Математический анализ

Определённый интеграл

Краткий конспект лекций

Составитель

В.А.Чуриков

Кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедры Высшей математики
Томского политехнического университета.

Национальный исследовательский
Томский политехнический университет:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

http://www.tpu.ru/

E-mail: vachurikov@list.ru

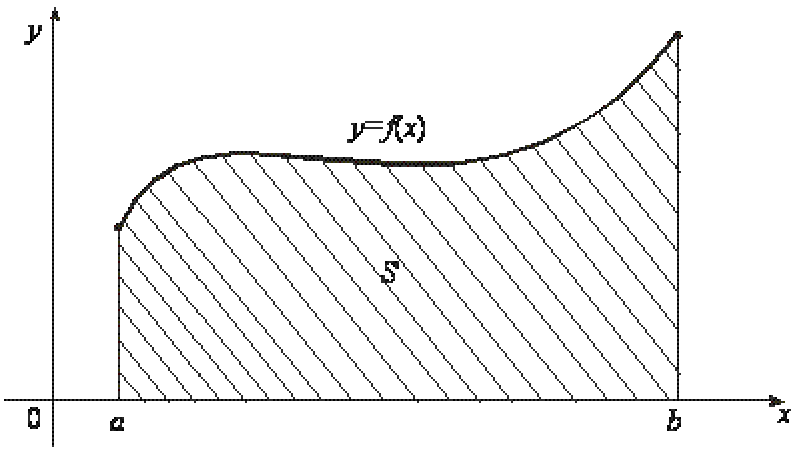
Сайт: http://portal.tpu.ru/SHARED/v/VACHURIKOV

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ (ИНТЕГРАЛ РИМАНА)

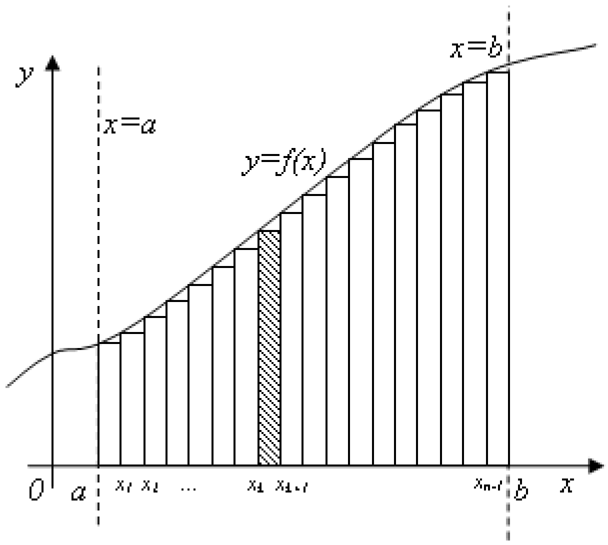
1. Определённый интеграл (интеграл Римана), его свойства и геометрический смысл

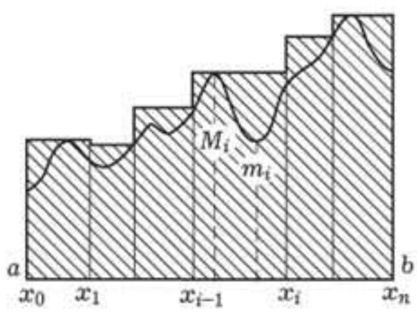
Пределы интегрировании. Определённые (постоянные) конечные и бесконечные (собственные и несобственные интегралы (бесконечные и в точках, в которых подинтегральная функция расходится). Переменные пределы интегрирования.

