Математический анализ

Краткий конспект лекций

Составитель

В.А.Чуриков

Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Высшей математики
Томского политехнического университета.

http://www.tpu.ru/

Национальный исследовательский Томский политехнический университет:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

E-mail: vachurikov@list.ru

Сайт: http://portal.tpu.ru/SHARED/v/VACHURIKOV

1. Неопределённый интеграл

Краткая программа

01. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Обозначение Лейбница. Составные части интеграла. Свойства неопределённого интеграла. Связь неопределённого интеграла и дифференциала. Дифференциал как мера интегрирования. Константа (постоянная) интегрирования и неоднозначность при интегрировании. Геометрическое представление неоднозначности интегрирования. Таблица неопределённых интегралов элементарных функций и некоторых простых выражений. Непосредственное интегрирование. Интегрирование методом подстановки (заменой переменной, внесением под знак дифференциала). Интегрирование по частям. Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях.

02. Интегрирование простых дробей и рациональных выражений.

$$\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$$

(ab)

$$\int \frac{A}{(ax+b)^{\alpha}}dx = \frac{A}{a(-\alpha+1)}\frac{1}{(ax+b)^{\alpha-1}} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

Разложение рациональных выражений на простые дроби вида (метод неопределённых коэффициентов) $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx; n < m$.

Деление рациональных выражений, когда в числителе порядок выше, чем в знаменателе $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx; n > m$.

03. Интегрирование иррациональных выражений.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

04. Интегрирование тригонометрических выражений вида: $\sin^{2n}x\cos^{2m+1}x$ и $\sin^{2n+1}x\cos^{2m}x$.

Интегрирование тригонометрических выражений $\sin^{2n}x\cos^{2m}x$ и $\sin^{2n+1}x\cos^{2m+1}x$ понижением порядка и разложением произведений на слагаемые

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические выражения: $\sin mx\cos nx$; $\cos mx\cos nx$; $\sin mx\sin nx$ Интегрирование тригонометрических рациональных выражений через тангенс половинного угла.

2. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция является первообразной по отношению к своей производной

$$F(x)\xrightarrow{\frac{d}{dx}F(x)}F'(x)\equiv f(x)\xrightarrow{\frac{d}{dx}f(x)}f'(x)\equiv F''(x)$$

$$F(x)+C_1x+C_2\xleftarrow{\int(f(x)+C_1)dx}F'(x)\equiv f(x)+C_1\xleftarrow{\int\varphi(x)dx}\varphi(x)\equiv f'(x)=F''(x)$$

$$F(x)\underset{\int f(x)dx}{\overset{\frac{d}{dx}F(x)}{\rightleftarrows}}F'(x)\equiv f(x)\underset{\int f'(x)dx}{\overset{\frac{d}{dx}f(x)}{\rightleftarrows}}f'(x)\equiv F''(x)$$

3. Обозначения

$$\int f(x)dx \equiv \int dx f(x).$$

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, в некоторой области значений переменной *x*, если в данной области функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$, или

$$\frac{d}{dx}F(x) \equiv F'(x) = f(x).$$

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Определение. Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется множество всех первообразных данной функции. $F(x)+C$, которые различаются константой интегрирования C

