a^2$ (вне цилиндра).

2342. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (внутри цилиндров).

2343. Первым завитком геликоида $y = x \operatorname{tg} \dfrac{z}{a}$ внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ и плоскостью $z = 0$.

2344. $z^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = ax.$

2345. $\dfrac{z}{c} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2},\ z = 0.$

Указание. В задачах 2345 и 2346 перейти к обобщенным (эллиптическим) полярным координатам: $x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi$.

2346. $z = ce^{(-x^2/a^2)-(y^2/b^2)}$ и $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

2347. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ (положить $x = r\cos^3\varphi,\ y = r\sin^3\varphi$).

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

2348. $z = a - x$, $y^2 = ax$ и $z = 0$.

2349. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

2350. $y^2 + z^2 = 4ax$, $y^2 = ax$, $x = 3a$ (вне цилиндра).

2351. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

2352. Коноида $x^2y^2 + h^2z^2 = a^2y^2$ при $0 \leqslant y \leqslant h$ (см. задачу 559).

2353. $x^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$, $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

2354. $4z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ (вне цилиндра).

Указание. В задачах 2354–2358 перейти к полярным координатам.

2355. $z^2 = (x + a)^2$, $x^2 + y^2 = a^2$.

2356. $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

2357. $az = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$.

2358. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (внутри цилиндров).

2359. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Указание. Положить $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$.

3		Тройные интегралы.	2(2)			
		Тройные интегралы		№0()2(1)		

Семинар 3. Тройные интегралы

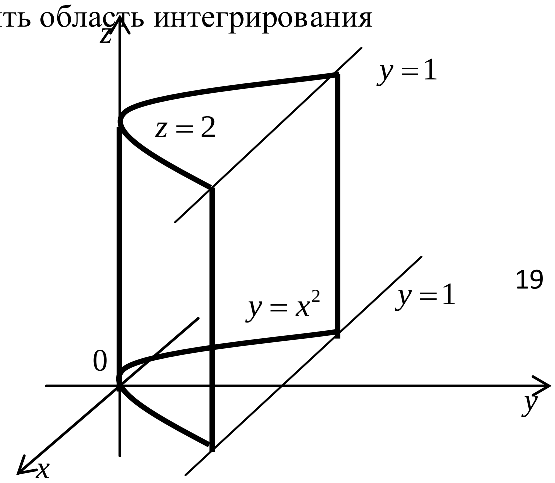
Задача. Вычислить тройной интеграл

$$I = \int_0^1 dz \int_2^4 dy \int_0^3 (x + y + z)dx = \int_0^1 dz \int_2^4 dy \left(\frac{x^2}{2} + (y + z)x \right)\Bigg|_0^3 = \int_0^1 dz \int_2^4 \left(\frac{9}{2} + 3y + 3z \right) dy = 30$$

Задача. Вычислить тройной интеграл и построить область интегрирования

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (4 + z)dz,$$ (поставлена в билеты)

$$I_1 = \int_0^2 (4 + z)dz = \left(4z + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = 8 + \frac{4}{2} = 10$$



$$I_2=\int\limits_{x^2}^{1} I_1 dy = 10\int\limits_{x^2}^{1} dy = 10y\Big|_{x^2}^{1} = 10(1-x^2),$$

$$I=I_3=\int\limits_{-1}^{1} I_2 dx = 10\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{40}{3}$$

Область интегрирования

95. Вычислить $I=\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, где область T определяется неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1/2$, $x\leqslant y\leqslant 2x$, $0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$.

△ $$I=\int\limits_0^{1/2} dx\int\limits_x^{2x} dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} dx\int\limits_x^{2x} z^2\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} dx\int\limits_x^{2x}(1-x^2-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}\left[y-yx^2-\frac{1}{3}y^3\right]_x^{2x} dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}\left(2x-2x^3-\frac{8}{3}x^3-x+x^3+\frac{1}{3}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}\left(x-\frac{10}{3}x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^4\right]_0^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16}\right)=\frac{7}{192}.\ ▲$$

96. Вычислить $I=\iiint\limits_T x^2yz\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-2=0$.

△ Область T ограничена сверху плоскостью $z=2-x-y$, а снизу — плоскостью $z=0$. Проекцией тела на плоскость xOy служит треугольник, образованный прямыми $x=0$, $y=0$, $y=2-x$. Следовательно,

$$I=\int\limits_0^2 x^2\,dx\int\limits_0^{2-x} y\,dy\int\limits_0^{2-x-y} z\,dz=\int\limits_0^2 x^2\,dx\int\limits_0^{2-x} y\frac{(2-x-y)^2}{2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2\left[\frac{(2-x)^4}{2}+\frac{(2-x)^4}{4}-\frac{2(2-x)^4}{3}\right]dx=\frac{1}{24}\int\limits_0^2 x^2(2-x)^4\,dx=\frac{16}{315}.\ ▲$$

101. Вычислить $\iiint\limits_T(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, если область T — прямоугольный параллелепипед, определенный неравенствами $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$.

102. Вычислить $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

103. Вычислить $\iiint\limits_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

104. Вычислить $\iiint\limits_T(2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, если область T — трехгранная призма, ограниченная плоскостями $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$ $(a>0,\ b>0)$.

4		Цилиндрическая и сферическая системы координат.	2(1)			

		Цилиндрическая и сферическая системы координат		№0()2(1)		
		Цилиндрическая система координат				
		Сферическая система координат				

Семинар 4. Цилиндрическая система координат

Задача. Преобразовать тройной интеграл в цилиндрическую систему координат

99. Вычислить $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=a$.

△ Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение цилиндра в этих координатах примет вид $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi$, или $\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2\rho\cos\varphi$, т. е. $\rho=2\cos\varphi$. Следовательно, в области T координаты ρ, φ и z изменяются так: $0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant z\leqslant a$. Поэтому

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T z\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho\int\limits_0^a z\,dz=\frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{8}{9}a^2. \blacktriangle$$

б) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}}dy\int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$

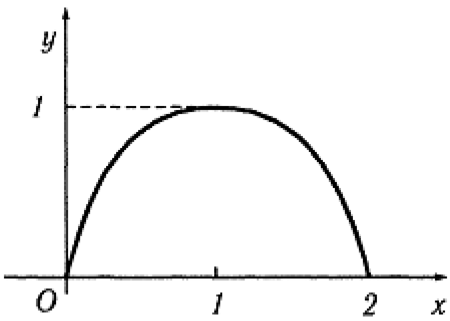
б) Данный интеграл следует вычислять в цилиндрической системе координат. Однако, целесообразнее сначала найти внутренний интеграл по z, а затем перейти к полярной системе координат

$$I=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^a dy=\frac{a^2}{2}\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$$

Область интегрирования последнего интеграла показана на рис. 16.37. Переходя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, будем иметь

$$I=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\frac{8a^2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{9}a^2.$$



Семинар 4. Сферическая система координат

При переходе от декартовых координат x, y, z к *сферическим координатам* ρ, φ, θ (рис. 18), связанным с x, y, z соотношениями

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta\quad (0\leqslant\rho\leqslant+\infty,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

якобиан преобразования $J=\rho^2\sin\theta$, и *формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам* имеет вид

Задача. Преобразовать тройной интеграл в сферическую систему координат

1711. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=z$.

Решение. Область V (рис. 203) ограничена снизу и сверху сферой $x^2+y^2+z^2=z$. В сферических координатах $x^2+y^2+z^2=r^2$, поэтому по формуле (7)

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} rr^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr.$$

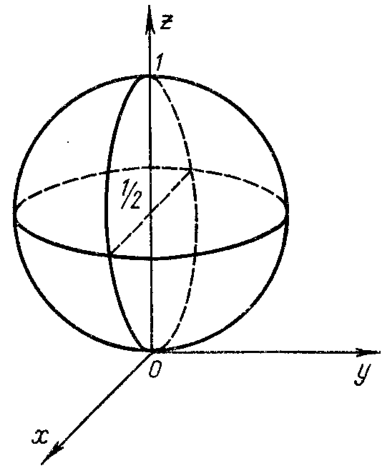
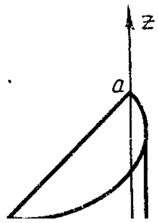


Рис. 203

Очевидно, что в области V φ меняется от 0 до 2π, θ — от 0 до $\frac{\pi}{2}$, r — от 0 до $\cos\theta$, так как уравнение данной сферы принимает вид $r^2=r\cos\theta$, или $r=\cos\theta$. Тогда имеем

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} r^3\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{\cos\theta}r^3\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\cos\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^4\theta\,d\theta=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d(\cos\theta)=$$



$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{20}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{10}.$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

Задача. Преобразовать тройной интеграл в обобщенную сферическую систему координат

98. Вычислить $I=\iiint\limits_T x^2\,dx\,dy\,dz$, если T — шар $x^2+y^2+z^2\leqslant$ $\leqslant R^2$.

$\triangle$ Перейдем к сферическим координатам. В области T координаты ρ, φ и θ изменяются так: $0\leqslant\rho\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Следовательно,

$$I=\iiint\limits_T \rho^4\sin^3\theta\cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{R}\rho^4\,d\rho=$$

$$=\frac{R^5}{5\cdot 2}\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{\pi R^5}{5}\int\limits_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)\,d(\cos\theta)=\frac{4\pi R^5}{15}.\ \blacktriangle$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$$

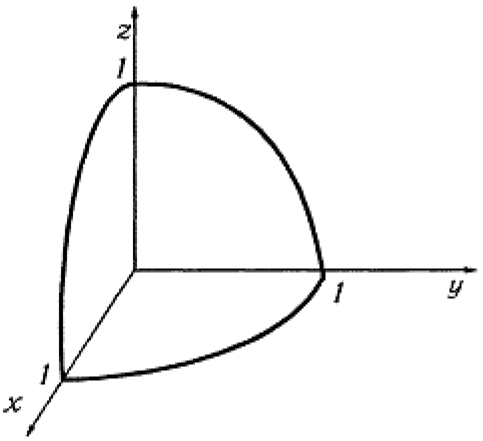
в) Представим область интегрирования на рис. 16.38. Нетрудно заметить, что она займет первый октант единичного шара. Переходя к сферической системе координат, подынтегральная функция будет равна

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(\rho\cos\theta)^2} = \rho$$

Таким образом, пользуясь формулой (6) и расставляя пределы интегрирования, будем иметь

$$I = \iiint\limits_G \rho\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi = \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = \frac{\pi}{8}.$$



102. Вычислить $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

99. Вычислить $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=a$.

△ Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение цилиндра в этих координатах примет вид $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi$, или $\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2\rho\cos\varphi$, т. е. $\rho=2\cos\varphi$. Следовательно, в области T координаты ρ, φ и z изменяются так: $0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant z\leqslant a$. Поэтому

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T z\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho\int\limits_0^a z\,dz=\frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{8}{9}a^2.\ \blacktriangle$$

100. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, если область T — верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$.

△ Введем сферические координаты; новые переменные изменяются в пределах $0\leqslant\rho\leqslant r$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$. Таким образом,

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T \rho^4\sin^3\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int\limits_0^r\rho^4\,d\rho\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\int\limits_0^r\rho^4\,d\rho\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^2\theta-1)\,d(\cos\theta)=$$

$$=2\pi\int\limits_0^r\rho^4\,d\rho\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{4}{15}\pi r^5.\ \blacktriangle$$

101. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, если область T — прямоугольный параллелепипед, определенный неравенствами $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$.

102. Вычислить $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

103. Вычислить $\iiint\limits_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

104. Вычислить $\iiint\limits_T (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, если область T — трехгранная призма, ограниченная плоскостями $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$ ($a>0$, $b>0$).

101. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, если область T — прямоугольный параллелепипед, определенный неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

102. Вычислить $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

103. Вычислить $\iiint\limits_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

104. Вычислить $\iiint\limits_T (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, если область T — трехгранная призма, ограниченная плоскостями $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$ $(a>0,\ b>0)$.

105. Вычислить $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена конической поверхностью $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=2$.

106. Вычислить $\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=3$ и $x+z=2$.

107. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y+z^2)^3\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена цилиндром $x^2+z^2=1$ и плоскостями $y=0$, $y=1$.

