Математический анализ

Кратные интегралы

Краткий конспект лекций

Составитель

В.А. Чуриков

Кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедры Высшей математики
Томского политехнического университета.

Национальный исследовательский
Томский политехнический университет:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

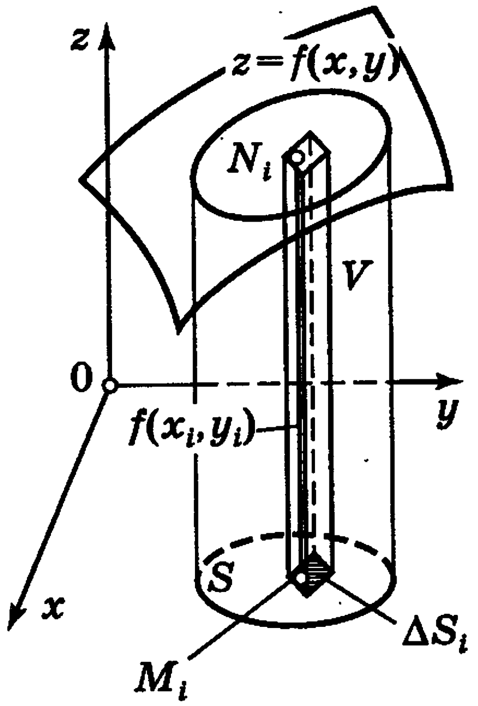
http://www.tpu.ru/

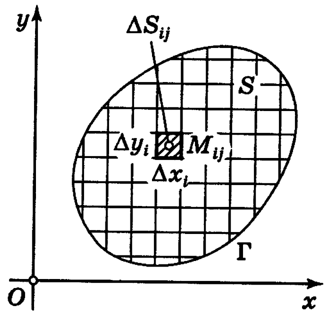
E-mail: vachurikov@list.ru

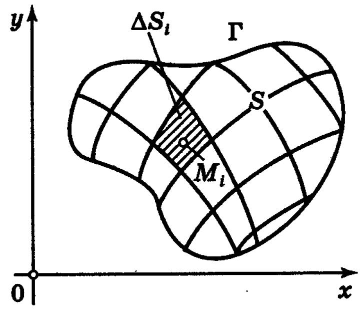
Сайт: http://portal.tpu.ru/SHARED/v/VACHURIKOV

Двойные интегралы

Разбиение двухмерной поверхности в трёхмерном пространстве на элементарные поверхности







$$dS = dxdy$$

(*двумерный элемент площади в прямоугольных координатах*), причем

$$\iint\limits_S f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \to 0 \\ \max|\Delta y_i| \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j,$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i$$

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i = \iint\limits_S f\,(x, y)\, dS$$

Свойства двойных интегралов

«Составные части» двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma; \qquad d\sigma = dxdy$$

Линейность как совокупность однородности и аддитивности

$$\iint\limits_D \alpha f(x, y)d\sigma = \alpha \iint\limits_D f(x, y)d\sigma, \alpha = \text{const}$$

$$\iint\limits_D [f(x, y) + g(x, y)]d\sigma = \iint\limits_D f(x, y)d\sigma + \iint\limits_D g(x, y)d\sigma$$

Разбиение или объединение области интегрирования

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)d\sigma;$$
$$D_1 \cup D_2 = D; \quad D_1 \cap D_2 = \varnothing.$$

Если подинтегральная функция равна 1, то двойной интеграл вычисляет площадь ограниченную областью D

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = S, \; f(x, y) = 1$$

Если $f(x, y) \geq 0$, то будет

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma \geq 0$$

Теорема о среднем в области D всегда найдётся точка $f(x', y')$, для которой будет

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = Sf(x', y')$$

или равен объёму цилиндра в точке…

Неравенства

Теорема. Если $M \geq f(x, y) \geq m, M, m = \mathrm{const}$, тогда

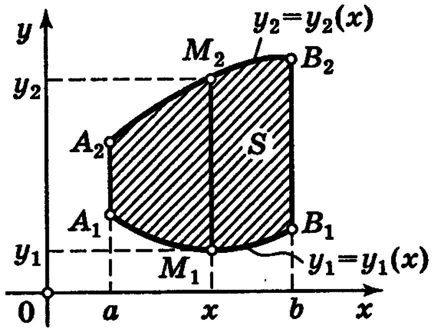
$$SM \geq \iint_D f(x, y) d\sigma \geq mS$$