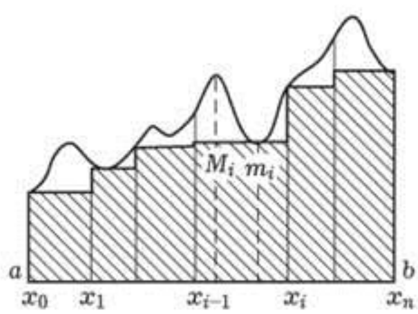
Криволинейная трапеция



2. Сумма Дарбу







Верхняя сумма Дарбу

Нижняя сумма Дарбу

$$\overline{S} \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\xi}_i)\Delta x_i \qquad \underline{S} \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi}_i)\Delta x_i$$

$$S \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\underline{S} \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi}_i)\Delta x_i \quad \le \quad S \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \le \quad \overline{S} \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\xi}_i)\Delta x_i$$

Определение. Определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ называется предел интегральной суммы $\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$, если наибольший элемент разбиения ($\max \Delta x$) стремится к нулю

$$I = \int_a^b f(x)dx = S \simeq \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ всегда существует и единственна интегральная сумма, которая не зависит от способа разбиения отрезка $a \le x \le b$ на отрезки Δx_i и не зависит от выбора точек ξ_i.

$$\underline{S} = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi_i})\Delta x_i \quad = \quad S = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad = \quad \overline{S} = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\xi_i})\Delta x_i$$

3. Формула Ньютона — Лейбница

Теорема (о существовании определённого интеграла). Если на замкнутом интервале дана непрерывная функция, с разбиениями на суммы Дарбу которые стремятся к значению определённого интеграла на рассматриваемом отрезке при стремлении наибольшего интервала к нулю. Определённый интеграл не зависит от разбиения на сумму Дарбу.

Определённый интеграл, его свойства и геометрический смысл. Формула Ньютона — Лейбница (основная теорема анализа).

$$I = \int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b f(x)dx = (F(x)+C)\Big|_a^b \equiv [F(x)+C]_a^b =$$
$$= F(b)+C-F(a)-\mathrm{C} = F(b)-F(a);$$

$$F'(x) = f(x); \qquad b \geq x \geq a$$

Здесь a и b *нижний* и *верхний пределы интегрирования* $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)}$$

Теорема. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, то она имеет определённый интеграл на этом промежутке.

Пример. $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{2}{3}$

4. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА.

Линейность

Однородность

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,\ c = \text{const}.$$

Аддитивность (интеграл суммы равен сумме интегралов)

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Интегрирование посредством разложения в степенной ряд функций, сходящихся в интервале a и b

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right).$$

Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке содержащемся внутри отрезка интегрирования.

Свойства, связанные с переделами интегрирования

Перестановка пределов интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Следствие из последнего равенства

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Разбиение области интегрирования на две или более

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ чётная, то справедливо равенство

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx .$$

Если функция $f(x)$ нечётная, то справедливо равенство

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 .$$

Интегрирование определённых интегралов заменой переменных

$$\int_{a}^{b} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_{a}^{b} f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int_{a}^{b} f[x]dx;\ x = \varphi(t), t = \varphi^{-1}(t) .$$

Интегрирование определённых интегралов по частям

$$\int_{a}^{b} u d\upsilon = u\upsilon\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \upsilon du = u\upsilon\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \upsilon u' dx .$$

Равенства

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Производная от интеграла по верхнему пределу.

Если функция непрерывна на отрезке

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt ,$$

то на этом отрезке a и b функция $F(x)$ непрерывна и имеет производную

$$F'(x) = \left(\int_{a}^{x} f(t)dt \right)' = \frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x} f(t)dt \right) = \frac{d}{dx}(F(t)\Big|_{a}^{x}) = (F(x) - F(a))' = f(x)$$

$$\int_{0}^{t} f(x)g(t-x)dx = \int_{0}^{t} f(t-x)g(x)dx .$$

Неравенства

Если $g(x) \le f(x) \le h(x)$ в пределах интегрирования a и b и $a < b$

$$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b h(x)dx$$ в пределах интегрирования a и b

В частности, если $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

В более общем случае $mg(x) \le g(x)f(x) \le Mg(x)$ в пределах интегрирования a и b

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b g(x)f(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$ в пределах интегрирования a и b

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

в силу того, что $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

или

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Первая теорема о среднем значении. Если $m \le f(x) \le M$, то существует число μ, такое, что $m \le \mu \le M$

Неравенство Коши — Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx}\,.$$

Неравенство Коши — Гёльдера

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Неравенство треугольника

$$\left(\int_a^b | f(x)+g(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b | f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b | g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство Минковского

$$\left(\int_a^b | f(x)+g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b | f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b | g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