108. Вычислить $\iiint\limits_T (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$, где область T — общая часть параболоида $z \geqslant (x^2+y^2)/(2a)$ и шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2$.

109. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $z=(x^2+y^2)/2$, $z=2$.

110. Вычислить $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz$, где область T — шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$.

111. Вычислить $\iiint\limits_T \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$, если T — шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

1. Вычислить $\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz$, если область V определяется неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant xy$. (*Ответ:* $1/110$.)

2. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, если область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).\right)$

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y+z=4$, $z=0$. (*Ответ:* $256/15$.)

4. Вычислить $\iiint\limits_V x^2y^2\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$. (*Ответ:* $\pi/32$.)

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=10x$, $x^2+y^2=13x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y \geqslant 0$. (*Ответ:* 266.)

6. Вычислить

$$\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz,$$

если область V — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+$ $+\frac{z^2}{c^2}=1$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{4}{5}\pi abc.\right)$

3. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

3.1. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, v: $x^2+y^2+z^2=4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* $16\pi/5$.)

3.2. $\iiint\limits_V y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, v: $z\geqslant 0$, $z=2$, $y\geqslant \pm x$, $z^2=$ $=4(x^2+y^2)$. (*Ответ:* $\sqrt{2}/10$.)

3.3. $\iiint\limits_V z^2dxdydz$, v: $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 36$, $y\geqslant x$, $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* $1555\pi/12$.)

3.4. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, v: $x^2+y^2+z^2=32$, $y^2=x^2+z^2$, $y\geqslant 0$. (*Ответ:* 128π.)

3.5. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, v: $x^2+y^2+z^2=8$, $x^2=y^2+z^2$, $x\geqslant 0$. (*Ответ:* 8π.)

3.6. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, v: $4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 16$, $y\leqslant\sqrt{3}x$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* $15\pi/2$.)

3.7. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, v: $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $y\geqslant 0$. (*Ответ:* $8(\pi/2-1)$.)

3.8. $\iiint\limits_V \frac{y^2 dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, v: $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $y \geqslant \sqrt{3}x$, $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$. (*Ответ:* $\frac{52}{27}(2\pi + 3\sqrt{3})$.)

3.9. $\iiint\limits_V \frac{y^2 z dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, v: $y \geqslant 0$, $y \leqslant \sqrt{3}x$, $z = 3(x^2+y^2)$, $z = 3$. (*Ответ:* $3(4\pi - 3\sqrt{3})/20$.)

3.10. $\iiint\limits_V \frac{x^2 dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, v: $x^2+y^2+z^2 = 16$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $16\pi/3$.)

3.11. $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $z = 2(x^2+y^2)$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $z = 18$. (*Ответ:* 81.)

3.12. $\iiint\limits_V \frac{xydxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, v: $z = x^2+y^2$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, $z = 4$. (*Ответ:* $4/3$.)

3.13. $\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2 = 4y$, $y + z = 4$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $1472/45$.)

3.14. $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2 = 2x$, $x + z = 2$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $4/5$.)

3.15. $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2 = 16y$, $y + z = 16$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $2048/5$.)

3.16. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, v: $x^2+y^2 = 2x$, $x + z = 2$ $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $128/45$.)

3.17. $\iiint\limits_V xydxdydz$, v: $2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 8$, $z^2 = x^2+y^2$ $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $31(4\sqrt{2} - 5)/15$.)

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

4.1. $z^2=4-x$, $x^2+y^2=4x$. (*Ответ:* 512/15.)

4.2. $z=4-y^2$, $x^2+y^2=4$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 12π.)

4.3. $x^2+y^2=1$, $z=2-x-y$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 2π.)

4.4. $z=y^2$, $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x+y=2$. (*Ответ:* 4/3.)

4.5. $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $z=x$, $x=\sqrt{9-y^2}$, $x=\sqrt{25-y^2}$. (*Ответ:* 98/3.)

4.6. $x^2+y^2=4$, $z=4-x-y$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 16π.)

4.7. $z\geqslant 0$, $z=x^2$, $x-2y+2=0$, $x+y=7$. (*Ответ:* 32.)

4.8. $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $z=y$, $x=4$, $y=\sqrt{25-x^2}$. (*Ответ:* 118/3.)

4.9. $z\geqslant 0$, $z=4-x$, $x=2\sqrt{y}$, $y=2\sqrt{x}$. (*Ответ:* 176/15.)

4.10. $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $2x-y=0$, $x+y=9$, $z=x^2$. (*Ответ:* 1053/2.)

4.11. $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x=4$, $y=2x$, $z=x^2$. (*Ответ:* 128.)

4.12. $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $y=2x$, $y=3$, $z=\sqrt{y}$. (*Ответ:* $9\sqrt{3}/5$.)

4.13. $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x=3$, $y=2x$, $z=y^2$. (*Ответ:* 54.)

4.14. $z\geqslant 0$, $y^2=2-x$, $z=3x$. (*Ответ:* $32\sqrt{2}/5$.)

4.15. $z\geqslant 0$, $y=\sqrt{9-x^2}$, $z=2y$. (*Ответ:* 36.)

4.16. $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x+y=2$, $z=x^2+y^2$. (*Ответ:* 8/3.)

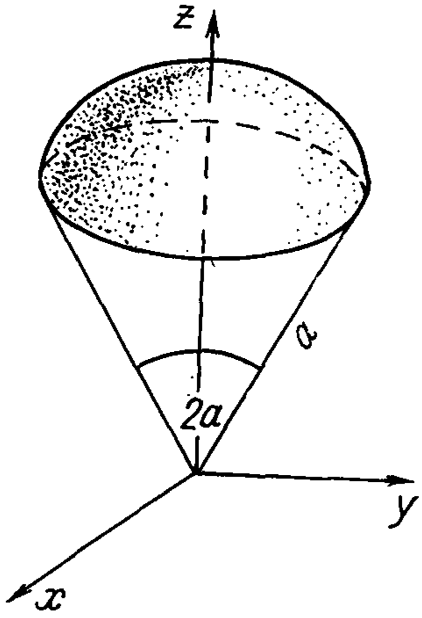
		Применение тройных интегралов.	2(1)			
		Применение тройных интегралов		№0()2(1)		

Семинар 5. Применение тройных интегралов

Задача 4,21. Найти центр тяжести сектора однородного шара радиуса a с телесным углом 2α.

Решение. Разместим оси, как указано на чертеже. Вычисления проведем в сферических координатах. Ясно, что центр тяжести находится на оси Oz, а потому $x_c = y_c = 0$. Координату центра тяжести найдем по третьей формуле в (4,9). После перехода к сферическим координатам ($z = \rho\cos\theta$; $dv = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$) получим

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}{\iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}. \qquad (A)$$



К задаче 4.21

Переменные ρ, θ и φ в области интегрирования изменяются так:

ρ от 0 до a;
θ от 0 до α;
φ от 0 до 2π.

Знаменатель дроби в этой формуле — объем (v) указанного шарового сектора. В задаче 3,13 этот объем уже вычислен. Вычисляем числитель дроби в (A)

$$\iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\alpha} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{a} \rho^3\, d\rho =$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{2}\cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha.$$

Отсюда

$$z_c = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha}{\frac{4}{3}\pi a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{16}a\cdot\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Окончательно

$$z_c = \frac{3}{4}a\cos^2\frac{\alpha}{2}\ см.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

▶ В обобщенных сферических координатах верны формулы (13.26), и поэтому искомый объем

$$v=\iiint\limits_{V'} abcr^2\sin\theta drd\varphi d\theta,$$

где V' — область, в которую отображается внутренность эллипсоида при переходе к обобщенным сферическим координатам. Уравнение поверхности, ограничивающей область V', в обобщенных сферических координатах получается путем подстановки в уравнение эллипсоида значений x, y, z из формул (13.28):

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\cos^2\theta=1,$$

т. е. $r=1$. Следовательно,

$$v=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^2dz=\frac{4}{3}\pi abc. \blacktriangleleft$$

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $2z=x^2+y^2$.

▶ Уравнение $2z=x^2+y^2$ определяет параболоид вращения, остальные поверхности — плоскости. Искомое тело изображено на рис. 13.40. Его объем v вычисляем в соответствии с формулами (13.21) и (13.23):

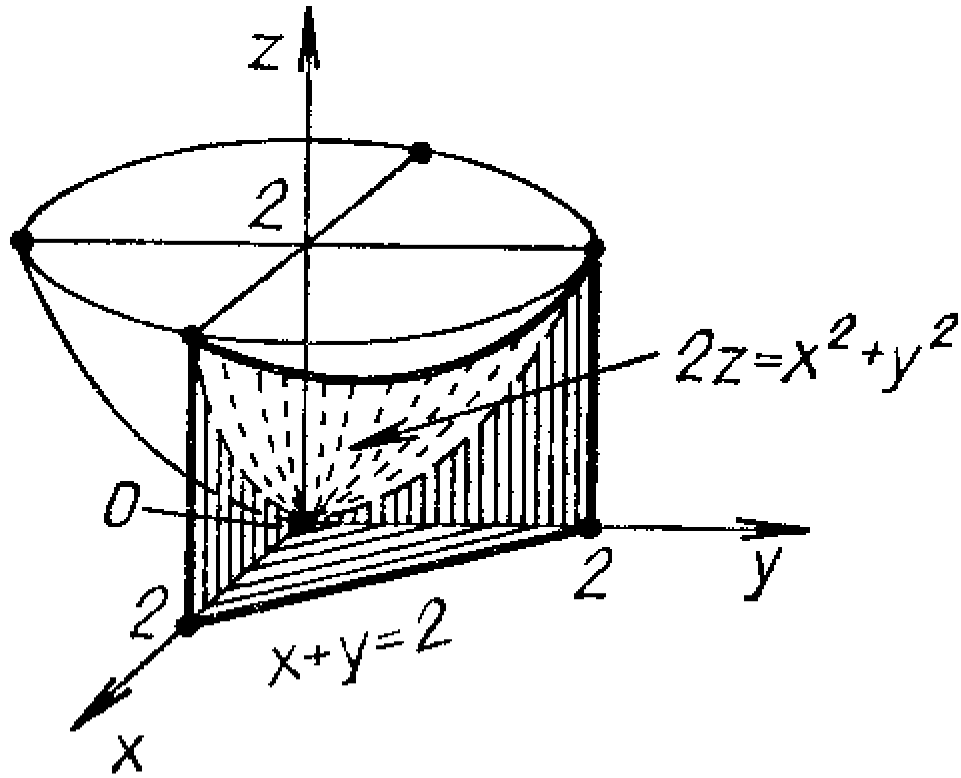
$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{(x^2+y^2)/2}dz=$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}z\Big|_0^{(x^2+y^2)/2}dy=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(x^2+y^2)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{2-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\Big(x^2(2-x)+$$

$$+\frac{1}{3}(2-x)^3\Big)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{1}{3}(2-x)^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{12}(2-x)^4\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}. \blacktriangleleft$$



Задача. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2-2z=0,\ x^2+y^2=2-z$ (Каплан ч3-4) (поставлена в билеты)

Задача. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4z,\ x^2+y^2+z^2=12$ (Каплан ч3-4) (поставлена в билеты)

Задача. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=3z,\ x^2+y^2+z^2=4$ (Каплан ч3-4) (поставлена в билеты)

◇ **113.** Найти координаты центра тяжести призматического тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $z=0$, $y=1$, $y=3$, $x+2z=3$.

△ Найдем объем рассматриваемого тела:

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{(3-x)/2} dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 \frac{3-x}{2}\,dy=$$

$$=\int\limits_0^3 (3-x)\,dx=\left[3x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}.$$

Тогда

$$\bar{x}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{(3-x)/2} dz=$$

$$=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_1^3 \frac{3-x}{2}\,dy=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x(3-x)\,dx=\frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=1;$$

$$\bar{y}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 y\,dy\int\limits_0^{(3-x)/2} dz=$$

$$=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 y(3-x)\,dy=\frac{4}{9}\int\limits_0^3 (3-x)\,dx=\frac{4}{9}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3=2;$$

$$\bar{z}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{(3-x)/2} z\,dz=$$

$$=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 \frac{(3-x)^2}{8}\,dx\int\limits_1^3 dy=\frac{1}{18}\left[\frac{-(3-x)^3}{3}\right]_0^3=\frac{1}{2}.$$

114. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

115. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$, цилиндрической поверхностью $x=(x^2+y^2)/2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=4$ (внутри цилиндра).