$$\int f(x)dx = F(x)+C; \qquad C = \text{const}, -\infty < C < \infty.$$

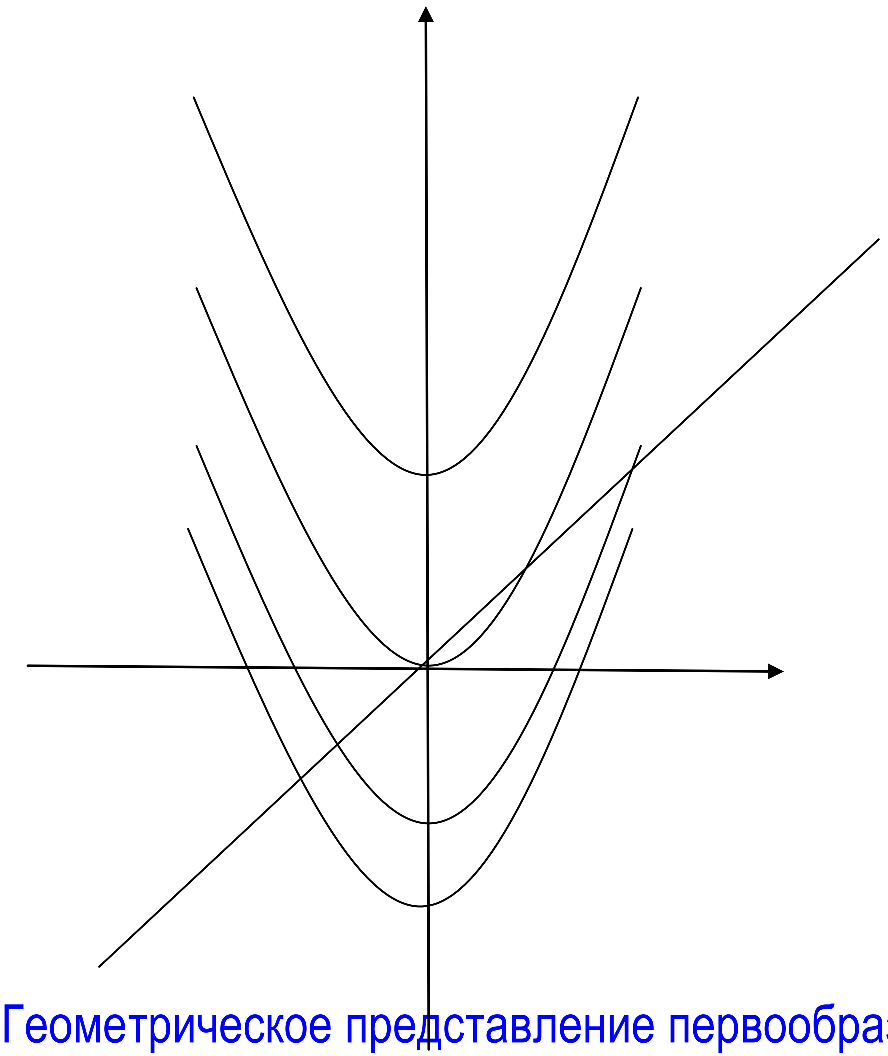

Рис. Геометрическое представление первообразных с точность до сложения с константой интегрирования

Теорема. Все первообразные равны с точностью до константы, которая называется *константой интегрирования*.

$$\frac{d}{dx}(F(x)+\tilde{C}-\Phi(x)-\bar{C})=(F'(x)-\Phi'(x))+(\tilde{C}'-\bar{C}')=$$
$$=f(x)-f(x)+(0-0)=0 \, .$$

$$\int f(x)dx = F(x)+C \, .$$

Связь между операциями интегрирования и дифференцирования

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) \equiv \left(\int f(x)dx\right)' \equiv \frac{d}{dx}(F(x)+C) = f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} f(x)dx \equiv \int f'(x)dx = f(x)+C$$

Операции дифференцирования и интегрирования не коммутативны (не перестановочны)

$$\int f'(x)dx - \left(\int f(x)dx\right)' = C$$

Не коммутативность интегрирования и дифференцирования

$$\left(\int \frac{d}{dx} f(x)dx\right) - \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = C.$$

Первообразные от одной и той же функции если не равны между собой, то они отличаются только константой интегрирования. Множество всех первообразных функции является неопределённым интегралом. Интегрирование есть нахождение интеграла функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C = \mathrm{const}, -\infty < C < \infty.$$

