Аналитическая геометрия

Краткий конспект лекций

Составитель

В.А.Чуриков

Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры
Высшей математики
Томского политехнического университета.

E-mail: vachurikov@list.ru.

vachurikov@tpu.ru
vachurikov@list.ru

Системы координат

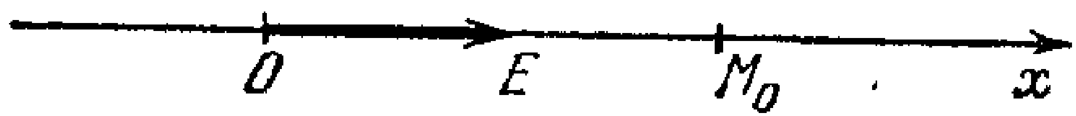
Вектора

Прямая на плоскости

Системы координат. Декартова система координат. Точка в пространстве. Правая и левая системы координат. Правая и левая системы координат. Размерность. Нульмерные пространства (точки), одномерные, двумерные, трёхмерные и n-мерные пространства. Расстояние между двумя точками. Понятие меры. Другие системы координат. Изменение декартовых координат. Сдвиги и повороты.

Типы математических величин: скалярные и векторные, их примеры.

Приложение векторов в физике и вообще в естествознании. Примеры векторных величин: скорость, ускорение, напряжённость электрического поля…



O
E
M_0
x

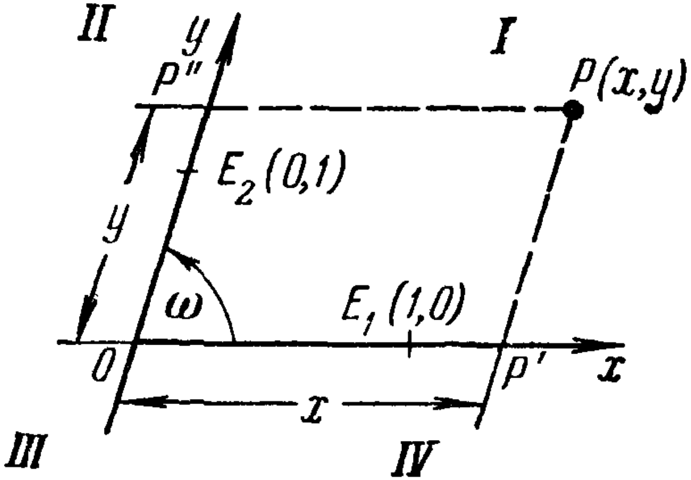


Рис. 2.1-1. Правая декартова косоугольная система координат. Отрезки OE_1 и OE_2 — единицы масштаба на осях.

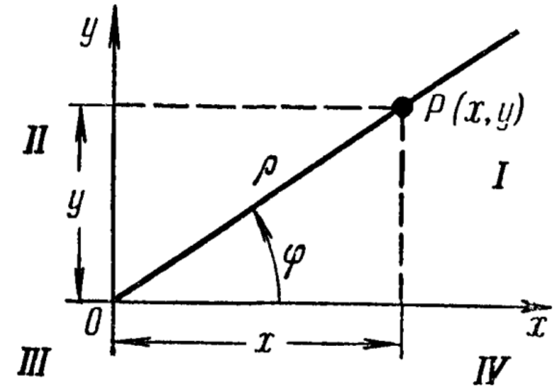
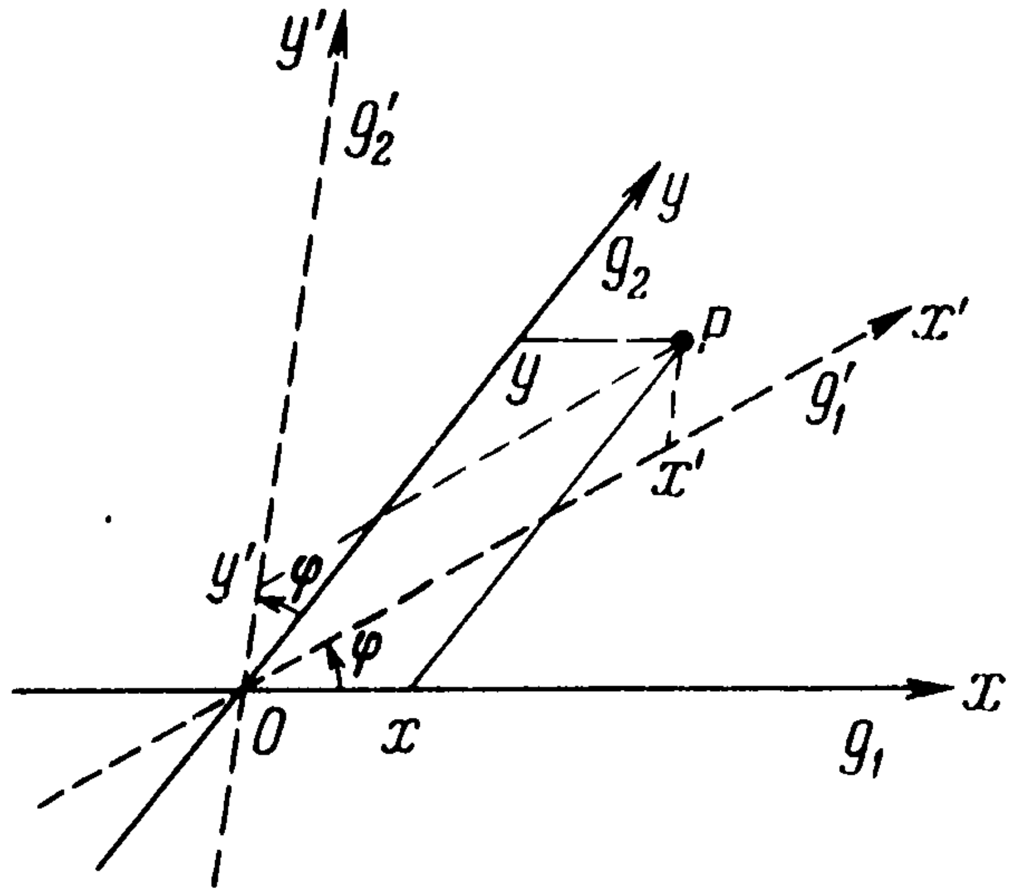
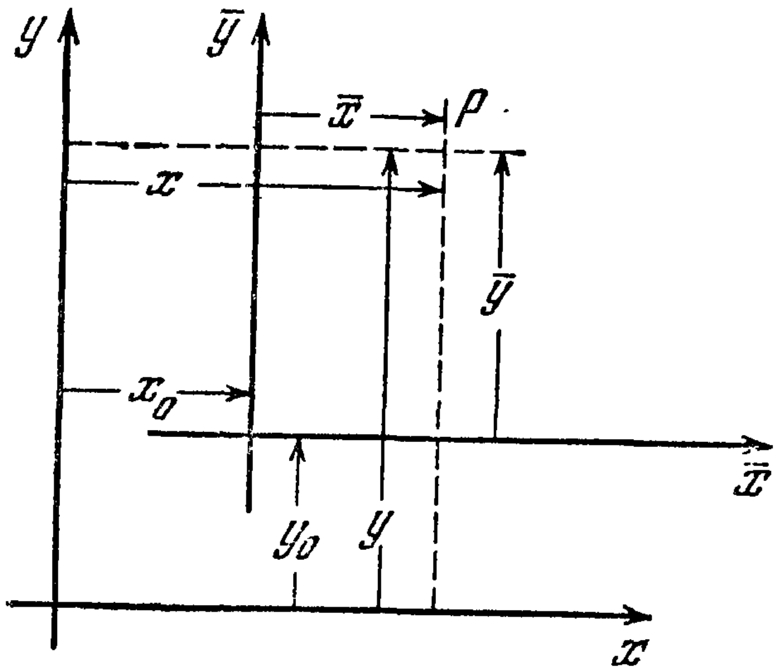


Рис. 2.1-2. Системы координат: правая декартова прямоугольная и полярная.

$$\left.\begin{aligned} &x = \rho\cos\varphi, \qquad\qquad y = \rho\sin\varphi, \\ &\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \end{aligned}\right\}$$



y'
g'_2
y
g_2
P
x'
y
g'_1
x'
y'
φ
φ
O
x
x
g_1



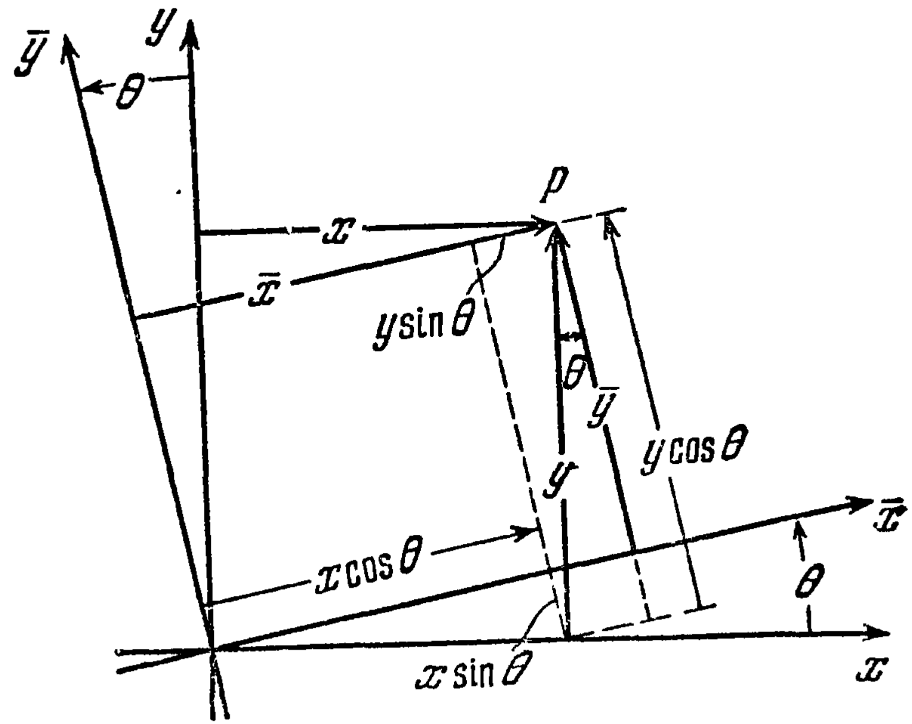


Рис. 2.1-4. Поворот осей координат.

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x - x_0, & \bar{y} &= y - y_0 \\ x &= \bar{x} + x_0, & y &= \bar{y} + y_0. \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos\theta + y\sin\theta, & \bar{y} &= -x\sin\theta + y\cos\theta, \\ x &= \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta, & y &= \bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta. \end{aligned}\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{x} &= (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\sin\theta,\\
\bar{y} &= -(x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta,\\[1ex]
x &= x_0 + \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta,\\
y &= y_0 + \bar{x}\sin\theta - \bar{y}\cos\theta.
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&x = \rho\cos\varphi, \qquad\qquad y = \rho\sin\varphi,\\
&\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.
\end{aligned}
\right\}
$$

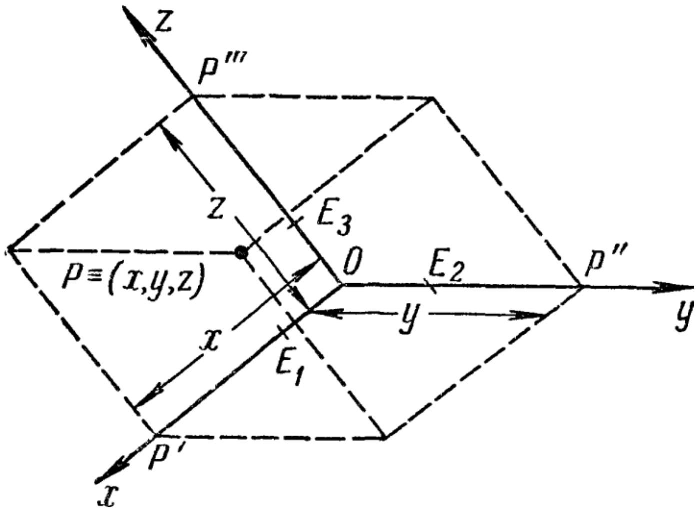


Рис. 3.1-1. Правая декартова косоугольная система координат. Отрезки OE_1, OE_2 и OE_3 — единицы масштаба на осях.