116. Найти массу куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$, если плотность в точке $(x;\ y;\ z)$ есть $\gamma(x,\ y,\ z)=x+y+z$.

117. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $x+y=1$, $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

118. Найти координаты центра тяжести, ограниченного поверхностями $z^2=xy$, $x=5$, $y=5$, $z=0$.

119. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного плоскостями $2x+3y-12=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ и цилиндрической поверхностью $z=y^2/2$.

120. Найти момент инерции куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ относительно его ребра.

1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $2-z=x^2+y^2$. (*Ответ:* $4\pi/3$.)

2. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если плотность тела $\delta(x,\ y,\ z)=1/(x+y+z+1)^4$. (*Ответ:* $1/48$.)

3. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x=y^2$ и плоскостями $x+z=1$, $z=0$. (*Ответ:* $8/15$.)

4. Вычислить объем тела, ограниченного сферами $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$ и конусом $z^2=x^2+y^2$ (тела, лежащего внутри конуса). $\left(\textit{Ответ: } \frac{28\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\right)$

5. Найти координаты центра масс части однородного шара радиусом R с центром в начале координат, расположенной выше плоскости Oxy. $\left(\textit{Ответ: } C\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}R\right).\right)$

6. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного плоскостями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. $\left(\textit{Ответ: } \left(\frac{1}{4}a,\ \frac{1}{4}a,\ \frac{1}{4}a\right).\right)$

7. Вычислить момент инерции относительно оси однородного круглого прямого конуса весом P, высотой H и радиусом основания R. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{10}\frac{P}{g}R^2.\right)$

2	**2**	**Криволинейные и поверхностные интегралы**	**12(6)**			
6		Криволинейный интеграл первого рода	2(1)			
		Криволинейный интеграл первого рода		№06(12)2(1)		

Семинар 6. Криволинейный интеграл первого рода

1741. Вычислить $\int\limits_l \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где l — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$.

Решение. Запишем уравнение прямой $l: y=2x$. Для данной линии $ds = \sqrt{1+2^2}\,dx=\sqrt{5}\,dx$. При движении от O к A x меняется от 0 до 1. По формуле (1) имеем

$$\int\limits_l \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}\,dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}}=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^1=\ln\left|1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right|-\ln\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|=\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

181. Вычислить $\int\limits_K (x-y)\,ds$, где K — отрезок прямой от $A(0; 0)$ до $B(4; 3)$.

△ Уравнение прямой AB имеет вид $y=(3/4)\,x$. Находим $y'=3/4$ и, следовательно,

$$\int\limits_K (x-y)\,ds=\int\limits_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx=\frac{5}{16}\int\limits_0^4 x\,dx=\frac{5}{32}x^2\Big|_0^4=\frac{5}{2}. \ ▲$$

185. Найти координаты центра тяжести дуги окружности $x^2+y^2=R^2$ $(0\leqslant x\leqslant R,\ 0\leqslant y\leqslant R)$.

△ Так как по условию задана четверть дуги окружности, то ее длина $s=\pi R/2$. В силу того, что биссектриса I координатного угла является осью симметрии, имеем $\bar{x}=\bar{y}$. Теперь находим

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\int\limits_K x\,ds=\frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R \frac{x}{y}R\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^R \frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R=\frac{2R}{\pi}.$$

Итак, $\bar{x}=\bar{y}=2R/\pi$. ▲

8.1. Вычислить криволинейные интегралы:

а) $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L — отрезок прямой от $A(1, 0)$ до $B(0, 1)$;

б) $\int\limits_L xy\,dl$, где L — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте; в) $\int\limits_L x^2 dl$, где L — верхняя половина окружности $x^2+y^2=a^2$; г) $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$; д) $\int\limits_L (x+y)dl$, где L — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, лежащая в первом октанте; е) $\int\limits_L (x+2y)dl$, где L: $x^2+y^2=4y$.

Решение. а) Данный интеграл является криволинейным интегралом первого рода. Найдем уравнение прямой. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-1}{0-1}$; $y=-x+1$.

Имеем: $y'=-1$, $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{2}dx$. Таким образом:

$$\int\limits_L (x+y)dl=\int\limits_0^1 (x-x+1)\sqrt{2}dx=\sqrt{2}x\Big|_0^1=\sqrt{2}.$$

б) Перейдем к параметрическому представлению эллипса:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad x'_t=-a\sin t,\quad y'_t=b\cos t,$$

$$dl=\sqrt{\dot{x}_t^2+\dot{y}_t^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Искомый интеграл примет вид

$$\int\limits_L xydl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\left(1-\sin^2 t\right)}\,d\sin t=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2}\,d\sin^2 t=$$

$$=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2\right)=$$

$$=\frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}\left(\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}\left(a^3-b^3\right)=\frac{ab}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

в) Перейдем к полярной системе координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Уравнение окружности будет

$$\rho=a,\ \text{а}\ \ dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi=\sqrt{a^2+0}d\varphi=a\,d\varphi.$$

Искомый интеграл примет вид

$$\int_L x^2 dl=\int_0^{\pi}\rho^2\cos^2\varphi a d\varphi=a^3\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{a^3}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{a^3\pi}{2}.$$

г) Поскольку имеет место пространственная кривая, то ее дифференциал находится по формуле

$$dl=\sqrt{\dot{x}_t^2+\dot{y}_t^2+\dot{z}_t^2}dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}dt.$$

Криволинейный интеграл равен

$$\int_L\frac{dl}{x^2+y^2+z^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}dt}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2}=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=$$

$$=\frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{d(bt)}{a^2+(bt)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}.$$

д) Переходим к сферическим координатам:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Поскольку $y = x$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и координаты примут вид:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta, \quad z = \rho\sin\theta.$$

Подставляя координаты в выражение окружности, находим, что $\rho = R$ — постоянная величина.

Принимая θ за параметр, дифференциал дуги примет вид

$$dl = \sqrt{\frac{1}{2}R^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta d\theta} = Rd\theta.$$

Таким образом, интеграл примет вид

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta\right)Rd\theta = \sqrt{2}R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta =$$

$$= \sqrt{2}R^2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}R^2.$$

е) Воспользуемся полярными координатами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Из уравнения окружности (рис. 16.47) имеем:

$$\rho^2 = 4\rho\sin\varphi, \quad \rho = 4\sin\varphi, \quad \rho' = 4\cos\varphi.$$

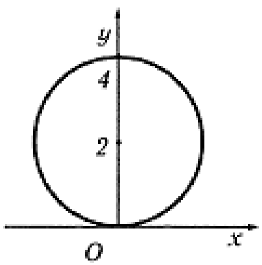


Рис. 16.47

Дифференциал дуги будет

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi = \sqrt{16\sin^2\varphi + 16\cos^2\varphi}\, d\varphi = 4d\varphi.$$

Отсюда интеграл

$$\int_L (x + 2y)dl = 4\int_0^{\pi}(\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi}4\sin\varphi\cos\varphi d\varphi + 8\int_0^{\pi}4\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= -16\frac{\cos^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} + 32\int_0^{\pi}\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= -8(1 - 1) + 16\pi = 16\pi.$$

3. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,dl$, L — *часть кривой* $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$ $(0\le t\le\pi)$ (*первый виток винтовой линии*).

4. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, L — *часть кривой* $x=t$, $y=t^2/2$, $z=t^3/3$ $(0\le t\le 1)$.

5. $\int\limits_L \sqrt{y}\,dl$, L — *часть параболы* $y=x^2$ *от точки* $A(0,0)$ *до точки* $B(2,4)$.

6. $\int\limits_L x\,dl$, L — *отрезок прямой от точки* $A(1,0)$ *до точки* $B(0,2)$.

7. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, L — *граница треугольника с вершинами* $(0,0)$, $(1,0)$ *и* $(0,1)$.

8. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L — *окружность* $x^2+y^2=2x$.

9. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L — *кардиоида* $\varrho=1-\cos\varphi$.

10. $\int\limits_L |y|\,dl$, L — *лемниската Бернулли* $\varrho=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Ответы. 1. $\dfrac{64}{3}$. 2. $\dfrac{(2+\pi^2)^{3/2}-2\sqrt{2}}{3}$. 3. $\dfrac{2\pi\sqrt{5}(3+16\pi^2)}{3}$. 4. $\dfrac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$. 5. $\dfrac{1}{12}(17^{3/2}-1)$. 6. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 7. $1+\sqrt{2}$. 8. 8. 9. $\dfrac{32}{3}$. 10. $2(2-\sqrt{2})$.

Условия задач. *Вычислить криволинейные интегралы.*

1. $\int\limits_L y^2\,dl$, $\quad L$ — *часть кривой* $\quad x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ $\;$ (*арка циклоиды*).

2. $\int\limits_L z\,dl$, $\quad L$ — *часть кривой* $\quad x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t$ $(0 \le t \le \pi)$ (*первый виток конической винтовой линии*).

1. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, если L — отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$. (*Ответ*: $\sqrt{5}\ln 2$.)

2. Вычислить $\oint xy\,dl$, если L — контур прямоугольника с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$. (*Ответ*: 24.)

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, если L — первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$. (*Ответ*: $4\pi a\sqrt{a}$.)

4. Вычислить $\int\limits_L xyz\,dl$, если L — отрезок прямой между точками $A(1, 0, 1)$ и $B(2, 2, 3)$. (*Ответ*: 12.)

7		Криволинейный интеграл второго рода	2(1)			
		Криволинейный интеграл второго рода		№07(14)2(1)		

Семинар 7. Криволинейный интеграл второго рода

8.6. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{+L} ydx-xdy$, где L эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Воспользуемся параметрическим уравнением эллипса: $x=a\cos t;\ y=b\sin t$. Найдем дифференциалы $dx=-a\sin tdt;\ dy=b\cos tdt$ и перейдем к переменной интегрирования t

$$I=\int\limits_{+L}-b\sin t\,a\sin t-a\cos t\,b\cos tdt=-ab\int\limits_{+L}dt.$$

Поскольку интегрирование по эллипсу совпадает с положительным направлением обхода, то переменная интегрирования изменяется от 0 до 2π, т. е.

$$I=-ab\int\limits_0^{2\pi}dt=-2\pi ab.$$

8.7. Найти $I=\int\limits_L yzdx+zxdy+xydz$, где L — дуга первого витка винтовой линии $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt.$

Решение. Находим дифференциалы

$$dx=-a\sin tdt,\quad dy=a\cos tdt,\quad dz=bdt$$

и переходим к интегрированию по t, тогда

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left(-a\sin t\cdot b\,t\,a\sin t+bt\cdot a\cos t\,a\cos t+a\cos t\,a\sin t\,b\right)dt=$$

$$=a^2b\int\limits_0^{2\pi}\left(t\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt=$$

$$=a^2b\left(t\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2tdt-\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi}\right)=0.$$

Пример 3. Вычислить работу A силы $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ вдоль отрезка прямой BC, если $B(1,\ 1,\ 1)$ и $C(2,\ 3,\ 4)$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой BC: $x=1+t$, $y=1+2t$, $z=1+3t$, где $0\leqslant t\leqslant 1$. Тогда работа A силы $\mathbf{F}$ на пути BC вычисляется по формуле

$$A=\int\limits_{L_{BC}} yzdx+xzdy+xydz=$$

$$=\int\limits_0^1(1+2t)(1+3t)\,dt+(1+t)(1+3t)\,2dt+(1+t)(1+2t)\,3dt=$$

$$=\int\limits_0^1(18t^2+22t+6)\,dt=23.$$ ◀

182. Вычислить $\int\limits_K x^2y\,dy - y^2x\,dx$, если $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

$\triangle$ Найдем $dx = -\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\,dt$, $dy = \dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\,dt$. Тогда

$$\int\limits_K x^2y\,dy - y^2x\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos t\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} + \sin t\cdot\sqrt{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt = \frac{\pi}{4}. \ \blacktriangle$$

183. Найти массу M дуги кривой $x=t$, $y=t^2/2$, $z=t^3/3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, линейная плотность которой меняется по закону $\gamma = \sqrt{2y}$.

