ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

В.А. Чуриков

МАТЕМАТИКА

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Методическое пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2009

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Развитие математической культуры у обучающихся:

1. Выработка осознания необходимости получения математических знаний и навыков;
2. Показать историческое развитие математики от зарождения до современного времени;
3. Показать значение математики в естественнонаучных дисциплинах (физика, химия, астрономия, биология…), технических дисциплинах, экономических и юридических дисциплинах;
4. Выработка понимания абстрактности математических понятий и количественном характере математического описания;
5. Дать представление о математическом мышлении: строгости, логичности рассуждений;
6. Практическое совершенствование и закрепление навыков математического мышления;
7. Выработка навыков использования математики для создания математических моделей в экономике и умение их грамотно анализировать и решать.

ВИДЫ ЗАНЯТИЙ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ

Теоретические занятия (лекции)

Общий объём лекционного курса 60 часов для студентов обучающихся по специальности “Коммерция” и 30 часов по специальности “Юриспруденция”.

Практические занятия (семинары)

Проводятся отдельно для групп студентов. Для обучающихся по специальности “Коммерция” планируется 60 часов, а по специальности “Юриспруденция” 30 часов семинаров. Цель семинаров — знакомство с основными математическими понятиями и выработка практических навыков решения конкретных математических задач по темам, освещённым на теоретических занятиях.

Самостоятельная работа

С целью более глубокого усвоения материалов курса планируется самостоятельная работа по рассматриваемым темам. В частности планируется индивидуальная работа студентов по написанию рефератов по отдельным темам.

ПРОГРАММА КУРСА

Тематический план учебной дисциплины

№ темы	Наименование разделов и тем	Количество часов при очной форме обучения		Всего часов по теме лекции
		лекции	практика	
1.	Введение в дисциплину	2	—	2
2.	Элементы теории множеств	2	2	4
3.	Функции их свойства и графики	4	4	8
4.	Аналитическая геометрия	4	4	8
5.	Линейная алгебра	6	6	12
6.	Пределы последовательностей и функций, их свойства и приложения	4	4	8
7.	Производная функции и её применение	6	8	14
8.	Интегральное исчисление функции одной переменной	6	8	14
9.	Теория функций нескольких переменных	4	4	8
10.	Дифференциальные уравнения	6	6	12
11.	Элементы теории вероятности и математической статистики	8	10	18
12.	Общие сведения о задачах оптимального управления	8	4	12
	Итого	60	60	120

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА

Тема 1. Введение в дисциплину

Об особенностях изложения математики в данном курсе: простота, большое количество простых примеров, без сложных доказательств и т.д.

Математика как наука. Основные этапы становления и развития математики. Взгляды на математику выдающихся людей. Структура современной математики. Принципы построение математических знаний: определения, аксиомы, теоремы, доказательства.

Место и роль математики в современном мире, в культуре, в истории, в ряду естественнонаучных дисциплин и в технике. Роль математики в других науках. О возрастании роли математики с развитием общества.

О математическом мышлении, индукции и дедукции. О принципах математических рассуждений и математических доказательств (точность, логичность, непротиворечивость, краткость, последовательность). Условное деление математики на чистую (теоретическую), прикладную, вычислительную.

Что даёт математический подход?

В основе математики лежат строгие, логические рассуждения. Способы математических рассуждений (описательные рассуждения (дискрипции), понятия (задают классы предметов), суждения (утверждения требующие доказательства), умозаключения (способы логического перехода между суждениями, доказательства (суждения и умозаключения обосновывающие суждение), доказательства строятся из посылок (предпосылок) из которых выводятся следствия (заключения)).

Метаматематика или основания математики. Подходы для обоснования математических знаний: интуиционизм и конструктивизм (Л. Брауэр, Г. Вейль), логическое обоснование математики (Б. Рассел, А. Уайтхед), аксиоматический метод (Д. Гильберт, Н. Бурбаки), теоретико-множественный подход (Г. Кантор). Их связь между собой. Достоинства и проблемы каждого из подходов.

Тема 2. Элементы теории множеств

Понятие множества. Способы задания множеств. Диаграммы Эйлера—Венна и их применение. Количество элементов множества (мощность множества). Сравнение множеств по мощности. Пустое множество $\varnothing$. Принадлежность элемента множеству ($a\in A$) и непринадлежность ($a\notin A$). Конечные и бесконечные множества (счётные и несчётные). Подмножества данного множества (включение ($A \subset B$ или ($A \supset B$)) и собственное включение ($A \subseteq B$ или ($A \supseteq B$)). Операции над множествами (объединение ($A\cup B$), пересечение ($A\cap B$), дополнение ($A \setminus B$ или $A - B$), разбиение множества A на непересекающиеся множества B и $\mathbf{C}B$ ($A = B\cup \mathbf{C}B$, $B\cap \mathbf{C}B = \varnothing$, дополнение множества A — множество $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}=A$), декартово произведение (или просто произведение) ($A\times B$)…). Алгебра множеств. Декартово произведение множеств. Отображение множеств (инъекция (отображение в), сюръекция (отображение на), биекция (взаимнооднозначное отображение)). Множества, элементы которых наделены свойствами (структурой). Операции и алгебры. {Люди и конституция и другие нормативные документы как структура множества людей в государстве}. Отношение эквивалентности (обозначения: ~ или R) над множествами (3 аксиомы: 1. Из $a \sim b$ и $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (транзитивность, переходность); 2. $a \sim a$ (рефлексивность); 3. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ (симметричность, взаимность)). Классы эквивалентности. Связные и несвязные множества (двухсвязные, трёхсвязные,… n-связные). Универсальное множество.