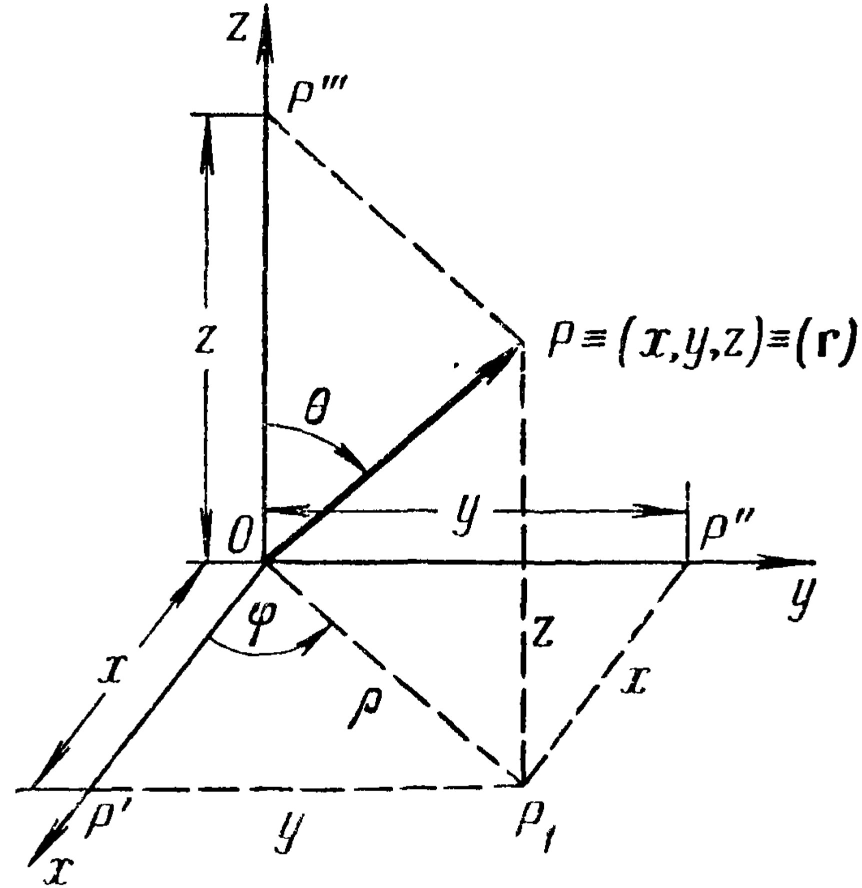


Рис. 3.1-2. Системы координат: правая декартова прямоугольная, цилиндрическая и сферическая.

$$\left.\begin{aligned}
&\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, && x = \rho\cos\varphi,\\
&\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; && y = \rho\sin\varphi,\\
& && z = z;
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, && x = r\sin\theta\cos\varphi,\\
&\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, && y = r\sin\theta\sin\varphi,\\
&\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, && z = r\cos\theta.
\end{aligned}\right\}$$

Векторы. Определение(я). Обозначения. Характеристики векторов: направление, длина (модуль, норма, абсолютная величина). Размерность вектора. Длина вектора как мера. Нулевой и единичный векторы. Неопределённость угла у нулевого вектора.

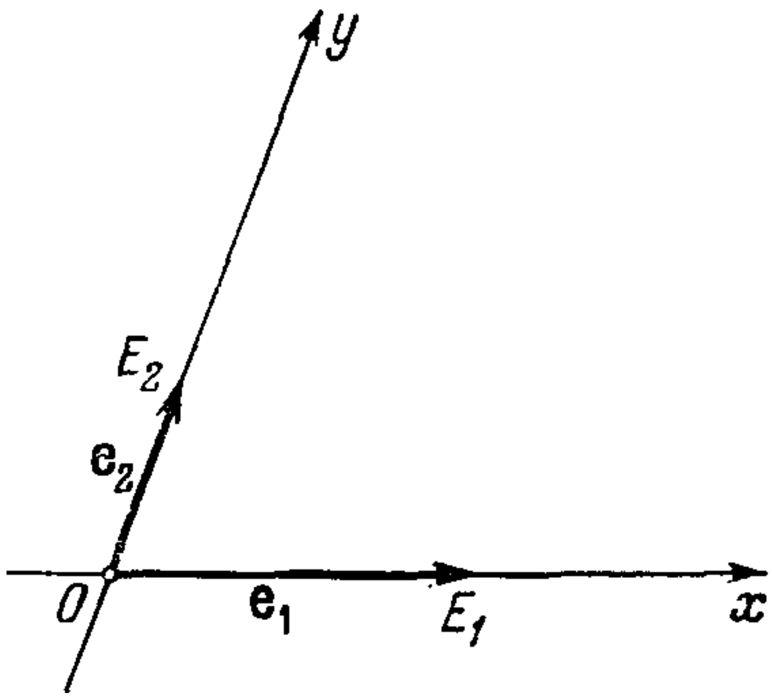
Математические представления векторов.

Геометрическое представление (через компоненты) в декартовой системе координат.

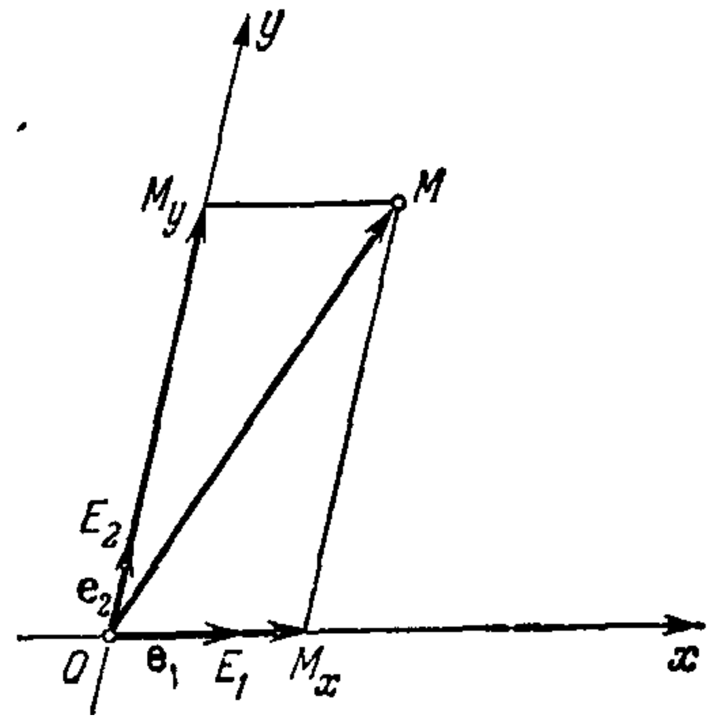
Алгебраическое (матричное, координатное) представление. Компоненты вектора как проекции вектора на оси координат. Проекции векторов. Представление в виде матриц столбцов и матриц строк. Вектор-матрица (столбцевая и/или строчная). Координаты векторов. Задание векторов набором координат. Направляющие косинусы и их сумма квадратов равная 1. Связь алгебраического и геометрического представлений и переход между ними.

$$\mathbf{a} \equiv \vec{a} \equiv \vec{a} \equiv \overline{a} \equiv a^i \equiv a_i \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

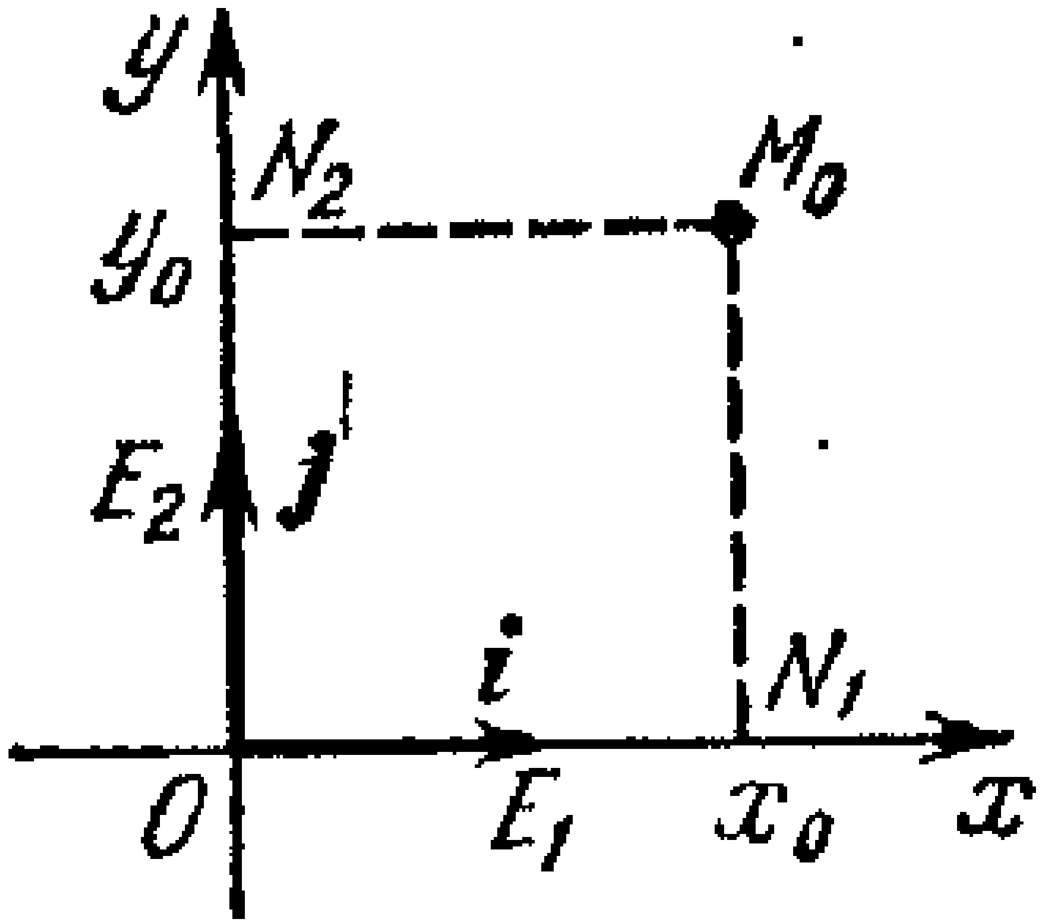
$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3); \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$



y
E2
e2
O
e1
E1
x

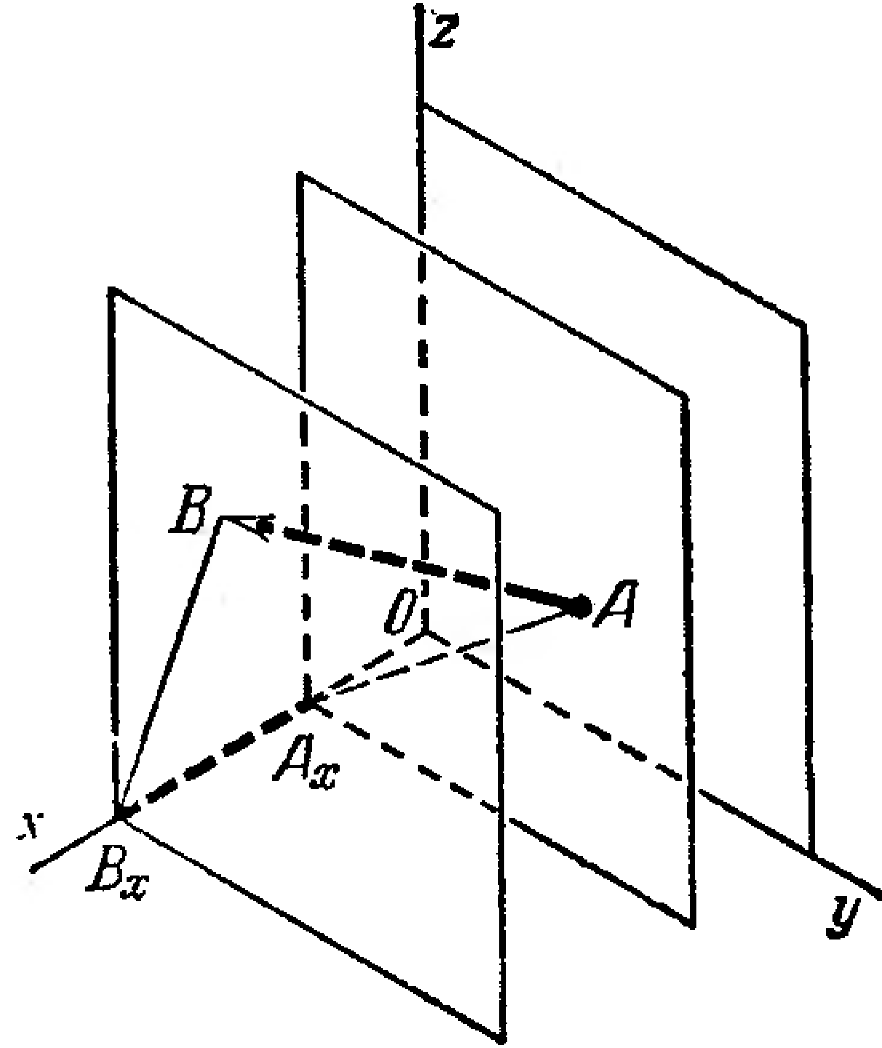


y
My
M
E2
e2
O
e1
E1
Mx
x


y
N_2
M_0
y_0
E_2
j
i
N_1
O
E_1
x_0
x

Теорема 15. *Каковы бы ни были две точки* $A(x_1; y_1; z_1)$ *и* $B(x_2; y_2; z_2)$, *координаты вектора* $\overline{AB}$ *определяются формулами*

