Линейная алгебра

Краткий конспект лекций

Составитель

В.А.Чуриков

Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры
Высшей математики
Томского политехнического университета.

E-mail: vachurikov@list.ru.

	1	**Линейная алгебра**	**12(6)**	**18(9)**		
1	1.1	Матрицы, их классификация и некоторые операции над ними.	2(1)			
		Умножение матрицы на число, сложение матриц, транспонирование и взятие следа матриц		№01(02)2(1)		
		Умножение матриц		№02(04)2(1)		
2	1.2	Определители матриц	2(1)			
		Определители матриц		№03(06)2(1)		
3	1.3	Решение систем неоднородных алгебраических уравнений. Метод исключения переменных. Метод Гаусса.	2(1)			
		Метод исключение переменных		№04(08)2(1)		
		Метод Гаусса		№05(10)2(1)		
4	1.4	Решение систем неоднородных алгебраических уравнений. Метод обратной матрицы. Метод Крамера.	2(1)			
		Метод обратной матрицы		№06(12)2(1)		
		Метод Крамера		№07(14)2(1)		
5	1.5	Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капели.	2(1)			
		Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капели		№08(16)2(1)		
6	1.6	Решение систем однородных алгебраических уравнений.	2(1)			
		Решение систем однородных алгебраических уравнений		№09(18)2(1)		

Матрицы

Понятие матрицы. Введение понятия матрицы. Матрица как обобщение числа. Значение матриц для математики и естествознания.
Формы записи матриц и их обозначения (расписанная в компонентах, индексное обозначение).
Основные структурные составляющие матриц: элементы, строки, столбцы, ряды (строки и/или столбцы), параллельные ряды.
Размерность (размер, порядок) матриц (количество строк и столбцов) и обозначения размерности.
Конечные и бесконечные матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv [a_{ik}]$$

Классификация матриц по структуре. Прямоугольные матрицы и их разновидности. Матрица-строка (строчная матрица) и матрица-столбец (столбцевая матрица).

Квадратные матрицы и их разновидности. Треугольные (верхние треугольные и нижние треугольные матрицы). Диагональные матрицы. диагонали матриц главная (прямая) диагональ (диагональные элементы), недиагональные элементы и побочная (косая) диагональ.

Единичная матрица (матрица тождественного преобразования) и её обозначение, E, $\mathbf{1}$.

Комплексносопряжённые матрицы и свойство комплексного сопряжения.

Положительные (действительные матрицы с положительными элементами) и неотрицательные матрицы (действительные матрицы с неотрицательными элементами).

Блочные (ящичные) матрицы, подматрицы (субматрицы, блоки).

Ленточные матрицы, двух(трёх…)диагональные и квазидиагональные матрицы.

Разряженные матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Классификация матриц по элементам.
Математическая природа элементов матриц (действительные или комплексные числа, функции, векторы, матрицы, операторы). Числовые матрицы. Действительные матрицы у которых элементами являются действительные (вещественные) числа. Комплексные матрицы, когда элементами матрицы являются комплексные числа. Функциональные матрицы. «Матричные» матрицы, когда элементами матриц являются другие матрицы.

Нулевая матрица и её обозначение, *O*.

$$[a_1], \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Вектор-строка и вектор-столбец

$$\boldsymbol{X} = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{array} \right\|, \quad \boldsymbol{Y} = \| y_1 y_2 \cdots y_m \|$$

$m \times 1 \quad \operatorname{colon}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_m)^T;$

$1 \times n \quad \operatorname{row}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n);$

$$A = [\ A^1 \quad \dots \quad A^j \quad \dots \quad A^n\ ] \qquad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

Отношение между матрицами. Равенство матриц. Норма матриц. Разновидности норм матриц. Сравнение матриц по норме.

Операции над матрицами и соответствующие им алгебраические структуры.

Понятие алгебраической операции.

Нульарные операции (унарные отношения) над матрицами. Выбор нулевой и единичной матриц.

Унарные операции (бинарные отношения).

Бинарные операции (тернарные отношения).

Транспонирование матриц и свойства транспонирования. Симметрическая и антисимметрическая (кососимметрическая) матрица.

След (шпур) матриц и его свойства.

Линейные операции над матрицами

Умножение и деление матрицы на число и алгебраическая структура умножения матрицы на число.