Числовые множества. Геометрическое представление чисел (понятие числовой оси.). Числовые промежутки. Множества чисел: **N** (натуральные) $\subset$ **Z** (целые) $\subset$ **Q** (рациональные) $\subset$ **R** (действительные, вещественные) $\subset$ **C** (комплексные). Аксиоматика Пеано. Сравнение чисел. **R** (действительные, вещественные) = **Q** (рациональные)$\cup$ иррациональные. Алгебраические числа (корни действительных алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами) и трансцендентные числа.

Мощности бесконечных множеств. Равномощные (эквивалентные) множества. Отношение порядка. Предпорядок (квазипорядок) (2 аксиомы: 1. Из $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (транзитивность); 2. $a \leq a$ (рефлексивность); квазипорядок является отношением эквивалентности). Отношение порядка (строгий порядок) (2 аксиомы: 1. Из $a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность); 2. Невозможно одновременное выполнение $a < b$ и $a > b$). Линейно упорядоченные множества (цепь) (частично упорядоченное множество, в котором для любой пары элементов выполняется $a \leq b$ или $b \leq a$). Вполне упорядоченное множество P как частный случай линейно упорядоченных множеств (4 аксиомы: 1. Из $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (транзитивность); 2. $a \leq a$ (рефлексивность); 3. Из $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность); 4. $a_0 \leq b$ для всех b из множества P (условие минимальности, существует наименьшего элемента множества)),. Множества неупорядоченные, частично упорядоченные (или просто упорядоченные) (3 аксиомы: 1. Из $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq a$ (транзитивность); 2. $a \leq a$ (рефлексивность); 3. Из $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)), строго упорядоченные (отношение > или <). Плотные и неплотные множества. Ограниченные и неограниченные множества. Границы множеств. Точная верхняя и точная нижняя граница. Верхняя и нижняя граница. Наибольший и наименьший элемент. Открытые и закрытые множества. Кардиналы. Дискретные и непрерывные множества. Непрерывность. Проблема континуума.

Мнимые числа. Комплексные числа и их представления: алгебраическая, геометрическая, тригонометрическая, показательная. Длина (модуль, абсолютное значение) и аргумент комплексных чисел. Свойства комплексных чисел. Операции над комплексными числами.

Тема 3. Функции их свойства и графики

Переменные величины в природе и обществе и функциональная зависимость. Определение (отображения) функции и способы ее задания (табличный, аналитический, графический). Способы аналитического представления функций (явное, неявное, параметрическое). Область определения, область значений функции. Односвязные и многосвязные функции.

Классификация функций: Элементарные, рациональные, дробно-рациональные, иррациональные, трансцендентные. Свойства основных элементарных функций: линейная функция, степенные функции, показательные функции, тригонометрические функции, обратные логарифмические функции, логарифмические функции, гиперболические функции.

Возрастающие и убывающие функции. Возрастание и убывание функции на отрезках. Монотонные и немонотонные функции. Ограниченные и неограниченные функции. Периодические функции. Обратные функции. Понятие сложной функции. Понятие непрерывности функции в точке. Непрерывность функции на промежутке. Теорема о непрерывности элементарных функций. Непрерывные функции, кусочно-непрерывные и другие непрерывные функции. Точки разрыва и их классификация. Сравнение функций.

Общие закономерности построения графиков функций. Понятие асимптоты. Классификация асимптот по их возможному расположению и алгоритмы поиска.

Тема 4. Аналитическая геометрия

Системы координат в трёхмерном пространстве: прямоугольная (декартова), цилиндрическая, сферическая. Скалярные и векторные величины. Определение вектора (длина (модуль) и направление. Свойства модуля: положительность, однородность (умножение на число), неравенство треугольника, неравенство Коши—Буняковского. Коллинеарные и компланарные вектора. Стандартная форма вектора. Понятие линейной комбинации векторов. Условие линейной независимости системы векторов. Угол между векторами. Координаты вектора. Проекции вектора. Свойства проекций. Теорема о проекции. Скалярное произведение векторов и его свойства: дистрибутивность, коммутативность, однородность, положительная определённость. Векторное произведение векторов и его свойства, смешанное произведение векторов и его свойства.

Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Операции над векторами в координатной форме. Линейные (векторные) пространства (8 аксиом). Векторное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Смешанное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Выполнение действий над векторами через действия над координатами. Ортогональный, нормированные и ортонормированные системы векторов. Базис и разложение вектора по базисным векторам.

Прямая на плоскости и в трёхмерном пространстве: различные виды уравнений, геометрический смысл параметров и коэффициентов. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом в общей форме. Плоскость в трёхмерном пространстве: различные виды уравнений, геометрический смысл параметров и коэффициентов.