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \qquad (1)$$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

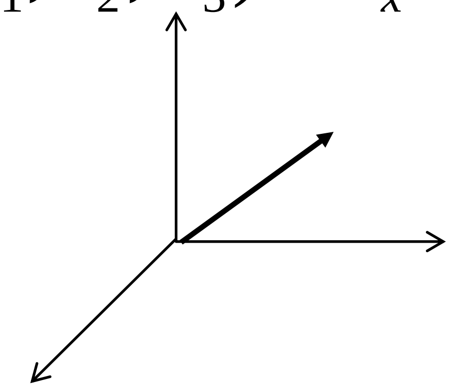
Проекция вектора на оси координат

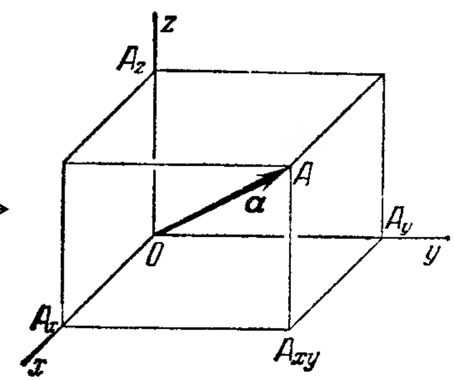
Разложение вектора по ортонормированному базису

$$\mathbf{a} \equiv a_i = a^i = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3) = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$





$$\left.\begin{aligned} X &= |\boldsymbol{a}| \cos \alpha, \\ Y &= |\boldsymbol{a}| \cos \beta, \\ Z &= |\boldsymbol{a}| \cos \gamma, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{gathered} \cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{gathered}\right\}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{i}a_1 + \boldsymbol{j}a_2 + \boldsymbol{k}a_3 =$$

$$\boldsymbol{i}\,|\mathbf{a}|\cos\alpha + \boldsymbol{j}\,|\mathbf{a}|\cos\beta + \boldsymbol{k}\,|\mathbf{a}|\cos\gamma$$

Углы между координатами и вектором

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Проекция вектора ***a*** на вектор ***b***

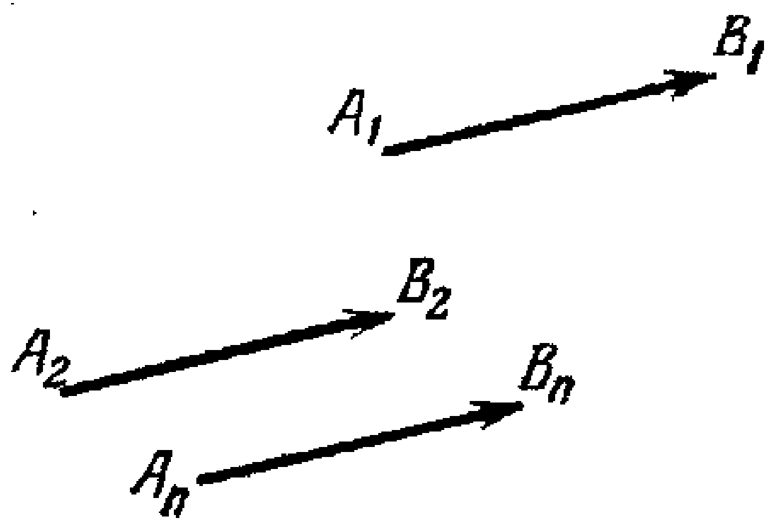
$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_x&=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\alpha_y&=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\alpha_z&=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\end{aligned}\right\}$$

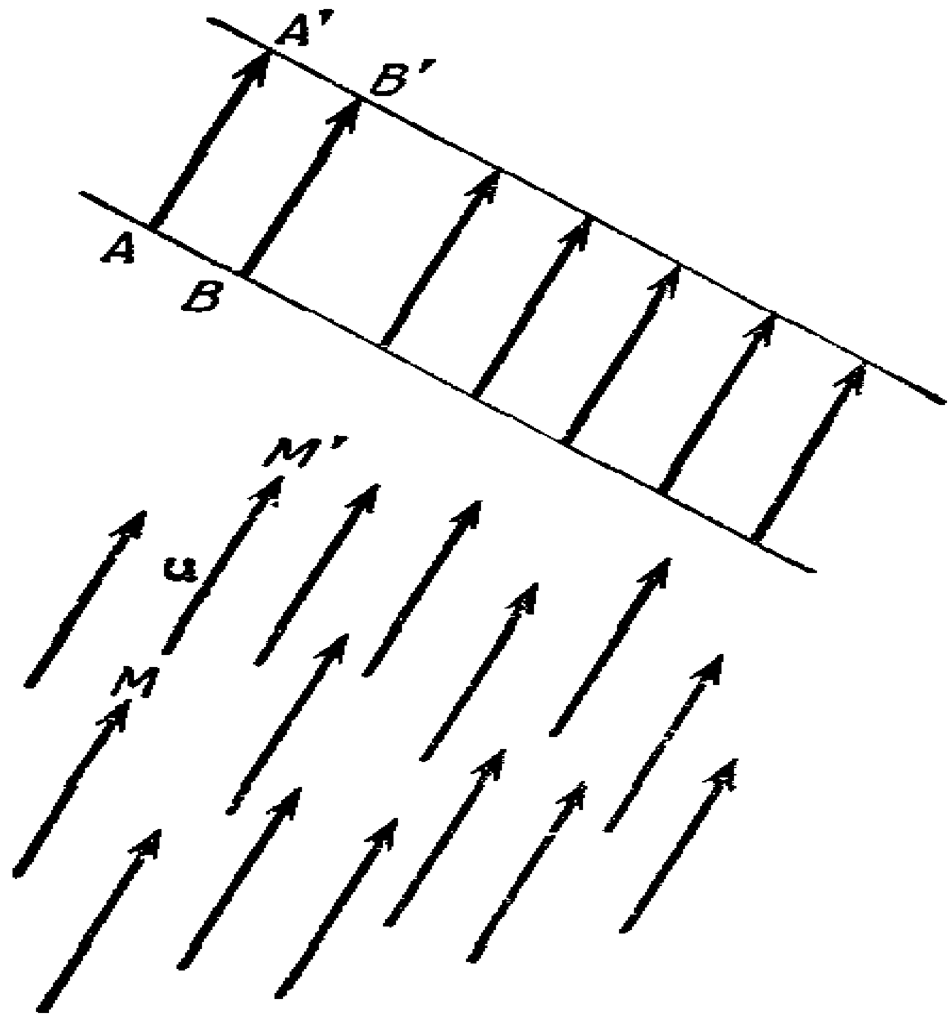
$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_x&=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\alpha_y&=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\alpha_z&=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}};\end{aligned}\right\}$$

$$\cos^2\alpha_x+\cos^2\alpha_y+\cos^2\alpha_z=1.$$

Отношение между векторами.
Ориентация векторов друг относительно друга.
Равенство векторов. Угол между вектором и осями координат. Условия ориентаций векторов. Коллинеарность (параллельность) векторов. Векторы коллинеарные (параллельные) и перпендикулярные. Компланарные векторы. Скрещенные векторы.
Базисные векторы. Базис векторов: нормированный, ортогональный и ортонормированный (орты).
Компоненты векторов (проекции на координаты). Длина вектора в координатном представлении в декартовой системе координат.

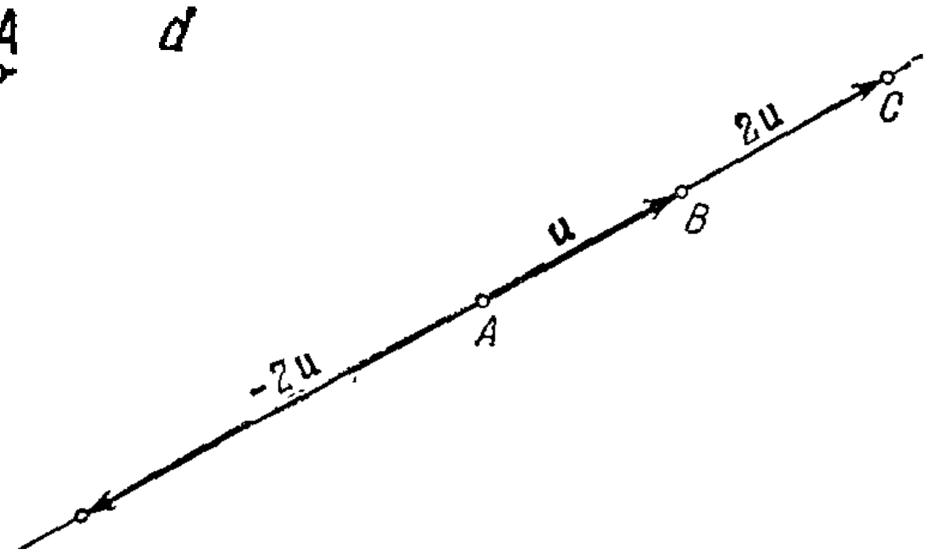


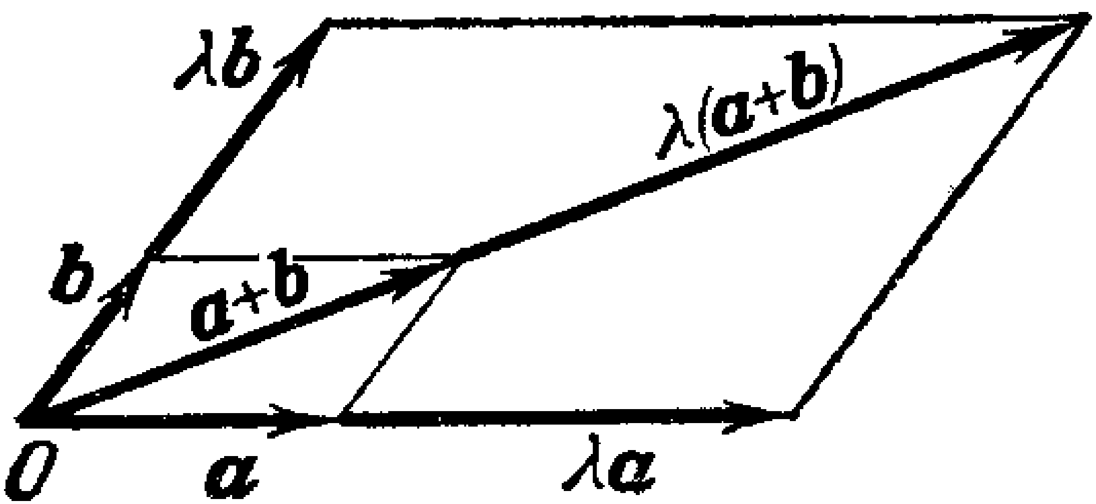
B1
A1
B2
A2
Bn
An

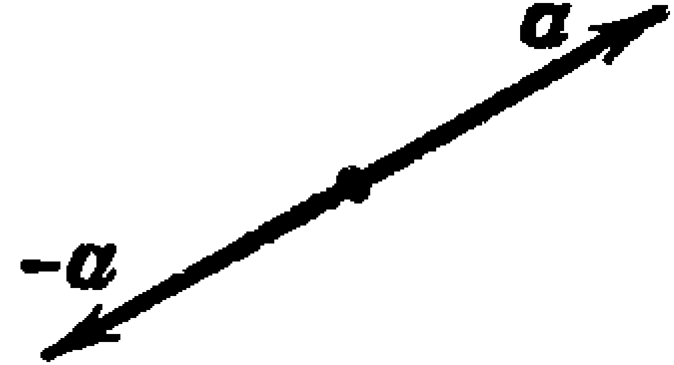

A'
B'
A
B
M'
u
M

Коллинеарные и компланарные вектора. Стандартная форма вектора. Понятие линейной комбинации векторов. Условие линейной независимости системы векторов. Угол между векторами. Координаты вектора. Проекции вектора. Свойства проекций. Теорема о проекции. Скалярное произведение векторов и его свойства: дистрибутивность, коммутативность, однородность, положительная определённость. векторное произведение векторов и его свойства, смешанное произведение векторов и его свойства. Орты (единичные базисные векторы). Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Операции над векторами в координатной форме. Линейные (векторные) пространства (8 аксиом). Векторное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Смешанное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Выполнение действий над векторами через действия над координатами. Ортогональный, нормированные и ортонормированные системы векторов. Базис и разложение вектора по базисным векторам.