Сложение матриц и алгебраическая структура сложения матриц — Противоположная матрица для данной матрицы. коммутативная (абелева) группа.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3. Транспонированная матрица. Расположим строки $m \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ в виде столбцов, не меняя их порядка (т. е. первая строка станет первым столбцом и т. д.). Получится $n \times m$-матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется *транспонированной* по отношению к матрице A и обозначается A^T.

Обозначим элементы матрицы A^T через a_{ij}^T $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$. Согласно определению транспонированной матрицы справедливы равенства

$$a_{ij}^T = a_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.
2. $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$.
3. $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$
4. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

След (шпур) матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $n \times n$ есть сумма

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ее диагональных элементов *).

Для двух квадратных матриц A и B одного и того же порядка

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B), & \mathrm{Tr}\,(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{Tr}\,(A), \\ \mathrm{Tr}\,(BA) = \mathrm{Tr}\,(AB), & \mathrm{Tr}\,(AB - BA) = 0. \end{array}\right\}$$

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B).$$

2. Линейные операции над матрицами. *Суммой* (*разностью*) $m \times n$-матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется $m \times n$-матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* α (или *числа* α *на матрицу* $A_{m\times n}$) называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$.

Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$ или αA.

Пример. Произведение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

на число $\alpha = -3$ есть матрица

$$A\alpha = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 9 & 0 & -21 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{Vmatrix}.$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0+1 & -1+0 \\ 1+8 & 3+2 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 0-1 & -1-0 \\ 1-8 & 3-2 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \| a_{ij} \| = \| \lambda a_{ij} \|$$

$$\lambda \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{Vmatrix}.$$

1. $A+B=B+A$ *(коммутативность).*
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ *(ассоциативность).*
3. $A+O=A$.
4. $A+(-A)=O$.
5. $1A=A$.
6. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ *(ассоциативность относительно умножения чисел).*
7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ *(дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц).*
8. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ *(дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел).*

Разность матриц $A-B$ можно определить следующим образом: $A-B=A+(-B)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 & 2-1 \\ -2+3 & 1+1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).

2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения).

3°. $x(A + B) = xA + xB$ (распределительное свойство относительно числового сомножителя).

4°. $(x + y)A = xA + yA$ (распределительное свойство относительно матричного сомножителя).

5°. $x(yA) = (xy)A$.

$$A+B=B+A, \qquad A+(B+C)=(A+B)+C,$$
$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A, \qquad \alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B),$$
$$A(BC)=(AB)C,$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \qquad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,$$
$$A(B+C)=AB+AC, \qquad (B+C)A=BA+CA,$$

Умножение матриц

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{Vmatrix}$$

4. Умножение матриц. *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{n\times k}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times k}$, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj},$$

$$i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, k.$$

Обозначение: $C = AB$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = (29) = 29$$

