Теория функций нескольких переменных (аргументов)

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Определение функции нескольких переменных. Область определения. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные функций нескольких переменных. Производная сложной функции и функции заданной неявно.

Полный дифференциал ФНП, инвариантность формы первого дифференциала Частные и полное приращение функции (геометрическая иллюстрация).

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Скалярное поле, линии и поверхности уровня. Градиент и производная по направлению. Свойства градиента.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Формула Тейлора для функции двух переменных. Экстремум функции нескольких переменных (необходимые и достаточные условия). Наименьшее и наибольшее значение функции в замкнутой области. Условный экстремум функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных
(2-х, 3-х и более, вплоть до бесконечного числа переменных).

Рассмотрим функции нескольких переменных прежде всего на примере функций 2-х и 3-х переменных.

Определение. Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x, y)$$

Определение. Если у функции $f(x, y)$ каждой паре чисел (x, y) из области определения соответствует только одно значение z, то такая функция называется ***однозначной***, а если более одного значения, то – ***многозначной***.

Способы задания функций нескольких переменных

аналитическая (формулой), в частности явно относительно одной из переменных

$$x = f(y, z),\ y = f(x, z),\ z = f(x, y)$$

Например, уравнение Менделеева — Клапейрона для идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu}RT; \qquad \frac{m}{\mu}R = \mathrm{const}$$

Неявное задание

$$\varphi = f(x, y, z),\ F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0,\ \ldots,\ W(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = 0$$

Параметрическое задание функций N переменных

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{N-1}); \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{N-1}); \\ \ldots \\ x_N = x_N(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{N-1}). \end{cases}$$

Табличное задание функции трёх переменных

x	y	z
x_1	y_1	z_1
x_2	y_2	z_2
x_3	y_3	z_3
…	…	…
x_n	y_n	z_n
…	…	…

Пример функций двух переменных:

$$S = ab\,,\quad z = \sin(xy)\,,\quad z = x\sin y\,,\quad z = \exp(ax + by)$$

Геометрический смысл функций двух переменных

Однозначные и многозначные функции.

Линия уровня или срез при определённом значении *z*.

Поверхность уровня.

В двухмерном случае функцию двух переменных можно изобразить

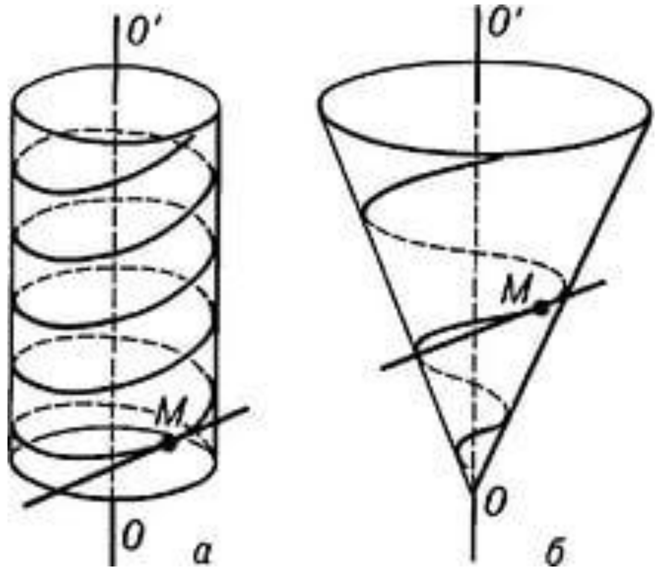


Рис. Функция трёх переменных трёхмерном пространстве $z=f(x, y)$ (поверхность)