Умножение вектора на число







Свойства умножения вектора на число

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$0\mathbf{a} = 0$$

1) $(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$,

2) $\lambda\,(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\,\boldsymbol{a}$,

3) $\lambda\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$$

ассоциативность сочетательность)
умножения вектора на число

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha$$

коммутатиность (перестановочность) умножения вектора на число

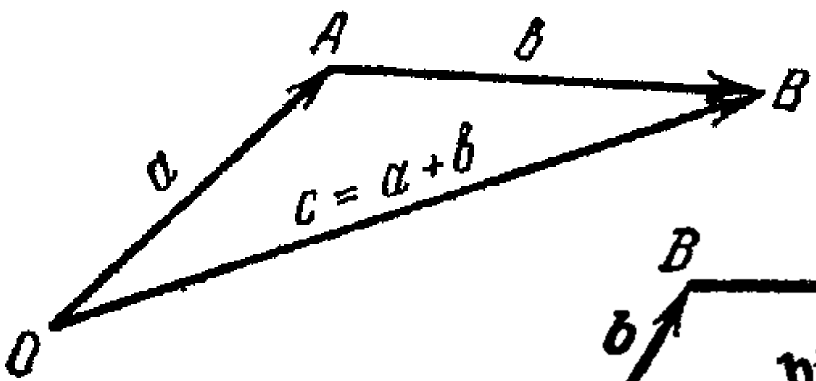
$$|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$$

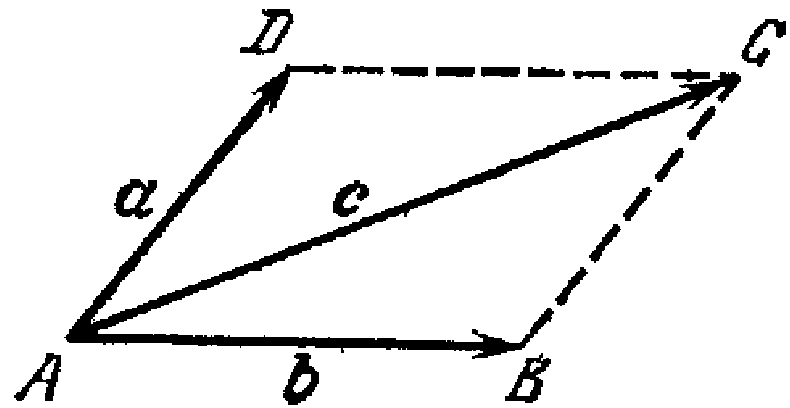
$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$$

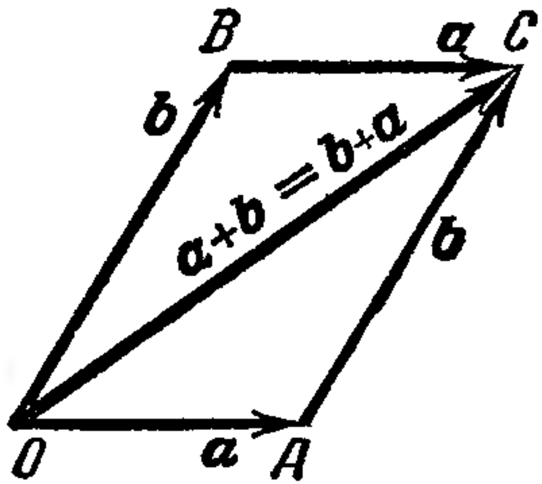
Дистрибутивость

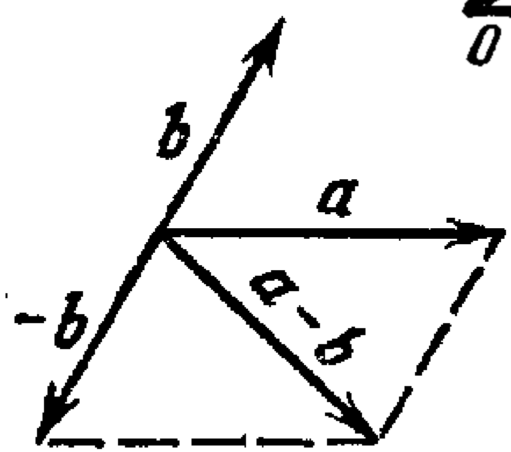
$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$

