Математический анализ

Ряды

Краткий конспект лекций

Составитель

В.А.Чуриков

Кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедры Высшей математики
Томского политехнического университета.

Национальный исследовательский
Томский политехнический университет:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

http://www.tpu.ru/

E-mail: vachurikov@list.ru

Сайт: http://portal.tpu.ru/SHARED/v/VACHURIKOV

1. Числовые ряды

Определение. Бесконечная сумма вида

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n; \qquad n \in \mathbb{N}; \quad a_n = \text{const}; \quad |a_n| < \infty,$$

называется рядом, величины a_n называют элементами (членами) ряда и являются элементами числовой последовательности.

Определение. Если элементами ряда a_n являются вещественные или комплексные числа, то ряд называется *числовым рядом*.

Определение. Если существует конечная сумма S ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, то говорят, что *ряд сходится*, а сумма всех членов ряда будет

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \qquad |S| < \infty.$$

Если предел равен бесконечности ($\pm\infty$) или не существует, то *ряд называется расходящимся*. Ряд либо сходится, либо расходится, иного не дано.

Определение. Сумма первых членов ряда называется *частичной суммой ряда*

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i .$$

Остаточный член ряда

$$r_n = a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_{r+n} + \ldots = \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$$

Для сходящегося ряда справедливо

$$S_n = S - r_n.$$

Нумерация элементов ряда возможна с разных первых элементов. Между нумерациями возможны преобразования

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i; \xrightarrow{j=i+1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \xrightarrow{k_0=i+k_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k .$$

Для других нумераций частичная сумма ряда будет

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i; \xrightarrow{j=i+1} S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \xrightarrow{k_0=i+k_0} S_n = \sum_{k=k_0}^{n+k_0} a_k .$$

2. Свойства сходящихся рядов

Теорема. Для того, чтобы ряд сходился, необходимо (но не достаточно), чтобы общий элемент ряда стремился к нулю, когда его номер n стремится к бесконечности

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Для частичных сумм справедливы утверждения:

Теорема. Чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы предел частичных сумм S_n при $n\to\infty$ существовал и был конечным

$$\lim_{n\to 0} S_n = S; \qquad |S| < \infty .$$

Теорема. Добавление или вычитание конечного числа элементов ряда не влияет на сходимость, но изменяет сумму ряда.

Следствие. Если добавить или убрать конечное число конечных элементов в сходящийся ряд оставляют ряд сходящимся.

Определение. Ряды с положительными членами называются *знакоположительными рядами*

3. Сравнение рядов

Зная о сходимости одних рядов можно судить о сходимости (расходимости) других рядов

Теорема (признак сравнения). Если есть два ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ с коэффициентами ($a_n \geq 0$; $c_n \geq 0$) и начиная с некоторого элемента N выполняются соотношения неравенства

$$a_1 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2, \quad \dots \quad a_n \geq b_n \quad \dots,$$

тогда из сходимости первого ряда следует сходимость второго ряда, или из расходимости второго следует сходимость первого.

Теорема (предельный признак сравнения). Если есть два ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ с коэффициентами ($a_n > 0$; $c_n > 0$) и выполняется соотношение соответствующие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C; \qquad C = \text{const}; \quad 0 < C < \infty,$$

тогда оба ряда либо сходящиеся, либо расходящиеся.

Теорема. Если члены ряда с некоторого номера меньше соответствующих членов ряда сходящегося, то первоначальный ряд сходится.

Теорема (о зажатой последовательности). Если есть три ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ и соответствующие элементы первого ряда больше элементов второго ряда, а соответствующие элементы второго больше элементов третьего ряда ($a_0 \geq b_0 \geq c_0, a_1 \geq b_1 \geq c_1, \dots a_n \geq b_n \geq c_n \dots$). Тогда из сходимости (расходимости) первого и третьего рядов следует сходимость (расходимость) второго ряда.

Следствие. Если пределы крайних рядов совпадают, то и сумма зажатого ряда тоже такая же.

4. Прогрессии

Арифметическая прогрессия (a_1 — первый член прогрессии, а d — *разность арифметической прогрессии*). Члены арифметической прогрессии

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_1 + d(n-1).$$

Сумма первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Сумма арифметической последовательности всегда равна бесконечности

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,$$

за исключением случая, когда $d = 0$.

