Математический анализ

Краткий конспект лекций

Составитель

В.А.Чуриков

Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры
Высшей математики
Томского политехнического университета.

E-mail: vachurikov@list.ru.

vachurikov@tpu.ru
vachurikov@list.ru

Пределы

Производные

Предел последовательности

Числовые последовательности: конечные и бесконечные: a_1, a_2, … a_n, ... Бесконечная числовая последовательность как функция на множестве натуральных чисел. Способы задания последовательности: аналитический, рекуррентный (ряд Фибоначчи), через описание членов. Геометрическое задание последовательности в виде точек на числовой оси. Арифметические действия над последовательностями: умножение на число, сложение и вычитание, умножение и деление.

5.217. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **5.218.** $0, 2, 0, 2, \ldots$

5.219. $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$

5.220. $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$

5.221. $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots$

5.222. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots$

В задачах 5.223 5.228 требуется найти наибольший (наименьший) член ограниченной сверху (снизу) последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.223. $x_n = 6n - n^2 - 5$. **5.224.** $x_n = e^{10n-n^2-24}$.

5.225. $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{9+n}$. **5.226.** $x_n = 3n^2 - 10n - 14$.

5.227. $x_n = 2n + \dfrac{512}{n^2}$. **5.228.** $x_n = -\dfrac{n^2}{2^n}$.

1.6.2. Зная несколько первых членов последовательности, написать одно из возможных выражений для общего члена:

а) $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}$;

б) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}$.

Замечание. Знание нескольких первых членов последовательности еще не определяет эту последовательность. Поэтому поставленную задачу надо воспринимать как задачу отыскания некоторой простой индуктивной закономерности, согласующейся с заданными членами.

Решение. а) Заметим, что числитель каждого из заданных членов последовательности равен квадрату номера этого члена плюс единица, т. е. n^2+1. Знаменатели же образуют арифметическую прогрессию 3, 8, 13, 18, ... с первым членом $a_1=3$ и разностью $d=5$. Следовательно,

$$a_n=a_1+d(n-1)=3+5(n-1)=5n-2,$$

поэтому

$$x_n=\frac{n^2+1}{5n-2}.$$

1.6.1. Дан общий член последовательности $\{x_n\}$:

$$x_n = \frac{\sin(n\pi/2)}{n}.$$

Написать пять первых членов этой последовательности.

Р е ш е н и е. Положив последовательно $n = 1, 2, 3, 4, 5$ в общем члене x_n, получим

$$x_1 = \frac{\sin(\pi/2)}{1} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\sin(2\pi/2)}{2} = 0;$$

$$x_3 = \frac{\sin(3\pi/2)}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$x_4 = \frac{\sin(4\pi/2)}{4} = 0; \qquad x_5 = \frac{\sin(5\pi/2)}{5} = \frac{1}{5}.$$

Найти следующие пределы:

640. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$.

$\triangle$ Так как $x\longrightarrow 4$, то числитель дроби стремится к числу $5\cdot 4+2=22$, а знаменатель — к числу $2\cdot 4+3=11$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}=\dfrac{22}{11}=2$. $\blacktriangle$

Монотонные последовательности: возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие последовательности. Ограниченные, ограниченные сверху, ограниченнее снизу и неограниченные последовательности. Понятие предела бесконечной числовой последовательности (от латинского limes — предел)

Конечное число a называется пределом последовательности x_n, если для любого положительного ε можно найти такой номер N, что все члены последовательности, начиная, с члена, номер которого больше N, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Расходящиеся и сходящиеся последовательности, последовательность не имеющая предела, и их свойства. Признаки сходимости (ограниченность последовательности необходимое, но не достаточное условие).

Теорема о единственности предела. Если предел последовательности существует, то он единственный.

Теорема. Если последовательность имеет предел, то она ограничена. Свойства бесконечно малых последовательностей.

2.3.1. Определение. *Последовательность a_n называется **фундаментальной**, или **последовательностью Коши**, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{для любых} \quad n, m > N.$$

Иными словами, у последовательности Коши члены с большими номерами не могут сильно отличаться друг от друга.

2.3.2. Критерий Коши. *Последовательность a_n сходится в том и только том случае, когда она фундаментальна.*

Лемма Больцано -Вейерштрасса. *В ограниченной последовательности* a_n *всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

1. Показать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ имеет пределом нуль. Начиная с какого номера ее значения становятся и остаются меньше 0,001?

Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ принимает значения

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Пусть $\varepsilon = 0{,}001$. Неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ будет иметь место, когда $n > 1000$. Следовательно, $N = 1000$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что, начиная с некоторого значения n, выполняется неравенство (6.23). В данном случае $x_n = \frac{1}{n}$ и $a = 0$. Неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$ будет выполняться, когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено $\frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$; это означает, что x_n имеет пределом нуль, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

(сравните последнее равенство с формулой (6.40)).

Если подпоследовательность a_{n_k} сходится, то ее предел называют *предельной точкой* (*или точкой сгущения*) *последовательности* a_n.

Наибольшее (наименьшее) значение a^* (конечное или бесконечное), для которого можно указать подпоследовательность $a_{n_k} \to a^*$, называют *верхним* (*нижним*) *пределом* a_n и обозначают, соответственно

$$\overline{\lim}\, a_n \quad \text{или} \quad \underline{\lim}\, a_n.$$

Упражнение

Найти последовательности, для которых

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n < \underline{\lim}\, (a_n + b_n).$$

Теорема о зажатой последовательности

$$x_n \le y_n \le z_n$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Арифметическая прогрессия (a_1 — первый член прогрессии, а d — *разность арифметической прогрессии*). Члены геометрической прогрессии

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_1 + d(n-1)$$

.

Сумма первых рядов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

.

Сумма арифметической последовательности всегда равна бесконечности

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

, за исключением случая, когда $a_1 = 0$ и/или $d = 0$.

Геометрическая прогрессия

,

(u_1 — первый член прогрессии,
а q — *знаменатель геометрической прогрессии*).

.

$$u_n = u_{n-1}q = u_1 q^{n-1}$$

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1}$$

. Сумма всех членов геометрической прогрессии

$$S_n = u_1(1 + q + q^1 + ... + q^{n-1} + q^n) = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}, q \neq 1$$

.

Сумма всех членной геометрической прогрессии сходится при $|q| \leq 1$ и равна

$$S = \frac{u_1}{1-q}$$

Предел функции

$$\lim_{x \to a} f(x) \equiv f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow}$$

Определение 1. *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности* (1) *значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность* (2) *значений функции сходится к числу A.*

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Второе определение

Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to a$ (в точке a), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon, \tag{6.25}$$

когда

$$0 < |x - a| < \delta. \tag{6.26}$$

Предел функции обозначается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \tag{6.27}$$

(x стремится к a произвольным образом).

Обозначения *односторонних пределов* функции:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \tag{6.28}$$

(x стремится к a слева, оставаясь меньше a),

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \tag{6.29}$$

(x стремится к a справа, оставаясь больше a).

Теорема 4.1. *Первое и второе определения предела функции эквивалентны*[1].

Теорема об единственности предела функции. Методы вычисления пределов функций. Свойства и теоремы об арифметических операциях над пределами:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \lim_{x\to a} g(x)=B$$

;

$$\lim_{x\to a} A=A,\ A=\mathrm{const}$$

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x))=\alpha\lim_{x\to a} f(x)=\alpha A$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=A+B$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = AB$$

;

;

;

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$$

;

$$\lim_{x\to a}\left((f(x))^{g(x)}\right) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = A^B$$

;

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(\lim_{x\to a} x)) = f(a)$$

Бесконечно малые функции

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

$$|f(x)| < \varepsilon \qquad 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, C = \text{const}, C \neq 0$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

($\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to 0$)

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3) $1 - \cos\alpha(x) \sim [\alpha(x)]^2/2$;
4) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 6) $\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$;
7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$ $(a > 0)$, в частности, $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
8) $[1 + \alpha(x)]^P - 1 \sim P\alpha(x)$, в частности, $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

При $x \to 0$ примером эквивалентных бесконечно малых функций будут $x \sim \sin(x) \sim \operatorname{tg}(x) \sim \arcsin(x) \sim \operatorname{arctg}(x) \sim$
$\sim \ln(1 + x) \sim \exp(x) - 1$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$.

1. Если $\lim\limits_{x \to a} (\alpha/\beta) = 0$, то говорят, что α является *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с β. В этом случае пишут $\alpha = o(\beta)$.

2. Если $\lim\limits_{x \to a} (\alpha/\beta) = m$, где m — число, отличное от нуля, то говорят, что α и β — *бесконечно малые одного и того же порядка*. В частности, если $\lim\limits_{x \to a} (\alpha/\beta) = 1$, то бесконечно малые α и β называются *эквивалентными*. Запись $\alpha \sim \beta$ означает, что α и β — эквивалентные бесконечно малые.

Если $\alpha/\beta \to \infty$, то это означает, что $\lim (\beta/\alpha) = 0$. Таким образом, β является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α, т. е. $\beta = o(\alpha)$.