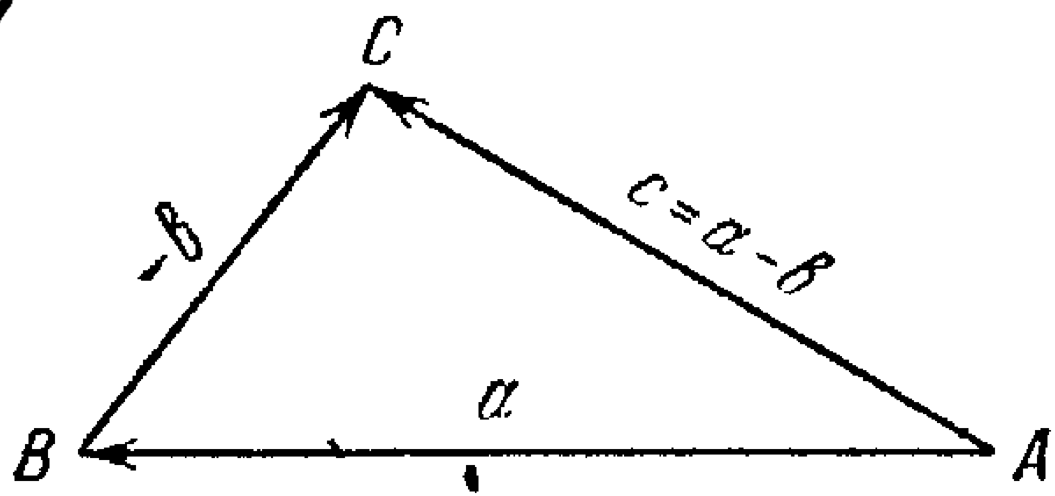
Сложение векторов

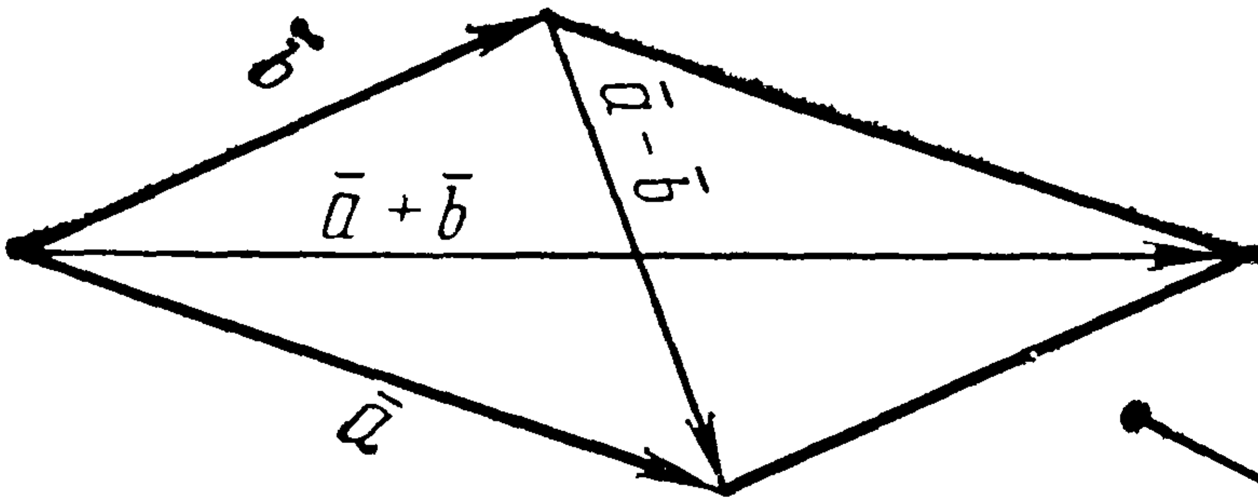




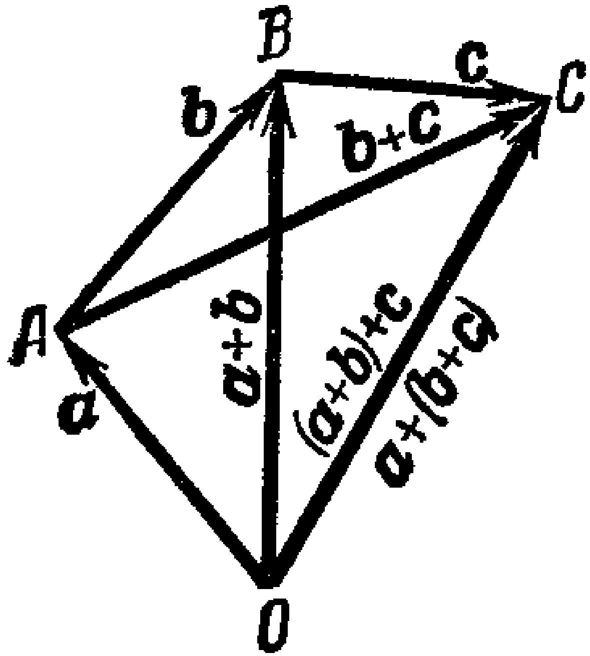




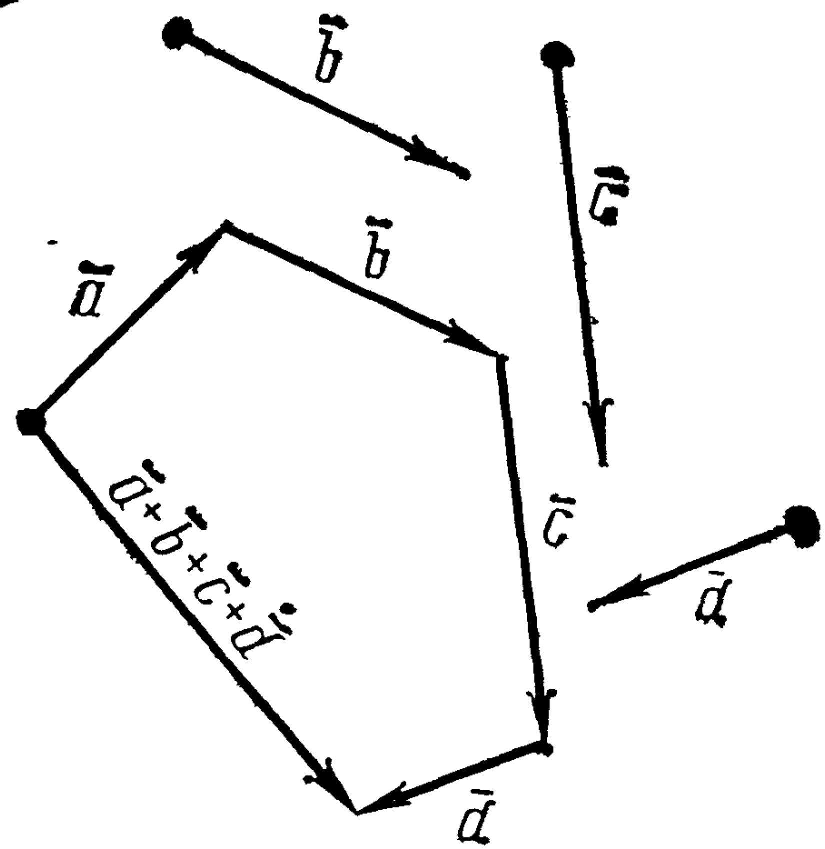




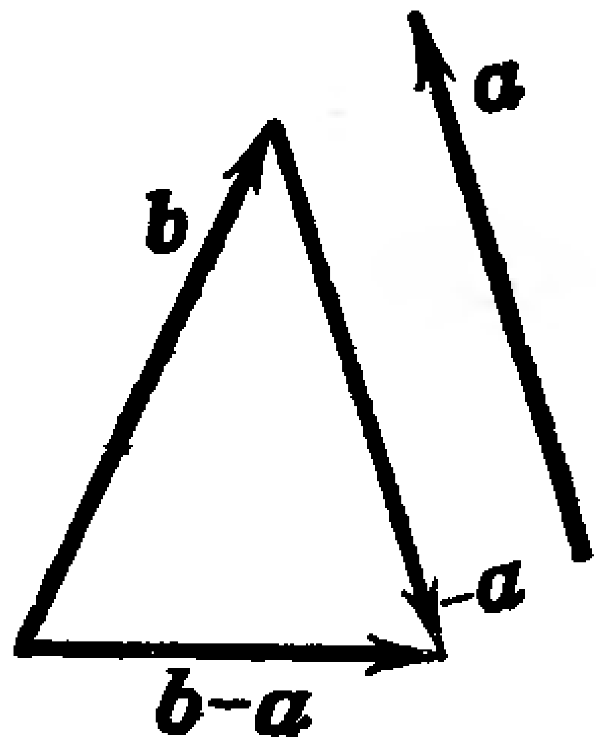
$\bar{b}$
$\bar{a}+\bar{b}$
$\bar{a}-\bar{b}$
$\bar{a}$



B
c
C
b
b+c
A
a+b
(a+b)+c
a+(b+c)
a
O



$\bar{b}$
$\bar{c}$
$\bar{d}$
$\bar{a}$
$\bar{b}$
$\bar{c}$
$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$
$\bar{d}$



a
b
-a
b-a

Свойства операции сложения векторов

операция сложения векторов является
коммутативной (или абелевой) группой.

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$$

ассоциативнось (сочетательность) сложения

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$$

существование нулевого элемента (нуля

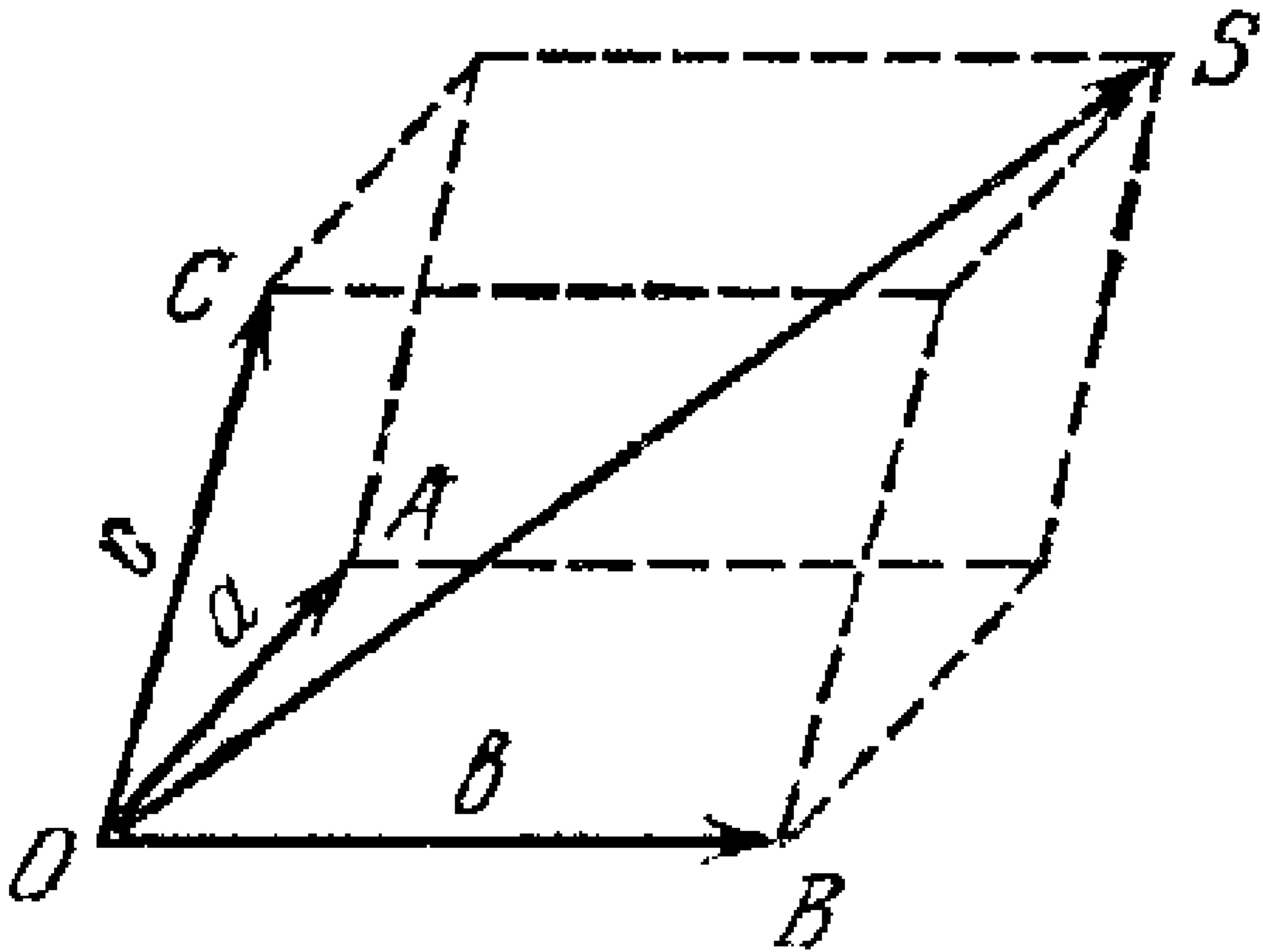
$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$$

сущесвование противоположного (отрицательного) элемента

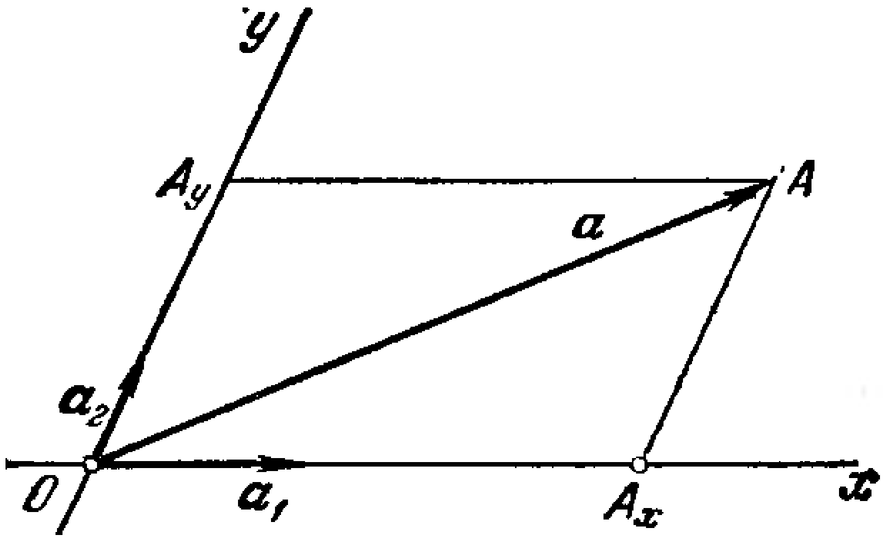
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

(коммутативность (перестановочность) сложения)

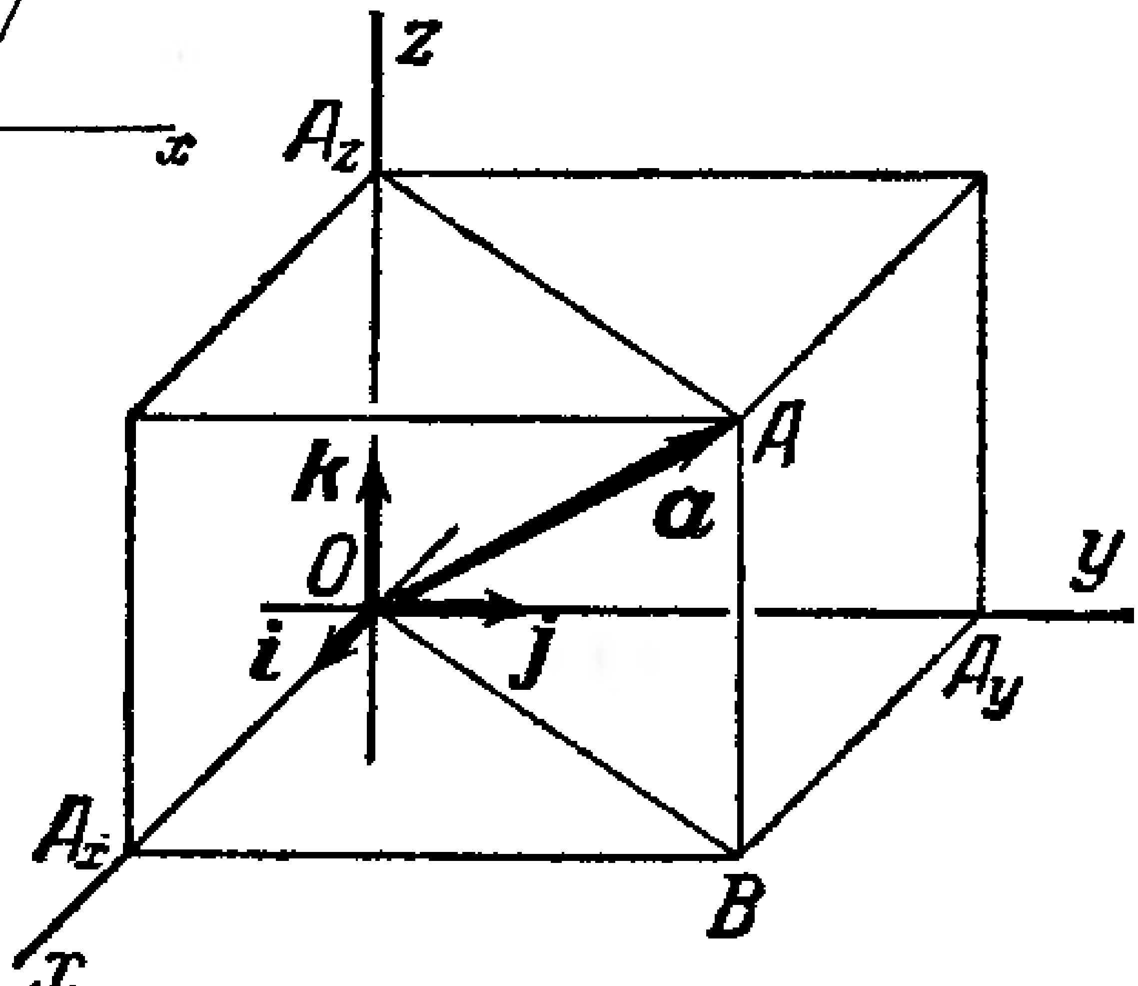
$$||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}||\le|\mathbf{a}\pm\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$$



S
C
c
A
a
b
O
B



y
A_y
A
a
a_2
0
a_1
A_x
x



z
A_z
A
k
a
0
y
i
j
A_y
A_x
B
x

1. Скалярное произведение. *Скалярным произведением* двух векторов **a** и **b** называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$(\boldsymbol{ab}) = \quad (a_1, a_2, a_3) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Углы между векторами

$$\mathbf{ab} \equiv (\mathbf{ab}) \equiv \langle \mathbf{ab} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{ab}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\cos(\mathbf{ab}) = \frac{(\mathbf{ab})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\boldsymbol{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \ \text{и}\ \boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

256. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

△ Находим $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3\cdot2+4(-5)+7\cdot2=0$. Так как $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ и $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, то $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. ▲

257. Даны векторы $\mathbf{a}=m\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+m\mathbf{j}-7\mathbf{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

△ Находим скалярное произведение этих векторов: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4m+3m-28$; так как $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Отсюда $7m-28=0$, т. е. $m=4$. ▲

258. Найти $(5\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})$, если $a=2$, $b=3$, $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

△ $(5\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})=10\mathbf{a}^2-5\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+6\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-3\mathbf{b}^2=10\mathbf{a}^2-3\mathbf{b}^2=40-27=13$. ▲

259. Определить угол между векторами $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

△ Так так $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\varphi$, то $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}$. Имеем $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1\cdot6+2\cdot4+3(-2)=8$;

$a=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$, $b=\sqrt{36+16+4}=2\sqrt{14}$.