Геометрическая прогрессия (u_1 — первый член прогрессии, а q — *знаменатель геометрической прогрессии*)

$$u_n = u_{n-1} q = u_1 q^{n-1}; \qquad u_n^2 = u_{n-1} u_{n+1}.$$

Сумма всех первых членов геометрической прогрессии

$$\begin{gathered} S_n - S_n q = S_n (1-q) = \\ = u_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1})(1-q) = \\ = u_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}) - u_1 q (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}) = \\ = u_1 1 + u_1 (q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}) - u_1 (q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}) - u_1 q^n = \\ = u_1 (1 - q^n) \end{gathered}$$

Окончательно получим

$$S_n = \frac{u_1 (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{u_1 (q^n - 1)}{q - 1}; \qquad q \neq 1,$$

$$S_n = u_1 n; \qquad q = 1.$$

Сумма всех членной геометрической прогрессии сходится при $|q| \le 1$ и равна

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q}.$$

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

называется *гармоническим рядом*

Пример. Гармонический ряд расходится, но необходимое условие сходимости для него выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\infty.$$

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},$$

называется *рядом Дирихле* или *обобщённым гармоническим рядом.*

Ряд Дирихле сходится при $p>1$, и расходится при $p\leq 1$.

Пример.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{q^n}$ **сходится при** $p\in\mathbb{R}$, $q>1$

Последовательность Фибоначчи

$$a_1=1; \qquad a_2=1$$

$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$$

5. Признаки сходимости рядов

Признак Даламбера. Если элементы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с некоторого значения *n*, удовлетворяет равенству

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q;\quad q=\mathrm{const};\, q>0\,,$$

где число q не зависит от n, то для

$q<1$ ряд сходится,
$q>1$ ряд расходится,
$q=1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Признак Коши (*предельный*, или *радикальный*). Если элементы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с некоторого значения n, удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q; \quad q = \text{const}; \, q > 0,$$

где число q не зависит от n, то для

$q < 1$ ряд сходится,
$q > 1$ ряд расходится,
$q = 1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Интегральный признак сходимости Коши — Маклорена. Если ряда $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ заменить несобственным интегралом

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \to \int_{n_0}^{\infty} a(x)dx; \qquad n \to x,$$

То из сходимости (расходимости) несобственного интеграла следует сходимость (расходимость) ряда.

Пример. Показать расходимость гармонического ряда с помощью интегрального признака Коши.

Признак сравнения с эталонными рядами, в частности в соответствии со свойствами сравнения рядов. Например, с гармоническим рядом, с рядом Дирихле, с геометрической прогрессией и др.

Пример. Ряд Дирихле $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ является сходящимся для $p>1$ и расходящимся для $p\leq 1$.

Операции над рядами

Умножение рядов на число и сложение рядов

Линейность рядов относительно операций умножения на число и сложения.

Теорема. Умножение на число (однородность)

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i; \quad \lambda = \text{const}.$$

Теорема. Сложение рядов (аддитивность)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i).$$

Теорема. Относительно операции умножение на число и сложения ряды образуют линейное пространство.

Если члены ряда с некоторого номера больше соответствующих членов ряда расходящегося, то первоначальный ряд расходится.

Теорема. Сложение сходящегося и расходящегося ряда дают расходящийся ряд.

Теорема. Умножение сходящегося ряда на константу не меняет его сходимость. Если ряд сходящийся, то сумма нового ряда умножается на константу

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i; \qquad \lambda = \text{const}.$$

Умножения ряда на число

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = S$$

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha a_i\right) = \alpha(a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots) = (\alpha a_0 + \alpha a_1 + \ldots + \alpha a_n + \ldots) = \alpha S$$

Сложение двух рядов. Суммой двух рядов является ряд, каждый элемент которого состоит из суммы соответствующих элементов складываемых рядов.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = S_a; \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i = b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots = S_b$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) =$$

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots = S_a + S_b$$

1. Сложение рядов коммутативно

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) =$$

$$= (b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots) =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots =$$

$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1) + \ldots + (b_n + a_n) + \ldots = S_a + S_b = S_b + S_a$$

2. Нулевой ряд. Если все члены ряда равны нулю и его сумма равна нулю, то такой ряд будем называть нулевым.

$$\sum_{i=0}^{\infty} o_i = o_0 + o_1 + \ldots + o_n + \ldots = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0,$$

$$o_0 = o_1 = \ldots = o_n = \ldots = 0,$$

тогда

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} o_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} o_i\right) =$$

$$= (o_0 + o_1 + \ldots + o_n + \ldots) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) =$$

$$(o_0 + b_0) + (o_1 + b_1) + \ldots + (o_n + b_n) + \ldots = 0 + S_b = S_b.$$

3. Ряд противоположный данному ряду является такой ряд, все члены которого противоположны данному ряду и при сложении дают ноль

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) = (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1) + \ldots + (a_n - a_n) + \ldots = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0,$$

$$0 + \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i.$$

Теорема. Любой числовой ряд с конечными элементами имеет противоположный ряд, который единственный.