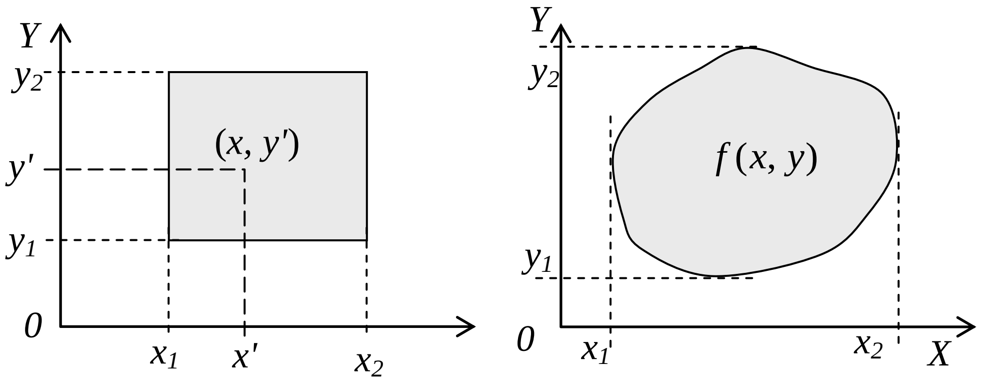


Рис. Функции двух переменных на плоскости $f(x, y)=0$

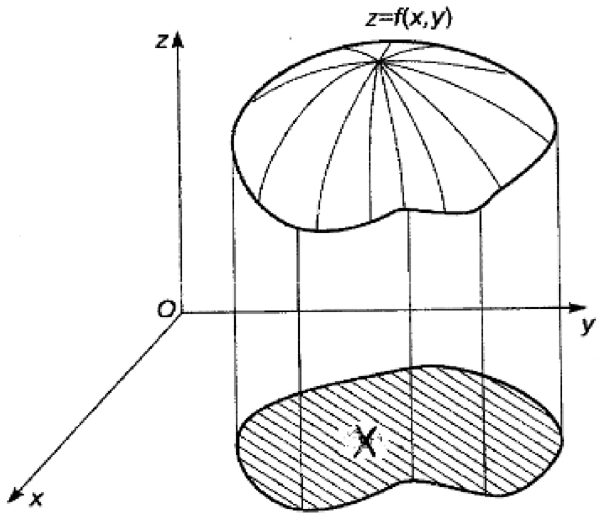
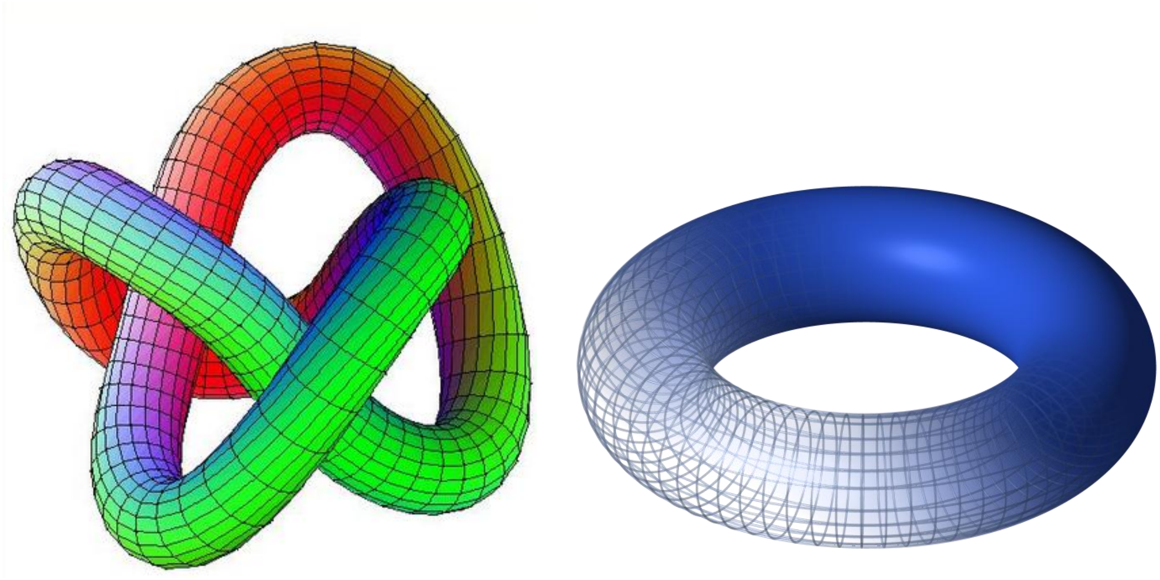


Рис. Функция трёх переменных трёхмерном пространстве $z=f(x, y)$ (поверхность)

В общем случае непрерывная функция двух переменных является поверхностью в многомерном пространстве.

Область определения и область допустимых значений функции нескольких переменных (Рис.).



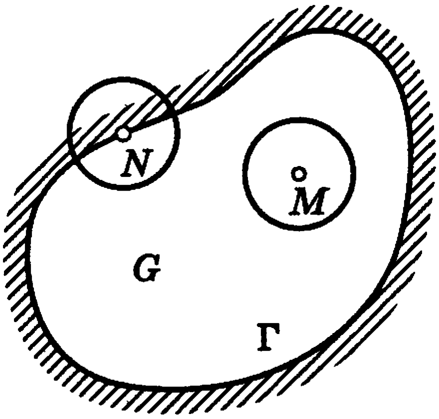
Область определения и область допустимых значений

Определение. ***Областью определения*** функции z(x, y) называется множество всех пар (x, y), при которых функция z(x, y) существует.

Геометрические и топологические свойства функций нескольких переменных

Область (односвязное и открытое множество), односвязная и многосвязная область, внутренняя точка, открытая область,

Граничная точка, граница, замкнутая область и открытая область.



Определение. ***Окрестностью точки*** $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется множество всех точек (x, y), находящихся на расстоянии от точки $M_0(x_0, y_0)$ не больше радиуса r, т. е. справедливо условие $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

Предел функции нескольких переменных

Определение. Число *A* называется **пределом** функции *f*(*x*, *y*) при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число r >0, что для любой точки $M(x, y)$, для которых верно условие

$$MM_0 < r$$

также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

Разные типы пределов функций многих переменных

Последовательные пределы

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

Одновременны (многократные) пределы.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \equiv \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

В частности, предел функции двух переменных в точке $M(x_0, y_0)$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

Например:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} ab\exp(ax+by) = ab$$

Непрерывность функции нескольких переменных.

Определение. Функция двух переменных $z = f(x, y)$, называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если определена в этой точке и в её окрестности и существует произвольный предел

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) < \infty$$

Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ предел не существует, то точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой разрыва*** функции $f(x, y)$.