Следовательно, $\cos\varphi=\dfrac{8}{\sqrt{14}\cdot2\sqrt{14}}=\dfrac{2}{7}$ и $\varphi=\arccos\dfrac{2}{7}$. ▲

Скалярное умножение векторов

Свойства скалярного произведения.

1°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a^2$, или $\mathbf{a}^2=a^2$.

2°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, если $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, либо $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, либо $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ (ортогональность ненулевых векторов).

3°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (переместительный закон).

4°. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (распределительный закон).

5°. $(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b})=m\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю).

Скалярные произведения ортов осей координат:

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1,\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{i}^2=1, & \boldsymbol{ij}=0, & \boldsymbol{ik}=0, \\ \boldsymbol{ji}=0, & \boldsymbol{j}^2=1, & \boldsymbol{jk}=0, \\ \boldsymbol{ki}=0, & \boldsymbol{kj}=0, & \boldsymbol{k}^2=1. \end{array}\right\}$$

$$\boldsymbol{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}, \quad \boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

$$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

Векторное умножение векторов

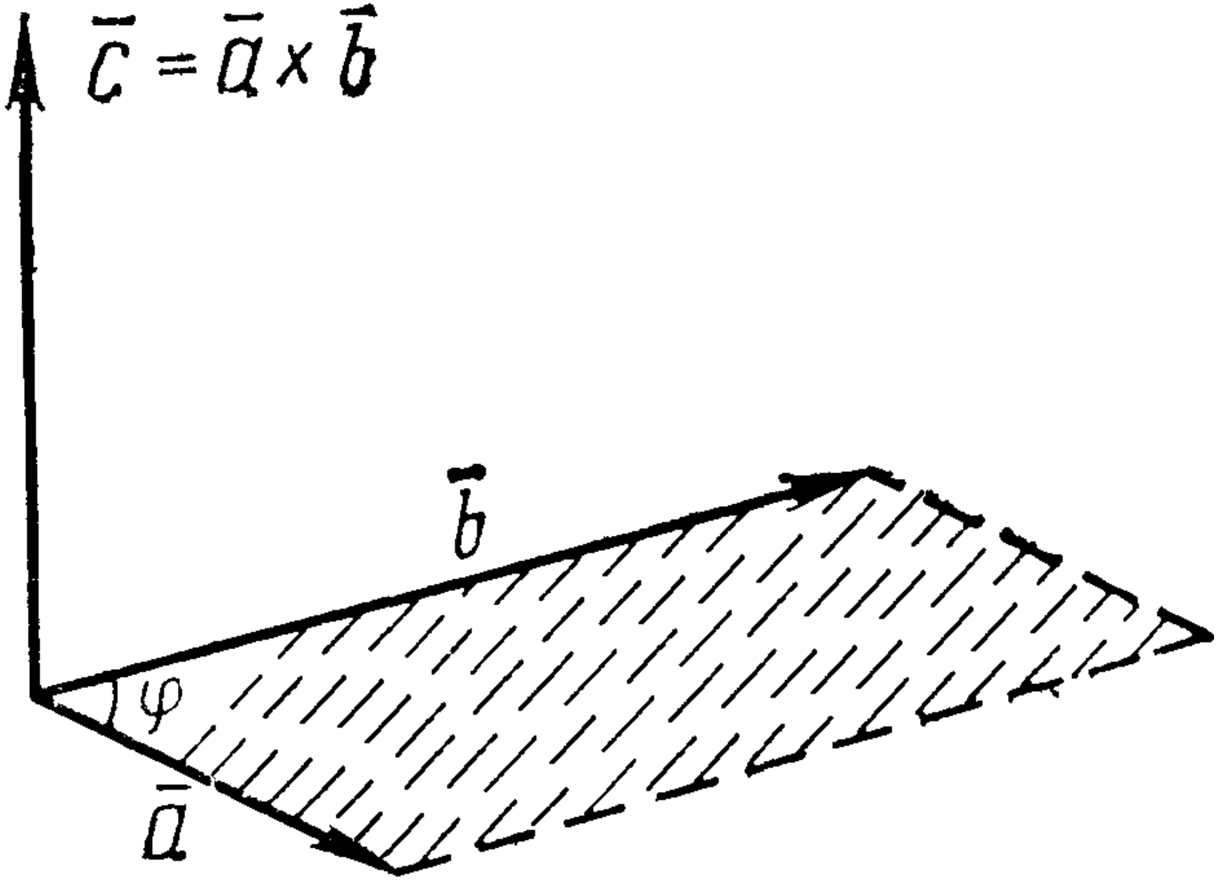
$$[\boldsymbol{ab}]$$

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$$

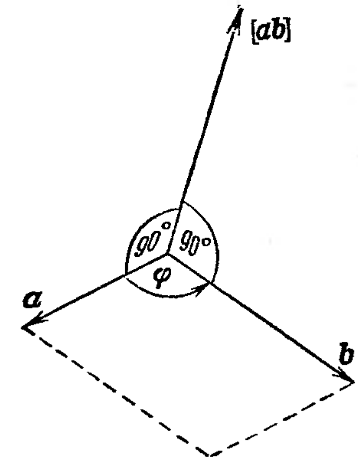
$$\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}] \equiv \mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} =$$

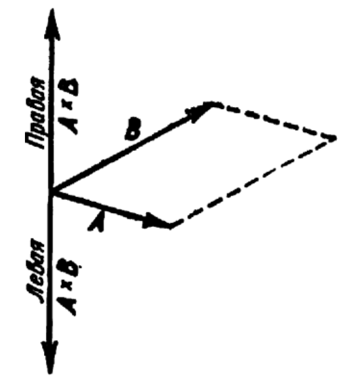
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



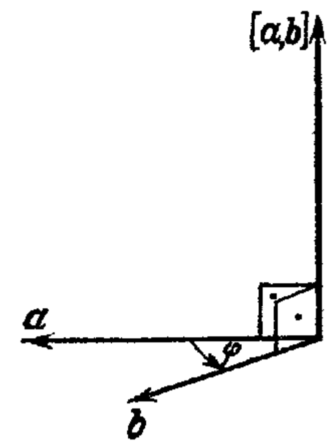
$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$
$\bar{b}$
φ
$\bar{a}$



[ab]
90°
90°
φ
a
b



Правая A × B
B
A
Левая A × B



[a,b]
a
φ
b

$$a=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad b=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

$$[ab]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

$$[ab]=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} k$$

$$[ab]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}$$

Свойства векторного произведения

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a}]$$

$$\alpha[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\alpha\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\mathbf{a},\alpha\mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]$$

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{a},\mathbf{c}]$$

$$[\mathbf{a},\mathbf{a}] = 0$$

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = 0,\ \mathbf{a} = 0,\ \mathbf{b} = 0,\ \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

$$[ab] = -[ba]$$

$$[(\lambda a)\, b] = \lambda\, [ab]$$

$$[a\, (\lambda b)] = \lambda\, [ab].$$

$$[a\, (b + c)] = [ab] + [ac]$$

$$[(b + c)\, a] = [ba] + [ca]$$

Смешанное умножение векторов

$$\mathbf{d} = \mathbf{abc} \equiv (\mathbf{abc}) \equiv (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} \equiv ([\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c}) =$$

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$[ab]\,c = a\,[bc]$$

$$a = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad b = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},\quad c = \{X_3;\ Y_3;\ Z_8\}$$

$$abc = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

$$[ab] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Свойства смешанного произведение

$$\alpha(\mathbf{abc}) = (\alpha\mathbf{a}, \mathbf{bc}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}\alpha, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha\mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$$

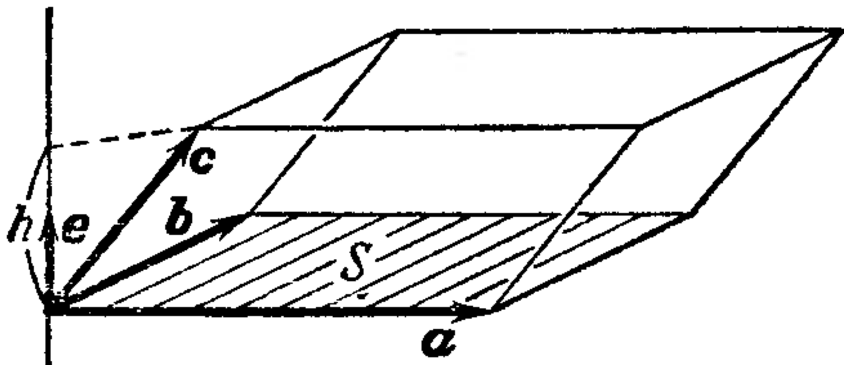
$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}+\mathbf{b}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{aab}) = (\mathbf{abb}) = 0$$

Условие линейной независимости векторов **a**, **b**, **c**:

$\mathbf{abc} \neq 0.$



$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = \pm V, \quad [\boldsymbol{bc}]\,\boldsymbol{a} = \pm V$$