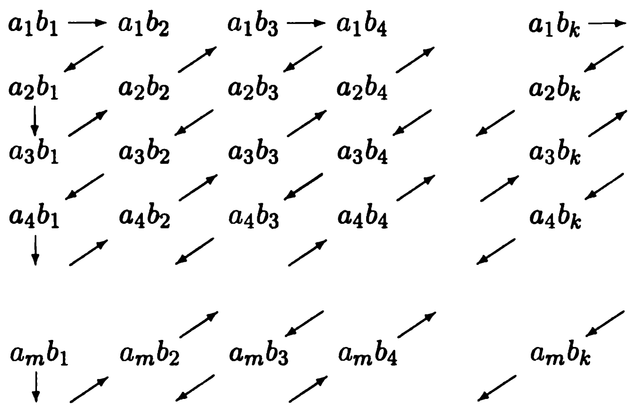
Алгебраическая структура рядов относительно сложения

Теорема. Относительно операции сложения ряды образуют коммутативную группу.

Теорема. Относительно операции умножения на число и сложения ряды образуют линейное пространство.

Умножение рядов

Умножение сходящихся рядов



$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_1b_3) + \ldots$$

Единичный ряд.

Алгебраическая структура рядов относительно 2-х операций

Теорема. Умножение сходящихся рядов дают сходящийся ряд, сумма которого равна произведению сумм перемножаемых рядов.

Теорема. Любой сходящийся числовой ряд с конечными элементами имеет обратный ряд, который единственный.

Операция над рядом, по нахождению его обратного ряда, называется *обращением ряда*.

Алгебраическая структура умножения рядов

1.) $$\left[\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} b_i\right)\right]\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} c_i\right)=\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i\right)\left[\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} b_i\right)\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} c_i\right)\right]$$

2.) $$1\cdot\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i=\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i$$

3.) $$\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i\right)^{-1}=1$$

4.) $$\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} b_i\right)=\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} b_i\right)\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i\right)$$

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i=A,\ \sum_{i=i_0}^{\infty} b_i=B,\ \sum_{i=i_0}^{\infty} c_i=C;|A|,|B|,|C|<\infty$$

$$\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} b_i\right)=AB$$

$$\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i\right)^{-1}=A^{-1}$$

Произведение нулевого ряда с сходящийся ряда, коммутативно

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} o_i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)=\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty} o_i\right)=(o_0+o_1+\ldots+o_n+\ldots)\cdot(b_0+b_1+\ldots+b_n+\ldots)=$$
$$=(b_0+b_1+\ldots+b_n+\ldots)\cdot(o_0+o_1+\ldots+o_n+\ldots)=0.$$

Произведение нулевого ряда на сходящийся ряд, все элементы которого конечны, даёт нулевой ряд

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} o_i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) = (o_0 + o_1 + \ldots + o_n + \ldots)\cdot(b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) =$$
$$= (0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots)\cdot(b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) =$$
$$= 0\cdot(b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) + 0\cdot(b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) + \ldots +$$
$$+ 0\cdot(b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots) + \ldots =$$
$$= (0\cdot b_0 + 0\cdot b_1 + \ldots + 0\cdot b_n + \ldots) + (0\cdot b_0 + 0\cdot b_1 + \ldots + 0\cdot b_n + \ldots) + \ldots$$
$$+ (0\cdot b_0 + 0\cdot b_1 + \ldots + 0\cdot b_n + \ldots) + \ldots =$$
$$= 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0.$$

Алгебраическая структура рядов относительно умножения

Теорема. Относительно операции умножения ряды образуют коммутативную группу.

Определение. Единичным рядом называется такой ряд, в котором первый элемент является единицей, а все остальные равны нулю и сумма ряда равна единице.

$$\sum_{i=0}^{\infty} e_i = e_0 + e_1 + \ldots + e_n + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 1,$$

$$o_0 = 1,\ o_1 = o_2 = \ldots = o_n = \ldots = 0.$$

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Определение. Ряд называется знакопеременным, если его элементы могут иметь разные знаки

Например

$$-a_0 - a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + \ldots - a_n + \ldots; \quad a_n > 0.$$

Определение. Ряд называется знакочередующимся, если любая пара соседних элементов ряда имеют противоположные знаки (знаки у элементов чередуются)

Например. Знакочередующийся ряд начинается или с положительного элемента, или с отрицательного

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots; \qquad n \in \mathbb{N}; \quad a_n = \mathrm{const}; \quad |a_n| < \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots ,$$

Эти ряды получаются друг из друга, путём умножения на -1.

Если сходится (расходится) один из этих рядов, то сходится (расходится) и другой.

Если оба ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ сходятся и имеют суммы

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n; \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n,$$

тогда их суммы связаны

$$S_1 = -S_2.$$

Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Признак Лейбница

Теорема (признак Лейбница). Если у знакочередующегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$, для элементов удовлетворяются условия

1. $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 \ldots a_n > a_{n+1}$,

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

то данный ряд сходится.