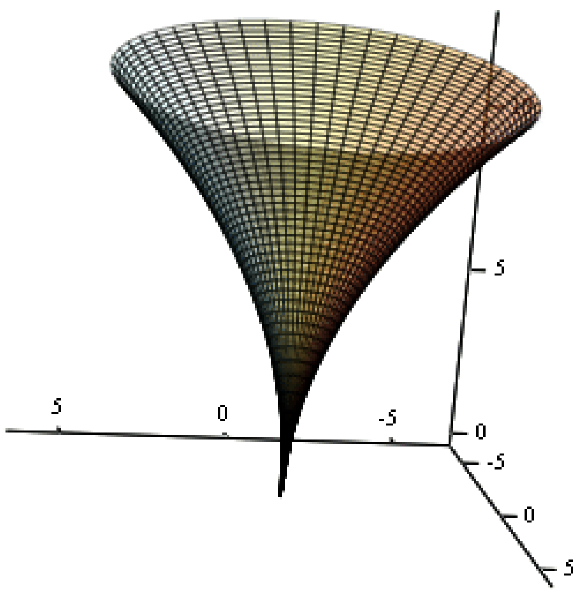
Предел не существует в случаях, когда

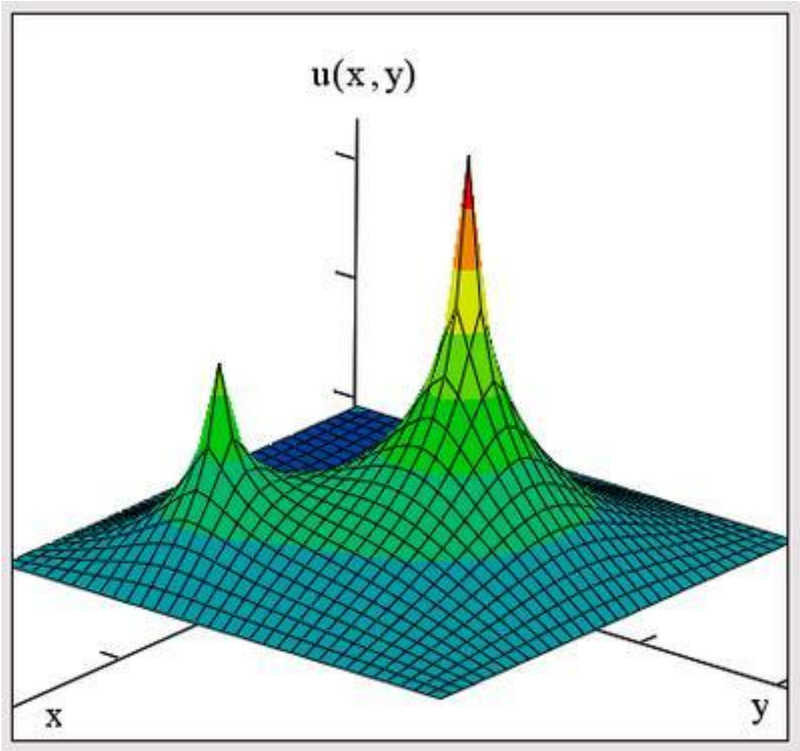
1) Если функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ не существует
3) Предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$

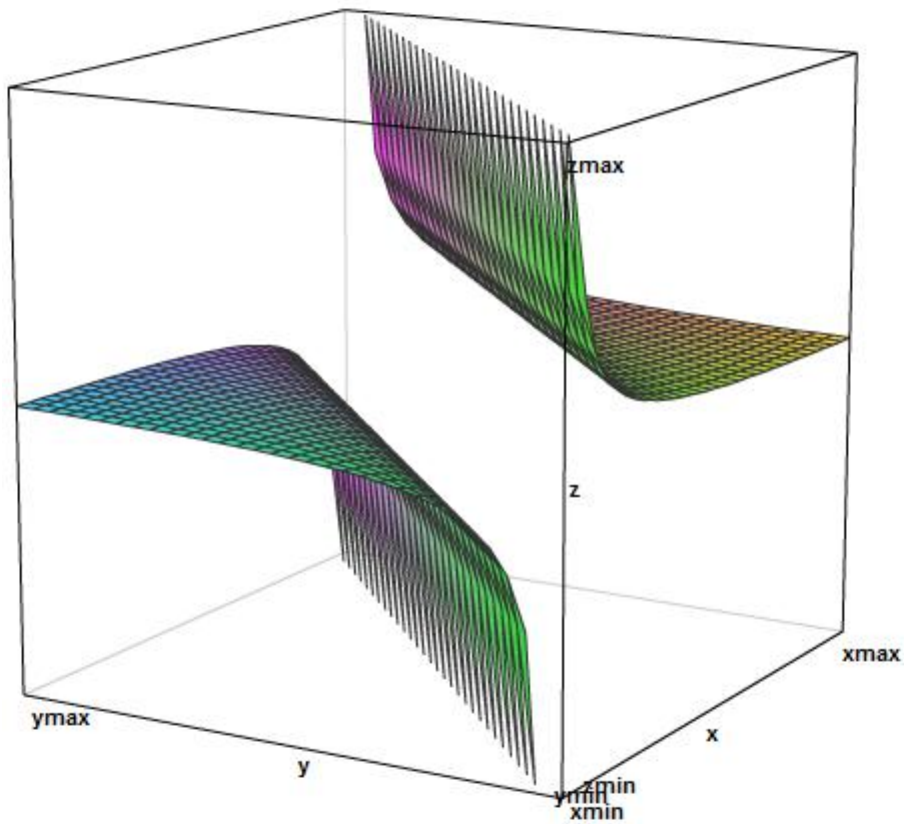
Непрерывность функции нескольких переменных и их геометрический смысл

Непрерывные точки и точки разрыва

Область непрерывности и область разрыва







Линия разрыва функции $\dfrac{1}{x-y}$

Частные производные функций нескольких переменных

Частные приращения и частные производные.

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$
$$\Delta_y f = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

Частные производные

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Обозначения частных производных

$$f_t \equiv f'_t \equiv \partial_t f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial t}$$

$$f_x \equiv f'_x \equiv \partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial x}$$

$$f_y \equiv f'_y \equiv \partial_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial y}$$

$$f_z \equiv f'_z \equiv \partial_z f \equiv \frac{\partial f}{\partial z} \equiv \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial z}$$

Операторы дифференцирования по соответствующим переменным

$$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$$

Если переменные у функции нескольких переменных не зависят друг от друга,
то при дифференцировании функции по одной переменной,
другая воспринимается как константа, т. е.

Например

$$z = \exp(ax + by)$$

Продифференцируем как сложную функцию по переменным x и y

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\exp(ax + by) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\exp(ax + by)\frac{\partial}{\partial x}(ax + by) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\exp(ax + by)\left(a\frac{\partial}{\partial x}x + b\frac{\partial}{\partial x}y\right) =$$

$$= a\exp(ax + by)$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\exp(ax + by) =$$