Для некомпланарных векторов выполняется равенство

$$\mathbf{abc} \neq 0$$

Для компланарных векторов выполняется равенство

$$\mathbf{abc} = 0$$

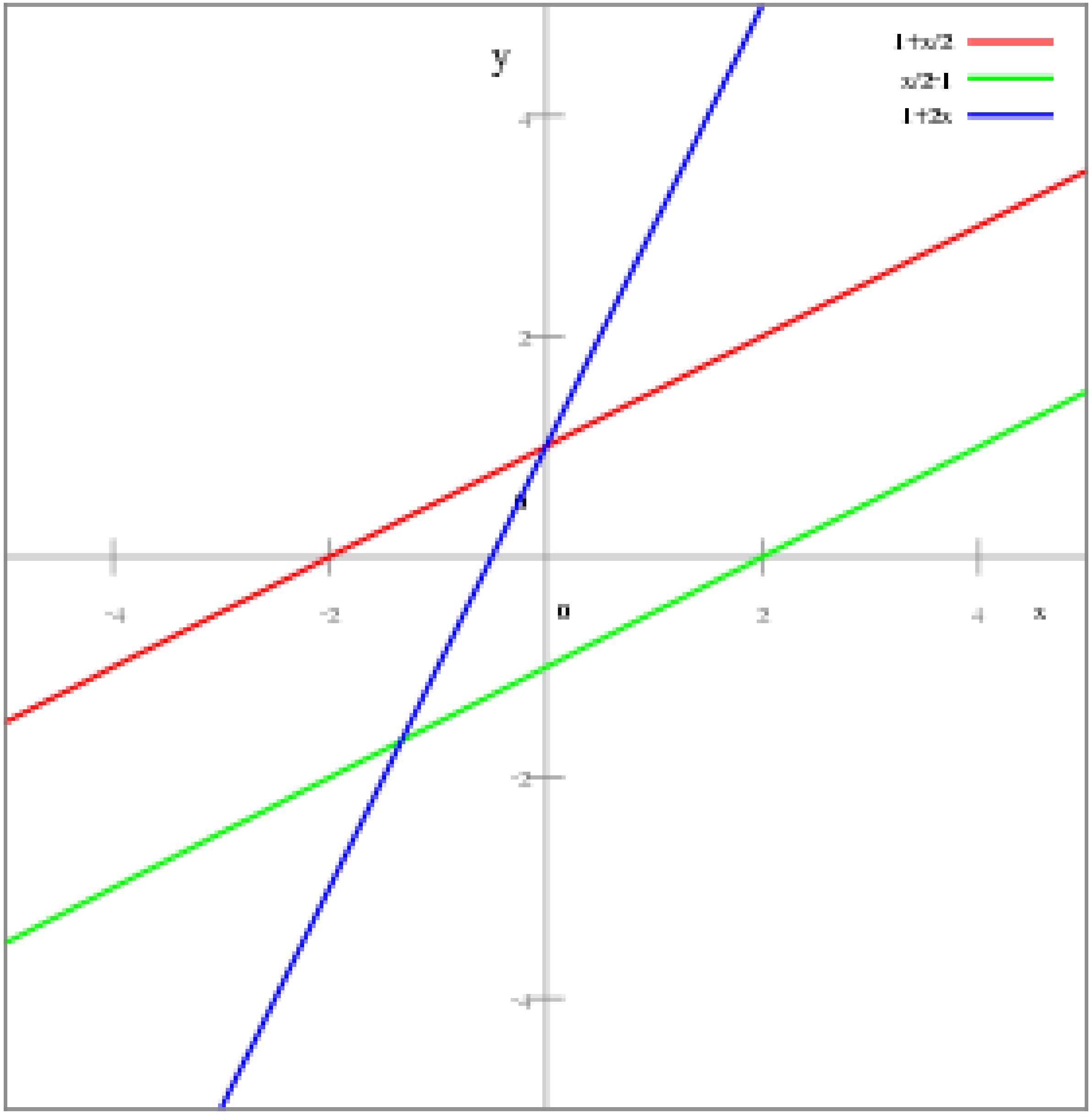
$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

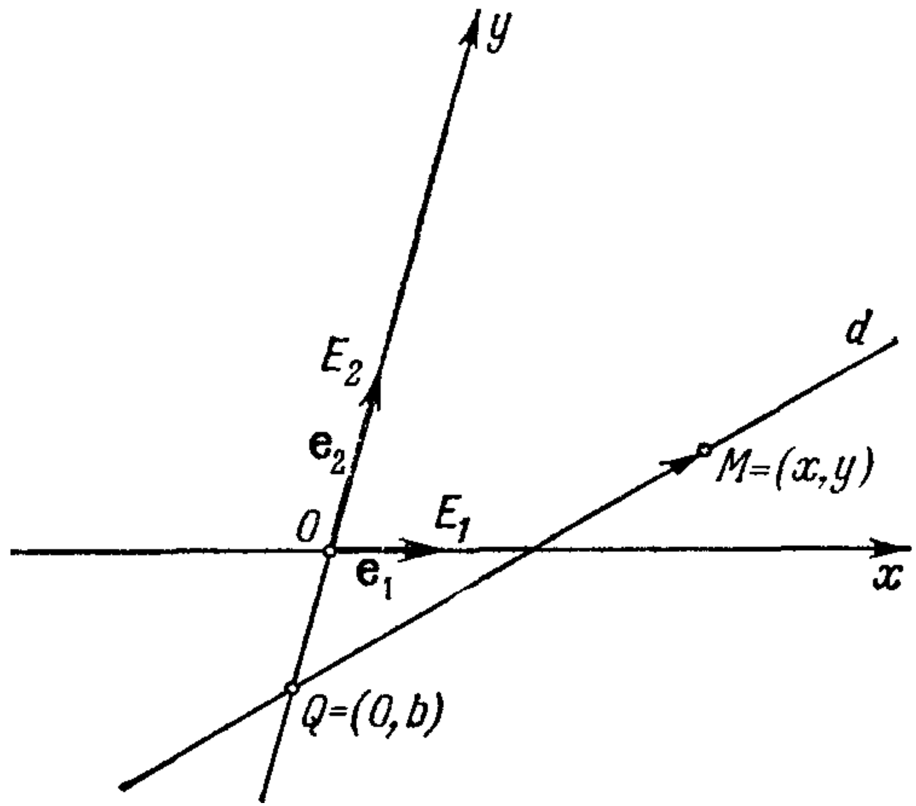
Объём пирамиды образованной тремя векторами

$$\mathrm{V}_{\mathbf{abc}} = \frac{1}{6}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Прямая на плоскости

$Ax + By + C = 0$, A и B не равны нулю одновременно


1+x/2
x/2-1
1+2x
y
x
4
2
0
-2
-4



y
d
E_2
e_2
M=(x,y)
0
E_1
e_1
x
Q=(0,b)

Прямая на плоскости: различные виды уравнений

В прямоугольной системе координат каноническое или общее уравнение прямой задаётся соотношени

$$Ax + By = 0, C = 0$$

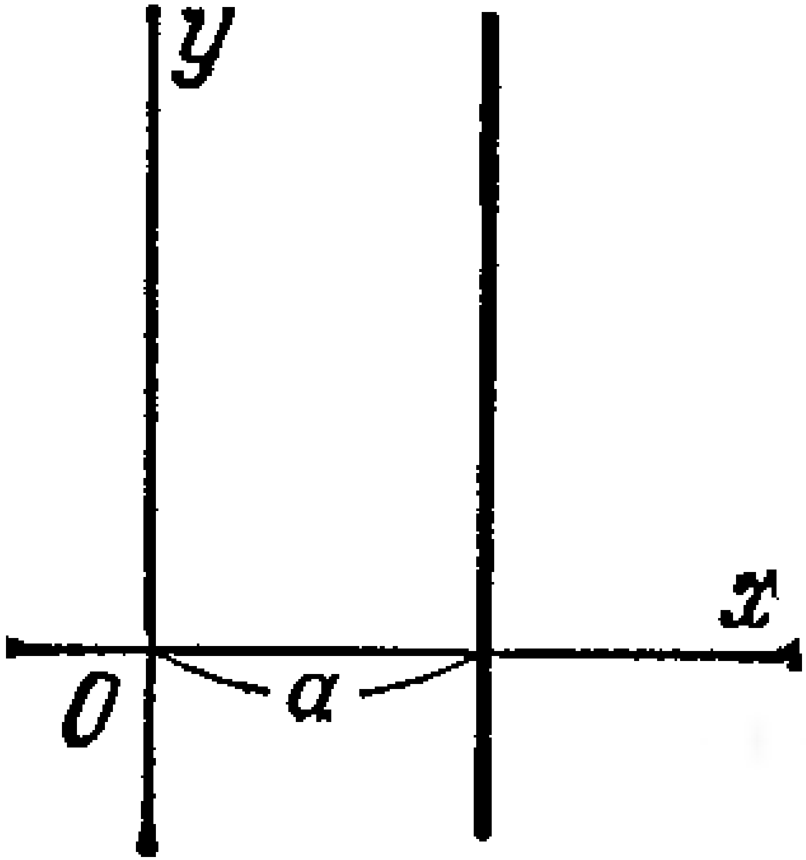
,

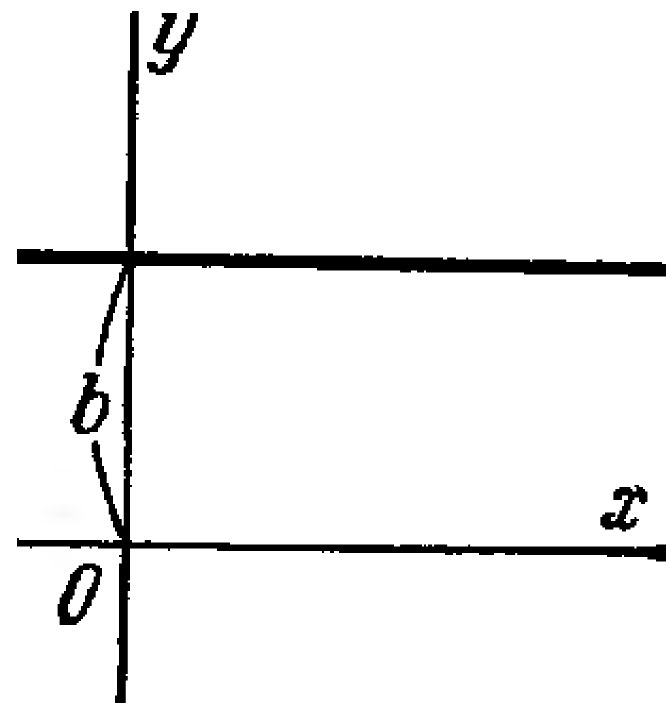
$$By + C = 0, A = 0 \qquad y = -C/B$$

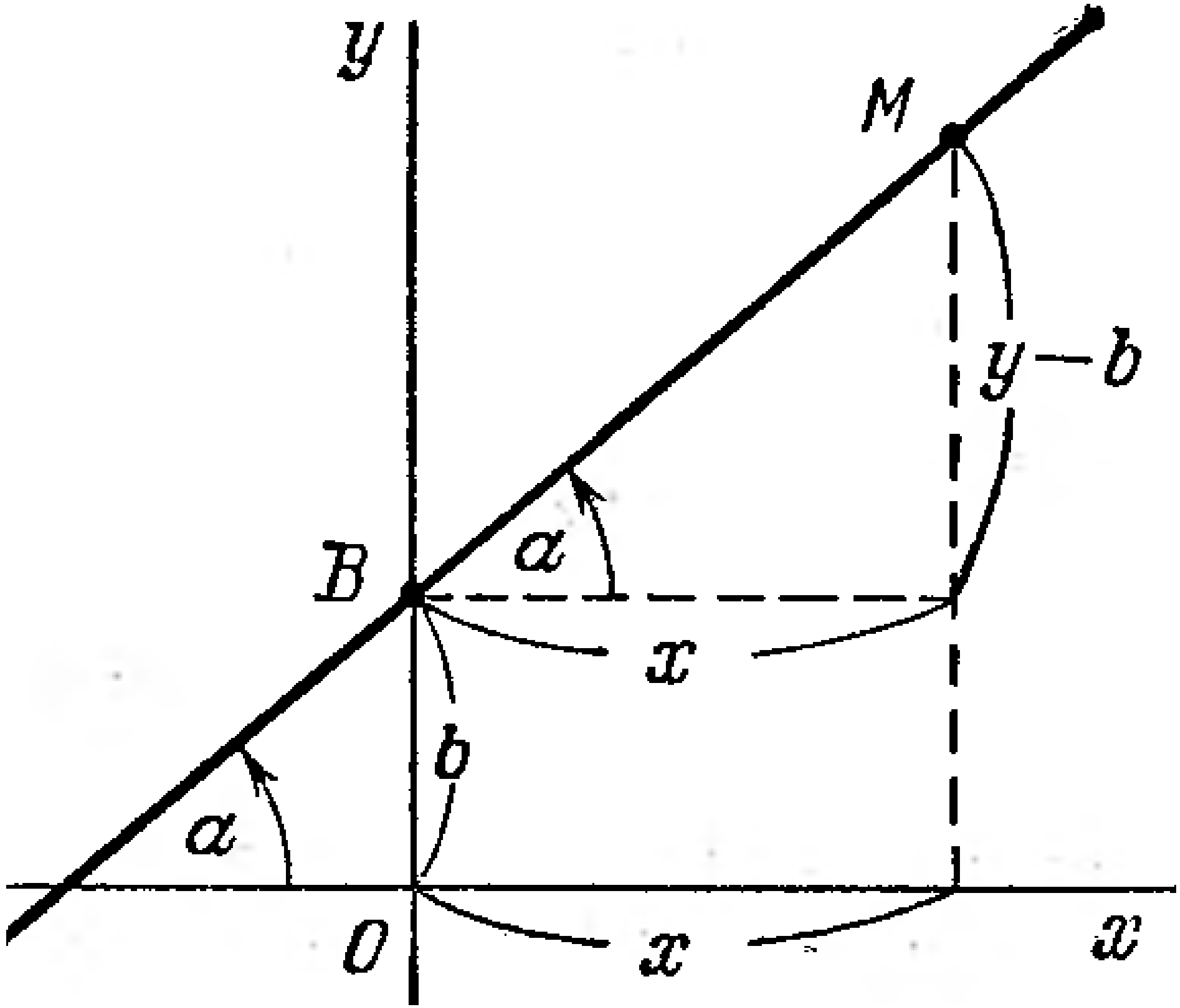
$$Ax + C = 0, B = 0 \qquad x = -C/A$$

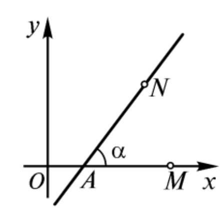
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = kx + b;\ A, B, a \neq 0$$