Определение. знакопеременным Ряд называется, если его элементы могут иметь разные знаки

Например

$$-a_0 - a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + \ldots - a_n + \ldots$$

Абсолютная и условная сходимость рядов

Определение. Сходящийся знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится соответствующий ему ряд абсолютных значений (знакоположительный ряд) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 \ldots a_n > a_{n+1}$.

Определение. Сходящийся знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ называется *условно сходящимся*, если соответствующий ему ряд абсолютных значений расходится.

Пример условно сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Сумма этого ряда будет

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 < \infty.$$

Для данного ряда рядом абсолютных значений является гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Например

$$1-1+1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots .$$

Теорема о перестановке членов абсолютно сходящихся рядов

Теорема. Если в абсолютно сходящемся ряде переставить любые элементы, то ряд останется абсолютно сходящимся, а сумма ряда будет такой же, как и первоначального ряда.

Теорема (Римана). В условно сходящемся ряде можно так переставить элементы так чтобы ряд сходился к любому наперёд заданному числу, или расходился.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определение. Если элементами ряда являются функции, то такой ряд называется функциональным рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

Сходимость функциональных рядов.

Определение. Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ для значения переменной $x=r$ расходится, то говорят, что точка $x=r$ данного функционального ряда является *точкой расходимости*

Определение. Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ для значения переменной $x=x_0$ сходится, то говорят, что точка x_0 данного функционального ряда является *точкой сходимости.*

Определение. Множество всех точек сходимости данного функционального ряда образуют его *область сходимости*.

Определение. Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ сходится в некоторой области, то его суммой является конечная функция $f(x),\ |f(x)| < \infty$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

Если мы рассматриваем сходимость числового ряда в отдельных точках, то говорят о *поточечной сходимости* ряда.

Правильно сходящийся ряд

Определение. Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ в некоторой области X значения переменной x, называется *правильно сходящимся*, если имеется сходящийся знакоположительный числовой ряд, все элементы которого не меньше соответствующих элементов функционального ряда для всех значений x области X.

Почленное дифференцирование функциональных рядов

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = f_0'(x) + f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots$$

Почленное дифференцирование сходящихся функциональных рядов

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Почленное дифференцирование интегрирование функциональных рядов

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n(x)dx = \int f_0(x)dx + \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx + \ldots$$

Почленное дифференцирование сходящихся функциональных рядов

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \int f(x)dx + C.$$

6. Степенные ряды

Если членами ряда являются степенные функции, то ряд называется степенным

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

Точка x_0 называется *центром ряда*.

Если членами ряда являются степенные функции, то ряд называется степенным

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Преобразовав первый ряд $x - x_0 \to x$ можно свести ко второму ряду.

Для x=0, степенной ряд всегда сходится.

Теорема. Если степенной ряд сходится в точке $x=a\neq 0$, то он также сходится абсолютно в интервале $(-|a|,|a|)$.

Областью сходимости степенного ряда является конечный, или бесконечный интервал $-R$ до R.

$$|R| \leq \infty,$$

где R – радиус *сходимости степенного ряда*. На концах интервала $-R$ до R вопрос о сходимости решается отдельно.

7. Разложения функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена

Функцию $f(x)$ можно представить в виде степенного многочлена с центром в точке $x_0 = \mathrm{const}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n =$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x_0) = a_0 = 0!a_0; \quad 0! = 1\\
&f^{(1)}(x_0) = 1 \cdot a_1 = 1!a_1\\
&f^{(2)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 = 2!a_2\\
&f^{(3)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3!a_3\\
&\ldots\\
&f^{(n)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \cdot a_n = n!a_n\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Выразив a_n, получим коэффициенты

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставив значения коэффициентов в ряд, получим ряд Тейлора для разложения функции в степенной ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n=$$

$$=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+\ldots$$

Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ на отрезке $x\in[a,b]$ разлагается в *ряд Тейлора* на этом же отрезке.

Разложения функций в ряд Макларена

Разложение функций в более простой степенной *ряд Маклорена*, который является частным случаем ряда Тейлора, когда $x_0=0$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n=$$

$$=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+\ldots$$

Разложения некоторых функций в ряд Маклерена

Экспонента

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad R(-\infty, \infty).$$

В частности

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1!} + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \ldots + \frac{(ax)^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}; \quad R(-\infty, \infty),$$

или

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}; \quad R(-\infty, \infty)$$

Разложение гиперболических функций

$$e^{\pm x} = \operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x.$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad R(-\infty, \infty).$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad R(-\infty, \infty).$$

Разложение тригонометрических функций

Используя формулу Эйлера

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x.$$

Подставив вместо переменной *x* в экспоненту *ix* и –*ix*, найдём разложения

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \ldots + \frac{(ix)^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}; \quad R(-\infty, \infty).$$