Если $f(x, y) \geq g(x, y)$, то будет

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

$$\iint_D |f(x, y)| d\sigma \geq \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right|$$

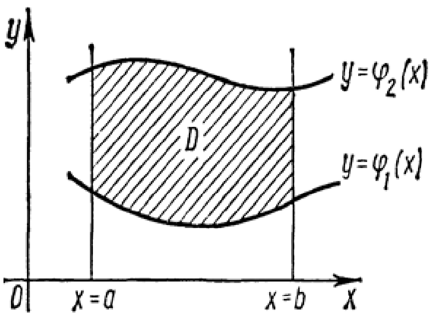
Вычисление двойного интеграла через повторные интегралы

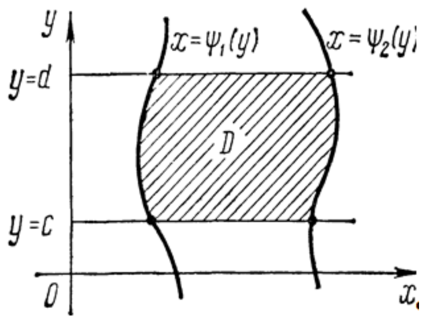


$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$





При изменении порядка интегрирования меняются пределы интегрирования.

Справедливо утверждение

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, ограниченной линиями $y=y_1$ и $y=y_2$ $(y_1 < y_2)$, $x= x_1(y)$ и $x= x_2(y)$ и $x_1(y) \le x_2(y)$, тогда

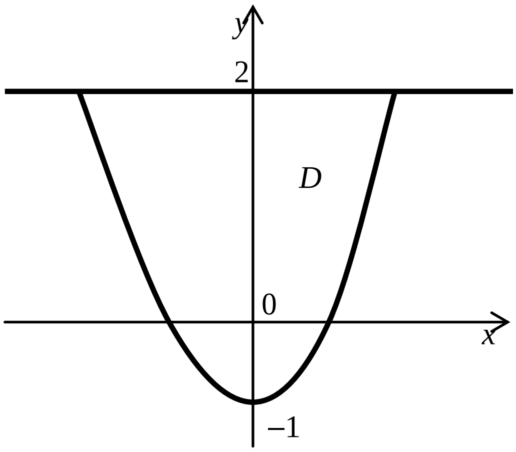
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Пример 1.

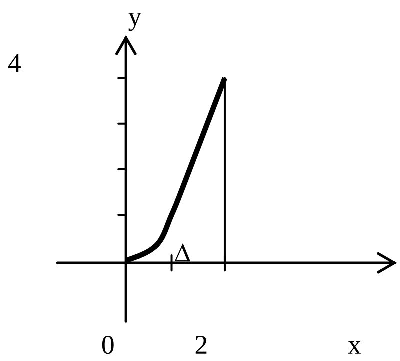
Вычислить площадь фигуры D ограниченной кривыми $y = 2$ и параболой $y = x^2 - 1$

В силу симметрии графиков относительно оси возьмём пределы интегрирования только по одну сторону

$$\frac{S}{2} = \int_{-1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{y+1}} dx = \int_{-1}^{2} x\Big|_{0}^{\sqrt{y+1}} dy = \int_{-1}^{2} \sqrt{y+1}dy = \frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2} = 2\sqrt{3}$$, окончательно получим $S = 4\sqrt{3}$



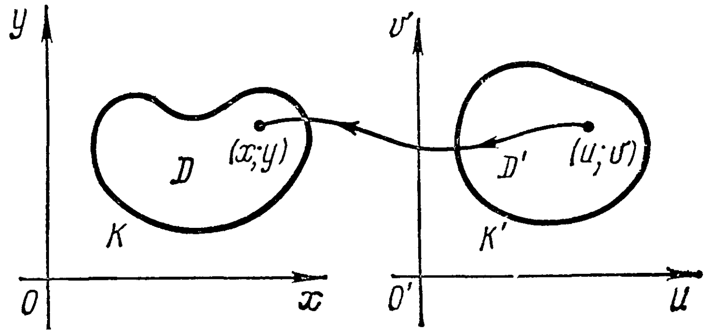
Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, y = x^2, x = 2.