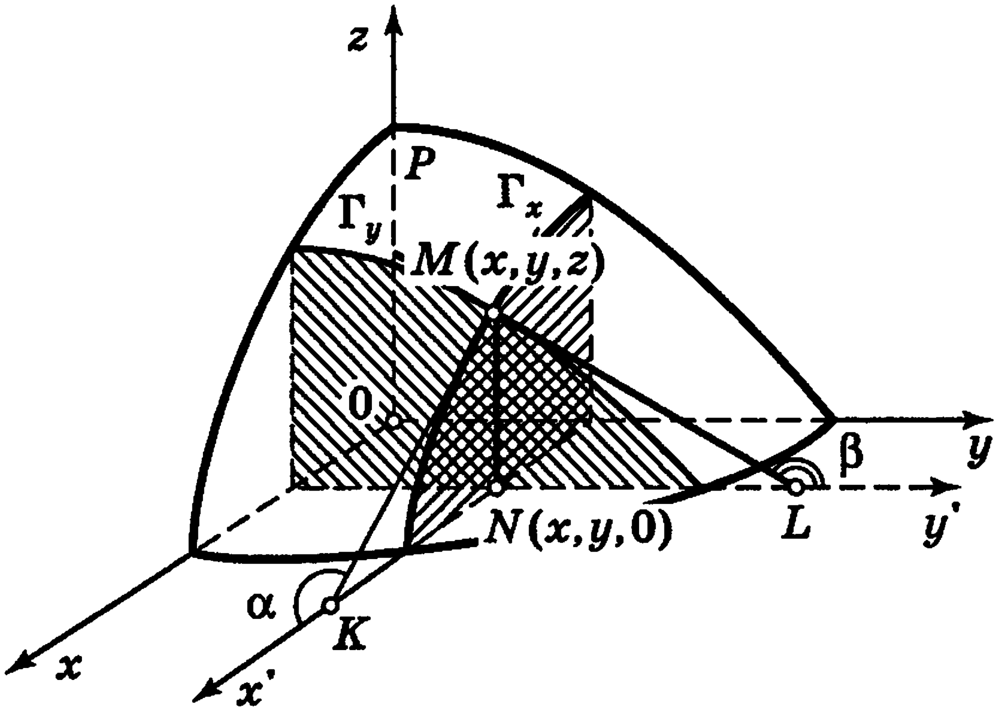
$$= \frac{\partial}{\partial y}\exp(ax + by)\frac{\partial}{\partial y}(ax + by) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\exp(ax + by)\left(a\frac{\partial}{\partial y}x + b\frac{\partial}{\partial y}y\right) =$$

$$= b\exp(ax + by)$$

Геометрическая интерпретация частных производных

Касательные прямые в точке и касательная плоскость



Сечения поверхности $z = f(x,y)$ плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ являются кривые линии Γ_x и Γ_y на поверхности

$$\Gamma_x = f(x,y)\big|_{y=y_0}$$

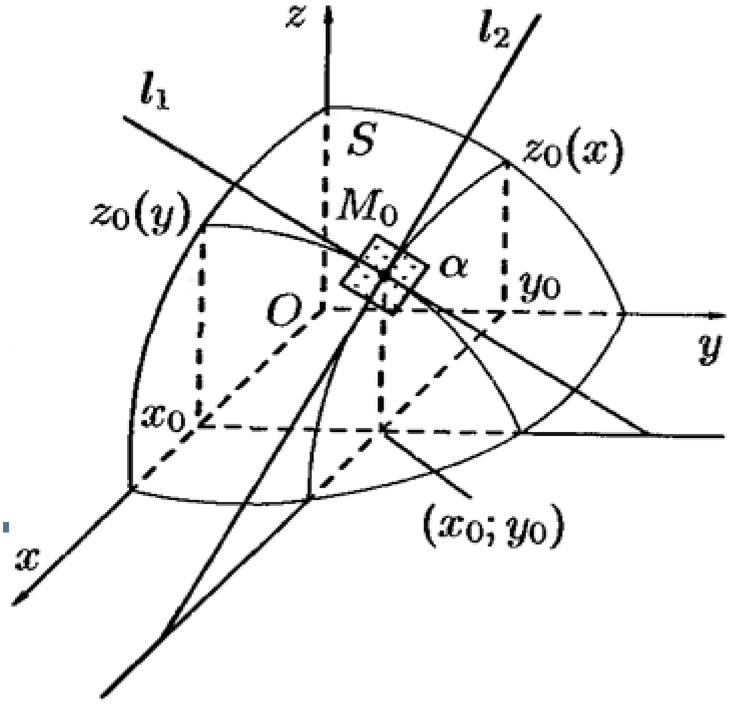
$$\Gamma_y = f(x,y)\big|_{x=x_0}$$

Угловые коэффициенты касательных линий

$$f_x\big|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{y=y_0} = k_{(x)} = \mathrm{tg}(\alpha)$$

$$f_y\big|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x_0} = k_{(y)} = \mathrm{tg}(\beta)$$

Касательные прямые к поверхности



Уравнения касательных прямых в точке $M(x_0, y_0)$ будут

В плоскости (x_0, y, z)

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) =$$

$$= f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = k_{(y)}(y - y_0)$$

$$z - z_0 = k_{(y)}(y - y_0)$$

В плоскости (x, y_0, z)

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) =$$

$$= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) = k_{(x)}(x - x_0)$$

$$z - z_0 = k_{(x)}(x - x_0)$$

Касательная плоскость

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0)$$

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0)$$

$$z - z_0 = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$

$$z - z_0 = k_{(x)}(x - x_0) + k_{(y)}(y - y_0)$$

Более общая формула

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}(z - z_0) = 0$$

Уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Более общая формула

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Частные производные высших порядков

Частные производные второго порядка в случае, когда дифференцирование проводится по одной переменной

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} f \equiv \frac{\partial f_t}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} f_t \equiv f_{tt}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial}{\partial z} f_z = f_{zz}$$

Смешанные (перекрёстные) производные второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \equiv f_{xt}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f_x}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \equiv f_{tx}$$

И другие смешанные производные

$$f_{xy},\ f_{yx},\ f_{xz},\ f_{zx},\ f_{zy},\ f_{yz}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$$

Причём результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования по той или иной переменной (коммутативность).