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \ldots + \frac{(-ix)^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!}; R(-\infty, \infty).$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,,\ R(-\infty, \infty)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\ R(-\infty, \infty)\,.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots;\quad R(-1, 1).$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots;\quad R(-1, 1).$$

Ряд натурального логарифма

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \ldots)dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots;\quad R(-1, 1).$$

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx =$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};\quad R(-1, 1).$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};\quad R(-1, 1)\,.$$

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \ldots =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1};\quad R(-1, 1).$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} - \ldots =$$

$$= \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}; \quad R(-1,1).$$

Биномиальное разложение

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + \frac{a(a-1)(a-2)x^3}{3!} + \ldots +$$

$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^n}{n!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ a \end{pmatrix} x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a x^n ; \quad R(-1,1).$$

Радиус сходимости этого ряда $R = 1$

Коэффициенты

$$\begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} \equiv C_n^a \equiv \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} \text{ ю}$$

Если a целочисленное, то справедливо разложение через биномиальные коэффициенты

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \equiv C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}; \quad m \geq n.$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_n;$$
$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

(всюду $0 < \theta < 1$).

Тангенс

$$\operatorname{tg}\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1},$$

где B_{2n} — числа Бернулли, $R(-\pi/2,\ \pi/2)$

Секанс

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

где E_{2n} — числа Эйлера, $R(-\pi/2,\ \pi/2)$

$$\operatorname{arsh}\ (x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \cdots\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$$

$R(-1,\ 1)$

$$\operatorname{th}\ (x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}$$

$R(-1,\ 1)$

Интегрирование с помощью рядов “не берущихся в элементарных функциях” интегралов

Пример. Нахождение неопределённых интегралов

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)dx = \int\left(\frac{1}{1!}-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+...\right)dx =$$

$$=\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}+...\right)+C.$$

Приближенные вычисления значений функций и чисел с помощью рядов

Обрыв ряда Тейлора

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n =$$

$$= f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+...+$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}; \quad \xi = a+\theta(x-a), 0<\theta<1$$

Остаточный член и погрешность

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}; \qquad \xi = a+\theta(x-a), 0<\theta<1$$

Аппроксимирующий полином

$$P_n(x) \approx f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 +$$

$$+\frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

В частном случае при $x_0 = 0$ имеем разложение в ряд, который называется *рядом Маклорена*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n =$$

$$= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \ldots$$

Аппроксимирующий полином при $x_0 = 0$

$$P_n(x) \approx f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n .$$

Остаточный член ряда

Разложение в ряд Тейлора функции, на отрезке $[a, b]$ имеющей производные до n порядка включительно, то возможно разложение функции для $x \in [a, b]$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \ldots +$$

$$\frac{}{)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)x^n, \qquad \xi = a + \theta(x-a), 0 < \theta < 1.$$

В частном случае при $a = 0$ имеем разложение в ряд, который называется рядом Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)x^n, \xi = \theta x, 0 < \theta < 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S_n(x) + R_n(x);$$

$$f(x) \simeq A_n(x) - R_n(x) = f(x) - R_n(x).$$

Остаточные члены — последние члены рядов Тейлора и Маклорена в форме Лагранжа будет

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}; \quad \xi = \theta x; \quad 0 < \theta < 1; \quad \xi \in [0, x_0].$$

Остаточный член в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}; \; 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член в интегральной форме

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Приведем такие приближенные формулы для наиболее важных функций:

$$e^x \approx 1 + x$$

$$a^x = e^{x \ln a} \approx 1 + x \ln a$$

$$\ln(1 + x) \approx x$$

$$\sin x \approx x$$

$$\mathrm{tg} x \approx x$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$(1 + x)^a \approx 1 + ax$$

$$\sqrt[\alpha]{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\sqrt[\alpha]{1 + x}} \approx 1 - \frac{x}{\alpha}$$

Пользуясь этими приближенными формулами при x близких к нулю (положительных или отрицательных), можно значительно упрощать сложные выражения.

Вычисление числа основания натурального логарифма (числа Непера, или числа Эйлера)

Например, можно найти показатель натурального логарифма e при $x = 1$

$$e^x \xrightarrow{x=1} e^1 = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Вычисление числа π с помощью разложения в ряд арктангенса, поскольку $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ получим ряд Лейбница, или

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)}, \; R(-1,1).$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+1)} + \ldots$$

$$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \ldots\right).$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Чем меньше x, тем меньше нужно взять членов разложения ряда Маклорена для достижения необходимой точности. В этом случае можно использовать формулы для приближённого расчёта.