Тема 5. Линейная алгебра

Понятие матрицы. Значение матриц для математики и естествознания. Фомы записи матриц (… расписанная, в компонентах…). Основные структурные составляющие матриц: элементы, строки, столбцы, главная (прямая) диагональ (диагональные элементы), недиагональные элементы и побочная (косая) диагональ. Математическая природа элементов матриц: действительные или комплексные числа, функции, векторы, матрицы, операторы… Подматрицы (субматрицы, блоки). Размерность (размер, порядок) матриц (количество строк и столбцов). Конечные и бесконечные матрицы. Виды матриц: прямоугольные матрицы ($m \times n$), матрица-строка (строчная) ($1 \times n$) и матрица-столбец (nx1) col (a_1, a_2, … a_n) (столбцевая, столбец) (mx1) — векторы. Диагональные матрицы (все недиагональные элементы равны нулю) diag(a_{11}, a_{22}, … , a_{nn}). Квадратные матрицы (nxn) (размер, порядок) квадратной матрицы (число строк (столбцов)).

Числовые матрицы: действительные ($\mathbf{A} = \mathrm{Re}\mathbf{A}$) и комплексные ($\mathbf{A} = \mathrm{Re}\mathbf{A} + i\mathrm{Im}\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$). Положительные (действительные матрицы с положительными элементами) и неотрицательные матрицы (действительные матрицы с неотрицательными элементами).

Равенство матриц (матрицы **A** и **B** называются равными, что записывается как $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$). Отношение равенств матриц является отношением эквивалентности.

Сложение матриц (коммутативная (абелева) группа) матриц одной размерности.

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (коммутативность (перестановочность) сложения)

$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ ассоциативность (сочетательность) сложения

$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$ существование нулевого (коммутативной единице) элемента (нуля)

$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$ или ($\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$)существование отрицательного элемента, $-\mathbf{A}$ — противоположная (аддитивно обратная) матрица.

Эти свойства говорят, что операция сложения векторов является коммутативной (или абелевой) группой.

Умножение или деление матрицы на число.

$1\mathbf{A}=\mathbf{A}1=\mathbf{A}$ умножения вектора на единицу.

$\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$ ассоциативность (сочетательность) умножения вектора на число.

$(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ дистрибутивность (распределительность).

$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ дистрибутивность (распределительность).

$\alpha\mathbf{A}=\mathbf{A}\alpha$ коммутативность (переместительность, перестановочность) умножения вектора на число.

Четыре свойства коммутативной группы относительно операции сложения и первые четыре утверждения свойств умножения матриц на число составляют восемь аксиом линейного пространства.

Транспонированные матрицы ($\mathbf{A}^T \equiv \mathbf{A}' \equiv \tilde{\mathbf{A}} \equiv {}^t\mathbf{A}$, $(A_{ij})^T = \mathbf{A}_{ij}$) и их свойства ($(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$; $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$; $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{A}^T$). Симметрическая ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) и антисимметрическая (кососимметрическая) ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$) матрицы. След (шпур) квадратных матриц ($\mathrm{Sp}\,\mathbf{A} \equiv \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}$) и его четыре свойства ($\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) + \mathrm{Tr}\,(\mathbf{B})$, $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{BA})$, $\mathrm{Tr}\,(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\cdot\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A})$, $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{AB} - \mathbf{AB}) = 0$, $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}^T)$, $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}^*) = \overline{\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A})}$, $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}^*) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{A})$).

Определитель (детерминант) квадратной матрицы. Формы записи $\Delta \equiv \det\mathbf{A} \equiv D\mathbf{A} \equiv |\mathbf{A}|$.

Правила вычисления определителей. Примеры вычисления определителей 2-го и 3-го порядков. Основная теорема о вычислении определителей (определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения). Определитель имеет $n!$ членов, каждый из которых имеет n сомножителей из элементов матрицы. Матрица **A** вырожденная (особенная, сингулярная), если $\det\mathbf{A} = 0$. Матрица вырожденная тогда и только тогда, когда у неё есть линейно зависимые строки (столбы). Матрица **A** невырожденная (неособенная, регулярная), если $\det\mathbf{A} \neq 0$. Матрица невырожденная тогда и только тогда, когда у неё все строки (столбы) линейно независимы. Теорема: В квадратной матрице количество линейно независимых строк равно количеству линейно независимых столбцов. Мнемонические правила для вычисления определителей 3-го порядка.

Свойства определителей:

1. При транспонировании матрицы её определитель не меняется $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^T$.

2. При перестановке двух строк или двух столбцов матрицы, её определитель меняет знак на противоположный (свойство антисимметрии).

3. Общий множитель строки или столбца матрицы определителя можно вынести за знак определителя.

Следствие: Если у матрицы есть нулевой столбец или нулевая строка, то её определитель равен нуль…

4. Если в матрице есть линейно зависимые строки или столбцы, то её определитель равен нулю.

5. Если к столбцу или строке прибавить другой столбец или строку с произвольным множителем, то определитель матрицы не изменится.

6. Если строка или столбец матрицы можно представить как сумму двух строк или двух столбцов, то определитель матрицы будет равен суммой определителей двух матриц.

7. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$.

8. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$.

Миноры (адъюнкты) D_{ij}, которые получаются путём вычёркивания k строки и l столбца из матрицы, алгебраические дополнения A_{ij} миноров будет: $A_{ij} = (-1)^{k+l}D_{ij}$. Дополнительная матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{D}} \equiv \mathbf{A}^{\vee}$ к матрице **A**.