Теорема. Если вторые смешанные производные функции $z = f(x, y)$ непрерывны, то они равны между собой

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ или } z_{xy} = z_{yx}$$

Например $z = \exp(ax + by)$

$$z_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp(ax + by) = a^2 \exp(ax + by)$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \exp(ax + by) = b^2 \exp(ax + by)$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \exp(ax + by) = ab \exp(ax + by)$$

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \exp(ax + by) = ab \exp(ax + by)$$

Производные более высоких порядков

$$f_{xxx},\ f_{yyy},\ f_{xxy},\ f_{yxz},\ f_{zzzz},\ f_{yzxz} \cdots$$

Частные производные от сложных функций

$$f(\psi(x, y), \varphi(x, y))$$

$$\frac{\partial f(\psi, \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(\psi, \varphi)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Полная производная

Когда одна у функции $f(t, x, y, z)$ переменная независимая, а остальные переменные зависят от неё $f(t, x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{df(t, x, y, z)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= f_t + f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t$$

Производная неявной функции $f(x, y) = 0$

Если *x* взять в качестве независимой переменной, тогда $f_x(x, y(x)) = 0$.
Производная первого порядка будет

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) y_x = 0$$

$$y_x = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

тогда производная

$$y_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Частные производные функций заданных неявно

$$f(x, y, z) = 0$$

$$f(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$f_x(x, y) + f_z z_x = 0$$

$$f_y(x, y) + f_z z_y = 0$$

Отсюда легко получить производные z_x и z_y

$$f_z z_x = -f_x(x, y)$$

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$f_z z_y = -f_y(x, y)$$

$$z_y = -\frac{f_y}{f_z}$$

Оператор Гамильтона (набла)

На плоскости

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$$

В трёхмерном пространстве

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

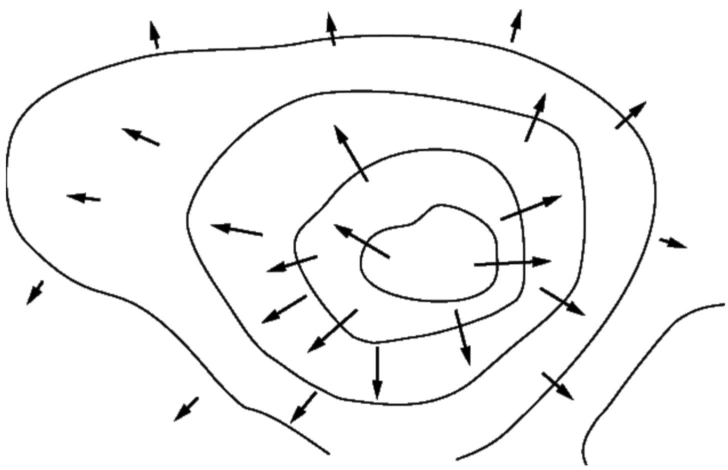
Другие обозначения

$$\nabla \equiv \boldsymbol{\nabla} \equiv \vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla} \equiv \bar{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x}, \frac{\vec{\partial}}{\partial y}, \frac{\vec{\partial}}{\partial z}\right) \equiv$$

$$\boldsymbol{i}\partial_x + \boldsymbol{j}\partial_x + \boldsymbol{k}\partial_x \equiv (\boldsymbol{i}\partial_x, \boldsymbol{j}\partial_x, \boldsymbol{k}\partial_x)$$

Скалярное поле $\varphi(x, y, z)$



Операции первого порядка в теории поля

Градиент

Оператор Гамильтона действует на плоскости на некоторую функцию φ

$$\nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}$$

В трёхмерном пространстве

$$\nabla\varphi(x, y, z) \equiv \operatorname{grad}\varphi(x, y, z) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z}\mathbf{k}$$

или кратко

$$\nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Свойства градиента

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n} \equiv \nabla\varphi$$

n нормаль к эквипотенциальной поверхности скалярного поля

$$\operatorname{grad} a = 0; \quad a = \mathrm{const}$$

$$\operatorname{grad}(cu) = c\operatorname{grad}u; \quad u = u(x, y, z), \quad c = \mathrm{const}$$

$$\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad}u + \operatorname{grad}v$$

$$\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad}u + u\operatorname{grad}v$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\operatorname{grad}v - v\operatorname{grad}u}{u^2}$$

$$\mathrm{grad}u^n = nu^{n-1}\mathrm{grad}u$$

$$\mathrm{grad}(\mathbf{b}u) = \mathbf{b}\mathrm{grad}u; \quad \mathbf{b} = \mathrm{const}$$

Градиент сложной функции

$$\mathrm{grad}(f(\rho)) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathrm{grad}\rho$$

$$\mathrm{grad}\ f(uv) = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}v + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}u$$

Направление градиента

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s}\,\mathrm{grad}\,u(x, y, z)$$

Единичный вектор нормали ***n*** скалярной функции (поля) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ выражается как

$$\boldsymbol{n}(M_0) = \pm\frac{\mathrm{grad}\,u(M_0)}{|\,\mathrm{grad}\,u(M_0)\,|}$$

Знаки соответствую усилению поля, когда знак «+» и ослаблению поля в случае знака «-».

Производные по направлению

Производные по направлению скалярного поля $u(M)$ по направлению **s**, заданную некоторым вектором $\boldsymbol{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$$

Направляющие косинусы единичного вектора направления

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\mathbf{A}|}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{|\mathbf{A}|}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\mathbf{A}|},$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

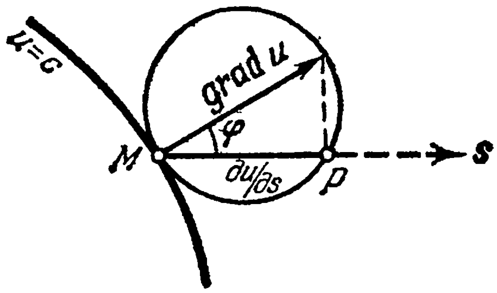
Производная скалярного поля $u(M)$ по направлению L в точке M совпадает с производной по направлению, которое задаётся касательной $\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$ на кривой L.