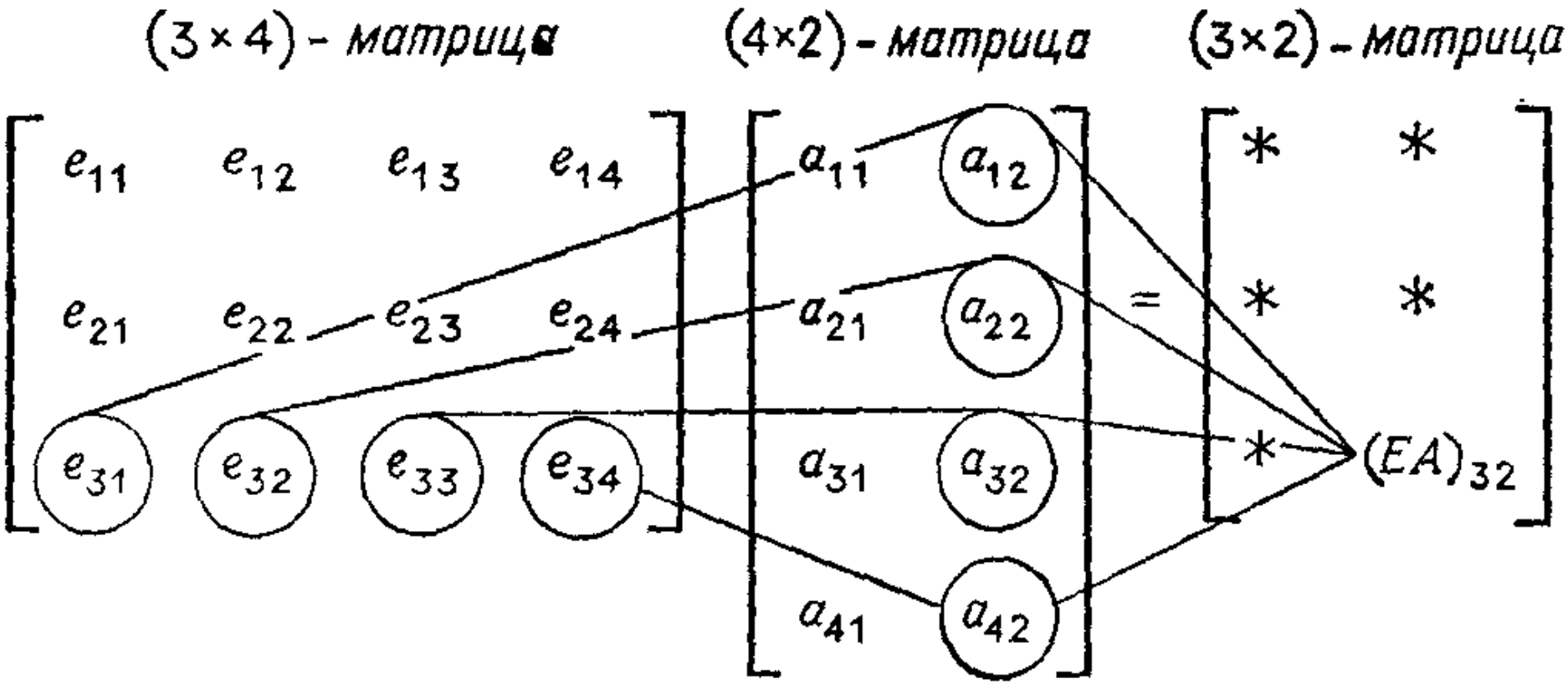
©

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 5 \\ -2 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) & -2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 20 \\ -4 & 6 & -10 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \quad + \cdots + \quad \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$


(3×4) - матрица
(4×2) - матрица
(3×2) - матрица
e11 e12 e13 e14
e21 e22 e23 e24
e31 e32 e33 e34
a11 a12
a21 a22
a31 a32
a41 a42
=
* *
* *
*
(EA)32

1. $(AB)C = A(BC)$ *(ассоциативность).*

2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ *(обозначается* αAB*).*

3. $(A+B)C = AC + BC$ *(дистрибутивность умножения справа относительно сложения матриц).*

4. $C(A+B) = CA + CB$ *(дистрибутивность умножения слева относительно сложения матриц).*

1°. $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность умножения).

2°. $A(B+C) = AB + AC$ (распределительное свойство)

3°. $(xA)B = A(xB) = x(AB)$.

4°. $(AB)^T = B^T A^T$.

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$BA = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$BA \neq AB.$$

$$A=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&0\end{Vmatrix},\qquad B=\begin{Vmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&0&1\end{Vmatrix}$$

$$AB=\begin{Vmatrix}1\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot1\\ 0\cdot0+2\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot1+2\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot1+1\cdot1\\ 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot1+0\cdot1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&1&0\\5&0&3\\0&3&0\end{Vmatrix}$$

$$BA=\begin{Vmatrix}0\cdot1+1\cdot0+0\cdot3 & 0\cdot0+1\cdot2+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0\\ 2\cdot1+0\cdot0+1\cdot3 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot1+1\cdot0\\ 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot3 & 1\cdot0+0\cdot2+1\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&2&1\\5&0&0\\4&0&0\end{Vmatrix}.$$

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$AE = A$$

$$EA = A$$

$$AE = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Определители (детерминанты) матриц

Определители (детерминанты) квадратных матриц. Обозначения.

Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков, мнемонические правила для вычисления определителей 3-го порядка.

Вырожденные (сингулярные, особенные) матрицы и невырожденные (регулярные, неособенные) матрицы.

Ортогональные и специальные матрицы. Свойства определителей.

Миноры. Алгебраические дополнения (адъюнкты). Главные миноры определителя.