Сцепленные матрицы (матрицы **AB** называются сцепленными, если число строк матрицы **A** равно числу столбцов матрицы **B**. Сцепленность матриц в последовательности **AB** не значит их сцепленности в другом направлении **BA**).

Умножение сцепленных матриц $\mathbf{AB} \equiv \mathbf{A*B}$. Если операция умножения матриц определена. Перестановочные (коммутативные) ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$) и неперестановочные (некоммутативные) ($\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$) матрицы относительно умножения (примечание: операция **BA** может быть неопределенна, если определена операция **AB**. Если умножения для матриц определен, то оно ассоциативно $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Произведение матрицы-столбца (n×1) на матрицу-строку (1×n) и наоборот. Произведение квадратной матрицы (n×n) на матрицу-столбец (n×1). Произведение матрицы-строки (1×n) на квадратную матрицу (n×n). Операции над квадратными матрицами и их свойства.

Умножение на нулевую матрицу ($\mathbf{A0} = \mathbf{0A} = \mathbf{0}$). Единичная квадратная матрица (матрица тождественного преобразования) ($\mathbf{1} \equiv \mathbf{E} \equiv \boldsymbol{I} \equiv \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера) и правила её умножения ($\mathbf{A1} = \mathbf{1A} = \mathbf{A}$).

$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ ассоциативность (сочетательность) умножения

$\mathbf{A1} = \mathbf{1A} = \mathbf{A}$ существование единичного элемента (коммутативной единицы или просто единицы)

$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}$ существование обратного элемента

$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ не коммутативность (не перестановочность) умножения

Эти свойства говорят, что операция умножения квадратных матриц одинакового порядка образуют некоммутативную (не абелеву) группу.

Алгебраическая структура всех квадратных матриц одного порядка относительно операции сложения и умножения образуют (ассоциативные) кольца.

Обратные (мультипликативно обратные) матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ для матрицы $\mathbf{A}$ ($\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$; $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$). Выражение обратных матриц через дополнительные ($\mathbf{A}^{-1} = (\det\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{D}})^{T}$). Обратимые и необратимые матрицы и их определители. Комплексно-сопряжённые (сопряженные) матрицы ($\mathbf{A} = \mathrm{Re}\mathbf{A} + i\mathrm{Im}\mathbf{A} \to \bar{\mathbf{A}} = \mathrm{Re}\mathbf{A} - i\mathrm{Im}\mathbf{A}$; $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$). Сопряженные (эрмитовосопряженные, самосопряженные) ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$) ($\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{A}^+ \equiv \bar{\mathbf{A}}^T$; $\mathbf{A}^{**} = \mathbf{A}$, $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$). Антиэрмитовы (косоэрмитовы, альтернирующие) ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$) матрицы. Нормальные матрицы ($\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^*$), т.е. коммутативные (переместительные) относительно умножения со своими сопряжёнными матрицами. О сведении нормальной матрицы к диагональной. Контраградиентная матрица ($(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\bar{\mathbf{A}}^T)^{-1}$). Специальные матрицы ($\det\mathbf{A} = 1$). Ортогональные ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{AA}^T = \mathbf{1}$; не вырожденная с $\det\mathbf{A} = \pm1$), унитарные матрицы ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{*-1}$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^* = \mathbf{1}$) и унимодулярные (специальные унитарные, т. е. $\det\mathbf{A} = 1$ и $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{*-1}$). Возведение в целую степень квадратных матриц и сумм квадратных матриц.

Понятие и определение ранга произвольной матрицы $\mathrm{rang}\mathbf{A} \equiv \mathrm{rank}\mathbf{A} \equiv r_{\mathbf{A}}$. Ранг матрицы определяет максимальное число линейно независимых строк (столбцов). Ранг матрицы находится с количеством строк m и столбцов n в соотношении $\mathrm{rang}\mathbf{A} \leq \min(m, n)$. Свойства ранга: ранг матрицы не меняется при перестановке двух строк (столбцов); ранг матрицы не меняется при умножении строки (столбца) на число не равное нулю; ранг матрицы не меняется при сложении одной строки с другой помноженной на ненулевое число; $\mathrm{rang}\mathbf{A} = \mathrm{rang}\mathbf{A}^T$; $\mathrm{rang}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{rang}\mathbf{A} + \mathrm{rang}\mathbf{B}$; ($\mathrm{rang}(\mathbf{AB}) \leq \mathbf{A}$ и $\mathrm{rang}(\mathbf{AB}) \leq \mathbf{B}$; $\mathrm{rang}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}$, если $\mathrm{rang}\mathbf{B} = 0$). Связь линейной зависимости строк и столбцов. Связь вырожденности и ранга квадратных матриц.

Базисный минор матрицы, это минор наивысшего порядка не равный нулю, т.е. равный рангу матрицы. Строки и столбцы базисного минора называются базисными строками и столбцами.

Система линейных уравнений. Классификация систем линейных уравнений. Однородные (без правой части) и неоднородные (с правой частью) системы линейных уравнений. Матричная запись линейных уравнений ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов системы, $\mathbf{x}$ — вектор неизвестных системы, $\mathbf{b}$ — вектор свободных членов). Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений. Роль определителя матрицы при нахождении корней системы уравнений. Вырожденные и невырожденные системы линейных уравнений. Линейная вырожденность столбцов или строк матрицы, вырожденность определителя.