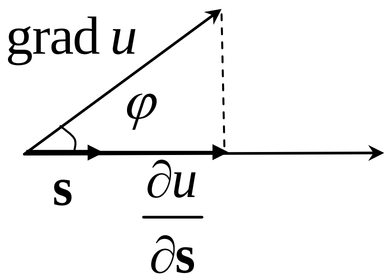
Абсолютная величина $\left|\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|$ определяет скорость изменения скалярного поля в точке *М*, а знак производной указывает на возрастание (плюс) и убывания (минус).

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} \equiv (\nabla u, \mathbf{s}) \equiv (\mathbf{s}, \nabla u) = (\mathbf{s}, \nabla) u \equiv$$
$$\equiv (\mathbf{s}, \mathrm{grad} u) = (\mathrm{grad} u, \mathbf{s}) = |\,\mathrm{grad} u\,| \cos\varphi =$$
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}\mathbf{k} = (\mathbf{s}, \mathrm{grad} u)\mathbf{i} + (\mathbf{s}, \mathrm{grad} u)\mathbf{j} + (\mathbf{s}, \mathrm{grad} u)\mathbf{k} =$$
$$= (\mathbf{s}, \nabla) u\mathbf{i} + (\mathbf{s}, \nabla) u\mathbf{j} + (\mathbf{s}, \nabla) u\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} = (\mathrm{grad}\, u, \mathbf{s}) = (\mathbf{s}, \mathrm{grad}\, u) \equiv \mathrm{grad}_{\mathrm{s}} u =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial \mathrm{s}}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial \mathrm{s}}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial \mathrm{s}}\cos\gamma$$

Связь производной по направлению и градиент





$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s}\,\mathrm{grad}(u(x, y, z))$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} = |\,\mathrm{grad}\, u\,| \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{\mathbf{s}}{|\operatorname{grad} u|}$$

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}, \mathbf{s})$$

Дифференциалы функций многих переменных

Полный дифференциал

$$df(t,x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Частные приращения функций

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y f = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

Полное приращение функции

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta f = df + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

$$df \approx \Delta f$$

$$\Delta f = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

Использование дифференциалов функций многих переменных для приближённого расчёта

$$f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) \approx f(x,\, y) + f_x(x,\, y)\Delta x + f_y(x,\, y)\Delta y$$

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Дифференциалы высших порядков функций многих переменных

Дифференциалы высших порядков

$$d^2z = d(dz)$$

$$d^3z = d(d^2z)$$

$$\dots$$

$$d^n z = d(d^{n-1}z)$$

$$d^n z = z^{(n)} d(d^{n-1} z)$$

Обозначения

$$d(df) = d^2 f$$

$$dx \cdot dx = (dx)^2 = dx^2$$

Иногда, не совсем корректно, обозначают d^2x

Дифференциалы разных порядков в двухмерном случае

$$df(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f$$

$$d^2 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d^2x + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} d^2 y$$

$$d^3 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} d^2 x + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} d^2 x dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx d^2 y + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} d^3 y$$

…

$$d^n f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f =$$

$$= \frac{\partial^n f}{\partial x^n} d^n x + n \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y^1} d^{n-1} x d^1 y + \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} d^{n-2} x d^2 y + ... + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} d^n y =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} d^{n-k} x d^k y; \qquad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Дифференциалы разных порядков в трёхмерном случае

$$df(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) f$$

$$d^2 f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f$$

$$d^3 f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^3 f$$

…

$$d^n f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n f$$

Дифференциалы порядка n в *m*-мерном случае

$$d^n f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f$$

Формула Тейлора для функций нескольких переменных

Теорема (Формула Тейлора). Разложение в ряд Тейлора функции одной переменной

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N+1}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n=$$

$$=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+$$

$$+\ldots+\frac{1}{N!}f^{(N)}(a)(x-a)^N+\frac{1}{(N+1)!}f^{(N+1)}(a)(x-a)^{N+1}$$

Такое разложение возможно и в случае, когда функция бесконечно дифференцируема

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n=$$

$$=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+$$

$$+\ldots+\frac{1}{N!}f^{(N)}(a)(x-a)^N+\ldots$$

Обрыв полинома на N-м элементе разложения, если функция дифференцируема более, чем N+1 раз

$$f(x)\approx\sum_{n=0}^{N+1}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n=$$

$$=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+$$

$$+\ldots+\frac{1}{N!}f^{(N)}(a)(x-a)^N+\frac{1}{(N+1)!}f^{(N+1)}(\xi)(x-a)^{N+1};\quad \xi=a+\theta(x-a),0<\theta$$

Остаточный член в форме Лагранжа будет и связанная с ним погрешность

$$R_N(x) = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi) x^{N+1}; \qquad \xi = a + \theta(x-a),\ 0 < \theta < 1$$

Представив в виде дифференциала элементы разложения функции в ряд Тейлора

$$x - a = \Delta x$$

$$(x-a)^n = (\Delta x)^n \equiv \Delta x^n$$

Другие форму записи элементов разложения в формуле Тейлора

$$f^{(n)}(a)(x-a)^n = f^{(n)} \Delta x^n \approx f^{(n)} dx^n = d^n f(x)$$

Такое разложение возможно в случае, когда функция бесконечно дифференцируема

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(M_0)}{n!} =$$

$$= f(M_0) + \frac{1}{1!} df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(M_0) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(M_0) + \ldots$$

Данная форма записи справедлива для функций нескольких переменных.