Разложение определителя по элементам ряда (строки или столбца) или разложение по минорам.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 5;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = 11.$$

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$\Delta = \det A = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n}$$

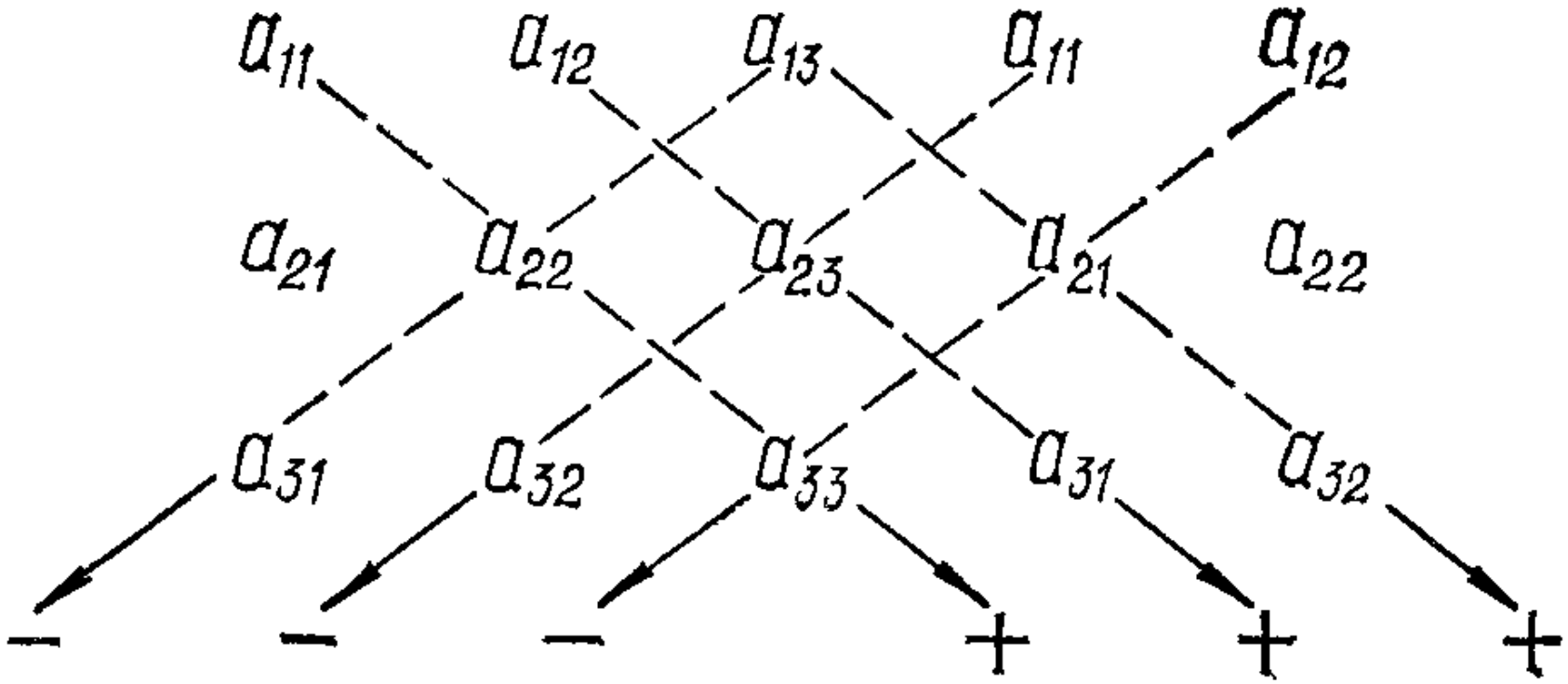
$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{M}_j^1$$