5. Приложения определённого интеграла

Вычисление средних значений функции на отрезке

$$\mu(b-a)=\int_a^b f(x)dx.$$

В частности, для непрерывной функции в пределах интегрирования справедливо соотношение

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), b \ge \xi \ge a.$$

среднее значение функции на отрезке

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$\bar{f}_{[a,b]}=\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx.$$

Обобщённая первая теорема о среднем значении. Если $m \le g(x) \le M$, то существует такое число $m \le \mu \le M$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b f(x)dx$$

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Если функция $g(x)$ непрерывна, то справедливо соотношение

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx, b \ge \xi \ge a.$$

Вторая теорема о среднем значении

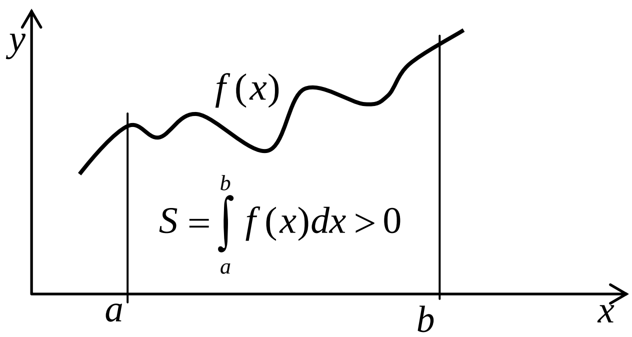
Среднее квадратичное значение функции

$$\sigma = \sqrt{f^2_{[a,b]}} = \sqrt{\frac{1}{a-b}\int_a^b [f(x)]^2 dx} .$$

Вычисление площадей фигур

Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью интегрирования.

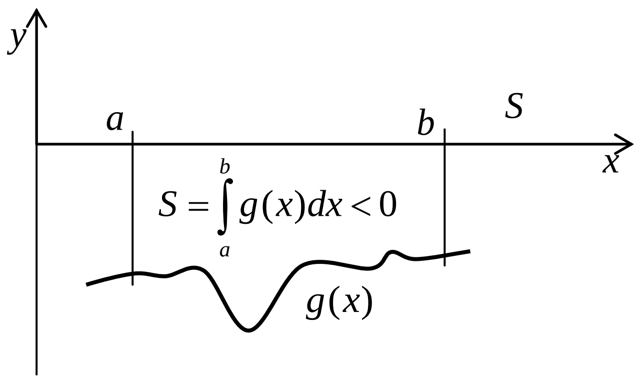
Положительные и «отрицательные» площади



$$S=\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), b\geq x\geq a$$

$$S>0$$

Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью интегрирования.



$$S=\int_a^b g(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), b\geq x\geq a$$

$$S<0$$

Правильная формула для вычисления площадей

$$S=\int_a^b |f(x)|dx=|F(x)|\Big|_a^b=|F(b)|-|F(a)|; \quad b\geq x\geq a$$

$$S>0$$

Вычисление площадей фигур ограниченных двумя гладкими кривыми $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = [F(x) - G(x)]\Big|_a^b = F(b) - F(a) - G(b) + G(a), b \geq x \geq a$$

Особенности вычисления площадей. Площади криволинейных трапеций под осью абсцисс и на отрицательной стороне оси абсцисс…

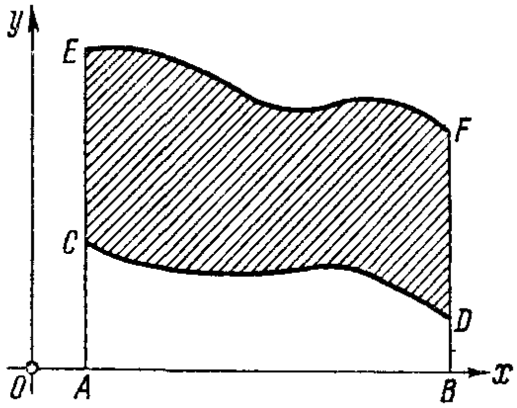
Вычисление площади фигур в полярных координатах