Методы решения систем n неоднородных уравнений с n неизвестными. Метод исключения неизвестных. Метод эквивалентных преобразований (метод Гаусса). Метод обратной матрицы ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$): Если $\det\mathbf{A} \neq 0$, то система имеет единственное решение. Метод (формулы) Крамера ($\mathbf{x}_i = D_i/\det\mathbf{A}$, D_i — миноры, получающиеся из $\det\mathbf{A}$ путём замены соответствующих столбцов матрицы определителя, столбцом правых частей (Если $\mathbf{A}$ — невырожденная матрица ($\det\mathbf{A} \neq 0$), а столбец правых частей не нулевой, система имеет одно решение; Если $\det\mathbf{A} = 0$ — система не имеет решений; Если столбец правых частей нулевой, то система имеет единственное нулевое решение, для случая $\det\mathbf{A} \neq 0$ и бесконечное число решений для случая $\det\mathbf{A} = 0$).

Тема 6. Пределы последовательностей и функций, их свойства и приложения

Числовые последовательности: конечные и бесконечные. Бесконечная числовая последовательность как функция на множестве натуральных чисел. Способы задания последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Арифметические действия над последовательностями. Понятие предела бесконечной числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей. Расходящиеся и сходящиеся последовательности и их свойства. Признаки сходимости.

Теорема о единственности предела. Теоремы об арифметических операциях над пределами. Теорема о зажатой последовательности. Методы вычисления пределов последовательностей.

Понятие предела функции в точке. Методы вычисления пределов функций. Теоремы о пределе. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Приращение аргумента и функции. Замечательные пределы.

Тема 7. Производная функции и её применение

Основы дифференциального исчисления. Производная функции. Различные формы записи производных. Секущая и касательная к графику функции. Геометрический и физический смысл производной. Дифференцируемость и непрерывность функции.

Формулы и правила дифференцирования: константы, суммы, произведения, частного и др. Логарифмическое дифференцирование. Производная неявной функции. Производные элементарных функций: показательной, степенной функции, логарифмов, тригонометрических функций и др. Таблица производных. Теорема о производной сложной функции. Теорема о производной обратной функции. Правило Лопиталя для нахождения пределов функций имеющих неопределённости. Производные высших порядков.

Исследование функций с помощью производных. Порядок исследования функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие экстремума. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Локальные и глобальные максимумы и минимумы. Выпуклость (выпуклость вверх) и вогнутость (выпуклость вниз) графика функции. Понятие точки перегиба. Необходимое условие наличия перегиба графика функции в точке. Достаточное условие наличия перегиба графика функции в точке. Полная схема исследования функции.

Дифференциал и его геометрический смысл. Приближенное вычисление приращения функции на основе ее дифференциала.

Разложения функций в степенные ряды Маклорена и Тейлора.

Тема 8. Интегральное исчисление функции одной переменной

Понятие первообразной функции. Интегрирование. Неопределённый интеграл и его свойства. Связь неопределённого интеграла и дифференциала. Постоянная интегрирования и неоднозначность при интегрировании. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределённых интегралов и их использование для интегрирования. Некоторые методы и приёмы интегрирования: аддитивность интегрирования (интеграл суммы равен сумме интегралов), вынесение константы за знак интеграла, метод замены переменной (подстановка), интегрирование по частям, интегрирование функций зависящих от параметра. Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях.

Определённый интеграл, его свойства и геометрический смысл. Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью интегрирования. Понятие интегральной суммы. Теорема о среднем значении. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определённого интеграла. Вычисление длины кривой и площади фигур. Вычисление площади и объёма фигур вращения.

Первообразные более высоких порядков.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Несобственные интегралы.

Тема 9. Теория функций нескольких переменных

Понятие функции нескольких переменных. Геометрический смысл функций двух переменных. Область существования функции. Способы задания функции нескольких переменных.

Предел функции нескольких переменных. Непрерывность функции нескольких переменных. Частные приращения и частные производные. Частные производные высших порядков. Полная производная. Производная по направлению, градиент.

Понятие экстремума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных. Достаточные условия экстремума функций двух и трёх переменных. Понятие условного экстремумама. Уравнение связи. Алгоритм поиска условного экстремума функции двух переменных. Функция Лагранжа. Необходимое условие наличия условного экстремума функции двух переменных. Достаточное условие наличия условного экстремума функции двух переменных. Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в замкнутой области.

Тема 10. Дифференциальные уравнения

Понятие дифференциального уравнения. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Порядок дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения неразрешимые и разрешимые относительно производной. Общее решение и общий интеграл дифференциального уравнения. Частное решение дифференциального уравнения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, линейные уравнения первого порядка. Графическое представление решений дифференциальных уравнений.

Решение неоднородных дифференциальных уравнений.

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: метод Бернулли, метод Лагранжа. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. Методы поиска частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Теорема наложения решений.

Тема 11. Элементы теории вероятности и математической статистики

История развития теории вероятностей. Примеры случайных событий. Вероятностное описание случайных событий. Случайные события и случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. События достоверные и невозможные. Пространство случайных событий. Противоположные события. Классическое определение вероятности события. Статистическое определение вероятности. Совместные и несовместные события. Операции над вероятностями событий: объединение (сложение) попарно несовместных событий; пересечение (умножение) независимых по вероятности событий. Основные теоремы теории вероятностей. Частота вероятности. Устойчивость относительных частот. Закон больших чисел.