$\triangle$
$$M = \int\limits_K \sqrt{2y}\,ds = \int\limits_0^1 \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}t^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right). \ \blacktriangle$$

184. Найти координаты центра тяжести дуги циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

$\triangle$ Координаты центра тяжести однородной дуги кривой K вычисляются по формулам $\bar{x} = \dfrac{1}{s}\int\limits_K x\,ds$, $\bar{y} = \dfrac{1}{s}\int\limits_K y\,ds$, где s — длина дуги. Имеем

$$s = \int\limits_0^\pi \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \int\limits_0^\pi \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt = 2\int\limits_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 4.$$

Тогда

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\int\limits_K x\,ds = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi (t-\sin t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\left(t\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\int\limits_K y\,ds = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi (1-\cos t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\left(\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\cos t\right)dt = \frac{1}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}. \ \blacktriangle$$

Применение криволинейного интеграла второго рода

Пример 1. Вычислить массу m дуги кривой L, заданной уравнениями $x = t^2/2$, $y = t$, $z = t^3/3$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, если плотность в каждой ее точке $\delta = 1 + 4x^2 + y^2$.

▶ Согласно формуле (14.6), искомая масса m выражается интегралом

$$m = \int_L \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\, dl = \int_0^2 \sqrt{1 + t^4 + t^2}\sqrt{t^2 + 1 + t^4}\, dt =$$

$$= \int_0^2 (1 + t^2 + t^4)\, dt = 116/15. \blacktriangleleft$$

Это криволинейный интеграл 1-го рода

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первом квадранте, и моменты инерции I_0, I_x, I_y.

▶ Так как прямая $y = x$ является осью симметрии дуги окружности, то $x_C = y_C$. Для нахождения x_C используем первую из формул (14.7):

$$x_C = \int_L x\delta dl \Big/ \int_L \delta dl = \int_L x dl \Big/ \int_L dl,$$

поскольку $\delta = \text{const}$. Интеграл

$$\int_L dl = \frac{1}{2}\pi R$$

определяет длину четверти рассматриваемой окружности. Вычислим $\int_L x dl$, где $x = R\cos t$; $y = R\sin t$; $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$;

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = R dt.$$

Следовательно,

$$\int_L x dl = \int_0^{\pi/2} R\cos t R dt = R^2 \sin t \Big|_0^{\pi/2} = R^2.$$

Окончательно имеем:

$$x_C = y_C = \frac{R^2}{\pi R/2} = \frac{2R}{\pi}.$$

При вычислении I_O, I_x, I_y воспользуемся формулами (14.8) и (14.3) для случая плоской дуги ($z \equiv 0$) и учтем, что $I_x = I_y$:

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\,\delta dl = \delta \int_0^{\pi/2} R^2 R dt = R^3\delta\pi/2,$$

$$I_x = \int_L y^2 \delta dl = \delta \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t R dt = \frac{R^3\delta}{2}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2t)\, dt = \pi R^3 \delta/4. \blacktriangleleft$$

1. $\int\limits_L (y^2 - z^2)\, dx + 2yz\, dy - x^2\, dz$, L — *часть кривой* $x = t, y = t^2$, $z = t^3$ *от точки* $M(0,0,0)$ *до точки* $N(1,1,1)$.

2. $\int\limits_L (2 - y)\, dx + x\, dy$, L — *арка циклоиды* $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

3. $\int\limits_L y\, dx + z\, dy + x\, dz$, L — *первый виток винтовой линии* $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$.

4. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$, L — *окружность* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

5. $\int\limits_L \dfrac{(x + y)\, dx - (x - y)\, dy}{x^2 + y^2}$, L — *окружность* $x^2 + y^2 = 1$.

6. $\int\limits_L (4x + y)\, dx + (x + 4y)\, dy$, L — *часть параболы* $y = x^4$ *от точки* $M(1,1)$ *до точки* $N(-1,1)$.

7. $\int\limits_L 2xy\, dx + x^2\, dy$, L — *отрезок прямой от точки* $M(0,0)$ *до точки* $N(1,1)$.

8. $\int\limits_L y\, dx + x\, dy + (x + y + z)\, dz$, L — *отрезок прямой от точки* $M(2,3,4)$ *до точки* $N(3,4,5)$.

9. $\int\limits_L z\, dx + x\, dy + y\, dz$, L — *линия пересечения цилиндра* $x^2 + y^2 = 4$ *и плоскости* $z = 0$.

10. $\int\limits_L ydx - xdy + zdz$, L — *линия пересечения сферы* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *и конуса* $x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \ge 0)$.

Ответы. 1. 1/35. 2. -2π. 3. $-\pi$. 4. 0. 5. -2π. 6. -2. 7. 1. 8. 33/2. 9. 4π. 10. -4π.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$. $\left(\textit{Ответ: } 40\frac{19}{30}.\right)$

7. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x + y - 1)\,dz$, где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющей точки $A(1, 1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$. (*Ответ:* 13.)

8. Вычислить $\int\limits_{L} yzdx + zxdy + xydz$, где L — дуга винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at/(2\pi)$ от точки пересечения линии с плоскостью $z = 0$ до точки ее пересечения с плоскостью $z = a$. (*Ответ:* 0.)

9. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y - x)\,dy$, если линия L_{AB}, соединяющая точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$, задана уравнением: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y^2 = x$; г) $y = x^3$. (*Ответ:* а) 1/3; б) 1/12; в) 17/30; г) $-1/20$.)

10. Найти координаты центра масс первой полуарки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; \pi]$. (*Ответ:* $4a/3$, $4a/3$.)

186. $\int\limits_{AB} (x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$, если путь от $A(1;\ 1)$ до $B(3;\ 4)$ — отрезок прямой.

187. $\int\limits_{K} (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$, если K — ломаная OAB, где $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(4;\ 2)$.

188. $\int\limits_{AB} \frac{y\,ds}{\sqrt{x}}$, если AB — дуга полукубической параболы $y^2=(4/9)\,x^3$ от $A(3;\ 2\sqrt{3})$ до $B(8;\ 32\sqrt{2}/3)$.

189. $\int\limits_{K} y\,dx-(y+x^2)\,dy$, если K — дуга параболы $y=2x-x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки.

190. $\int\limits_{K} y\,dx+2x\,dy$, если K — пробегаемый против хода часовой стрелки контур ромба, стороны которого лежат на прямых $x/3+y/2=\pm 1$, $x/3-y/2=\pm 1$.

191. $\int\limits_{K} 2x\,dy-3y\,dx$, если K — контур треугольника с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 1)$, $C(2;\ 5)$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

192. $\int\limits_{K} \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$, если K — I четверть окружности $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

193. $\int\limits_{K} x^2y\,dx+x^3\,dy$, если K — контур, ограниченный параболами $y^2=x$, $x^2=y$ и пробегаемый против хода часовой стрелки.

194. Найти массу дуги окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$, если линейная плотность ее в точке $(x;\ y)$ равна y.

195. Найти координаты центра тяжести однородной дуги кривой $y=\operatorname{ch} x$ $(0\leqslant x\leqslant \ln 2)$.

2387. Даны точки $A(2;\,2)$ и $B(2;\,0)$. Вычислить $\int\limits_{(C)}(x+y)\,dx$:

1) по прямой OA; 2) по дуге $\breve{OA}$ параболы $y=\dfrac{x^2}{2}$; 3) по ломаной OBA.

2388. Даны точки $A(4;\,2)$ и $B(2;\,0)$. Вычислить

$$\int\limits_{(C)}(x+y)\,dx-x\,dy:$$

1) по прямой $\breve{OA}$; 2) по ломаной OBA.

2389. Решить задачу 2388 для интеграла

$$\int\limits_{(C)}y\,dx+x\,dy.$$

Почему здесь величина интеграла не зависит от пути интегрирования?

2390. Даны точки $A(a;\,0;\,0)$, $B(a;\,a;\,0)$ и $C(a;\,a;\,a)$. Вычислить интеграл

$$\int y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

по прямой OC и по ломаной $OABC$.

2391. Поле образовано силой $\mathbf{F}\{P;\,Q\}$, где $P = x - y$, $Q = x$. Построить силу $\mathbf{F}$ в каждой вершине квадрата со сторонами $x = \pm a$ и $y = \pm a$ и вычислить работу при перемещении единицы массы по контуру квадрата.

2392. Поле образовано силой $\mathbf{F}\{P;\,Q\}$, где $P = x + y$, $Q = 2x$. Построить силу $\mathbf{F}$ в начале каждой четверти окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ и вычислить работу при перемещении единицы массы по окружности.

Решить эту же задачу при условии $P = x + y$, $Q = x$. Почему здесь работа равна 0?

2393. Поле образовано силой $\mathbf{F}\{y;\,a\}$. Определить работу при перемещении массы m по контуру, образованному полуосями координат и первой четвертью эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

2394. Поле образовано силой $\mathbf{F}\{x;\,y;\,z\}$. Вычислить работу при перемещении единицы массы по ломаной $OABCO$, соединяющей точки $O(0;\,0;\,0)$, $A(0;\,a;\,0)$, $B(a;\,a;\,0)$, $C(a;\,a;\,a)$.

2395. Написать и проверить формулу Грина для

$$\oint\limits_{(C)} (x + y)\,dx - 2x\,dy$$

по контуру треугольника со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

2396. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{\breve{AB}} 2xy\,dx + x^2\,dy$; 2) $\displaystyle\int\limits_{\breve{AB}} \cos 2y\,dx - 2x\sin 2y\,dy$;

3) $\displaystyle\int\limits_{\breve{AB}} \operatorname{tg} y\,dx + x\sec^2 y\,dy$

по любой линии от точки $A(1;\,\pi/6)$ до $B(2;\,\pi/4)$.

2397. Применив формулу Грина, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{(C)} y^2\,dx + (x + y)^2\,dy$$

по контуру $\triangle ABC$ с вершинами $A(a;\,0)$, $B(a;\,a)$ и $C(0;\,a)$.

2398. Определить криволинейным интегралом площадь эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

2399. Определить криволинейным интегралом площадь петли кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ (см. рис. 48 на с. 304).

Указание. Перейти к параметрическим уравнениям, положив $y = xt$.

2400. Определить криволинейным интегралом площадь петли декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (см. указание к задаче 2399 и рис. 79 на с. 334).

2401. С какой силой притягивает масса M, равномерно распределенная по верхней полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, массу m, сосредоточенную в начале координат?

Указание. Пусть μ — линейная плотность, ds — элемент длины полуокружности, θ — угол радиус-вектора с осью Ox, а X и Y — проекции силы притяжения. Тогда

$$X = \int\limits_{(C)} \frac{km\mu\cos\theta\, ds}{r^2}, \quad Y = \int\limits_{(C)} \frac{km\mu\sin\theta\, ds}{r^2},$$

где k — гравитационная постоянная.

2402. Даны точки $A(-a;\ a)$ и $B(a;\ a)$. С какой силой масса M, равномерно распределенная по отрезку AB, притягивает массу m, сосредоточенную в точке $(0;\ 0)$.

2403. Даны точки $A(a;\ 0)$, $B(0;\ a)$ и $C(-a;\ 0)$. С какой силой масса M, равномерно распределенная по ломаной ABC, притягивает массу m, сосредоточенную в начале координат.

2404. Даны точки $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 5)$ и $C(0;\ 5)$. Вычислить

$$\int\limits_{(C)} (x+y)\,dx - 2y\,dy:$$

1) по прямой AB; 2) по дуге AB параболы $y = x^2 + 1$; 3) по ломаной ACB.

2405. Даны точки $A(-a;\ 0)$ и $B(0;\ a)$. Вычислить работу силы $\mathbf{F}\{P;\ Q\}$, где $P = y$ и $Q = y - x$, при перемещении единицы массы: 1) по прямой AB; 2) по ломаной AOB; 3) по дуге AB параболы $y = a - \dfrac{x^2}{a}$.

2406. Показать, что

$$\oint\limits_{(C)} y\,dx + (x+y)\,dy$$

по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить, вычислив интеграл по контуру фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$.

2407. Написать и проверить формулу Грина для интеграла

$$\oint\limits_{(C)} \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x},$$

взятого по контуру $\triangle ABC$ с вершинами $A(1;\,1)$, $B(2;\,1)$ и $C(2;\,2)$.