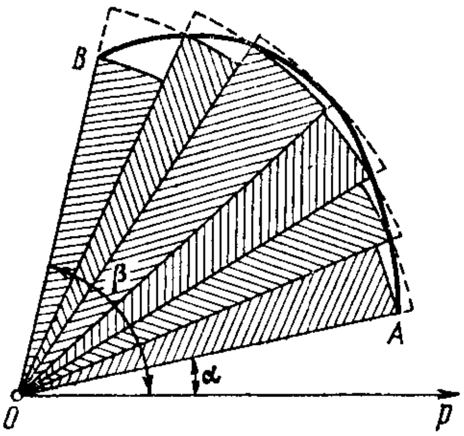
Формулы перехода из декартовой системы координат в полярную

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Формулы перехода из полярной системы координат в декартову

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$





Фигура ограничена кривой $r(\varphi)$ и лучами $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$ вычисляется как площадь сектора

Верхняя и нижняя суммы Дарбу в полярной системе координат

$$\overline{S}_i = \frac{1}{2}\overline{r}\Delta\varphi_i; \qquad \underline{S}_i = \frac{1}{2}\underline{r}\Delta\varphi_i$$

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{r}\Delta\varphi_i \geq S \geq \underline{S} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\underline{r}\Delta\varphi_i$$

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi_i} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overline{r}\Delta\varphi_i = \lim_{\max \Delta\varphi_i} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \underline{r}\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1=\alpha}^{\varphi_2=\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1=\alpha}^{\varphi_2=\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

Вычисление площади фигур заданных параметрически

Если границы фигуры заданы параметрически $x = x(t), y = y(t)$, то её площадь можно вычислить с помощью одной из формул

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$d\varphi(t) = \varphi_t' dt$$

$$\varphi_t' = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{xy' - yx'}{x^2} = \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - yx'}{r^2}$$

Окончательно получим

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t)\end{vmatrix}dt$$

Здесь α и β значения параметров соответственно в начале и в конце обхода контура фигуры в положительном направлении, когда фигура остаётся слева.

Вычисление длины кривой линии

Вычисление длины плоской кривой заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $x = x(t), y = y(t)$, которая непрерывна вместе со своими производными $x'(t), y'(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ и $t_1, < t_2$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}dt .$$

Вычисление длины пространственной кривой заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $x = x(t), y = y(t), z(t)$, которая непрерывна вместе со своими производными $x'(t), y'(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ и $t_1, < t_2$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t) + z_t'^2(t)}dt .$$

Вычисление длины кривой в декартовых координатах

Если на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, а функция $f(x) \geq 0$ и непрерывна, то длина кривой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}dx .$$

Для трёхмерной функции

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f_x'(x, y))^2 + (f_y'(x, y))^2}dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x'^2 + y_y'^2}dx .$$

Вычисление длины кривой в полярных координатах

Гладкая кривой задана в полярных координатах $\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$ значения полярного угла в начале и конце дуги, $\varphi_1 < \varphi_2$

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r_\varphi'^2(\varphi)}d\varphi .$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЁМОВ

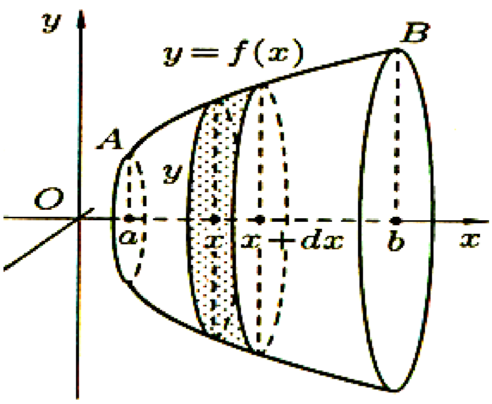
Объёмов фигур

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

Вычисление площадей и объёмов фигур вращения

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx\,.$$

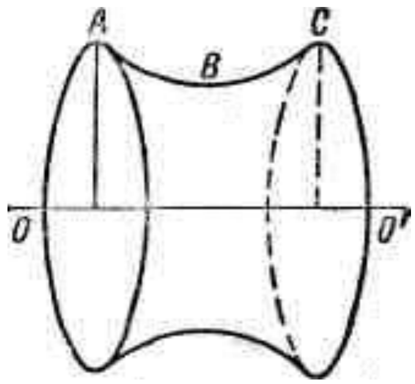
Если на отрезке $[a, b]$ и $a<b$, а функция $f(x)\geq 0$ и непрерывна, то объём фигуры вращения кривой функции вокруг оси Ox



Катеноид — поверхность, образуемая вращением <u>цепной линии</u>

$$y=a\ \mathrm{ch}\ \frac{x}{a}$$

вокруг оси OX.