$$k = \operatorname{tg}\varphi = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$$


y
x
0
a


y
b
x
0


y
M
y − b
B
α
α
x
b
O
x
x


y
N
α
O
A
M
x

Тангенциальное уравнение прямой, когда все три коэффициента не равны нулю

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1,$$

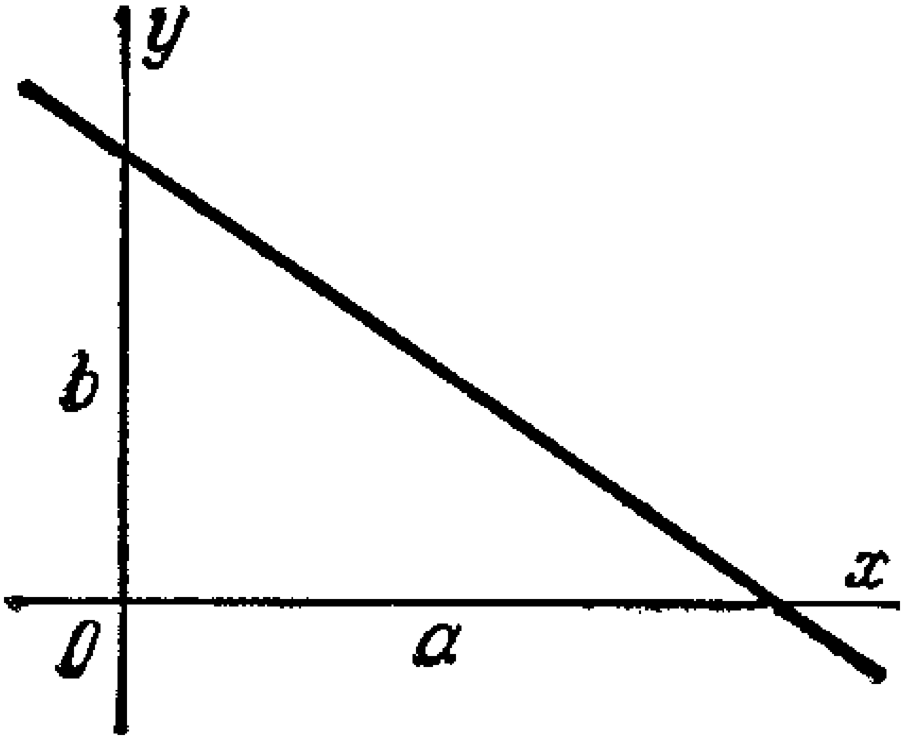
$$\xi x+\eta y=1;\ \xi=\frac{A}{-C},\ \eta=\frac{B}{-C}$$

Уравнение прямой в отрезках, когда все три коэффициента не равны нулю

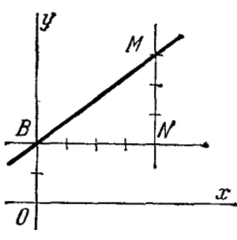
$$\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1$$

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

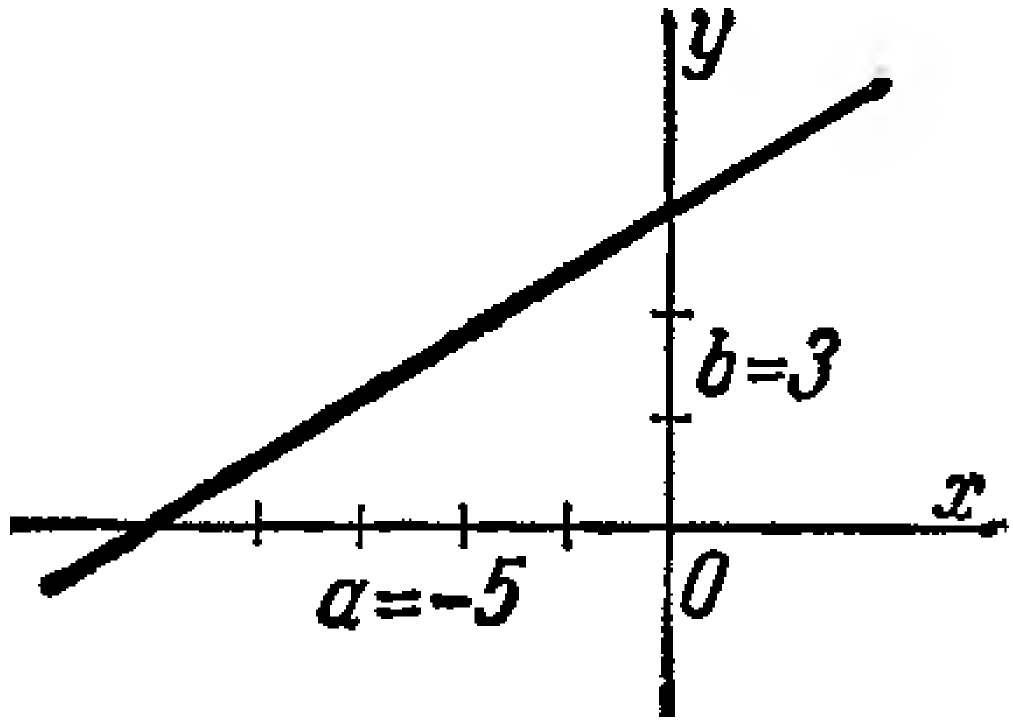
$$\alpha=-C/A,\ \beta=-C/B$$



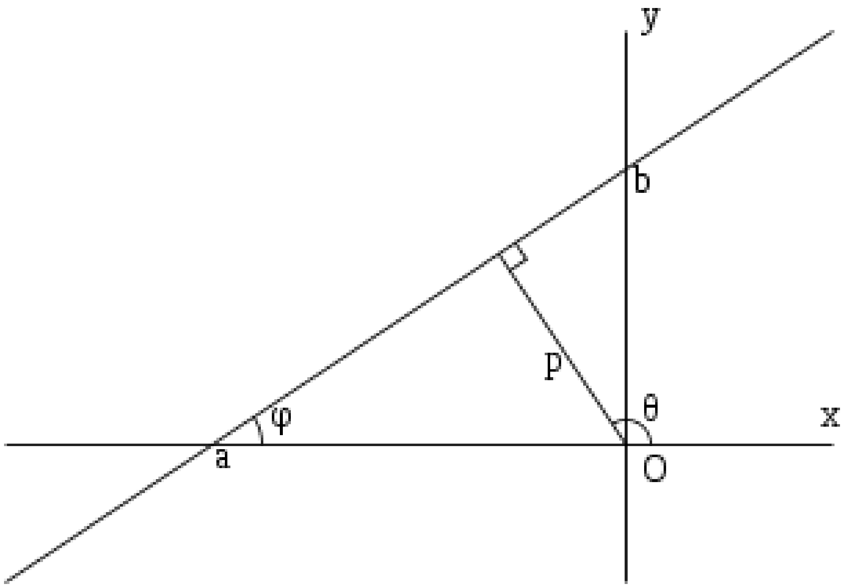
y
b
x
0
a



y
M
B
N
x
0



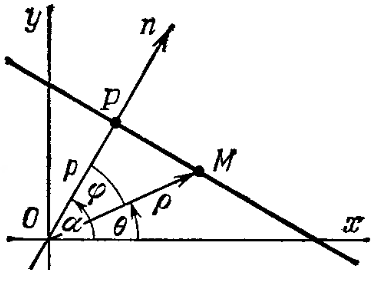
$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$$



$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} > 0$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0;$$

$$\cos\theta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},\ \sin\theta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},\ \theta = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$



$$M(x_0, y_0) \qquad Ax + By + C = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$y - y_0 = k(x - x_0), k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$$

$$M(x_1, y_1) \qquad N(x_2, y_2)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0$$

$$y - y_1 = k(x - x_1), k = \mathrm{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y_1 - y_2)\,x + (x_2 - x_1)\,y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

$$x = x_0 + a_x t, \quad y = y_0 + a_y t,$$

$$k = \frac{a_y}{a_x}, \quad a = \frac{a_y x_0 - a_x y_0}{a_y}, \quad b = \frac{a_x y_0 - a_y x_0}{a_x},$$

$$p = \frac{a_x y_0 - a_y x_0}{\pm\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \quad \cos\theta = \frac{a_x}{\pm\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{a_y}{\pm\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}.$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{q}t$$

$M(x_0, y_0)$ $\boldsymbol{q}(l, m)$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

$$\rho(A\cos\varphi + B\sin\varphi) + C = 0$$

$$\rho\cos(\varphi - \theta) = p.$$

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$M(x_0, y_0)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0), k = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) = 0$$

Взаимоотношение прямых на плоскости

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

$$3x+4y-1=0,$$
$$2x+3y-1=0$$

параллельны, так как $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{1}{3}$

$$x + \ y + 1 = 0,$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

совпадают друг с другом, так как данные уравнения равносильны.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

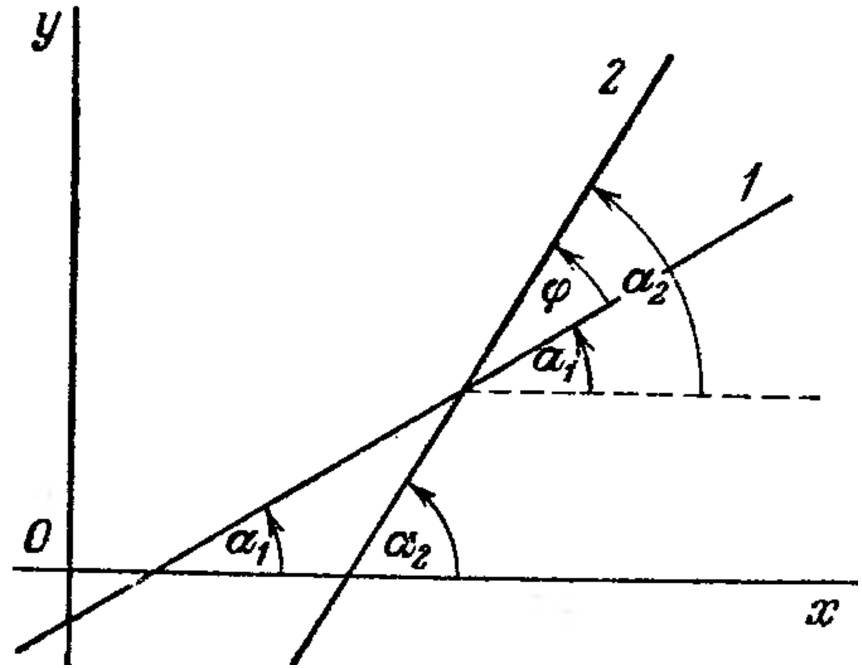
$$y = k_1 x - l_1$$

$$y = k_2 x - l_2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$


y
2
1
φ
α2
α1
0
α1
α2
x

$$k_1 = k_2$$

$$k_1 = -k_2^{-1}$$

Уравнение прямой, перпендикулярной заданной прямой

$$Ax + By + C = 0$$

$$Bx + Ay + \lambda = 0$$

$$M(x_0, y_0)$$

$$B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0$$

$M(x_0, y_0)$ $\boldsymbol{n}(A, B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$