Соотношения для дифференциалов и интегралов

$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = f(x)dx$$

$$\int df(x)dx = \int f'(x)dxdx = f(x)dx + C$$

$$\int df(x)dx - d\int f(x)dx = C.$$

4. Таблица неопределённых интегралов и производных

$F(x)=\int f(x)dx$, Первообразная (без константы интегрирования)	$f(x)$ Функция	$f'(x)$ Производная первого порядка	$f^{(k)}(x)$ Производная порядка k
$C=\text{const}$	0	0	0
Cx	$C=\text{const}$	0	0
x	1	0	0
$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1};\alpha=\text{const};\alpha\neq-1.$	x^{α}	$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha\neq 0$, $\alpha=\text{const}$	$\alpha(\alpha-1)\cdot$ $\cdot(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)x$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^{2}}$	$(-1)^{k}(k)!\dfrac{1}{x^{k+1}}$
$x(\ln\lvert x\rvert-1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$(-1)^{k-1}(k-1)!\dfrac{1}{x^{k}}$
$x\left(\log_a x-\dfrac{1}{\ln a}\right)=$ $=x(\log_a x-\log_a e)$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{\log_a e}{x}$	$(\log_a x)'=$ $=(-1)^{k-1}(k-1)!\dfrac{1}{x^{k}}\dfrac{1}{\ln a}$
e^{x}	e^{x}	e^{x}	e^{x}

$F(x)=\int f(x)dx$, Первообразная (без константы интегрирования)	$f(x)$ Функция	$f'(x)$ Производная первого порядка	$f^{(k)}(x)$ Производная порядка k
$a^{-1}e^{ax}$	e^{ax}	ae^{ax}	$a^k e^{ax}$
$\frac{a^x}{\ln a}=a^x\log_a e;$ $a=\text{const},\ a>0,\ a\neq 1$	a^x	$a^x\ln a=\frac{a^x}{\log_a e}$	$a^x(\ln a)^k=\frac{a^x}{(\log_a e)^k}$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}k\right)$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}k\right)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$		
$-\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{cosec}^2 x$		
$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$, в интервале, где	

$F(x)=\int f(x)dx$, Первообразная (без константы интегрирования)	$f(x)$ Функция	$f'(x)$ Производная первого порядка	$f^{(k)}(x)$ Производная порядка k
		$\sin x \neq 0$	
$\ln\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\|$	$\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x$		
$\ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|$	$\frac{1}{\cos x}=\sec x$		
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
$x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\|1+x^2\|$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\frac{1}{a}\left(x\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln\|x^2+a^2\|\right)$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}=$ $=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a},\ a>0$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	
$\frac{1}{a}\left(x\cdot\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln\|x^2+a^2\|\right)$	$\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}=$ $=-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a},\ a>0$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	

$F(x)=\int f(x)dx$, Первообразная (без константы интегрирования)	$f(x)$ Функция	$f'(x)$ Производная первого порядка	$f^{(k)}(x)$ Производная порядка k
$x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x=-\arccos x$, $\|x\|>\|1\|$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\int\arcsin\dfrac{x}{a}dx=$ $=x\cdot\arcsin\dfrac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}=-\arccos\dfrac{x}{a}$, $\|x\|>\|a\|, a>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	
$\int\arccos\dfrac{x}{a}dx=$ $=x\cdot\arccos\dfrac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$	$\arccos\dfrac{x}{a}=-\arcsin\dfrac{x}{a}$, $\|x\|>\|a\|, a>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	
$\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{a}=$ $=-\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}, a>0$	$\dfrac{1}{x^2+a^2}; \quad a\neq 0$		
$\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\|=-\dfrac{1}{a}\mathrm{arth}\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{1}{x^2-a^2}; \quad a\neq 0$		

$F(x)=\int f(x)dx$, Первообразная (без константы интегрирования)	$f(x)$ Функция	$f'(x)$ Производная первого порядка	$f^{(k)}(x)$ Производная порядка k
$\frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a}=$ $=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|, \|x\|<a$ $\frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a}=$ $=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|, \|x\|>a$	$\frac{1}{a^2-x^2}$		
$\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a}\right\|$	$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a}}$		
$\operatorname{arsh}\frac{x}{a}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2+a^2}\right\|$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$		
$\operatorname{arch}\frac{x}{a}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$		
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	

$F(x)=\int f(x)dx$, Первообразная (без константы интегрирования)	$f(x)$ Функция	$f'(x)$ Производная первого порядка	$f^{(k)}(x)$ Производная порядка k
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$		
$-\operatorname{cth} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$		
$\ln\lvert\operatorname{ch} x\rvert$	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	
$\dfrac{a}{c}x+\dfrac{cb-da}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$-\dfrac{bc-ad}{(cx+d)^2}$	$(-1)^n\dfrac{(bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}n!c^{n-}$