В случае функции m переменных многомерных.
Разложение по степеням

$$\Delta x_i = (x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02}, \ldots, x_m - x_{0m}) = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$$

Здесь разложение в окрестности точки M_0

$$M_0 = M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0m})$$

Если функция f будет зависеть от m переменных, то разложение в окрестности точки M_0 можно записать

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv f(x_i)$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N+1}\frac{d^n f(M_0)}{n!}$$

$$f(x_i)=\sum_{n=0}^{N+1}\frac{d^n f(M_0)}{n!}=$$

$$= f(M_0)+\frac{1}{1!}df(M_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(M_0)+\frac{1}{3!}d^3 f(M_0)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{N!}d^N f(M_0)+\frac{1}{(N+1)!}d^{N+1} f(M_0)$$

Если функция *f* будет зависеть от *m* переменных, то разложение в окрестности точки $M_0=M_0(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0m})$ можно записать разложение по степеням

$$\Delta x_i=(x_1-x_{01},x_2-x_{02},\ldots,x_m-x_{0m})=(\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_m)$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=$$

$$= f(M_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)f+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 f+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^3 f+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n f+\ldots$$

Запишем в конечных разностях, заменив $dx_i\to\Delta x_i$ в точке $M_0=M_0(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0m})$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^n f(x_1, x_2, \dots, x_m) =$$

$$= f(M_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right) f +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^2 f +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^3 f + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^n f + \dots$$

Разложение в случае бесконечно дифференцируема функции двух переменных $f(x, y)$

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y) =$$

$$= f(M_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f + \dots$$

Раскроем скобки и получим разложение

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y) =$$

$$= f(M_0) + \frac{1}{1!} (f_x dx + f_y dy) + \frac{1}{2!} (f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2) +$$

$$+ \dots + \frac{1}{3!} (f_{xxx} dx^3 + 3 f_{xxy} dx^2 dy + 3 f_{xyy} dx dy^2 + f_{yyy} dy^3) +$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_k^n \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} d^{n-k} x d^k y$$

Здесь $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - коэффициенты разложения бинома Ньютона

Запишем в конечных разностях, заменив $dx_i \to \Delta x_i$ в точке $M_0 = M_0(x, y)$

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^n f(x,y) \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} =$$

$$= f(M_0) + \frac{1}{1!}(f_x(M_0)\Delta x + f_y(M_0)\Delta y) +$$

$$+\frac{1}{2!}(f_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(M_0)\Delta y^2) +$$

$$+\frac{1}{3!}(f_{xxx}(M_0)\Delta x^3 + 3(M_0)f_{xxy}\Delta x^2\Delta y + 3f_{xyy}(M_0)\Delta x\Delta y^2 + f_{yyy}(M_0)\Delta y^3) +$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_k^n \frac{\partial^n f(M_0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Delta^{n-k}x\Delta^k y$$

Здесь $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - коэффициенты разложения бинома Ньютона

Обрыв полинома на *N*-м элементе разложения, если функция дифференцируема более, чем *N*+1 раз

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N+1} \frac{d^n f(M_0)}{n!} =$$

$$= f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(M_0) +$$

$$+\ldots+\frac{1}{N!}d^N f(M_0) + R_N(M_0)$$

Остаточный член в форме Лагранжа будет и связанная с ним погрешность

$$R_N(M_0) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi_i); \quad \xi_i = (x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y, \ldots z_0 + \theta\Delta z)\ 0 < \theta < 1$$

Экстремумы функций нескольких переменных

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство

$$f(x_0, y_0, \ldots) \geq f(x, y, \ldots)$$

а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01}, y_{01}, \ldots) \leq f(x, y, \ldots)$$

тогда $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – **наименьшее значение** функции f(x, y, …) в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка $N_0(x_0, y_0, \ldots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \ldots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство. Функция f(x, y, …), непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число K, что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, \ldots)| < K$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число $\Delta > 0$, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство

$$\left|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\right| < \varepsilon$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки M_0(x_0, y_0) верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки M_0(x_0, y_0) верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку *M*(x_0, y_0) будем называть ***критической точкой***.

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение

Гессиан

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} f(x,y) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \right)^2 =$$

$$= f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$A \equiv f_{xx}(x_0, y_0); \quad C \equiv f_{yy}(x_0, y_0); \quad B \equiv f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$D(x_0, y_0) = AC - B^2$$

В точке $M(x_0, y_0)$ имеется экстремум, если

$$D(x_0, y_0) > 0,$$

то это будет максимум, если

$$A \equiv f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ (или } C \equiv f_{yy}(x_0, y_0) < 0\text{)},$$

или будет минимум, если

$$A \equiv f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ (или } C \equiv f_{yy}(x_0, y_0) > 0\text{)},$$

если в точке $M(x_0, y_0)$

$$D(x_0, y_0) < 0,$$

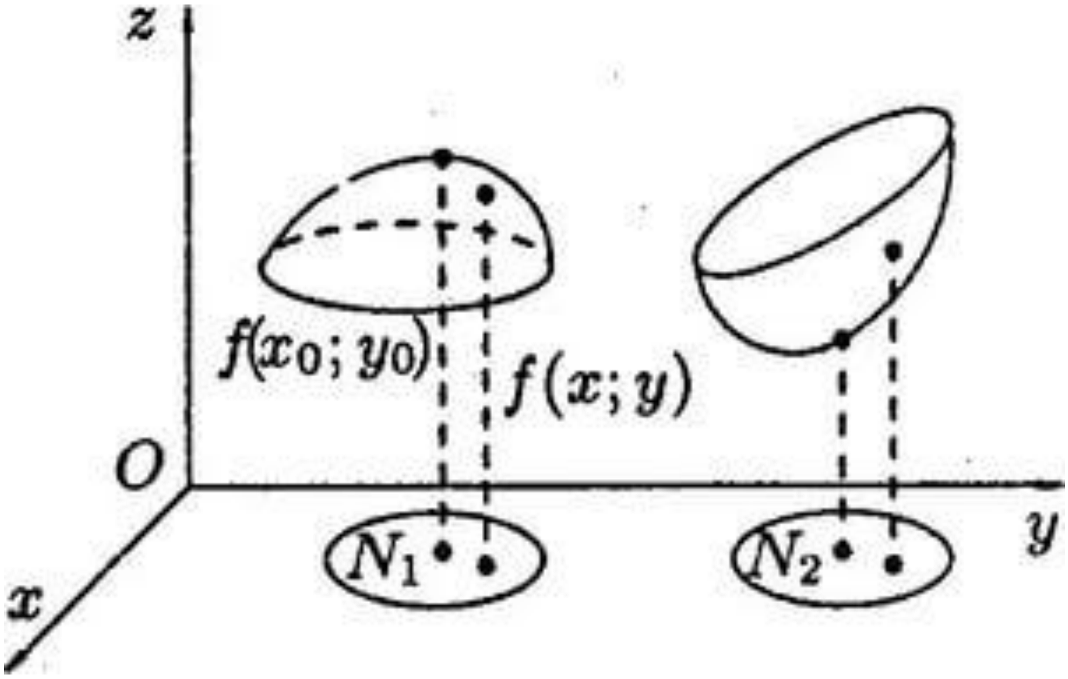
то в точке $M(x_0, y_0)$ экстремума нет, и если в точке $M(x_0, y_0)$