8. Гармонический анализ (Разложения функций в тригонометрические ряды (ряды Фурье))

Понятие тригонометрического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Ортогональные функции и ортогональные системы функций

Ортогональная система функций $\varphi_i(x)$,

$$\varphi_0(x),\ \ \varphi_1(x),\ \ \varphi_2(x),\ \ \ldots,\ \ \varphi_{n-1}(x),\ \ \varphi_n(x),\ \ \ldots$$

Условие ортогональности системы

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ \|\varphi_i\|^2 \neq 0; & i = j \end{cases}$$

Норма функции

$$\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(x)dx \right)^{1/2}$$

Рассмотрим тригонометрические функции вида

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, ..., \sin nx, \cos nx, ...$$

n=1, 2, 3, …

Интегралы от этих функций на отрезке $-\pi \le x \le \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \pi$$

n, m=1, 2, 3, …

На произвольном отрезке [-*l*, *l*], $l\in\mathbb{R}$

$$1, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{3\pi x}{l}, \cos\frac{3\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

$$\int_{-l}^{l} 1\cdot dx = 2l$$

$$\int_{-l}^{l} 1\cdot \sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0$$

$$\int_{-l}^{l} 1\cdot \cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = l$$

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{m\pi x}{l}dx = l$$

Ортогональные системы можно нормировать и получить ортонормированные системы функций

Замена системы функций в ортогональной системе

$$\varphi_i(x) \to \frac{\varphi_i(x)}{\|\varphi_i(x)\|}.$$

Получим *ортонормированную систему функций*

$$\frac{\varphi_0(x)}{\|\varphi_0(x)\|},\quad \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1(x)\|},\quad \frac{\varphi_2(x)}{\|\varphi_2(x)\|},\quad \ldots,\quad \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\|\varphi_{n-1}(x)\|},\quad \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|},\quad \ldots,$$

Тригонометрические ортонормированные системы функций

На отрезке -$\pi \le x \le \pi$

$$\|1\| = \sqrt{2\pi},\qquad \|\sin nx\| = \sqrt{\pi},\qquad \|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

На отрезке -$l \le x \le l$

Норма будет

$$\|1\| = \sqrt{2l},\qquad \left\|\sin\frac{2n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l},\qquad \left\|\cos\frac{2n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l}\,.$$

Ортонормированная система функций будет

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l},\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l},$$

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{3\pi x}{l},\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{3\pi x}{l},\quad \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\ldots$$

9. Ряды Фурье на произвольных ортогональных системах

Разложим функцию $f(x)$ по бесконечной ортогональной системе функций на отрезке $[a, b]$

$$\varphi_0(x),\quad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \ldots,\quad \varphi_{n-1}(x),\quad \varphi_n(x),\quad \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_i\varphi_i(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_i\varphi_i(x) + \ldots$$

Здесь c_i –числовые коэффициенты, которые можно выразить через функцию $f(x)$ можно найти

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int_a^b (c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots)\varphi_n(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (c_0\varphi_0(x)\varphi_n(x) + c_1\varphi_1(x)\varphi_n(x) + c_2\varphi_2(x)\varphi_n(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)\varphi_n(x) + \ldots)\,dx =$$

$$= c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx.$$

Получим c_i, которые называются числовыми *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$ найденные по системе функций $\varphi_i(x)$

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx} = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\|\varphi_n(x)\|^2}.$$

Ряд с коэффициентами Фурье

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_i\varphi_i(x) + \ldots$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$ по системе функций $\varphi_i(x)$

Гармонический анализ (Разложения функций в тригонометрические ряды (ряды Фурье))

Разложение периодической функции $f(x)$ с периодом 2π в ряд Фурье на основе системы тригонометрических функций

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Неравенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) .$$

Другая форма записи разложение периодической функции $f(x)$ с периодом 2π в ряд Фурье как суперпозицию гармоник

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega k + \varphi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega k - \psi_k) .$$

Здесь

$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ - амплитуда;

$\omega k = \dfrac{2\pi k}{T}$ — частота;

$\operatorname{tg}\varphi_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ или $\operatorname{tg}\psi_k = \dfrac{b_k}{a_k}$ - начальная фаза;

$A_k \sin(kx + \varphi_k)$ - гармоники.