$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{2} dx \int_{0}^{x^2}(x-y)dy = \int_{0}^{2}(xy - \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_{0}^{2}(x^3 - \frac{x^4}{2})dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_{0}^{2} = 4 - 3{,}2 = 0{,}8$$

Переход в криволинейные системы координат в двойном интеграле

Зачем и почему делаются такие переходы. Как это делается.

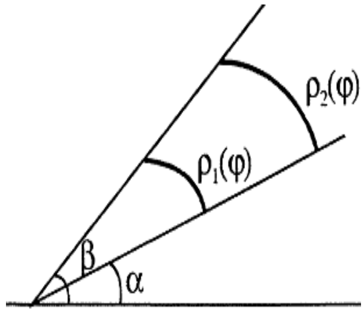


$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v)$$

$$\iint\limits_{D(x,y)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{G(x(u,v),\, y(u,v))} f(x(u, v), y(u, v))\,|\,J\,|\,dudv$$

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Полярная система координат



$$\begin{cases} x = x(\rho, \varphi) \\ y = y(\rho, \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = +\sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

$$\iint\limits_{D(x,y)} f(x, y)dxdy \quad \rightleftarrows \quad \iint\limits_{D(x(\rho,\varphi),\, y(\rho,\varphi))} f(x(\rho,\varphi),\, y(\rho,\varphi))\rho d\rho d\varphi$$

$$\iint\limits_{D(x(\rho,\varphi),\, y(\rho,\varphi))} f(x(\rho,\varphi),\, y(\rho,\varphi))\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\kappa)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int\limits_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} f(\rho,\varphi) d\varphi$$

Использование двойных интегралов

1. Вычисление площадей плоских фигур

Если подинтегральная функция отсутствует (т. е. $f(x, y) = 1$), то двойной интеграл вычисляет площадь ограниченную областью D

$$S(D) = \iint_D d\sigma$$

2. Вычисление объёмов фигур

$$V(x, y) = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

Здесь функция $z = f(x, y)$ задаёт зависимость высоты (толщины) от переменных x и y

3. Вычисление масс и других физических характеристик по плотности

$$M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma$$

Подинтегральная функция является плотностью некоторой физической величины (массы, концентрации, плотность заряда…)

4. Вычисление средних значений физических характеристик по плотности

$$\bar{\mu} = \frac{1}{S} \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \frac{\iint_D \mu(x, y) d\sigma}{\iint_D d\sigma}$$

Подинтегральная функция является плотностью некоторой физической величины (массы, концентрации, плотность заряда…)

5. Вычисление статических моментов плоских фигур

$$M_x = \iint_D x \cdot \mu(x, y) d\sigma, \quad M_y = \iint_D y \cdot \mu(x, y) d\sigma$$

6. Вычисление координат центра тяжести (центра масс) плоских пластин, и не только плоских

$$C_x = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D x \cdot \mu(x, y) d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x, y) d\sigma}, \qquad C_y = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D y \cdot \mu(x, y) d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x, y) d\sigma}$$

Здесь M – масса тела

$$M = \iint\limits_D \mu(x, y) d\sigma$$

7. Вычисление моментов инерции плоских пластин

Относительно осей координат

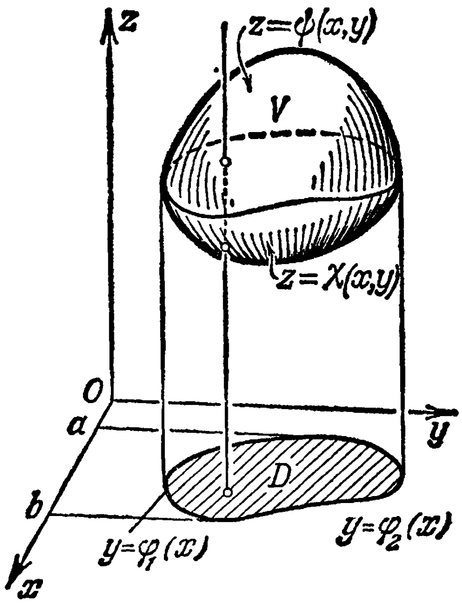
$$J_x = \iint\limits_D x^2 \cdot \mu(x, y) d\sigma, \quad J_y = \iint\limits_D y^2 \cdot \mu(x, y) d\sigma$$