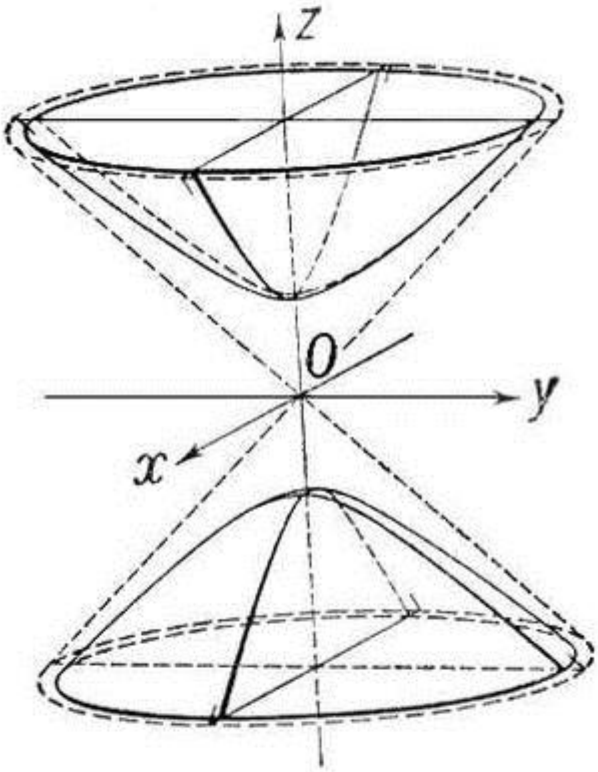
$$D(x_0, y_0) = 0,$$

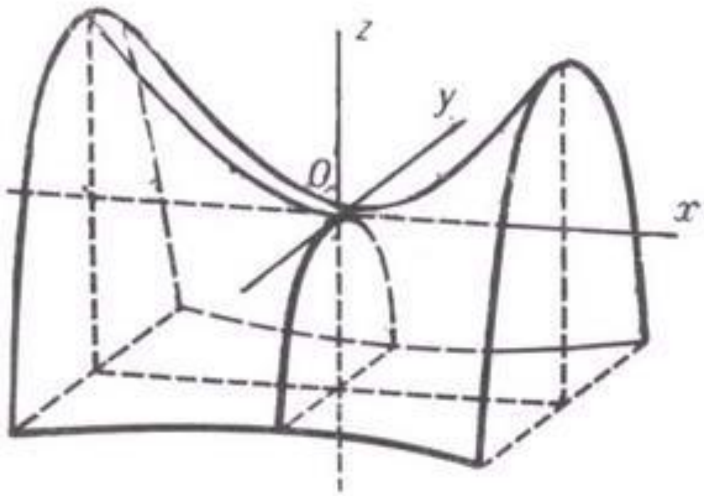
то необходимы дальнейшие исследования на экстремум

1.	$D(x_0, y_0) = AC - B^2 > 0$	Экстремальная точка
a	$A \equiv f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (или $C \equiv f_{yy}(x_0, y_0) < 0$)	Максимум
b	$A \equiv f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (или $C \equiv f_{yy}(x_0, y_0) > 0$)	Минимум
2.	$D(x_0, y_0) = AC - B^2 < 0$	Нет экстремума
3.	$D(x_0, y_0) = AC - B^2 = 0$	Нужны дальнейшие исследования

Геометрическое представление экстремумов и критических точек






z
y
O
x

Пример. Найти экстремум функции

$$z = x^2 - xy - y^2 + 9x - 6y + 20$$

Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 6$. Приравниваем производные нулю и находим стационарную точку

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0, \\ x - 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

Из решения системы это будет точка $x_0 = -4,\ y_0 = 1$. Вопрос о характере экстремума решается с помощью достаточного признака. Находим: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ и $D = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Так как $A > 0$, то точка $(-4,1)$ будет точкой минимума функции z. Значение функции в этой точке будет $z_{\min} = 16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 20 = -1$.

Условный экстремум

Функция двух переменных

$$z = f(x, y)$$

Уравнение связи

$$\varphi(x, y) = 0$$

Функция Лагранжа

$$u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

Необходимые условия стационарных точек (экстремума)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}u = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \lambda \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}u = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \lambda \dfrac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Определение характера точек

$$H(x, y)=\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Если $H(x_0, y_0) > 0$, то в точке $M(x_0, y_0)$ имеется условный максимум.

Если $H(x_0, y_0) < 0$, то в точке $M(x_0, y_0)$ имеется условный минимум.

Пример.

Найти экстремум функции $z=xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x+3y-5=0$.

Рассмотрим функцию Лагранжа $u=xy+\lambda(2x+3y-5)$. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=y+2\lambda$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x+3\lambda$. Из системы уравнений (необходимые условия экстремума)

$$\begin{cases} y+2\lambda=0, \\ x+3\lambda=0, \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$$

находим $\lambda=-5/12$, $x=5/4$, $y=5/6$. Нетрудно видеть, что в точке $(5/4;\ 5/6)$ функция $z=xy$ достигает наибольшего значения $z_{\max}=25/24$.

Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.