Аксиомы (4 аксиомы) теории вероятности Колмогорова.

Формула Бейса для переоценки вероятностей.

Комбинаторика. Перестановки. Сочетания. Размещения.

Пространство (множество) элементарных событий. Основные определения и действия с событиями. Сумма и произведение событий. Несовместные события. Полная группа событий. Противоположные события. Достоверное и невозможное событие. Аксиомы теории вероятностей и основные теоремы. Теорема о вероятности суммы событий. Ее следствия. Зависимые и независимые события. Теорема о вероятности произведения событий. Теорема о вероятности суммы n событий. Формула полной вероятности. Расчет средней вероятности покупки качественного товара при n поставщиках. Формула Байеса и определение наиболее вероятной гипотезы.

Различные типы распределения дискретных случайных величин: биномиальное распределение, гипергеометрическое распределение. Различные типы распределения непрерывных случайных величин: равномерное распределение, распределение Пуассона, экспоненциальное распределение, распределение χ^2, распределение Стьюдента, распределение Фишера—Снедекора, показательное распределение, логнормальное распределение, нормальное (гауссово) распределение, распределение Максвелла молекул по скоростям и некоторые статистические моменты.

Законы распределения случайных величин. Математическое ожидание (среднее значение), медиана, мода (наибольшая вероятность). Моменты распределения случайной величины: центральный момент (k-й момент относительного математического ожидания), дисперсия и среднеквадратическое отклонение (разброс, стандартное отклонение), асимметрия, эксцесс.

Вероятностное описание двумерных случайных величин. Закон распределения вероятностей системы двух дискретных случайных величин. Вычисление безусловных вероятностей случайных величин, образующих систему, вычисление числовых характеристик каждой из величин. Условие статистической независимости величин, образующих систему.

Корреляционный анализ. Корреляционная связь и уравнение регрессии. Корреляционный момент системы двух случайных дискретных величин. Независимые случайные величины. Коэффициент корреляции. Математическое ожидание и дисперсия суммы и разности двух случайных величин.

Тема 12. Общие сведения о задачах оптимального управления (экономические дисциплины)

Понятие о задачах оптимального управления. Линейное программирование. Постановка задач в линейном программировании. Задача о банке. Задача об использовании ресурсов. Транспортная задача. Каноническая и стандартная задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования. О выпуклости множеств решения оптимальных задач. Графический метод решения задач линейного программирования при малом числе переменных. Общая задача линейного программирования. Симлекс-метод. Симплкс-таблицы. Целевые функции и работа с ними. М-метод. О конечности симплекс-алгоритма.

ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ (СЕМИНАРОВ)

Семинар 1. Элементы, множества, отношения. Отображения. Конечные и бесконечные множества. Равномощные множества. Развитие понятия числа. Числовые множества.

Семинар 2. Различные представления функций. Различные типы элементарных функций и их свойства. Построение графиков функций по таблицам и функций заданных аналитически.

Семинар 3. Построение графиков функций, заданных неявно и параметрически. Решение уравнений с трансцендентными функциями.

Семинар 4. Линейные операции над векторами. Координаты вектора. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Семинар 5. Прямая на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве.

Семинар 6. Расчёты определителей второго и третьего порядков. Свойства определителей и их применение.

Семинар 7. Операции над матрицами. Умножение матриц на число. Сложение и умножение матриц. Ранг матрицы. Алгоритмы поиска обратной матрицы.

Семинар 8. Системы линейных уравнений и их решение с помощью матриц. Решение систем линейных уравнений. Исследование и решение различных систем линейных уравнений Метод обратной матрицы. Метод Крамера.

Семинар 9. Последовательность и её предел. Методы вычисления пределов последовательностей.

Семинар 10. Функция. Методы вычисления пределов функций.

Семинар 11. Производная. Формулы и правила дифференцирования. Технические приёмы дифференцирования.

Семинар 12. Правило Лопиталя. Дифференциал.

Семинар 13. Исследование функции с помощью производной (на монотонность, возрастание и убывание, экстремумы, точки разрыва, точки перегиба).

Семинар 14. Разложение функций в степенные ряды Маклорена и Тейлора.

Семинар 15. Первообразная функции. Таблица неопределённых интегралов. Методы интегрирования.

Семинар 16. Интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических функций.

Семинар 17. Методы и приёмы вычисления определённых интегралов.

Семинар 18. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённых интегралов.

Семинар 19. Функции нескольких переменных. Поиск области существования функции двух переменных. Исследование на экстремум функций двух и трёх переменных. Исследование на условный экстремум функции двух переменных.

Семинар 20. Поиск наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в замкнутой области.

Семинар 21. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Семинар 22. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

Семинар 23. Линейные дифференциальные уравнения первого и высших порядков. Системы линейных дифференциальных уравнений

Семинар 24. Элементы теории вероятностей. Операции над вероятностями событий. Вычисление вероятностей элементарных дискретных событий.

Семинар 25. Основные функции комбинаторики и их использование в теории вероятностей.