Вычисление площадей фигур вращения в декартовой системе координат

Если функция задана параметрически

Если на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, а функция $y(x) \geq 0$ и непрерывна, то площадь поверхности вращения графика функции вокруг оси Ox

$$S = 2\pi \int_L l dl = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 (t)} dt.$$

Если на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, а функция $y(x) \geq 0$ и непрерывна, то площадь поверхности вращения графика функции вокруг оси Ox

$$S = 2\pi \int_L l dl = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Или через дифференциал дуги

$$S = 2\pi \int_L l dl$$

Работа силы по пройденному пути

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Пройденный путь за промежуток времени в зависимости от скорости

$$S = \int_0^T v(t) dt.$$

Масса дуги в зависимости от плотности нити вдоль её длины

$$m = \int_0^L \rho(l)dl\,.$$

Вычисление центра тяжести дуги

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\,dL, \quad \overline{y} = \frac{1}{L}\int_a^b y\,dL$$

$$dL = \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Вычисление центра тяжести криволинейной трапеции

$$\overline{x} = \frac{1}{S}\int_a^b x\,dS = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx, \quad \overline{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b y\,dS = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx$$

$$dS = y\,dx$$

Вычисление статических моментов и моментов инерции криволинейной трапеции

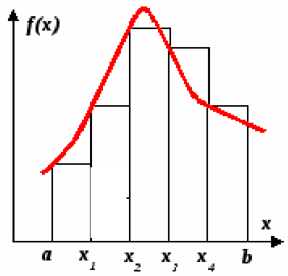
$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y\,dS = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad M_y = \int_a^b x\,dS = \int_a^b xy\,dx$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2\,dS = \int_a^b x^2y\,dx.$$

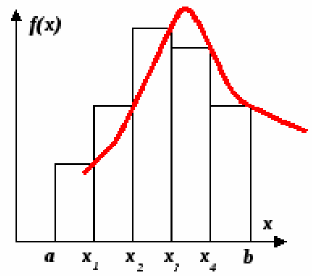
6. Приближенное вычисление определенного интеграла (квадратурные формулы)

Формула прямоугольников

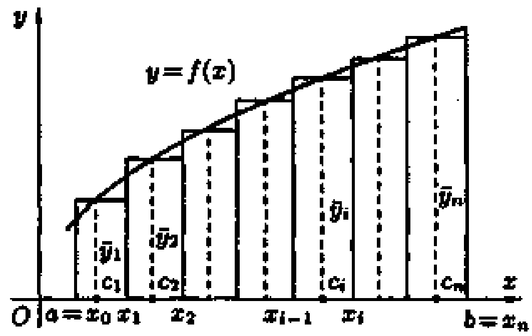
Разные способы разбиения криволинейной трапеции на элементарные прямоугольники



Левые прямоугольники



Правые прямоугольники



Средние прямоугольники

Общая формула прямоугольников, если значения функций на отрезках берутся в любой точке отрезка

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Когда значения функций берётся в серединах отрезков

$$\bar{y}_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right),$$

тогда, получим формулу средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_n) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right); \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Абсолютная погрешность R_n формулы средних прямоугольников определяется

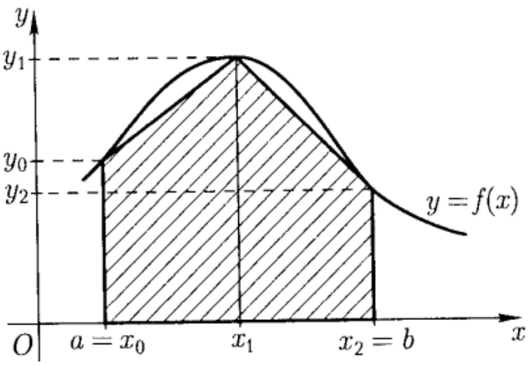
$$|R_n| \le \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right|.$$