Неполные ряды Фурье (разложение чётных и нечётных функций)

Разложение в ряд Фурье чётной функции $f(x) = f(-x)$ с периодом 2π

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx .$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx ,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Разложение в ряд Фурье нечётной функции $f(x) = -f(-x)$ с периодом 2π

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx .$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Пример. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{x}{2}$ в интервале (0 < x < 2π)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4\pi}\bigg|_0^{2\pi}=\pi\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n}\int\sin nxdx\right)\bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\bigg|_0^{2\pi}=\frac{\cos 2nx-1}{2\pi n^2}\,,$$

даёт нули $a_n=0,\ n=1,\ 2,\ 3\ldots$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)\bigg|_0^{2\pi}=-\frac{1}{n}\,.$$

Подставляя в ряд Фурье

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\ldots$$

Пример. Разложить функцию $f(x)=|\sin x|$ в интервале (– π, π). Функция чётная, поэтому $b_n=0$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin((1+n)x)+\sin((1-n)x))dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(1+n)x}{1+n}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right)\bigg|_{\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right).$$

Использована формула: $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

Если *n* чётное, тогда *n* = 2*k*, тогда $\cos(1\pm n)\pi=-1$ и $a_n=\dfrac{4}{\pi(1+4k^2)}$

Если *n* нечётное, тогда $n\neq 1$, то $a_n=0$

Отдельно вычисляется $a_1=0$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xd\sin x=\frac{\sin^2 x}{\pi}\bigg|_0^{\pi}=0\,.$$

Подставляя в ряд Фурье

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)} + \ldots\right).$$

Разложение периодической функции *f*(*x*) в ряд Фурье с периодом 2*l* на отрезке [– *l*, *l*]

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ являются константами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx; \qquad k=1,2,3,\dots,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \qquad k=1,2,3,\dots$$

Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

Ряды Фурье периодических функций с конечным периодом можно почленно дифференцировать и почленно дифференцировать.

Тригонометрические полиномы

Тригонометрические полиномы (*многочлены Фурье*)

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Приближённые вычисления

Сумма $s_n(x)$ первых n элементов разложения функции $f(x)$ приближённо описывает функцию $f(x)$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

Сумма $s_n(x)$ сходится к функции $f(x)$, когда n стремиться к бесконечности

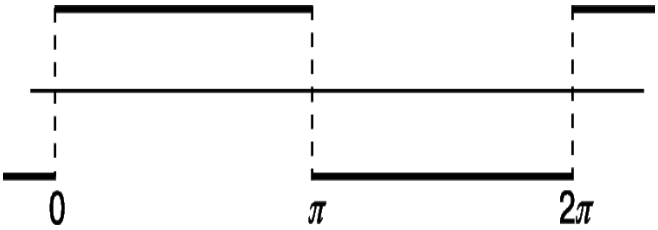
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - s_n(x) \right)^2 dx = 0 .$$

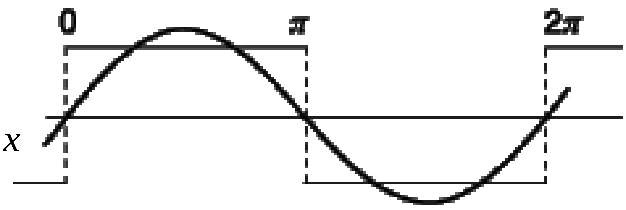
Если x точка разрыва функции $f(x)$, то ряд Фурье приравнивают к числу $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

Разложение в ряд Фурье периодических функций

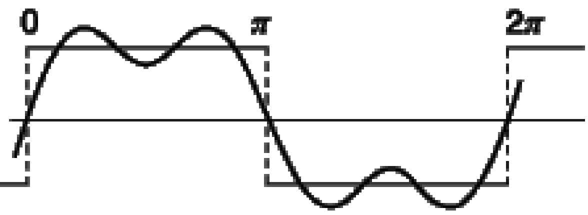
$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\ldots$$



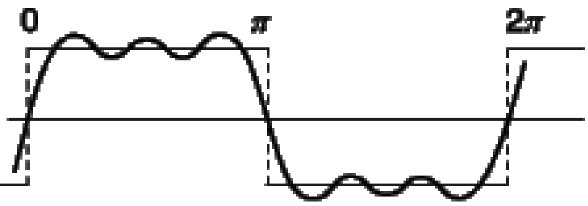
$\sin x$



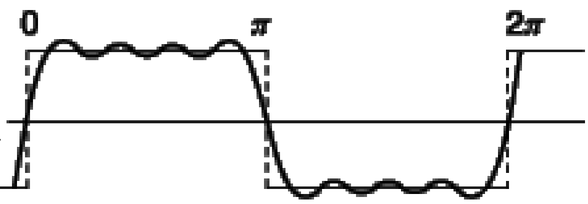
$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}$