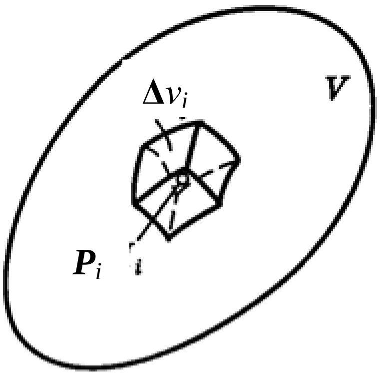
Относительно начала координат

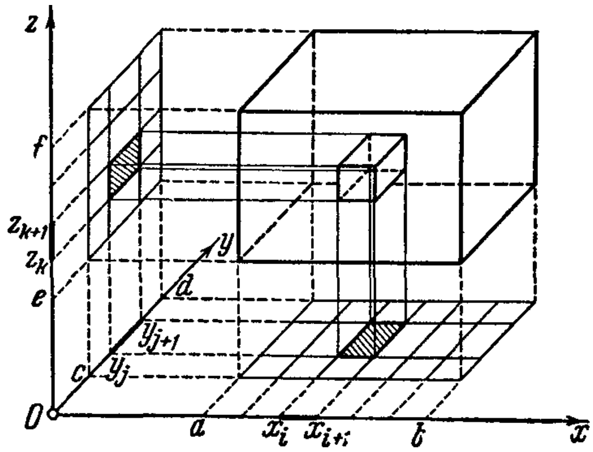
$$J_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y) d\sigma; \; J_0 = J_x + J_y$$

Тройной интеграл

Разбиение ограниченной области трехмерного пространства на элементарные объёмы







Элементарные прямоугольники

$$\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k; \qquad i = 1, 2, 3, \dots I; \quad j = 1, 2, 3, \dots J; \quad k = 1, 2, 3, \dots K$$

Объёмы элементарных прямоугольников

$$v_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Точки в элементарных прямоугольниках

$$P(x_i, y_j, z_k) \in \Delta v_{ijk}$$

Значение функции в элементарных прямоугольниках

$$f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Суммарноек значение функции во всех элементарных прямоугольниках

$$M \approx \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} f(x_i, y_j, z_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Переход к тройному интегралу

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0 \\ \max \Delta z_k \to 0}} \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} f(x_i, y_j, z_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \iiint\limits_{V(x,y,z)} f(x, y, z)dv$$

$$M = \iiint\limits_{V(x,y,z)} f(x, y, z)dv$$

Трёхмерный дифференциал интегрирования

$$dv = dxdydz$$

Составные части тройного интеграла

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)dv$$

Свойства тройных интегралов

Линейность как совокупность однородности и аддитивности

$$\iiint\limits_{V} \alpha f(x, y, z)dv = \alpha \iiint\limits_{V} f(x, y, z)dv; \ \alpha = \text{const}$$

$$\iiint\limits_{V} [f(x, y, z) + g(x, y, z)]dv = \iiint\limits_{V} f(x, y, z)dv + \iiint\limits_{V} g(x, y, z)dv$$

Разбиение или объединение области интегрирования

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)dv = \iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)dv + \iiint\limits_{V_2} g(x, y, z)dv$$

$$V_1 \cup V_2 = D; \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing.$$

Если подинтегральная функция отсутствует (т. е. $f(x, y, z) = 1$), то тройной интеграл вычисляет объём ограниченный областью V

$$\iiint\limits_{V} dv = W(V); \qquad f(x, y, z) = 1$$

Если $f(x, y, z) \ge 0$, то будет

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dv \geq 0$$

Теорема (о среднем). В области W всегда найдётся точка $f(x', y', z')$, для которой будет или равен объёму цилиндра в точке…