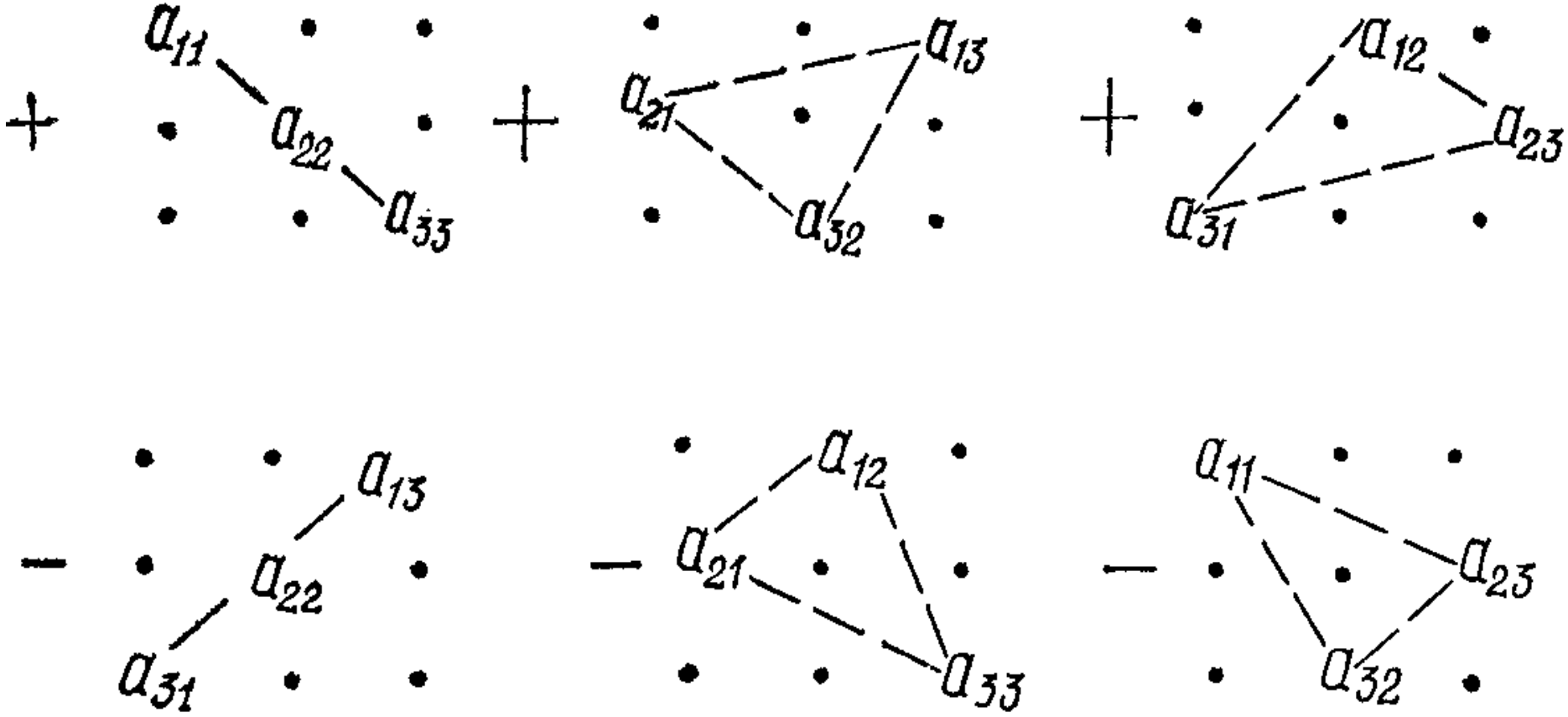
$$\Delta = \sum_{j} (-1)^{t\,(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