2408. С помощью криволинейного интеграла определить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

2409. С помощью криволинейного интеграла определить площадь, ограниченную кривой $y^2 + x^4 - x^2 = 0$. (Перейти к параметрическим уравнениям, положив $y = xt$.)

8		Применение криволинейных интегралов	2(1)			
		Применение криволинейных интегралов		№08(16)2(1)		

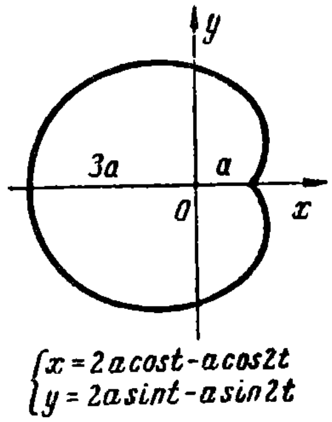
Семинар 8. Применение криволинейных интегралов

Применение формулы Грина

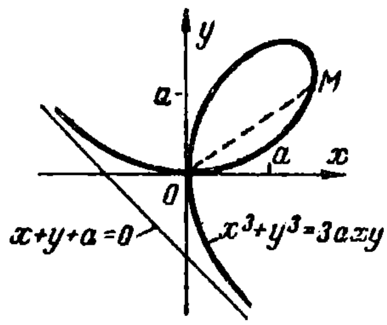
885. Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой:

1) эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

2) петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.



Черт. 187



Черт. 188

Решение. 1) Применяем формулу (2). Исходя из данных параметрических уравнений эллипса, преобразуем криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной t и вычисляем его:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{+C} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\,d(b\sin t) - b\sin t\,d(a\cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

220. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ (имеется в виду площадь, примыкающая к началу координат; рис. 23).

$\triangle$ Решая совместно уравнения кривых, найдем $A\,(1/2;\ 1/4)$, $B\,(1/4;\ 1/2)$. Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{OA} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{AB} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{BO} x\,dy-y\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1/2} x^2\,dx-\frac{1}{8}\int\limits_{1/2}^{1/4}\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\limits_{1/4}^{0}\sqrt{x}\,dx=\frac{1+3\ln 2}{24}\approx 0{,}13 \text{ (кв. ед.)}. \ \blacktriangle$$

221. Вычислить площадь, ограниченную астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, предварительно построив кривую.

$\triangle$ Для вычисления площади воспользуемся формулой $S=\frac{1}{2}\oint\limits_{C} x\,dy-y\,dx$, где $dy=3a\sin^2 t\cos t\,dt$, $dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(3a^2\cos^4 t\sin^2 t+3a^2\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{16}a^2\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{8}. \ \blacktriangle$$

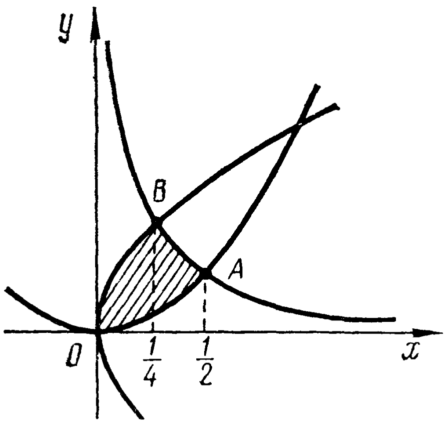


Рис. 23

222. Вычислить площадь, ограниченную параболами $y^2=x$, $x^2=y$.

223. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

224. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами A (6; 1), B (4; 5), C (1; 6), D (—1; 1).

225. Вычислить площадь фигуры, ограниченной контуром $OABCO$, если A (1; 3), B (0; 4), C (—1; 2), O (0; 0), OA, BC, CO — отрезки прямых, а AB — дуга параболы $y=4-x^2$.

226. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой $x=2r\cos t-r\cos 2t$, $y=2r\sin t-r\sin 2t$.

886. Найти массу дуги AB кривой $y=\ln x$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки; $x_A=1$, $x_B=3$.

Решение. Применяем формулу (3). Исходя из данного уравнения кривой, преобразуем криволинейный интеграл формулы (3) в обыкновенный с переменной x:

$$y'=\frac{1}{x}, \quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx, \quad \delta=kx^2;$$

$$m=\int\limits_{AB}\delta\,dl=k\int\limits_1^3 x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx=\frac{k}{2}\int\limits_1^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+1)=$$

$$=\frac{k}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3=\frac{k}{3}\left(10\sqrt{10}-2\sqrt{2}\right)\approx 9{,}6\ k.$$

887. Найти координаты центра тяжести дуги AB винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна аппликате этой точки; $t_A=0$, $t_B=\pi$.

Решение. Применяем формулы (4). Вычислим криволинейные интегралы, содержащиеся в этих формулах, преобразуя их в обыкновенные интегралы с переменной t:

$$\dot{x}=-a\sin t,\ \dot{y}=a\cos t,\ \dot{z}=b;\ dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\,dt;$$

$$I_1=\int\limits_{AB}x\delta\,dl=\int\limits_0^\pi a\cos t\cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$
$$=akb\sqrt{a^2+b^2}\,(t\sin t+\cos t)\Big|_0^\pi=-2abk\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_2=\int\limits_{AB}\delta\,dl=\int\limits_0^\pi kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=kb\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi=$$
$$=\frac{bk\pi^2}{2}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_3=\int\limits_{AB}y\delta\,dl=\int\limits_0^\pi a\sin t\cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$
$$=abk\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin t-t\cos t)\Big|_0^\pi=abk\pi\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_4=\int\limits_{AB}z\delta\,dl=\int\limits_0^\pi btkbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\frac{kb^2\pi^3}{3}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Следовательно, $x_C=\frac{I_1}{I_2}=-\frac{4a}{\pi^2}$; $y_C=\frac{I_3}{I_2}=\frac{2a}{\pi}$; $z_C=\frac{I_4}{I_2}=\frac{2}{3}b\pi$.

4297. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_K (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy,$$

где K — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC с вершинами A (1, 1), B (3, 2), C (2, 5).

Проверить найденный результат, вычисляя интеграл непосредственно.

Применяя формулу Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

4298. $\oint\limits_C xy^2dy - x^2y\,dx$, где C — окружность

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

4299. $\oint\limits_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, где C — эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4300. $\oint\limits_C e^x\,[(1-\cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy]$, где C — пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

4301. $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$.

4302. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$$

и

$$I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy,$$

где AmB — прямая, соединяющая точки A (1, 1) и B (2, 6), и AnB — парабола с вертикальной осью, проходящая через те же точки A и B и начало координат?

5. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + 1)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ вдоль дуги параболы $y = x^3$, заключенной между точками $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$.
(*Ответ*: 196/105.)

6. Применив формулу Грина, вычислить

$$\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

где L — контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(3, 0)$, $B(3, 3)$ и $C(0, 3)$. (*Ответ*: 18.)

7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(4x^3y^3 - y^2)\,dx + (3x^4y^2 - 2xy)\,dy = 0$. (*Ответ*: $x^4y^3 - xy^2 = C$.)

Самостоятельная работа

1. 1. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. (*Ответ*: 1/3.)

2. Найти функцию $u(x, y)$, если

$$du(x, y) = (2xy + x^3 - 5)\,dx + (x^2 - y^3 + 5)\,dy.$$

2. 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и дугой эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, расположенной в первом квадранте. (*Ответ*: $\pi ab/4$.)

2. Найти функцию $u(x, y)$, если

$$du(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy.$$

3. 1. Вычислить работу силы $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, совершаемую на пути, соединяющем точки $A(0, 0)$ и $B(2, 1)$. (*Ответ*: 4.)

2. Найти функцию $u(x, y)$, если

$$du = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \left(\frac{e^y}{1 + x^2} + 1\right)dy.$$

§ 13. Физические приложения криволинейных интегралов

4326. С какой силой притягивает масса M, равномерно распределенная по верхней полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$, материальную точку массы m, занимающую положение $(0, 0)$?

4327. Вычислить *логарифмический интеграл простого слоя*

$$u(x, y) = \oint_C \varkappa \ln \frac{1}{r} \, ds,$$

где $\varkappa = \text{const}$ — плотность, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ и контур C есть окружность $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы простого слоя

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} \, d\psi \quad \text{и} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} \, d\psi,$$

где r — расстояние между точкой (ρ, φ) и переменной точкой $(1, \psi)$ и m — натуральное число.

4329. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(r, n)}{r} \, ds,$$

где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ — длина вектора $\boldsymbol{r}$, соединяющего точку A (x, y) с переменной точкой M (ξ, η) простого замкнутого гладкого контура C, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — угол между вектором $\boldsymbol{r}$ и внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к кривой C в точке ее M.

4330. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы двойного слоя

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r} \, d\psi,$$

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r} \, d\psi,$$

где r — расстояние между точкой A (ρ, φ) и переменной точкой M $(1, \psi)$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — угол между направлением $AM = \boldsymbol{r}$ и радиусом $OM = \boldsymbol{n}$, проведенным из точки O $(0, 0)$, и m — натуральное число.

4332. Доказать, что

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\iint_S u\,\Delta u\,dx\,dy+\oint_C u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S.

4333. Доказать, что функция, гармоническая внутри конечной области S и на ее границе C, однозначно определяется своими значениями на контуре C (см. задачу 4332).

4334. Доказать *вторую формулу Грина* на плоскости

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S и $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к C.

4336. Доказать *теорему о среднем* для гармонической функции $u(M) = u(x, y)$:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_C u(\xi, \eta)\, ds,$$

где C — окружность радиуса R с центром в точке M.

4337. Доказать, что функция $u(x, y)$, гармоническая в ограниченной и замкнутой области и не являющаяся постоянной в этой области, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке этой области (*принцип максимума*).

4338. Доказать *формулу Римана*

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy,$$

где

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c — постоянные), P и Q — некоторые определенные функции и контур C ограничивает конечную область S.

185. Найти координаты центра тяжести дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$ $(0 \leqslant x \leqslant R,\ 0 \leqslant y \leqslant R)$.

△ Так как по условию задана четверть дуги окружности, то ее длина $s = \pi R/2$. В силу того, что биссектриса I координатного угла является осью симметрии, имеем $\bar{x} = \bar{y}$. Теперь находим

$$\bar{x} = \frac{1}{s}\int\limits_K x\,ds = \frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R x\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R \frac{x}{y} R\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^R \frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{R^2-x^2}\,\Big|_0^R = \frac{2R}{\pi}.$$

Итак, $\bar{x} = \bar{y} = 2R/\pi$. ▲

1. Ориентированная *площадь* S области, ограниченной плоской замкнутой кривой L:

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{(L)} x\,dy - y\,dx.$$

При этом S получается положительной или отрицательной в зависимости от того, где находится область G при обходе по границе L – слева или справа.

Пример. Площадь области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; параметрическое задание эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Тогда

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} ab\,(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = ab\pi.$$

1. Вычислить массу дуги кривой $y = \ln x$ плотностью $\delta = x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями x: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{8}$. (*Ответ:* 19/3.)

2. Вычислить площадь поверхности, которую вырезает из круглого цилиндра радиусом R такой же цилиндр, если оси этих цилиндров пересекаются под прямым углом. (*Ответ:* $8R^2$.)

3. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной:

а) линией $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (*астроида*);

б) первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

(*Ответ:* а) $3\pi a^2/8$; б) $3\pi a^2$.)

4. Найти функции $u(x, y)$ по их полным дифференциалам:

а) $du = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy)$;

б) $du = (2x\cos y - y^2 \sin x)dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)dy$;

в) $du = (3y - x)dx + (y - 3x)dy/(x + y)^3$.

182. Вычислить $\int\limits_K x^2y\,dy - y^2x\,dx$, если $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

△ Найдем $dx = -\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\,dt$, $dy = \dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\,dt$. Тогда

$$\int\limits_K x^2y\,dy - y^2x\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos t\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} + \sin t\cdot\sqrt{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt = \frac{\pi}{4}. \ ▲$$

183. Найти массу M дуги кривой $x=t$, $y=t^2/2$, $z=t^3/3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, линейная плотность которой меняется по закону $\gamma=\sqrt{2y}$.