Семинар 26. Распределения вероятностей дискретных и непрерывных величин. Статистические моменты.

Семинар 27. Основные понятия математической статистики. Статистика больших и малых выборок.

Семинар 28. Математические методы проверки гипотез. Математический анализ связей. Математический анализ влияния факторов. Математические модели эволюции простых и сложных систем. Математическое описание связи: функциональная зависимость регрессия-корреляция.

Семинар 29. Некоторые задачи оптимизации. Линейное программирование.

Семинар 30. Линейное программирование.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Тема 2

1. Понятие множества. Способы задания множеств. Мощность множества. Конечные и бесконечные множества.
2. Операции над множествами.
3. Числовые множества.

Тема 3.

1. Понятие функции. Область определения и область значений функции.
2. Способы задания функции.
3. Возрастающие и убывающие функции. Монотонные функции.
4. Ограниченность функции.
5. Чётные и нечётные функции.
6. Периодические функции. Понятие периода.
7. Простейшие элементарные функции и их основные характеристики: область определения, область значений, внешний вид графиков.
8. Понятие обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.
9. Алгоритм получения формулы, определяющей обратную функцию.
10. Понятие сложной функции.

Тема 4

1. Матрица, элементы матрицы, размерность матрицы.
2. Классификация матриц в зависимости от их размерности.
3. Операции над матрицами, условия возможности их выполнения.

4. Матричная запись и классификация систем линейных уравнений.
5. Нулевая и единичная матрица. Транспонированная и обратная матрица.
6. Определитель обратимости матрицы. Формулы расчёта определителей 2-ого и 3-его порядка.
7. Свойства определителей.
8. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы.
9. Невырожденные системы линейных уравнений. Метод Крамера.
10. Метод обратной матрицы. Теорема о существовании обратной матрицы.
11. Системы линейных уравнений. Однородные и неоднородные уравнения.
12. Решение систем линейных уравнений путём исключения переменных.
13. Решение систем линейных уравнений путём исключения методом Гаусса.
14. Обратная матрица, условие её существования и способ её нахождения. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
15. Решение систем линейных уравнений методом Кронекера.
16. Ранг матрицы и его свойства.
17. Элементарные преобразования матриц. Эквивалентность матриц.
18. Метод Гаусса.

Тема 5.

1. Вектор, длина вектора. Нулевой, единичный вектор. Равенство векторов.
2. Коллинеарность и компланарность векторов.
3. Сложение и вычитание векторов. Правило параллелограмма, правило параллелепипеда. Свойства операции сложения векторов.
4. Умножение вектора на число. Свойства операции умножения вектора на число.
5. Орт вектора. Стандартная форма вектора.
6. Ось. Проекция точки на ось. Составляющая вектора относительно оси. Проекция вектора на ось.
7. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Связь скалярного произведения векторов и проекции вектора на ось.
8. Свойства скалярного произведения векторов.
9. Прямоугольная система координат. Координаты вектора в прямоугольной системе координат. Орты осей координат.
10. Линейные операции над векторами в координатной форме. Признак коллинеарности векторов в координатной форме.
11. Векторное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение векторов в координатной форме.

Тема 6

11. Понятие бесконечной числовой последовательности.
12. Формула общего члена последовательности.

13. Арифметическая прогрессия: определение, формула общего члена, формула суммы n членов.

14. Геометрическая прогрессия: определение, формула общего члена, формула суммы n членов. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

15. Понятие ε-окрестности. Предел последовательности.

16. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Теорема о единственности предела.

17. Теорема об арифметических операциях над пределами.

18. Теорема о зажатой последовательности (функции).

19. Первый и второй замечательные пределы.

20. Понятие предела функции в точке.

21. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их взаимосвязь.

22. Понятие эквивалентности бесконечно малых функций. Теорема о замене бесконечно малой функции на ей эквивалентную.

23. Основные эквивалентности бесконечно малых функций.

24. Односторонние пределы и их связь с существованием предела функции в точке.

25. Понятие непрерывности функции в точке и на промежутке. Непрерывность справа и слева.

26. Свойства непрерывных функций. Теорема о непрерывности элементарных функций.

Тема 7

1. Приращение аргумента и приращение функции. Средняя скорость изменения функции.

2. Производная, её физический смысл.

3. Формулы дифференцирования.

4. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного функций.

5. Секущая и касательная к графику функции. Геометрический смысл производной.

6. Дифференциал и его геометрический смысл.

7. Понятие дифференцируемости функции в точке.

8. Понятие точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.

9. Применение дифференциала в приближённых вычислениях.

10. Технические приёмы дифференцирования: теорема о производной сложной функции, теорема о производной обратной функции, логарифмическое дифференцирование, дифференцирование функции, заданной неявно.

11. Классификация неопределённостей, возникающих при вычислении пределов. Правило Лопиталя.

12. Производные высших порядков.

13. Признаки возрастания и убывания функции.

14. Максимумы и минимумы функции. Понятие экстремума функции.

15. Необходимое условие экстремума. Критические и стационарные точки.

16. Достаточное условие экстремума.

17. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции в точке.

18. Понятие перегиба. Необходимое условие наличия перегиба графика функции в точке.

19. Достаточное условие наличия перегиба графика функции в точке.

20. Полная схема исследования функции.