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dv = Wf(x', y', z')$$

Неравенства

Теорема. Если $\Psi \geq f(x, y, z) \geq \psi; \quad \Psi, \psi = \text{const}$, тогда

$$W\Psi \geq \iiint\limits_V f(x, y, z)dv \geq W\psi$$

Если $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, то будет

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)d\sigma \geq \iiint\limits_V g(x, y, z)d\sigma$$

$$\iiint\limits_V |f(x, y, z)|d\sigma \geq \left|\iiint\limits_V g(x, y, z)d\sigma\right|$$

Вычисление тройных интегралов через повторные интегралы в декартовой системе координат

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_S \left(\int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right) dydz = \iint\limits_S dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx$$

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx$$

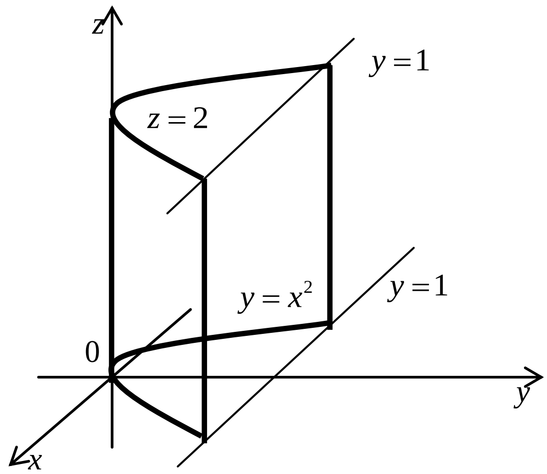
Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx=\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^2 y\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy}\right)dydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^2 yx^2y^2dydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^4y^3dydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^4\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^{x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^4x^8}{4}dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{13}x^{13}\Big|_0^1=\frac{1}{104}.$$

Пример. Вычислить тройной интеграл и построить область интегрирования

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_0^2(4+z)dz,$$



Область интегрирования

$$I_1=\int\limits_0^2(4+z)dz=\left(4z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=8+\frac{4}{2}=10$$

$$I_2=\int\limits_{x^2}^{1}I_1dy=10\int\limits_{x^2}^{1}dy=10y\Big|_{x^2}^{1}=10(1-x^2)$$

$$I=I_3=\int\limits_{-1}^{1}I_2dx=10\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx=10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{40}{3}$$

Переход в криволинейные системы координат в тройном интеграле

Замена переменных в тройных интегралах

Зачем и почему. Как это делается

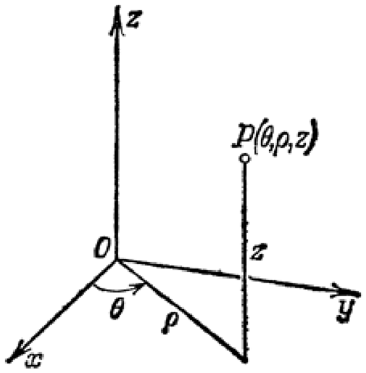
$$\begin{cases} x = x(u, v, \varsigma) \\ y = y(u, v, \varsigma) \\ \mathrm{z} = \mathrm{z}(u, v, \varsigma) \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{V(x,y,z)} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V(x(u,v,\varsigma),\, y(u,v,\varsigma),\, z(u,v,\varsigma))} f(x(u, v, \varsigma), y(u, v, \varsigma), z(u, v, \varsigma))\,|\,J\,|\,dudvd\varsigma$$

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, \varsigma)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \varsigma} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \varsigma} \\ \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial v} & \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial v} & \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \varsigma} \end{vmatrix} \neq 0$$

Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = x(\rho, \theta, z) \\ y = y(\rho, \theta, z) \\ \mathrm{z} = \mathrm{z}(\rho, \theta, z) \end{cases}$$



Задание координаты точки в трёхмерном пространстве в цилиндрической системе координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = +\sqrt{x^2 + y^2}; & 0 \le \rho < \infty \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}; & 0 \le \theta < 2\pi \\ z = z; & -\infty < z < \infty \end{cases}$$