△
$$M = \int\limits_K \sqrt{2y}\,ds = \int\limits_0^1 \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}t^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1} + \frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right). \ ▲$$

184. Найти координаты центра тяжести дуги циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

△ Координаты центра тяжести однородной дуги кривой K вычисляются по формулам $\bar{x} = \dfrac{1}{s}\int\limits_K x\,ds$, $\bar{y} = \dfrac{1}{s}\int\limits_K y\,ds$, где s — длина дуги. Имеем

$$s = \int\limits_0^\pi \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \int\limits_0^\pi \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt = 2\int\limits_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 4.$$

Тогда

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\int\limits_K x\,ds = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi (t-\sin t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \left(t\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\int\limits_K y\,ds = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi (1-\cos t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\cos t\right)dt = \frac{1}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}. \ ▲$$

Пример 3. Вычислить работу A силы $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ вдоль отрезка прямой BC, если $B(1,\ 1,\ 1)$ и $C(2,\ 3,\ 4)$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой BC: $x=1+t$, $y=1+2t$, $z=1+3t$, где $0\leqslant t\leqslant 1$. Тогда работа A силы $\mathbf{F}$ на пути BC вычисляется по формуле

$$A=\int\limits_{L_{BC}} yzdx+xzdy+xydz=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(1+2t)(1+3t)\,dt+(1+t)(1+3t)\,2dt+(1+t)(1+2t)\,3dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(18t^2+22t+6)\,dt=23.$$ ◀

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{y}{3}\,dx-3x\,dy+x\,dz$$

по части кривой L, заданной параметрически

$$\begin{cases} x=2\cos t, & \\ y=2\sin t, & 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}, \\ z=1-2\cos t-2\sin t. & \end{cases}$$

Решение.

1. Вычисляем: $x'(t)=-2\sin t$, $y'(t)=2\cos t$ и $z'(t)=2\sin t-2\cos t$

2. Вычисляем криволинейный интеграл по формуле (1):

$$\int\limits_L \frac{y}{3}\,dx-3x\,dy+x\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{2}{3}\sin t(-2\sin t)-6\cos t(2\cos t)+2\cos t(2\sin t-2\cos t)\right]dt=$$

$$=2-\frac{13}{3}\pi.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_L y/3\,dx-3x\,dy+x\,dz=2-\frac{13}{3}\pi.$

2. Вычисляем криволинейный интеграл по формуле (1):

$$\int\limits_L (x-y)\,dx + dy + z\,dz = \int\limits_0^{\pi} [(2\cos t - 2\sin t)(-2\sin t) + 2\cos t]\,dt = 2\pi.$$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_L (x-y)\,dx + dy + z\,dz = 2\pi.$

Условия задач. *Вычислить криволинейные интегралы.*

1. $\displaystyle\int\limits_L (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$, L — *часть кривой* $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ *от точки* $M(0,0,0)$ *до точки* $N(1,1,1)$.

2. $\displaystyle\int\limits_L (2-y)\,dx + x\,dy$, L — *арка циклоиды* $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

3. $\displaystyle\int\limits_L y\,dx + z\,dy + x\,dz$, L — *первый виток винтовой линии* $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

4. $\displaystyle\int\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy$, L — *окружность* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

5. $\displaystyle\int\limits_L \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, L — *окружность* $x^2 + y^2 = 1$.

6. $\int\limits_L (4x+y)\,dx+(x+4y)\,dy$, L — *часть параболы* $y = x^4$ *от точки* $M(1,1)$ *до точки* $N(-1,1)$.

7. $\int\limits_L 2xy\,dx+x^2\,dy$, L — *отрезок прямой от точки* $M(0,0)$ *до точки* $N(1,1)$.

8. $\int\limits_L y\,dx+x\,dy+(x+y+z)\,dz$, L — *отрезок прямой от точки* $M(2,3,4)$ *до точки* $N(3,4,5)$.

9. $\int\limits_L z\,dx+x\,dy+y\,dz$, L — *линия пересечения цилиндра* $x^2+y^2=4$ *и плоскости* $z=0$.

10. $\int\limits_L ydx-xdy+zdz$, L — *линия пересечения сферы* $x^2+y^2+z^2=4$ *и конуса* $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$.

Ответы. 1. $1/35$. 2. -2π. 3. $-\pi$. 4. 0. 5. -2π. 6. -2. 7. 1. 8. $33/2$. 9. 4π. 10. -4π.

9		Свойства поверхностей. Поверхностный интеграл первого рода	2(1)			
		Свойства поверхностей. Поверхностный интеграл первого рода		№09(18)2(1)		

Семинар 9. Свойства поверхностей. Поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S F(x,\ y,\ z)\,dS=\iint\limits_D F[x,\ y,\ f(x,\ y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

227. Вычислить $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где S — часть конической поверхности $z^2=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

△ Имеем

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=$$
$$=\sqrt{2}\cdot dx\,dy.$$

Тогда искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл:

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Областью интегрирования D является круг $x^2+y^2\leqslant 1$; поэтому

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\int\limits_0^1 \rho^3 d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.\ ▲$$

228. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$ по верхней стороне верхней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

△ Проекцией сферы на плоскость xOy является круг D, ограниченный окружностью $x^2+y^2=R^2$. Уравнение верхней полусферы имеет вид $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; следовательно, $I=\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,xy$. Переходя к полярным координатам, получим

$$I=\iint\limits_D \rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho\,d\theta=4\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\int\limits_0^R \rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=$$
$$=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta\int\limits_0^R (R^2-t^2)^2t^2\,dt=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

При вычислении $\int\limits_0^R \rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$ была сделана подстановка $\sqrt{R^2-\rho^2}=t$, откуда $R^2-\rho^2=t^2$, $\rho\,d\rho=-t\,dt$, $\rho^4=(R^2-t^2)^2$. ▲

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где S — часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=2$.

▶ Из уравнения данной поверхности находим, что для рассматриваемой ее части $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и проекцией ее на плоскость Oxy является круг $x^2+y^2\leqslant 4$. Так как

$$F'_x = x/\sqrt{x^2+y^2},\quad F'_y = y/\sqrt{x^2+y^2},$$

то из формулы (15.12) получим

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{array}\right| = \sqrt{2}\iint\limits_D \rho^2 d\rho d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi. \blacktriangleleft$$

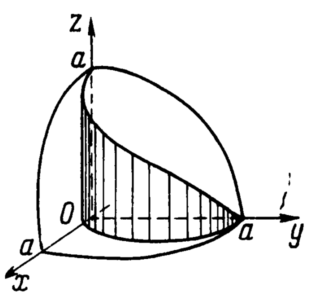


Рис. 3.39

П р и м е р ы. 1) Найти площадь поверхности части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, высекаемой цилиндром $x^2 + y^2 = ay$ (см. рис. 3.39).

Параметрическое представление сферической поверхности:

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \; y = a \sin \theta \sin \varphi, \; z = a \cos \theta;$$

таким образом, $u = \theta$, $v = \varphi$; находим $E = a^2$, $F = 0$, $G = a^2 \sin^2 \theta$; следовательно, $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin \theta$.

Уравнение границы области интегрирования получается подстановкой параметрического представления в уравнение окружности: $\sin \theta = \sin \varphi$. Отсюда получим, что четверть искомой поверхности, лежащая в первом октанте, характеризуется следующими значениями параметров: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $\theta \leqslant \varphi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Следовательно,

$$\Delta S = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\varphi} a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 4a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi) \, d\varphi = 4a^2 (\pi/2 - 1).$$

2) Кусок поверхности $z = xy$, лежащий над кругом $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, имеет площадь

$$\Delta S = \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant R^2} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Преобразуя этот интеграл при помощи полярных координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим

$$\Delta S = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \sqrt{1 + \rho^2} \, d\rho \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} ((1 + R^2)^{3/2} - 1).$$

Примеры. 1) Пусть поверхность S является сферой радиуса r с параметрическим представлением $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; тогда Γ есть прямоугольник $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS =$$

$$= \iint\limits_{(\Gamma)} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= r^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

2) Пусть S – цилиндрическая поверхность $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$; ее параметрическое представление: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = z$; тогда $\sqrt{EG - F^2} = a$, Γ является прямоугольником $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(\Gamma)} f(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ z)\, a\, d\varphi\, dz =$$

$$= a\int\limits_0^{h}\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ z)\, d\varphi\, dz.$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

4343. $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где S — поверхность

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geqslant 0.$$

4344. $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где S — граница тела

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1.$$

4345. $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, где S — граница тетраэдра

$$x+y+z\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0.$$

4346. $\iint\limits_S |xyz|\,dS$, где S — часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$.

4347. $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида и h — расстояние центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу dS поверхности эллипсоида.

4348. $\iint\limits_S z\,dS$, где S — часть поверхности геликоида

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v\ (0<u<a;\ 0<v<2\pi).$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 2-го рода:

4362. $\iint\limits_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4363. $\iint\limits_S f(x)\,dy\,dz + g(y)\,dz\,dx + h(z)\,dx\,dy$, где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — непрерывные функции и S — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$; $0 \leqslant z \leqslant c$.

4364. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$.

4365. $\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z}\right)$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4366. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Семинар 12. Применение поверхностных интегралов 1-го рода

920. Найти площадь части поверхности:

1) конуса $z^2=2xy$, расположенной в первом октанте между плоскостями $x=2$, $y=4$;

2) сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=Rx$;

3) цилиндра $x^2+y^2=Rx$, расположенной внутри сферы x^2+ $+y^2+z^2=R^2$.

Решение. 1) Применяем формулу (1). Пользуясь уравнением конуса, преобразуем поверхностный интеграл в двойной интеграл с переменными x и y:

$$S=\iint_{\sigma} ds=\iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\sigma_{xy}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx\,dy,$$

где σ_{xy}—проекция σ на плоскость xOy—прямоугольник $OABC$ (черт. 194).

Вычисляя двойной интеграл, получим

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 dx\int_0^4\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dy=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\left(2\sqrt{xy}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4}dx=$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^2\left(\sqrt{x}+\frac{4}{3\sqrt{x}}\right)dx=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{8}{3}\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^2=16.$$

2) Данная поверхность * симметрична относительно плоскостей xOy и xOz; в первом октанте помещается ее четвертая часть (σ) (черт. 195), для которой апликата $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому согласно формуле (1) искомая площадь

$$S=4\iint_{\sigma} ds=4\iint_{\sigma_1}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=4R\iint_{\sigma_1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

где σ_1—полукруг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=Rx$ и осью Ox ($x^2+y^2\leqslant Rx$, $y\geqslant 0$).

* Верхнее и нижнее основания «тела Вивиани», вырезаемого цилиндром из шара. На черт. 195 изображена половина этого тела, расположенная над плоскостью xOy.

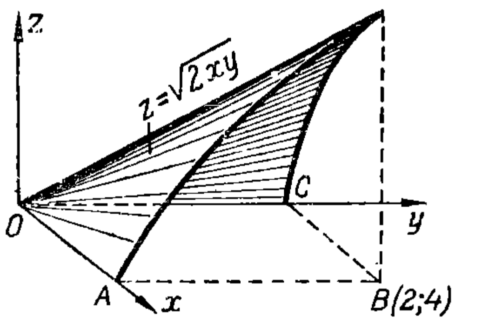
Переходя к полярным координатам и интегрируя, имеем:

$$0 \leqslant \rho \leqslant R\cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

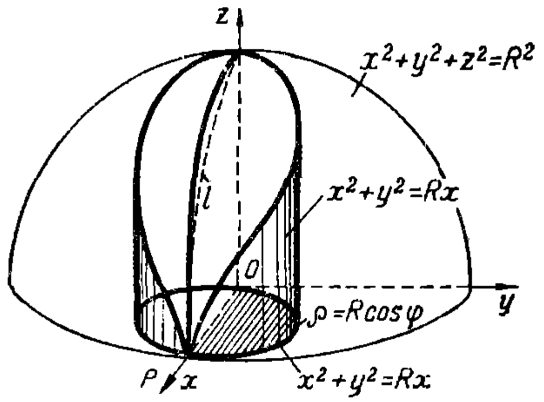
$$S = 4R \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho\, d\varphi\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = -2R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} (R^2-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} d(R^2-\rho^2) =$$

$$= 2R \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[2(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right] \Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi = 4R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)\, d\varphi = 2R^2(\pi-2)$$

($\rho = R\cos\varphi$ — полярное уравнение окружности $x^2+y^2=Rx$).