$$\Delta = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

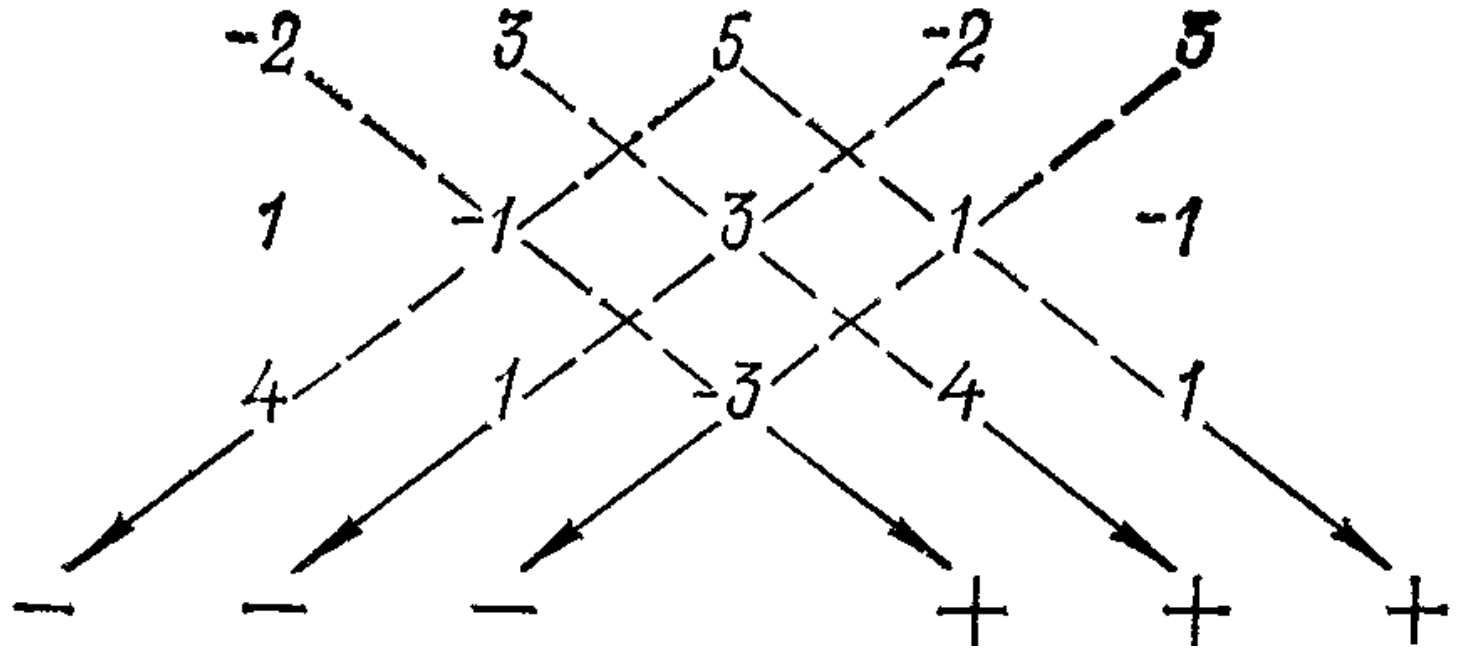
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} = \Delta$$




+ a11 a22 a33
+ a21 a13 a32
+ a12 a23 a31
− a31 a22 a13
− a21 a12 a33
− a11 a32 a23

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$



$$=(-2)(-1)(-3)+5\cdot 1\cdot 1+3\cdot 3\cdot 4-5(-1)4-3\cdot 1(-3)-(-2)3\cdot 1=70$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot(-4)\cdot 3 - \\ -2\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot(-4)\cdot 5 - 2\cdot 1\cdot 3 = \\ = 30 + 2 - 24 - 12 + 20 - 6 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot 1 + (-5)\cdot(-2)\cdot(-2) - \\ -(-5)\cdot 3\cdot 1 - 0\cdot(-2)\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot(-2) = \\ = -20 + 15 + 4 = -1.$$

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (-5)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 8\,(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-3)\,(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -121.$$

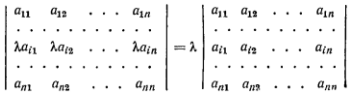
Свойства определителей:

1. При транспонировании матрицы её определитель не меняется $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^T$,
2. При перестановке двух строк или двух столбцов матрицы её определитель меняет знак на противоположный (свойство антисимметрии).

3я. Общий множитель строки или столбца матрицы определителя можно вынести за знак определителя

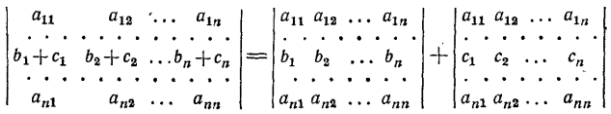
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \alpha a_{21} & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \alpha a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

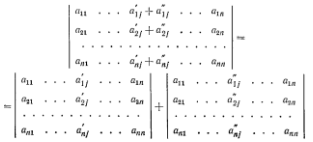
Следствие: Если у матрицы есть нулевой столбец или нулевая строка, то её определитель равен нуль…



4. Если к столбцу или строке прибавить другой столбец или строку с произвольным множителем, то определитель матрицы не изменится

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+\alpha a_{21} & a_{21} & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+\alpha a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$