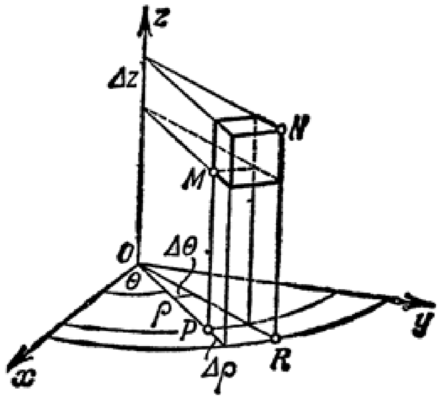
Определитель Якоби (якобиан) перехода из декартовой в цилиндрическую систему координат

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho \ne 0$$

Разложение тройного интеграла в цилиндрической системе координат на повторные

Элементарная ячейка в цилиндрической системе координат



Разложение двойного интеграла в цилиндрической системе координат на повторные интегралы

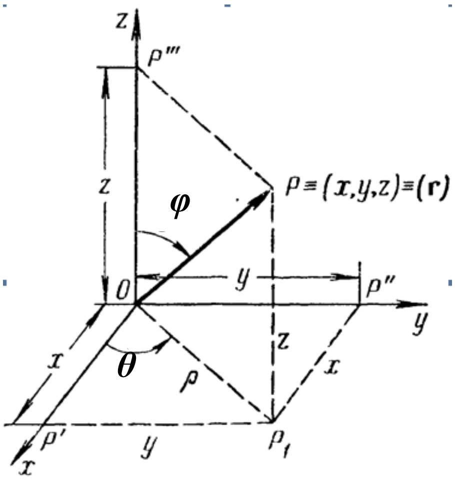
$$\iiint\limits_{V(x,y,z)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V(x(\rho,\theta),\,y(\rho,\theta),\,z)} f(x(\rho,\theta),\,y(\rho,\theta),\,z)\rho d\rho d\theta dz =$$

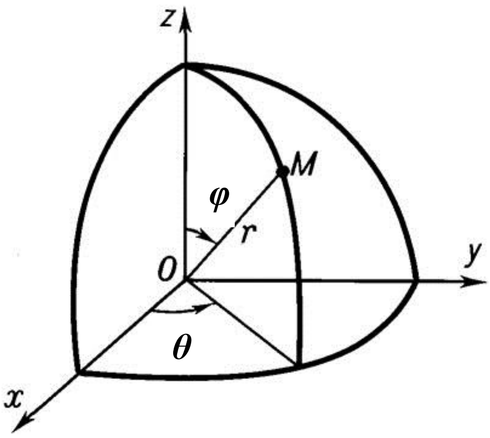
$$= \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \int\limits_{\theta_1(z)}^{\theta_2(z)} d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta,z)}^{\rho_2(\theta,z)} f(\rho,\theta,z)\rho d\rho$$

Сферическая система координат

Задание координаты точки в трёхмерном пространстве в декартовой и в сферической системе координат

$$\begin{cases} x = x(\rho, \theta, \varphi) \\ y = y(\rho, \theta, \varphi) \\ z = z(\rho, \theta, \varphi) \end{cases}$$





$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}; & 0 \le \rho < \infty \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}; & 0 \le \theta < 2\pi \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}; & 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

Определитель Якоби (якобиан) перехода из декартовой системы координат в сферическую систему координат

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

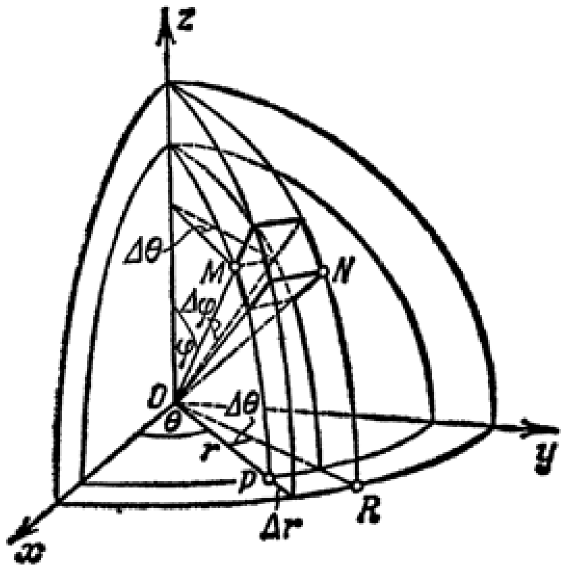
$$= -\rho^2\cos^2\theta\sin^3\varphi - \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin\varphi - \rho^2\sin^2\theta\sin^3\varphi - \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\sin\varphi =$$