Черт. 194



Черт. 195

3) Данная поверхность * (черт. 195) также симметрична относительно плоскостей xOy и xOz; в первом октанте помещается ее четвертая часть (T), для которой ордината $y=\sqrt{Rx-x^2}$. Поэтому, преобразуя поверхностный интеграл формулы (1) в двойной интеграл с переменными x и z, получим

$$S = 4\iint\limits_{T_{xz}} \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dx\, dz = 2R \iint\limits_{T_{xz}} \frac{dx\, dz}{\sqrt{Rx-x^2}},$$

где T_{xz} — плоская область, ограниченная осями Ox и Oz и параболой l, уравнение которой $z^2=R^2-Rx$ получается путем исключения y из данных уравнений. (Эта парабола является проекцией на плоскость xOz линии пересечения цилиндра и сферы.)

Интегрируя, найдем

$$S = 2R \int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{Rx-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-Rx}} dz = 2R\sqrt{R} \int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4R\sqrt{Rx}\,\Big|_0^R = 4R^2.$$

---

* Боковая поверхность «тела Вивиани».

921. Найти массу полусферы, если в каждой ее точке поверхностная плотность численно равна расстоянию этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

Решение. Поместим начало прямоугольной системы координат в центре основания полусферы и направим ось аппликат перпендикулярно этому основанию. Тогда уравнение полусферы будет $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, где R — радиус полусферы; поверхностная плотность в точке $M(x, y, z)$ полусферы будет $\delta(M)=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$; $ds=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy=\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

Подставляя в формулу (2), получим:

$$m=\iint\limits_{\sigma}\delta\,ds=R\iint\limits_{\sigma_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \text{где } \sigma_{xy} \text{ — круг } x^2+y^2\leqslant R^2.$$

Переходя к полярным координатам, найдем

$$m=R\iint\limits_{\rho\leqslant R}\frac{\rho^2\,d\varphi\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{\pi^2R^3}{2}.$$

(Внутренний интеграл вычисляется посредством замены переменной по формуле $\rho=R\sin t$.)

922. Найти центр тяжести полусферы, данной в условии предыдущей задачи.

Решение. При том же расположении системы координат вследствие симметричного расположения данной поверхности и распределенной на ней массы относительно оси аппликат $x_C=y_C=0$.

Для определения аппликаты центра тяжести вычислим статический момент

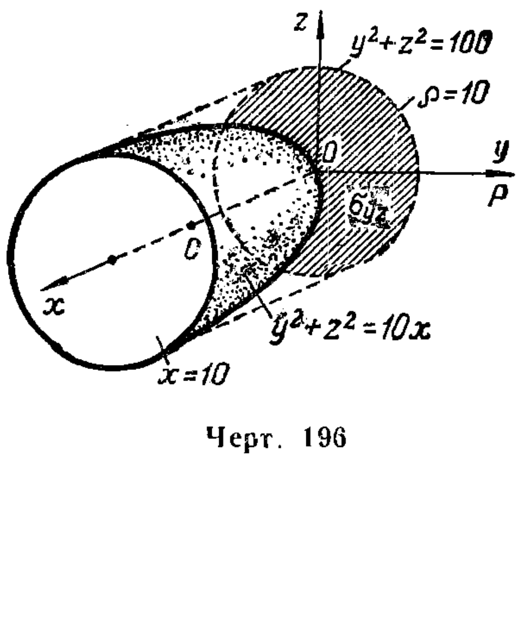
$$m_{xy}=\iint\limits_{\sigma}z\delta\,ds=R\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=R\iint\limits_{\rho\leqslant R}\rho^2 d\varphi\,d\rho=\frac{2}{3}\pi R^4.$$

Масса полусферы найдена в решении предыдущей задачи.

Согласно формуле (3) $z_C=$ $=\frac{m_{xy}}{m}=\frac{4R}{3\pi}$.

923. Найти центр тяжести однородной поверхности параболоида $y^2+z^2=10x$, отсеченной плоскостью $x=10$.

Решение. Данная однородная поверхность (σ) симметрична относительно оси абсцисс (черт. 196). Поэтому $y_C=z_C=0$.



Черт. 196

Чтобы найти абсциссу центра тяжести, вычислим: 1) статический момент m_{yz} и 2) массу m данной поверхности:

$$1)\ m_{yz}=\iint_{\sigma} x\delta\, ds=\delta\iint_{\sigma_{yz}} x\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{50}\iint_{y^2+z^2\leqslant 100}(y^2+z^2)\sqrt{25+y^2+z^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{50}\iint_{\rho\leqslant 10}\rho^2\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{\delta}{50}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{10}\rho^2\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{50}{3}\pi\delta\,(1+25\sqrt{5}).$$

Здесь после перехода к полярным координатам внутренний интеграл вычисляется с помощью подстановки $\sqrt{25+\rho^2}=t$.

$$2)\ m=\iint_{\sigma}\delta\,ds=\frac{\delta}{5}\iint_{y^2+z^2\leqslant 100}\sqrt{25+y^2+z^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{5}\iint_{\rho\leqslant 10}\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=\frac{\delta}{10}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{10}(25+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,(25+\rho^2)=$$

$$=\frac{\delta}{10}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}(25+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10}d\varphi=\frac{50}{3}\pi\delta\,(5\sqrt{5}-1).$$

По формуле (3) $x_C=\dfrac{m_{yz}}{m}=\dfrac{25\sqrt{5}+1}{5\sqrt{5}-1}$.

Найти площадь части поверхности:

924. $2x+2y+z=8a$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

925. Цилиндра $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $y+z=0$ и $z=0$.

926. Цилиндра $y^2+z^2=R^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

927. Параболоида $x^2+y^2=6z$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=27$.

928. Сферы $x^2+y^2+z^2=3a^2$, заключенной внутри параболоида $x^2+y^2=2az$.

929. Найти массу цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=H$, если в каждой ее точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до начала координат.

9		Поверхностный интеграл второго рода	2(1)			
		Поверхностный интеграл второго рода		№10(20)2(1)		

Семинар 10. Поверхностный интеграл второго рода

7. Вычислить

$$\iint_S x\,dy\,dz + z^3\,dx\,dy,$$

если S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (*Ответ:* $32\pi/15$.)

8. Вычислить

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy,$$

если S — внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с основаниями $z = 0$ и $z = H$. (*Ответ:* $3\pi R^2 H$.)

9. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностью S,

$$v = \frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности S.

10. Вычислить

$$\iint_S yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz,$$

если S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и состоящей из цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$. $\left(\textit{Ответ: } R^2H^2\left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8}\right).\right)$

11. Вычислить

$$\iint_S yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz,$$

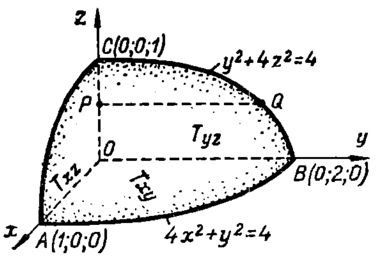
если S — внешняя сторона пирамиды, гранями которой являются плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. (*Ответ:* $1/8$.)

907. Вычислить поверхностные интегралы второго типа (по координатам):

1) $I=\iint\limits_{\sigma}\sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где σ — нижняя сторона круга $x^2+y^2\leqslant a^2$.

2) $J=\iint\limits_{T}2\,dx\,dy+y\,dx\,dz-x^2z\,dy\,dz$, где T — внешняя сторона части эллипсоида $4x^2+y^2+4z^2=4$, расположенной в первом октанте.

3) $K=\oiint\limits_{-W}y\,dx\,dz$, где W — поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.



Черт. 192

Решение. 1) Поверхность σ совпадает со своей проекцией σ_{xy} на плоскость xOy. Поэтому и согласно формуле (2), учитывая, что интегрирование распространяется на нижнюю сторону круга, получим:

$$I=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$=-\iint\limits_{\rho\leqslant a}\sqrt{\rho}\,\rho d\varphi d\rho=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}\rho^{\frac{3}{2}}\,d\rho=\int\limits_{2\pi}^{0}\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a d\varphi=-\frac{4}{5}\pi\sqrt{a^5}.$$

Здесь выполнен переход от прямоугольных координат к полярным.

2) Расчленяем данный поверхностный интеграл по координатам общего вида на три слагаемых интеграла

$$J=2\iint\limits_{T}dx\,dy+\iint\limits_{T}y\,dx\,dz-\iint\limits_{T}x^2z\,dy\,dz$$

и, пользуясь уравнением поверхности T и формулой (2), преобразуем каждый из них в двойной интеграл:

$J_1=\iint\limits_T dx\,dy=\iint\limits_{T_{xy}} dx\,dy$, где T_{xy} — проекция T на плоскость xOy — часть OAB эллипса $4x^2+y^2\leqslant 4$ (черт. 192);

$J_2=\iint\limits_T y\,dx\,dz=2\iint\limits_{T_{xz}}\sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz$, где T_{xz} — часть OAC круга $x^2+z^2\leqslant 1$;

$$J_3=\iint\limits_T x^2z\,dy\,dz=\iint\limits_{T_{yz}} z\left(1-\frac{y^2}{4}-z^2\right)dy\,dz,$$

где T_{yz} — часть OBC эллипса $y^2+4z^2\leqslant 4$.

Первый интеграл численно равен площади области T_{xy} — четверти площади эллипса с полуосями $a=1$, $b=2$, т. е. $J_1=$ $=\frac{\pi ab}{4}=\frac{\pi}{2}$ (см. задачу 604 (4), стр. 196).

Второй интеграл вычислим, переходя к полярным координатам:

$$J_2=2\iint\limits_{OAC}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}d(1-\rho^2)=$$

$$=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{\pi}{3};$$

$$J_3=\int\limits_0^1 z\,dz\int\limits_{y_P}^{y_Q}\left(1-\frac{y^2}{4}-z^2\right)dy=\int\limits_0^1 z\left(y-\frac{y^3}{12}-z^2y\Bigg|_{y=0}^{y=2\sqrt{1-z^2}}\right)dz=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_0^1 z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz=\frac{2}{3}\,\frac{2(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_1^0=\frac{4}{15}.$$

Следовательно, $J=2J_1+J_2-J_3=\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{15}$.

3) Замкнутая поверхность W состоит из четырех частей — треугольников ABC, BCO, ACO, ABO, расположенных в различных плоскостях (см. черт. 174). Соответственно этому вычисляем данный интеграл как сумму четырех интегралов.

Преобразуя поверхностный интеграл по внутренней (обращенной к началу координат) стороне треугольника ABC в двойной интеграл и вычисляя его, получим:

$$\iint\limits_{ABC} y\,dx\,dz=-\iint\limits_{ACO}(1-x-z)\,dx\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x+z-1)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{(x+z-1)^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^0(x-1)^2\,dx=\frac{(x-1)^3}{6}\Bigg|_1^0=-\frac{1}{6};$$

$\iint\limits_{BCO} y\,dx\,dz=\iint\limits_{ABO} y\,dx\,dz=0$, так как плоскости BCO и ABO перпендикулярны плоскости xOz (см. стр. 315);

$$\iint\limits_{ACO} y\,dx\,dz=\iint\limits_{ACO}0\,dx\,dz=0.$$

Следовательно, $K=-\frac{1}{6}$.

252. Найти интеграл $\iint\limits_S (x^3 \cos\alpha + y^3 \cos\beta + z^3 \cos\gamma)\, dS$, взятый по поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, где α, β, γ — углы внешней нормали с осями координат.

253. Найти $\iint\limits_S [(z^2-y^2)\cos\alpha + (x^2-z^2)\cos\beta + (y^2-x^2)\cos\gamma]\, dS$, где S — внешняя сторона поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

254. Вычислить $\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS$, где S — внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

255. Вычислить $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$ $(-h \leqslant x \leqslant h)$.

256. Найти поток вектора $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2+y^2 \leqslant (R^2/h^2)\, z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

257. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = (y-x)\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x+y+z-1=0$ координатными плоскостями.

258. Найти поток вектора $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через часть сферы $x^2+y^2+z^2=4$, если $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.

259. Найти поток радиуса-вектора $\mathbf{r}$ через внешнюю сторону поверхности прямого кругового конуса, если h — высота конуса и R — радиус основания.

260. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F} = (x+y)\,\mathbf{i} + (x-z)\,\mathbf{j} + (y+z)\,\mathbf{k}$ по контуру треугольника ABC, где $A\,(0;\ 0;\ 0)$, $B\,(0;\ 1;\ 0)$, $C\,(0;\ 0;\ 1)$.

261. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ по окружности $x^2+(y-1)^2=1$.

262. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{u} = (x+z)\,\mathbf{i} + (x-y)\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ по эллипсу $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

263. Найти дивергенцию градиента функции $u = e^{x+y+z}$.

264. Найти $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, где $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

265. Найти $\operatorname{rot}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

266. Найти $\operatorname{rot}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

267. Показать, что $\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$.

268. Показать, что $\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = f\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{grad} f$.

Семинар 12. Применение поверхностных интегралов 2-го рода

10		Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Стокса	2(1)			
		Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Стокса		№11(22)2(1)		

Семинар 12. Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Стокса

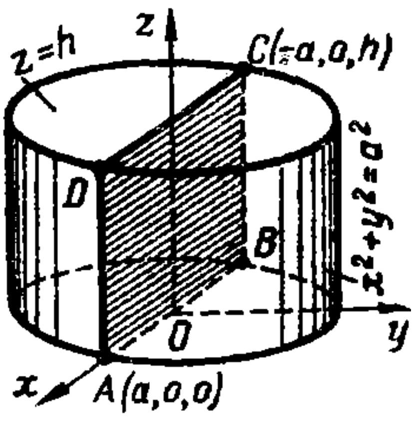
Теорема Остроградского — Гаусса

Пример. По формуле Остроградского – Гаусса для $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$ получаем, что

$$\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = 3\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dV.$$

Если, в частности, S является сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то тройной интеграл после введения сферических координат равен

$$3\int\limits_0^R\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \rho^2\rho^2 \sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,d\rho = \frac{12\pi}{5}R^5.$$



Черт. 191

906. Вычислить поверхностные интегралы первого типа (по площади поверхности):

1) $I = \iint\limits_\sigma (6x + 4y + 3z)\,ds$, где σ — часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенная в первом октанте.

2) $K = \iint\limits_W (y + z + \sqrt{a^2 - x^2})\,ds$, где W — поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = h$.

908. По формуле Остроградского—Гаусса вычислить поверхностный интеграл $I=\oiint\limits_{+\sigma} 4x^3\,dy\,dz+4y^3\,dx\,dz-6z^4\,dx\,dy$, где σ — полная поверхность цилиндра, черт. 191, данного в задаче 906 (2).

Решение. Путем сопоставления данного интеграла с левой частью формулы (3) определяем: $P=4x^3$, $Q=4y^3$, $R=-6z^4$. Затем находим производные: $P'_x=12x^2$, $Q'_y=12y^2$, $R'_z=-24z^3$, подставляем их в правую часть формулы (3) и таким образом вместо данного поверхностного интеграла по замкнутой поверхности σ получим тройной интеграл по области G, ограниченной этой поверхностью:

$$I=12\iiint\limits_G (x^2+y^2-2z^3)\,dx\,dy\,dz.$$

Интегрируя вначале по z, а затем переходя к полярным координатам, найдем

$$I=12\iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy\int\limits_0^h (x^2+y^2-2z^3)\,dz=12\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[(x^2+y^2)\,z-\right.$$
$$\left.-\frac{z^4}{2}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=h} dx\,dy=12\iint\limits_{\rho\leqslant a}\left(\rho^2 h-\frac{h^4}{2}\right)\rho\,d\varphi\,d\rho=$$
$$=12h\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a\left(\rho^3-\frac{h^3}{2}\,\rho\right)d\rho=6\pi a^2 h\,(a^2-h^3).$$

236. Найти интеграл $\oint\!\!\!\oint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$, распространенный по поверхности S тела, ограниченного этой поверхностью.

△ По формуле Остроградского — Гаусса имеем

$$\oint\!\!\!\oint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint_T \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 3\iiint_V dx\,dy\,dz = 3V,$$

где V — объем тела.

237. Применяя формулу Остроградского — Гаусса, преобразовать поверхностный интеграл по замкнутой поверхности S

$$I = \oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz + \frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$$

в интеграл по объему, ограниченному этой поверхностью.

△ Данный интеграл можно записать так:

$$I = \oint\!\!\!\oint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS,$$

а последний интеграл на основании формулы Остроградского — Гаусса равен

$$\iiint_T \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz.$$

Следовательно,

$$I = \iiint_T \Delta u\,dx\,dy\,dz,$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u$. Символ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется *оператором Лапласа*. ▲

238. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

△ Согласно определению, имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2)}{\partial y} + \frac{\partial (z^2)}{\partial z} =$$
$$= 2x + 2y + 2z = 2(x+y+z). \ ▲$$

239. Дано скалярное поле $u(x, y, z)$. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

△ Так как $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$, то

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$$

или

$$\nabla(\nabla u) = \Delta u, \quad \text{т. е. } \Delta = \nabla^2$$

(оператор Лапласа равен квадрату набла-оператора). ▲

240. Дано электрическое векторное поле, в каждой точке которого по закону Кулона действует вектор $\mathbf{F} = \frac{ke}{r^2}\mathbf{r}_0$, где r — расстояние данной точки от начала координат, e — положительный электрический заряд, $\mathbf{r}_0$ — единичный вектор, направленный по радиусу-вектору данной точки, $k = \text{const}$. Определить поток векторного поля через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

△ Имеем

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}\,dS = \iint\limits_S \frac{ke}{r^2}\mathbf{r}_0\mathbf{n}\,dS.$$

Так как $r = R = \text{const}$ и $\mathbf{r}_0\mathbf{n} = 1$, то

$$\Pi = \frac{ke}{R^2}\iint\limits_S dS = \frac{ke}{R^2}S_{\text{сф}} = \frac{ke}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi ke. \ ▲$$

Теорема Стокса

640. Примеры. 1) Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

распространенный на нижнюю сторону круга $x^2+y^2=R^2$.

Указание. Так как поверхность, по которой берется интеграл, совпадает со своей проекцией (D) на плоскость xy, то, учитывая сторону, имеем

$$I=-\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Ответ. $I=-\frac{\pi}{2}R^4$.

2) Вычислить интеграл

$$J=\iint\limits_{(S)}x^2y^2z\,dx\,dy$$

по верхней стороне нижней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Указание. Проекцией полусферы на плоскость xy служит круг (D), ограниченный окружностью $x^2+y^2=R^2$. Уравнение нижней полусферы $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому

$$J=-\iint\limits_{(D)} x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Ответ. $J=-\frac{2\pi}{105}R^7$.

3) Вычислить интеграл

$$K=\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy,$$

распространенный на внешнюю сторону сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Решение. Остановимся на вычислении интеграла

$$K_3=\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy.$$

Так как явное уравнение сферы будет

$$z-c=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$$

(где плюс отвечает верхней полусфере, а минус — нижней), то удобно представить подинтегральную функцию z^2 в виде

$$z^2=(z-c)^2+c^2+2c\,(z-c).$$

Сумма первых двух членов, будучи проинтегрирована по верхней стороне верхней полусферы и нижней стороне нижней полусферы, дает результаты разных знаков, которые взаимно уничтожаются. Последний же член, который сам меняет знак при переходе от верхней полусферы к нижней, дает при интегрировании по ним равные результаты, так что

$$K_3=4c\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy=\frac{8}{3}\pi c R^3.$$

Аналогично получаются и другие два интеграла

$$K_1=\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz,\quad K_2=\iint\limits_{(S)} y^2\,dz\,dx.$$

Ответ. $K=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$.

4) Найти интегралы

(а) $I_1=\iint\limits_{(S)} dx\,dy$, (б) $I_2=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy$, (в) $I_3=\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy$,

распространенные на внешнюю сторону эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ответ. (а) $I_1=0$; (б) $I_2=\frac{4}{3}\pi abc$; (в) $I_3=0$.

4367. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$,* где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Проверить результат непосредственным вычислением.

4368. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{AmB} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

от точки $A\ (a,\ 0,\ 0)$ до точки $B\ (a,\ 0,\ h)$.

Указание. Дополнить кривую AmB прямолинейным отрезком и применить формулу Стокса.

4369. Пусть C — замкнутый контур, расположенный в плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали плоскости) и ограничивающий площадку S.

Найти

$$\oint\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур C пробегается в положительном направлении.

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

4370. $\int\limits_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, где C — эллипс $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, пробегаемый в направлении возрастания параметра t.

4371. $\int\limits_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, где C — эллипс $x^2 + y^2 = a^2 \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ $(a > 0,\ h > 0)$, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

2417. Показать с помощью формулы Стокса, что

$$\int\limits_{(C)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить это вычислением интеграла по контуру $\triangle OAB$ с вершинами $O(0;\,0;\,0)$, $A(1;\,1;\,0)$ и $B(1;\,1;\,1)$.

2418. Написать и проверить формулу Стокса для интеграла

$$\oint\limits_{(C)} (z-y)\,dx + (x-z)\,dy + (y-x)\,dz,$$

взятого по контуру $\triangle ABC$ с вершинами $A(a;\,0;\,0)$, $B(0;\,a;\,0)$ и $C(0;\,0;\,a)$.

Указание. Двойной интеграл можно взять по любой поверхности, проходящей через периметр треугольника ABC, например по плоскости $x+y+z=a$.

2419. Написать и проверить формулу Остроградского–Гаусса для интеграла

$$\iint\limits_{(S)} \left[x^3\cos(\mathbf{n},\,\mathbf{i}) + y^3\cos(\mathbf{n},\,\mathbf{j}) + z^3\cos(\mathbf{n},\,\mathbf{k})\right] dS,$$

взятого по поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Указание. Тройной интеграл преобразовать к сферическим координатам.

2420. Написать и проверить формулу Стокса для интеграла

$$\oint\limits_{(C)} x(z-y)\,dx + y(x-z)\,dy + z(y-x)\,dz$$

по контуру треугольника с вершинами $A(a;\,0;\,0)$, $B(0;\,a;\,0)$ и $C(0;\,0;\,a)$ (см. указание к задаче 2418).

2421. С помощью формулы Остроградского–Гаусса вычислить

$$\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy,$$

взятый по наружной поверхности пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

909. Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл $K=\oint\limits_{l} e^x\,dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy + yz^3\,dz$, где l—замкнутая линия $OCBAO$ (черт. 193) пересечения поверхностей $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.

Решение. Сопоставляя K с формулой (4), определяем: $P=e^x$, $Q=z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, $R=yz^3$.

Находим производные:

$$P'_y=P'_z=0,\ Q'_x=3xz\sqrt{x^2+z^2},\ Q'_z=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},\ R'_x=0,$$
$$R'_y=z^3$$

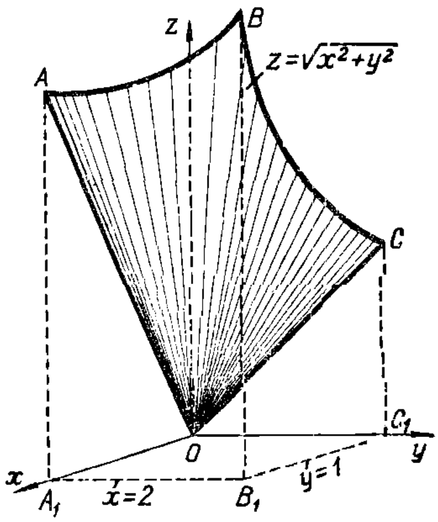
и подставляя их в формулу Стокса, получим

$$K=3\iint_{\sigma} xz\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Здесь σ может быть любая (гладкая или кусочно-гладкая) поверхность, «натянутая» на данный контур l. Пользуясь этим, выберем в качестве σ часть данной конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ограниченную контуром l.

Тогда, интегрируя по нижней стороне указанной поверхности, на которой заданный обход контура l направлен против часовой стрелки, найдем:

$$K=-3\iint_{\sigma_{xy}} x(x^2+y^2)\,dx\,dy=$$
$$=-\int_0^1 dy\int_0^2 (x^3+xy^2)\,dx=-14$$



Черт. 193

(σ_{xy}—прямоугольник $OA_1B_1C_1$).

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого типа:

		Применение поверхностных интегралов				
		Применение поверхностных интегралов		№12(22)2(1)		