$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}$



$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}$



Комплексная форма рядов Фурье для функции $f(x)$ на периоде $2l$ получим используя формулы

$$\cos\frac{k\pi x}{l}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{ik\pi x}{l}}+e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\right)$$

$$\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{ik\pi x}{l}}+e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\right)$$

$$e^{\pm i\frac{ik\pi x}{l}}=\cos\frac{k\pi x}{l}\pm i\sin\frac{ik\pi x}{l}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{1}{2}\left(e^{\frac{ik\pi x}{l}}+e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\right)+b_k\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{ik\pi x}{l}}-e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\right)\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{1}{2}e^{\frac{ik\pi x}{l}}+a_k\frac{1}{2}e^{-\frac{ik\pi x}{l}}+b_k\frac{1}{2i}e^{\frac{ik\pi x}{l}}-b_k\frac{1}{2i}e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_k-ib_k)e^{\frac{ik\pi x}{l}}+\frac{1}{2}(a_k+ib_k)e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_ke^{\frac{ik\pi x}{l}}+c_{-k}e^{-\frac{ik\pi x}{l}}\right)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{\frac{ik\pi x}{l}}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Здесь были введены коэффициенты

$$c_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,e^{\frac{ik\pi x}{l}}dx=\begin{cases}\dfrac{a_0}{2}, & k=0\\ \dfrac{1}{2}(a_k-ib_k), & k>0\\ \dfrac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k}), & k<0\end{cases}$$

При этом $c_{-k}=\overline{c}_k$.

Окончательно получили

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{\frac{ik\pi x}{l}}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Коэффициенты в таком представлении получаются

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{ik\pi x}{l}} dx \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Комплексная форма рядов Фурье для функции *f*(*x*) на периоде 2*π* как частный случай комплексной формы для интервала 2*l*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$$

$$\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} + e^{-ikx})$$

$$e^{\pm ikx} = \cos x \pm i \sin x$$

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx} dx = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \dfrac{1}{2}(a_k - ib_k), & k > 0 \\ \dfrac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases}$$

Интеграл Фурье для функции *f*(*x*) на периоде

Интеграл Фурье для функции $f(x)$ на периоде от $-\infty$ до $+\infty$.

Абсолютная интегрируемость $f(x)$ функции на всей числовой оси определяется сходимостью интеграла от модуля этой функции на всей оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty .$$

Если функция $f(x)$ кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на всей оси, то во всех точках её непрерывности её можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [a(\alpha)\cos\alpha x + b(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha .$$

В точках разрыва x функция $f(x)$ должна быть заменена на $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt ,$$

$$b(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt .$$

Подставляя коэффициенты, получим

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt \right)\cos\alpha x + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt \right)\sin\alpha x \right) d\alpha ,$$

и окончательно

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt .$$

Интеграл Фурье для чётной функции $f(x) = f(-x)$ или *косинус-преобразование Фурье*

$$a(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt ,\quad b(\alpha) = 0 ,$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\alpha)\cos\alpha x \, d\alpha \, .$$

Двойной интеграл Фурье чётной функции

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\alpha x \, d\alpha \int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t \, dt \, .$$

Интеграл Фурье для нечётной функции $f(x) = -f(-x)$ $x)$ или *синус-преобразование Фурье*

$$a(\alpha) = 0, \; b(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t \, dt,$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(\alpha)\sin\alpha x \, d\alpha \, .$$

Комплексная форма интеграла Фурье (или обратное преобразование Фурье) для функции $f(x)$

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и имеет на каждом конечном интервале конечное число точек разрыва первого рода, то в точках x функция дифференцируема и выполняется

Прямое преобразование Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt .$$

Функция $F(\omega)$ является преобразованием Фурье функции $f(t)$ и является её *спектральной плотностью*. Модуль $|F(\omega)|$ называется *амплитудным спектром* функции $F(\omega)$.

Обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega .$$

Функция $f(t)$ является обратным преобразованием Фурье функции $F(\omega)$.

Свойства преобразования Фурье

Свойства преобразования Фурье

Комплексное сопряжение преобразования Фурье

$$F(-\omega) = F^*(\omega).$$

Преобразование Фурье как оператор F, ставящий в соответствие функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям разложимости, другую функцию — спектральную плотность $c(x)$

$$F[f(x)] = c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx.$$

Преобразование Фурье для функции и её производной

$$F[F^{-1}[f]] = F^{-1}[F[f]] = f,$$

$$F[0] = F^{-1}[0] = F[0\cdot 0] = F^{-1}[0\cdot 0] = 0,$$

$$F[f'(x)] = i\omega F[f(x)].$$

Линейность преобразования Фурье

$$F[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] = \lambda_1 F[f_1(x)] + \lambda_2 F[f_2(x)],$$

$$F^{-1}[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] = \lambda_1 F^{-1}[f_1(x)] + \lambda_2 F^{-1}[f_2(x)],$$

$$F[f(x-\beta)] = e^{-ic\beta}F[f(x)] = e^{-ic\beta}c(\omega),$$

$$F[f(x)e^{-ic\beta}] = c(\omega-\beta),$$

$$F[f(x)\cos\beta x] = \frac{c(\omega-\beta)+c(\omega+\beta)}{2},$$

$$F[f(x)\sin\beta x] = \frac{c(\omega-\beta)-c(\omega+\beta)}{2i}.$$