$$= -\rho^2\sin\varphi(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi) = -\rho^2\sin\varphi \ne 0$$

$$J = -\rho^2\sin\varphi \ne 0 \qquad\qquad |J| = \rho^2\sin\varphi$$

Элементарная ячейка в цилиндрической системе координат

Разложение тройного интеграла в сферической системе координат на повторные интегралы



$$\iiint\limits_{V(x,y,z)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V(x(\rho,\theta,\varphi),\,y(\rho,\theta,\varphi),\,z(\rho,\theta,\varphi))} f(x(\rho,\theta,\varphi),\,y(\rho,\theta,\varphi),\,z(\rho,\theta,\varphi))\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \sin\varphi d\varphi \int\limits_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} f(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 d\rho$$

Пример. Найти объем шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz = 2\cdot 2\int_{0}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\left(z\Big|_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \right) =$$

$$= 4\cdot 2\int_{0}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy =$$

$$= 8\int_{0}^{R} dx \left(\frac{y}{2}\sqrt{R^2-x^2-y^2} + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} \right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= \frac{8}{2}\frac{\pi}{2}\int_{0}^{R} (R^2-x^2)dx = 2\pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{0}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Для нахождения первообразной по переменной y, была использована формула

$$\int \sqrt{a^2-y^2}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{2}; \qquad a^2 = R^2 - x^2 > 0$$

Та же задача в сферической системе координат

$$\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_{0}^{R} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi d\varphi \left(\rho^3 \Big|_{0}^{R} \right) =$$

$$= \frac{R^3}{3}\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_{0}^{2\pi} d\theta \left(-\cos\varphi\Big|_{0}^{\pi} \right) = \frac{R^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta (1-(-1)) =$$

$$= \frac{2R^3}{3}\int_{0}^{2\pi} d\theta = \frac{2R^3}{3}\left(\theta\Big|_{0}^{2\pi}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Приложения тройных интегралов

1. Вычисление объёмов

Если подинтегральная функция отсутствует (т. е. $f(x, y, z) = 1$), то тройной интеграл вычисляет объём ограниченный областью V

$$W = \iiint\limits_V dv = \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx$$

1. Вычисление средних значений

$$\bar{\mu} = \frac{M}{W} = \frac{\iiint\limits_V \mu(x, y, z) dv}{\iiint\limits_V dv}.$$

2. Вычисление масс и других физических характеристик по плотности

$$M = \iiint\limits_V \mu(x, y, z) dv = \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} \mu(x, y, z) dx$$

3. Вычисление статических моментов плоских фигур

$$M_{yz} \equiv M_x = \iiint\limits_V x\mu(x, y, z) dv$$

$$M_{xz} \equiv M_y = \iiint\limits_V y\mu(x, y, z) dv$$

$$M_{xy} \equiv M_z = \iiint\limits_V z\mu(x, y, z) dv$$

4. Вычисление координат центра тяжести (центра масс) трёхмерных фигур

$$C_x = \frac{M_x}{M} = \frac{\iiint\limits_V x\mu(x, y, z)dv}{\iiint\limits_V \mu(x, y, z)dv}$$

$$C_y = \frac{M_y}{M} = \frac{\iiint\limits_V y\mu(x, y, z)dv}{\iiint\limits_V \mu(x, y, z)dv}$$

$$C_z = \frac{M_z}{M} = \frac{\iiint\limits_V z\mu(x, y, z)dv}{\iiint\limits_V \mu(x, y, z)dv}$$

5. Вычисление моментов инерции осей трёхмерных фигур с помощью тройного интеграла

Относительно координатных осей

$$J_x = J_{xy} + J_{xz} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dv$$

$$J_y = J_{xy} + J_{yz} = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\mu(x, y, z)dv$$

$$J_z = J_{xz} + J_{yz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)dv$$

Относительно начала координат

$$J_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dv$$