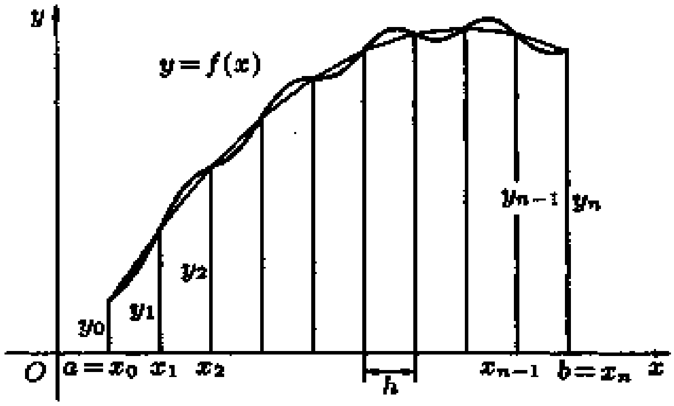
Вычисляется погрешность

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2} = \frac{(b-a)h^2 M_2}{24}; \quad M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

Формула трапеций

Формула средних прямоугольников





$$\int_a^b f(x)dx \approx h\frac{y_0+y_1}{2}+h\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+h\frac{y_{n-1}+y_n}{2}=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}\right)=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right).$$

$$h=\frac{b-a}{n}; \quad y_i=f(x_i).$$

Абсолютная погрешность R_n формулы трапеций определяется

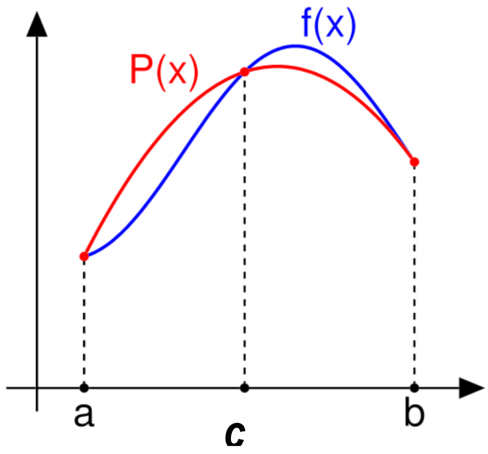
$$|R_n|\le\left|\int_a^b f(x)dx-h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)\right|.$$

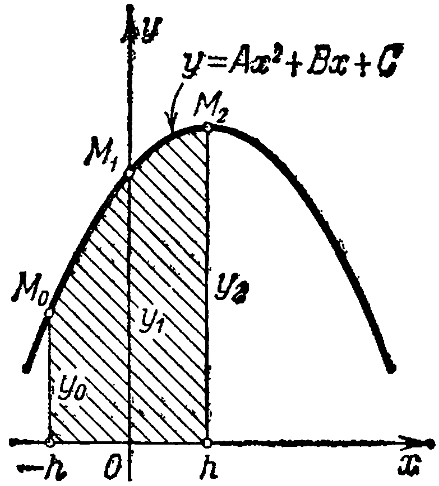
Вычисляется погрешность

$$|R_n|\le\frac{(b-a)^3M_2}{12n^2}=\frac{(b-a)h^2M_2}{12}; \quad M_2=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

Для линейной функции $y = kx + b$ погрешность формулы трапеций равна нулю.

Формула Симпсона (парабол)





Уравнения этих парабол имеют вид $Ax^2 + Bx + C$, где коэффициенты A, B, C могут быть легко найдены по трем точкам пересечения параболы с исходной кривой

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C$$
$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$$
$$y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 = C$$

Обозначим $2h = x_2 - x_0$.

$$\begin{aligned} &\text{если } x_0 = -h, \text{ то } y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ &\text{если } x_1 = 0, \quad \text{то } y_1 = \qquad\qquad C, \\ &\text{если } x_2 = h, \quad \text{то } y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