5. Основные свойства неопределенного интеграла

Линейность (однородность и аддитивность). Однородность (вынесение константы за знак интеграла), аддитивность интегрирования (интеграл суммы равен сумме интегралов),

однородность

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx; \qquad a = \mathrm{const};$$

аддитивность

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C; \qquad a, b, C = \mathrm{const}.$$

6. Основные методы интегрирования

Метод замены переменной (подстановка, подведение под знак дифференциала)

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int f[\varphi(t)]d\varphi(t)=\int f(x)dx;\ x=\varphi(t),\ t=\varphi^{-1}(t).$$

Пример. $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2\xrightarrow{x^2=y}\frac{1}{2}\int e^y dy=\frac{e^y}{2}+C=\frac{e^{x^2}}{2}+C.$

Пример. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int\ln^2 x\,d(\ln x)\xrightarrow{\ln x=\varphi}\int\varphi^2 d\varphi=\frac{\varphi^3}{3}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C.$

Пример.

$$\int\frac{2}{(4x+5)^6}dx=\frac{1}{4}\int\frac{2}{(4x+5)^6}d(4x+5)\xrightarrow{4x+5=\varphi}\frac{2}{4}\int\frac{1}{\varphi^6}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\varphi^{1-6}}{1-6}+C=-\frac{1}{2}\frac{\varphi^{-5}}{5}+C=-\frac{1}{10}\frac{1}{(4x+5)^5}+C.$$

7. Интегрирование по частям

Запишем производную произведения двух функций

$$(u\upsilon)' = u\upsilon' + \upsilon u'$$

или дифференциал произведения двух функций

$$d(u\upsilon) = ud\upsilon + \upsilon du$$

$$ud\upsilon = d(u\upsilon) - \upsilon du$$

Внеся левую и правую части под знак интеграла и сделав перестановки, получим

$$\int ud\upsilon = \int u\upsilon dx - \int \upsilon du = u\upsilon - \int \upsilon du =$$
$$= \int u\upsilon' dx = u\upsilon - \int \upsilon u' dx$$

$$\int u\,d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon\,du$$

Пример $\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x,\ d\upsilon = e^x dx \\ du = dx,\ \upsilon = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx + C = xe^x - x = e^x(x-1) + C_1.$

Пример

$$\int \log_a x\,dx = \begin{vmatrix} u = \log_a x,\ d\upsilon = dx \\ du = \dfrac{1}{x\ln a}dx,\ \upsilon = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\log_a x - \int \frac{x}{x\ln a}dx + C_1 = x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + C = x\left(\log_a x - \frac{1}{\ln a}\right) + C$$

Проверка $\dfrac{d}{dx}x\left(\log_a x - \dfrac{1}{\ln a}\right) = \log_a x - \dfrac{1}{\ln a} + \dfrac{x}{x\ln a} = \log_a x$

8. Функции, интегрируемые и не интегрируемые в элементарных функциях

Интегральная экспонента

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \mathrm{Ei}(x) + C$$

Интегральный логарифм

$$\int \frac{x}{\ln x} dx = \mathrm{Li}(x) + C$$

Интегральный синус

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{Si}(x) + C$$

Интегральный косинус

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = \mathrm{Ci}(x) + C$$

Интеграл Пуассона (интеграл ошибок)

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}\Phi(x) + C$$

Здесь $\Phi(x)$ - функция Лапласа

Интегралы Френеля

$$\int \sin\frac{\pi x^2}{2}dx = S(x) + C; \qquad \int \cos\frac{\pi x^2}{2}dx = C(x) + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx; \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$$

Другие «не берущиеся» интегралы

$$\int \frac{x}{\sin x}dx; \quad \int \sqrt{x}e^x dx; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}; \quad \int \sqrt[3]{x^2 + 1}dx;$$

9. Интегрирование некоторых типов функций

Интегрирование простых рациональных выражений

$$\int \frac{A}{ax+b}dx \xrightarrow{ax+b=y} \frac{A}{a}\int \frac{1}{y}dy = \frac{A}{a}\ln|y| + C = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{A}{(ax+b)^{\alpha}}dx \xrightarrow{ax+b=y} \frac{A}{a}\int \frac{1}{y^{\alpha}}dy = \frac{A}{a(-\alpha+1)}y^{-\alpha+1} + C = \frac{A}{(-\alpha+1)a}(ax+b)^{-\alpha+1} + C$$