Тема 8

1. Понятие первообразной. Интегрирование.
2. Понятие неопределённого интеграла.
3. Свойства неопределённого интеграла. Связь неопределённого интеграла и дифференциала.
4. Методы и приёмы интегрирования.
5. Возможные виды подстановок при интегрировании с использованием замены переменной.
6. Формула интегрирования по частям, типичные случаи её применения.
7. Рациональная дробь. Алгоритм интегрирования рациональной дроби.
8. Приёмы интегрирования иррациональных функций.
9. Приёмы интегрирования тригонометрических функций.
10. Криволинейная трапеция. Понятие интегральной суммы.
11. Определённый интеграл и его геометрический смысл.
12. Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
13. Замена переменной в определённом интеграле.
14. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.
15. Вычисление площади плоской фигуры с помощью определённого интеграла.

Тема 9

1. Понятие функции нескольких переменных. Декартово произведение множеств. Область существования функции.
2. Способы задания функции нескольких переменных.
3. ε-окрестность точки. Понятие предела функции нескольких переменных.
4. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и на промежутке.
5. Частные приращения функции нескольких переменных. Понятие частной производной.
6. Частные производные высших порядков.

7. Понятие экстремума функции нескольких переменных.

8. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных.

9. Достаточные условия экстремума функций двух и трёх переменных.

10. Понятие условного экстремума. Уравнение связи.

11. Алгоритм поиска условного экстремума функции двух переменных. Функция Лагранжа.

12. Необходимое условие наличия условного экстремума функции двух переменных.

13. Достаточное условие наличия условного экстремума функции двух переменных.

14. Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в замкнутой области.

Тема 10

1. Понятие дифференциального уравнения.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Порядок дифференциального уравнения.

3. Решение дифференциального уравнения. Общее решение и общий интеграл дифференциального уравнения.

4. Частное решение дифференциального уравнения. Задача Коши.

5. Классификация обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

6. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: внешние признаки, алгоритм решения.

7. Однородные дифференциальные уравнения: внешние признаки, алгоритм решения.

8. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах: внешние признаки, алгоритм решения.

9. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод Бернулли.

10. Классификация дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

11. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Тема 11

1. Понятие события. Классификация событий. Понятие вероятности события. Полная вероятность.

2. Достоверные и невозможные события.

3. Сложение и умножение вероятностей.

4. Формула Байеса.

5. Способы описания случайных величин.

6. Понятие случайной выборки. Данные и их разновидности.

7. Оценка центральной тенденции.

8. Оценка разброса.

9. Предельные теоремы теории вероятностей

10. Задачи математической статистики
11. Проверка статистических гипотез. Критерии согласия.
12. Параметрические методы.
13. Дисперсионный анализ.
14. Корреляционный анализ.

Тема 12

1. Постановка задач в линейном программировании.
2. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования.
3. О выпуклости множеств решения оптимальных задач.
4. Графический метод решения задач линейного программирования при малом числе переменных.
5. Общая задача линейного программирования.
6. Симлекс-метод. Симплкс-таблицы.
7. Целевые функции и работа с ними.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Шипачёв В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 2000. 479 с.

Кудрявцев В.А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1990.

Пизо. Ш., Заманскй М. Курс математики. Алгебра и анализ. М., Наука, 1971. 656 с.

Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М., Наука, 1984. 320 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 1986.- Ч. 1 и 2.

Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1985.

Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих. - М., 1970.

Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967. 647 с.

Мышкис А.Д. Математики. Специальные курсы. М.: Наука, 1967. 632с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2004. 471 с.

Кремер Н.Ш. Математические методы и модели в планировании. М.: Экономика, 1987.

Кремер Н.Ш. Матричная алгебра. М.: ВЗФЭИ, 1987.

Кремер Н.Ш. Исследование операций. М.: Экономическое образование, 1992.

Кремер Н.Ш. Математическое программирование. М.: Финстатинформ, 1995.

Кремер Н.Ш. Математика для поступающих в экономические вузы. М.: ЮНИТИ, 1996. (1998, 2-е изд.)

Кремер Н.Ш. Высшая математическая для экономистов. М.: ЮНИТИ, 1997. (1998, 2-е изд.)

Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. М.: ЮНИТИ, 1997.

Кремер Н.Ш. Математика в экономике. М.: Финстатинформ, 1999.

Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Часть. 1. М.: Финансы и статистика. 2001. 224 с.

Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике. Часть. 2. М.: Финансы и статистика. 2001. 376 с.

Рассолов М.М., Чубукова С.Г., Элькин В.Д. Элементы высшей математики для юристов. М.: Юристъ, 1999. 184 с.

Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. 543 с.

Кремер Н.Ш. Математическая статистика. М.: Экономическое образование, 1992.

Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. - М., Высшая школа, 1966.

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 1997. 400 с.

Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1964.

Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.

Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М.: Наука, 1976. 448 с.

Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966. 461 с.

Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. М.: Наука, 1970. 400 с.

Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г.И. Кручковича. М.: Высшая школа, 1973. 576 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1978. 480 с.

Сборник задач по математике для втузов. Т 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. Е.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1981. 464 с.

Сборник задач по математике для втузов. Т 3. Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. Е.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1981. 432 с.

Сборник задач по математике для втузов. Т 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / Под ред. Е.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1981. 304 с.

Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи. М.: Наука, 1973. 463 с.