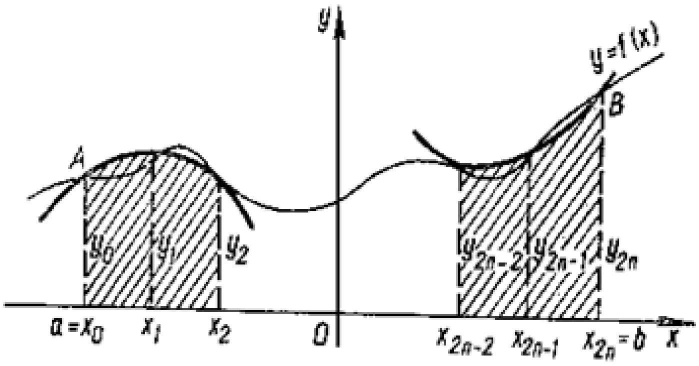
Выразив константы A и C через y_0, y_1 и y_2

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Формула парабол для сетки из двух одинаковых отрезков

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Разбивая отрезок (a, b) на $2n$ одинаковых отрезков со значениями функции в центрах отрезков



Составная формула парабол

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})\right).$$

Или в свёрнутом виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{i=0}^{n-1}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + 2y_{2i+2}).$$

Абсолютная погрешность R_n формулы трапеций определяется

$$|R_n| \le \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + 2y_{2i+2})\right|$$

Вычисляется погрешность

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5 M_4}{2880n^4} = \frac{(b-a)h^4 M_4}{2880}; \quad M_4 = \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$$

Несобственные интегралы

Типы несобственных интегралов

Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Определение и свойства. Сходимость несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости интегралов от несобственных функций.

Интеграл вида

$$S = \int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty} \int_0^{\eta} f(x)dx,$$

называется несобственным интегралом 1-го рода, или несобственным интегралом с бесконечным пределом

$$I = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\eta\to-\infty} [F(a) - F(\eta)] = [F(a) - F(-\infty)].$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, а если не существует или равен бесконечности, то говорят, что расходится.

Примеры.

$$S = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$$

$$S = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln(x)|_1^{\infty} = \infty$$

$$S = \int_1^{\infty} \ln(x)dx$$

В данном примере предел не определён

$$S = \int_0^{\infty} \cos x dx = \sin|_0^{\infty} = ?$$

Возможен интеграл с бесконечными пределами $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Интеграл сходится, если сходятся оба интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

Примеры.

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)\,|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$ Интеграл расходится.

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\,|_{-\infty}^{\infty} = 0 + \infty = \infty.$$

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\,|_{-\infty}^{+\infty} = \infty - \infty$$ Интеграл расходится.

Признаки сходимости интегралов несобственных функций

Если справедливо неравенство

$$0 \le f(x) \le \varphi(x)$$

и интеграл $\int_{a}^{\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ тоже сходится.

Пример.
Интеграл

$$S = \int_{\beta}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{a}^{\infty} = \infty;\ \alpha < 1 \\ \ln|x| = \infty;\ \alpha = 1 \\ \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{a}^{\infty} < \infty;\ \alpha > 1 \end{cases}$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Если сходится интеграл $S=\int_a^{\infty}|f(x)|dx$, то сходится и интеграл $S=\int_a^{\infty}f(x)dx$, в этом случае говорят, что интеграл сходится абсолютно (по абсолютной величине).

Если расходится интеграл $S=\int_a^{\infty}|f(x)|dx$, но сходится и интеграл $S=\int_a^{\infty}f(x)dx$, в этом случае говорят, что интеграл сходится условно.

Пример условно сходящегося интеграла. Интеграла Дирихле

$$S=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл от неограниченных функций, или несобственный интеграл 2-го рода

В точках разрыва для интегрирования используют такой несобственный интеграл.

Теорема сравнения. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ непрерывной при $a \le x < b$ и неограниченной при $x \to b$ функция называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Если такой интеграл существует, то он называется сходящимся, а если не существует, то расходящимся.

Аналогично

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx,\ \delta>0.$$

Если первообразная существует, тогда

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Примеры.

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_0^a = \ln|a| - \ln|0| = \ln|a| - \infty .$$

Данный интеграл расходится

В точке разрыва, где функция претерпевает бесконечный разрыв (разрыв 2-го рода) можно разбивать область интегрирования в точке разрыва *c*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx .$$