10. Два способа интегрирования рациональных выражений с квадратным трёхчленом

Метод неопределённых коэффициентов

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)} \right) dx = \int \left(\frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{(x-a)(x+a)} \right) dx =$$

$$Ax + Aa + Bx - Ba = 1$$

$$\left| \begin{matrix} A+B=0 \\ A-B=1/a \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} A=1/2a \\ B=-1/2a \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| + C =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Интегрирование правильной рациональной дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^m + b_{n-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0};$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0, b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m = \text{const}, \ a_0 \neq 0$$

Знаменатель $Q(x)$ может быть разложен в произведение

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)^m \ldots (x-c)^l \ldots (x^2 + \alpha x + \beta)^s \ldots (x^2 + \gamma x + \chi)^r$$

$$a, b, \ldots, c, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, \gamma, \chi, k, m, \ldots, l, s, \ldots, r = \text{const}$$
$$a, b, \ldots, c, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, \gamma, \chi \in \mathbb{R}; \qquad k, m, \ldots, l, s, \ldots, r \in \mathbb{N}$$

Тогда возможно разложение на простые дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+$$

$$+\frac{M_1x+K_1}{x^2+\alpha_1x+\beta_1}+\frac{M_2x+K_2}{(x^2+\alpha_2x+\beta_2)^2}+\ldots+\frac{M_sx+K_s}{(x^2+\alpha_sx+\beta_s)^s}+\ldots+$$

$$+\frac{N_1x+R_1}{x^2+\gamma_1x+\chi_1}+\frac{N_2x+R_2}{(x^2+\gamma_2x+\chi_2)^2}+\ldots+\frac{N_rx+R_r}{(x^2+\gamma_rx+\chi_r)^r}$$

Неопределённые коэффициенты - константы $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_l, M_1, K_1, M_2, K_2, \ldots M_s, K_s, N_1, R_1, N_2, R_2, \ldots N_r, R_r, \ldots$, которые требуется определить

Пример. $\int \frac{2x^2+3x+3}{x^3+2x^2+x}dx,$

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{2x^2-3x+3}{x(x^2-2x+1)}=\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{R}{(x-1)^2}$$

$$\frac{A(x-1)^2}{x(x-1)^2}+\frac{Bx(x-1)}{x(x-1)^2}+\frac{Rx}{x(x-1)^2}=\frac{A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Rx}{x^3+2x^2+x}=$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Rx}{x^3+2x^2+x}=\frac{(A+B)x^2+(R-B-2A)x+A}{x^3+2x^2+x}$$

$$A+B=2,\ R-B-2A=-3,\ A=3$$

Решая эту систему, получим для коэффициентов значения

$$B=-1,\ R=2,\ A=3$$

Переходим к сумме трёх простых интегралов, которые легко находятся

$$\int \frac{2x^2+3x+3}{x^3+2x^2+x}dx = 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} = 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

Сведение к полному квадрату (простой случай)

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \xrightarrow[c-\left(\frac{b}{2}\right)^2 = q^2 > 0]{x+\frac{b}{2}=y} \int \frac{dy}{y^2+q^2} =$$

$$= \frac{1}{q}\operatorname{arctg}\frac{y}{q} + C = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} + C$$

$$\sqrt{c-\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4c}{4}-\frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2} = q$$

Выражение через полный квадрат (первый вариант)

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}dx \xrightarrow[\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=q^2>0]{x+\frac{b}{2a}=y} \frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{y^2+q^2}dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{Ay-\frac{Ab}{2a}+B}{y^2+q^2}dy = \frac{A}{a}\int \frac{y}{y^2+q^2}dy + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{y^2+q^2}dy =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{1}{y^2+q^2}d(y^2+q^2) + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{y^2+q^2}dy =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln|y^2+q^2| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{q}\operatorname{arctg}\frac{y}{q}+C =$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{4c}{4a}-\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac-b^2} = q$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{Ab}{2a}\right)^2\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+C$$