3. Если α^k и β — бесконечно малые одного и того же порядка, причем $k > 0$, то говорят, что бесконечно малая β имеет *порядок* k по сравнению с α.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых:

1°. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями*, т. е. если $\gamma = \alpha\beta$, то $\gamma = o(\alpha)$ и $\gamma = o(\beta)$.

2°. *Бесконечно малые α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\alpha - \beta = \gamma$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α и β*, т. е. если $\gamma = o(\alpha)$, $\gamma = o(\beta)$, то $\alpha \sim \beta$.

3°. *Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой*, т. е. если $\lim\limits_{x \to a} (\alpha/\beta) = m$, $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, то $\lim\limits_{x \to a} (\alpha_1/\beta_1) = m$.

Свойства бесконечно малых функций.

1. Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая функция.
2. Произведение конечного или бесконечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малая функция.
3. Деление или умножение бесконечно малых функций на конечную функцию является бесконечно малой функцией.

Бесконечно большие функции

Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при стремлении x к a, если для любого N существует число $\delta(N)$ такое, что $0 < |x - a| < \delta(N)$ выполняется неравенство $|f(x)| > N$, что записывается так:

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty$$

Свойства бесконечно больших функций.

1. Сумма конечного или бесконечного числа бесконечно больших величин есть бесконечно большая функция.
2. Произведение конечного или бесконечного числа бесконечно больших функций является бесконечно большая функция.
3. Деление или умножение бесконечно большой функций на конечную функцию является бесконечно большой функцией.

Связь бесконечно малых и бесконечно больших функций. Если функция $\beta(x)$ является бесконечно большой, то обратная к ней функции будет бесконечно малой $\beta^{-1}(x)$. Если функция $\mu(x)$ является бесконечно малой, то обратная к ней функции будет бесконечно большой $\mu^{-1}(x)$.

Неопределённости

1.7.1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если

а) $x_n = \dfrac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$; б) $x_n = \dfrac{5n^3+2n^2-3n+7}{4n^3-2n+11}$;

в) $x_n = \dfrac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$; г) $x_n = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1}$;

д) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Решение. а) $x_n = \dfrac{3+5/n+4/n^2}{2/n^2+1}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+5/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2/n^2+1)} = 3.$$

4.1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+6x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{2x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-x^4+2x^2-5x+3}{x^3+4x^2-7x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}$.

Решение. а) Разложим на множители числитель и знаменатель

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+6x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+8)}.$$

Сокращая на $x-2$, будем иметь $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x+8}=\frac{4}{10}=0,4.$

б) Разлагаем числитель и знаменатель на множители

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)}{(2x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+4}{2x-1}=\frac{-3}{3}=-1.$$

в) Поскольку при $x=1$ многочлены в числителе и знаменателе обращаются в ноль, то их можно разложить на множители, причем одним из сомножителей будет $(x-1)$. Тогда, деля многочлены на $(x-1)$ получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^4+2x-3\right)}{(x-1)\left(x^2+5x-2\right)}=\frac{0}{4}=0.$$

г) Выполнив очевидные преобразования, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+1}{x+2}=\frac{5}{6}$$

4.2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

Решение. а) Умножим числитель и знаменатель на выраж ние, сопряженное числителю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}{3x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{3x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{6}.$$

б) Умножаем числитель и знаменатель на выражения сопр женные числителю и знаменателю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+1}=\sqrt{2}.$$

в) Делаем замену $t^6=x$, тогда при $x\to 1$ $t\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

Неопределённости при вычислении пределов:

0^0, $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$, ∞^0, 1^∞

Неопределённости

5°. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ раскрывается, как правило, делением числителя и знаменателя на множитель, стремящийся к нулю, или с помощью первого замечательного предела.

6°. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ раскрывается делением на x в старшей степени.

7°. Неопределенность вида $(\infty-\infty)$ и $(0\cdot\infty)$ раскрывается путем преобразования функции к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

8°. Неопределенность вида (1^{∞}) раскрывается посредством преобразования предела ко второму замечательному пределу.

9°. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. При раскрытии неопределенностей $\frac{0}{0}$ можно пользоваться следующим правилом.