Выражение через полный квадрат (второй вариант)

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}dx \xrightarrow[\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=q^2<0]{x+\frac{b}{2a}=y} \frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{y^2-q^2}dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{Ay-\frac{Ab}{2a}+B}{y^2-q^2}dy = \frac{A}{a}\int \frac{y}{y^2-q^2}dy + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{y^2-q^2}dy =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{1}{y^2-q^2}d(y^2-q^2) + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{y^2-q^2}dy =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln|y^2-q^2| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| + C =$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{4c}{4a}-\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac-b^2} = q$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}+\left(\frac{Ab}{2a}\right)^2\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\ln\left|\frac{2ax-\sqrt{4ac-b^2}}{2ax+\sqrt{4ac-b^2}}\right| + C$$

Пример. $\int \frac{3}{x^2+2x+1}dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2}d(x+1) = \frac{-3}{(x+1)} + C$;

Пример. $\int \frac{3}{x^2+2x+3}dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2+2}d(x+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$.

Пример. $\int \frac{3}{x^2+2x-5}dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2-6}d(x+1) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}}\right| + C$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \left| \begin{array}{ll} x = a\operatorname{ch} t & x,t>0 \\ dx = a\operatorname{sh} t\,dt & \sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{sh} t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{a\operatorname{sh} t\,dt}{a\operatorname{sh} t} = \int dt = t + C = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = \operatorname{ch} t \\ \\ t = \operatorname{arch}\dfrac{x}{a} \end{array} \right| = \operatorname{arch}\frac{x}{a} + \tilde{C} = \ln\left|\frac{1}{a}(x - \sqrt{x^2-a^2})\right| + \tilde{C} =$$

$$= \ln\left|x - \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln|a| + \tilde{C} = \ln\left|x - \sqrt{x^2-a^2}\right| + C; \qquad C = \tilde{C} - \ln|a|.$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{a} = e^t + e^{-t} \Rightarrow e^t - \frac{2x}{a} + e^{-t} = 0 \Rightarrow e^{2t} - \frac{2x}{a}e^t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^t = \frac{\dfrac{2x}{a} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{\dfrac{2x}{a} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \ln\left|\frac{x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \left| \begin{matrix} x = a\operatorname{sh} t & x, t > 0 \\ dx = a\operatorname{ch} t dt & \sqrt{x^2+a^2} = a\operatorname{ch} t \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{a\operatorname{ch} t dt}{a\operatorname{ch} t} = \int dt = t + C = \left| \begin{matrix} \frac{x}{a} = \operatorname{sh} t \\ t = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} \end{matrix} \right| = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + \tilde{C} = \ln\left|\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right| + \tilde{C} =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \ln|a| + \tilde{C} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C. \qquad C = \tilde{C} - \ln|a|.$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{a} = e^t - e^{-t} \Rightarrow e^t - \frac{2x}{a} - e^{-t} = 0 \Rightarrow e^{2t} - \frac{2x}{a}e^t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^t = \frac{\frac{2x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{2x}{a}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\frac{2x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{2x}{a}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \ln\left|\frac{x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right|$$

Окончательно для двух формул запишем

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

11. Интегрирование тригонометрических выражений разного вида

Тригонометрические выражения вида

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)dx; \qquad \int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)dx; \qquad \int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)dx$$

Используя формулы

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))$$

Интегралы разбиваются на суммы двух интегралов получим выражения, которые легко интегрируются

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)dx = \frac{1}{2}\int (\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))dx$$

$$\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)dx = \frac{1}{2}\int (\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))dx$$

$$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)dx = \frac{1}{2}\int (\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))dx$$

Тригонометрические выражения вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx; \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

Одно из чисел *m* или *n* нечётное, например $m = 2k + 1 > 0; \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x d\cos x =$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d\cos x = \int (1 - y^2)^k y^n dy$$

Оба числа *m* или *n* чётные

В частности, можно использовать формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Тригонометрические выражения вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Через тангенс половинного угла

Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $-\pi \leq x \leq \pi$

Сделав замену в выражении:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$