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если их под знаком предела заменить на эквивалентные. Обо-

Замечательные пределы

Первый замечательный (тригонометрический) предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный (показательно-степенной) предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \equiv 2,718281828459045...$$

Решение. а) Умножим и разделим знаменатель на 4 и подведем выражение под знаком предела к первому замечательному пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{4}}{4\dfrac{x}{4}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{4}}{\dfrac{x}{4}}=\frac{1}{4}.$$

б) Представим тангенс через синус и косинус и воспользуемся теоремами о пределах

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2\cos^2\dfrac{x}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

в) По формулам половинных углов имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\,\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos x=2.$$

г) Умножим и разделим числитель на 4 в кубе

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^3\left(\frac{x}{4}\right)^3}{8\sin^3\frac{x}{4}}=8\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{\sin^3\frac{x}{4}}=8.$$

д) Сделаем замену $x-2=t$, тогда при $x\to 2\quad t\to 0$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=1.$$

е) На основании второй теоремы о пределах имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}+\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{7}{6}.$$

ж) Преобразуем числитель с помощью формул разност косинусов двух углов и синуса двойного угла

$$\cos x-\cos 3x=2\sin 2x\sin x=4\sin^2 x\cos x,$$

тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cos x=4\lim_{x\to 0}\cos x=4.$$

з) Умножим числитель и знаменатель на x, тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 3x}{\mathrm{tg}^2 5x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2\cos^2 5x}{25\sin^2 5x}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=\frac{3}{25}.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1-x} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} z\right)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z} = \frac{\pi}{2}.$$

З а м е ч а н и е. Более простой метод решения подобных примеров см. в § 1.12.

1.10.5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + 1/x)^{7x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/(3x)}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + k/x)^{mx}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1}{\operatorname{tg} x}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$; з) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; и) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$.

Р е ш е н и е. а) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + 1/x)^{7x} = \lim\limits_{x \to \infty} [(1 + 1/x)^x]^7 =$

$$= \left[\lim_{x \to \infty} (1 + 1/x)^x\right]^7 = e^7;$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

Имеем

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)}$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}}=\lim_{t=\frac{-2}{2+x}\to 0}(1+t)^{1/t}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2+x}\cdot 3x=-6,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2x}=e^{-6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a},\ a>0,\ a\neq 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a=\frac{1}{\log_a e},\ a>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если: 1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a; 2) существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) этот предел равен значению функции в точке a, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Обозначая $x-a=\Delta x$ (приращение аргумента) и $f(x)-f(a)=\Delta y$ (приращение функции), условие непрерывности можно записать так: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y=0$, т. е. *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* a *тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, сегмента и т. п.), то она называется *непрерывной в этой области.*

Точка a, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$, причем не все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ равны между собой, то a называется *точкой разрыва* I *рода.*

Точки разрыва I рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва* (когда $f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$, т. е. когда левый и правый пределы функции в точке a равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на *точки скачка* (когда $f(a-0)\neq f(a+0)$, т. е. когда левый и правый пределы функции в точке a различны); в последнем случае разность $f(a+0)-f(a-0)$ называется *скачком* функции в точке a. Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва* II *рода.* В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен нулю.

§ 4. Непрерывные функции

4.1. Определение непрерывности функции. Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Пусть x и y — некоторые значения переменных, а $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ — соответственно новые значения этих переменных.

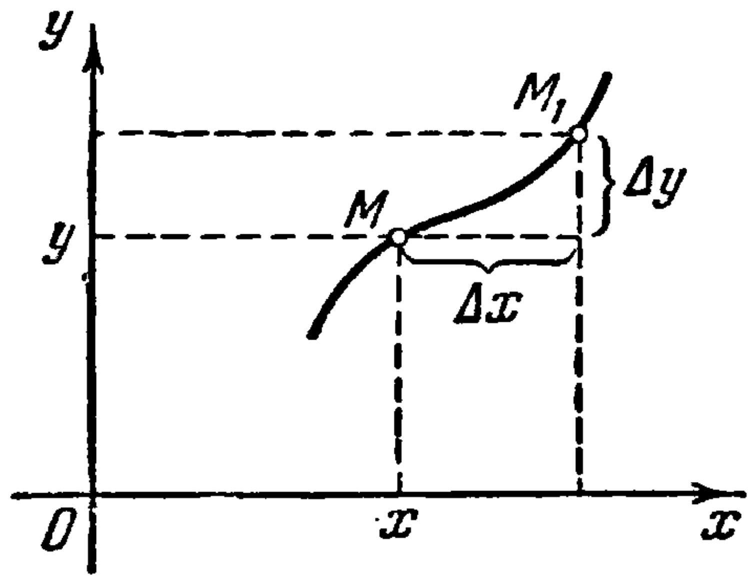

Рис. 8.

Тогда Δx представит собой *приращение аргумента*, Δy — *приращение функции*

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \text{ (рис. 8).}$$

Если при стремлении приращения аргумента x к нулю приращение функции $y=f(x)$ тоже стремится к нулю, то функция называется ***непрерывной*** в рассматриваемой точке x.

Короче говоря, функция непрерывна в точке x, если при $\Delta x\to 0$ имеем $\Delta y\to 0$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Определение непрерывности функции в точке можно еще перефразировать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если при $x\to x_0$ имеем $f(x)\to f(x_0)$.

Непрерывность обозначает, что $\lim f(x) = f(\lim x)$, т. е. возможность переставлять знаки предела и функции ($\lim$ и f).

Определение непрерывной функции можно еще формулировать так:

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при $|\Delta x| < \eta$ будем иметь $|\Delta y| < \varepsilon$.

Можно также сказать, что функция непрерывна в данной точке, если ее предел в этой точке равен ее значению в этой точке.

Функция называется *непрерывной справа* (*слева*) в данной точке, если ее правый (левый) предел в этой точке равен ее значению в этой точке.

Теорема 1. *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *то сумма* $\psi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ *также есть непрерывная функция в точке* x_0.

Доказательство. Так как $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны, то на основании равенства (3) можем написать

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=f_1(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_2(x_0).$$

На основании теоремы 1 о пределах можем написать

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x)=$$
$$=f_1(x_0)+f_2(x_0)=\psi(x_0).$$

а) *Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.*

б) *Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.*

в) *Если* $u = \varphi(x)$ *непрерывна при* $x = x_0$ *и* $f(u)$ *непрерывна в точке* $u_0 = \varphi(x_0)$, *то сложная функция* $f[\varphi(x)]$ *непрерывна в точке* x_0.

Используя эти теоремы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена* *).

Пример 8. Функция $y=1/x$ разрывна при $x=0$. Действительно, при $x=0$ функция не определена: $\lim\limits_{x\to+0} 1/x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} 1/x=-\infty$. Легко показать, что эта функция непрерывна при любом значении $x\neq 0$.

Пример 9. Функция $y=2^{1/x}$ разрывна при $x=0$. Действительно, $\lim\limits_{x\to+0} 2^{1/x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} 2^{1/x}=0$. При $x=0$ функция не определена (рис. 50).

Пример 10. Рассмотрим функцию $f(x)=x/|x|$. При $x<0$ будет $x/|x|=-1$; при $x>0$ будет $x/|x|=1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0} x/|x|=-1, \quad \lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0} x/|x|=1;$$

при $x=0$ функция не определена. Таким образом, мы установили, что функция $f(x)=x/|x|$ разрывна при $x=0$ (рис. 51).

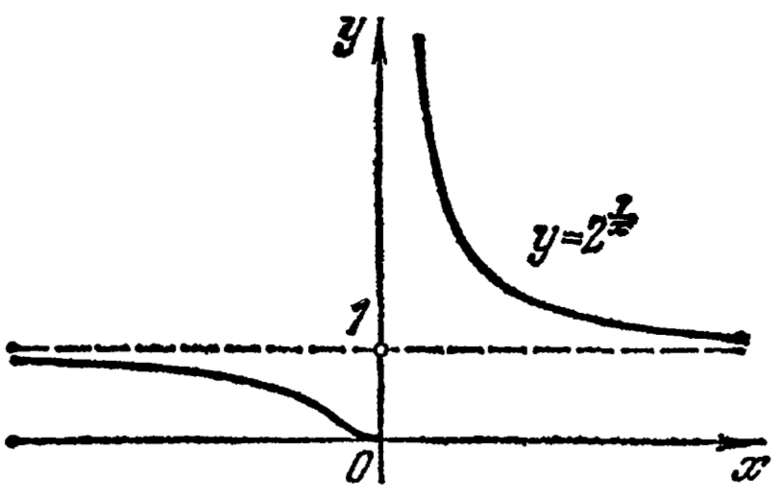

Рис. 50.

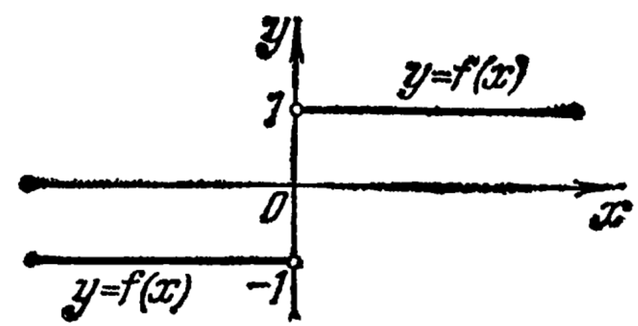

Рис. 51.

Пример 11. Функция $y=\sin(1/x)$, рассмотренная в примере 4 § 3, разрывна при $x=0$.