5. Если в матрице есть линейно зависимые строки или столбцы, то её определитель равен нулю,

6. Если строка или столбец матрицы можно представить как сумму двух строк или двух столбцов, то определитель матрицы будет равен суммой определителей двух матриц

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}+b_{21} & \dots & a_{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{21} & \dots & a_{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$7.\ \det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$$

7. det(**A**$^{-1}$) = (det(**A**))$^{-1}$

Разложение определителя по теореме Лапласа

Теорема Лапласа позволяет свести вычисление определителя порядка n к вычислению определителей более низких порядков. Этой теоремой удобно пользоваться тогда, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя удобно выделять в нем те k строк или столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k-го порядка, равных нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Метод опорного элемента

Метод опорного элемента заключается в последовательном применении формулы, выражающей определитель порядка n через определитель порядка $(n-1)$, элементами которого являются определители второго порядка.

Если элемент данного определителя, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, то эта формула имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Решение систем линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 &= 3, \\ x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; \ldots \; + a_{1n}x_n = h_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \; \ldots \; + a_{2n}x_n = h_2, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \; \ldots \; + a_{mn}x_n = h_m,
\end{array}\right\}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
a^1_1x^1 + a^1_2x^2 + \ldots + a^1_nx^n = b^1, \\
a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \ldots + a^2_nx^n = b^2, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a^m_1x^1 + a^m_2x^2 + \ldots + a^m_nx^n = b^m
\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \ldots + \alpha_m a_{m1} &= 0, \\
\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_m a_{m2} &= 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_m a_{mn} &= 0.
\end{aligned}
$$

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений вида (1) матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & h_n \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots \ + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$AX = H.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}.$$

Метод исключения переменных

Метод Гаусса

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}$$

откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

Метод Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A;$$

$$x_2 = \Delta_2/\det A;$$

$$x_3 = \Delta_3/\det A.$$

$\Delta =$

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(4-9) + (2- \ 12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= h_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= h_n \end{aligned}\right\}$$

$$AX = H$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Метод обратной матрицы

Обратная матрица

$$\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

2. $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1});$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A};\ \mathbf{A};$$

$$(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T};$$

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det\mathbf{A})^{-1}$$

(или в другой записи $|\mathbf{A}|^{-1} = |\mathbf{A}^{-1}|$)

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|,$$

$$\Delta = \Delta(A) = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \neq 0$$

$$A^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{matrix} \right\|$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= h_1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= h_2, \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= h_3. \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы

$$Y = AX,$$

$$X = A^{-1}Y,$$

$$X = A^{-1}AX.$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= h_1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= h_2, \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= h_3. \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 7 & -3\end{vmatrix}=-5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=15,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 6 & 7\end{vmatrix}=25,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & -2\\ 7 & -3\end{vmatrix}=1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 5\\ 6 & 7\end{vmatrix}=9,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14$$

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-5 & 1 & 4\\ 15 & 3 & -8\\ 25 & 9 & -14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0,5 & 0,1 & 0,4\\ 1,5 & 0,3 & -0,8\\ 2,5 & 0,9 & -1,4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 1,5 & 0,3 & -0,8 \\ 2,5 & 0,9 & -1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -0,5\,h_1 + 0,1h_2 + 0,4\,h_3,$$
$$x_2 = 1,5\,h_1 + 0,3\,h_2 - 0,8\,h_3,$$
$$x_3 = 2,5\,h_1 + 0,9\,h_2 - 1,4\,h_3.$$

Системы линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

Однородные системы линейных уравнений имеют единственное и нулевое решение, если определитель матрицы системы **A** не равен нулю det**A** ≠ 0.

Однородные системы линейных уравнений имеют бесконечное количество решений, если определитель матрицы системы **A** равен нулю det**A** = 0. В этом случае решение системы сводится к решению систем меньших порядков.

Система линейных однородных уравнений с бесконечным числом решений. Базисные и дополнительные переменные. Фундаментальное решение.

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=0; \\ 5x+y-8z=0; \\ 4x+2y+3z=0, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$

Система имеет только нулевое решение $x = y = z = 0$

Если определитель коэффициентов системы равен нулю (вырожденная матрица)

Ранг матрицы

Рангом r матрицы называют наибольший из порядков определителей этой матрицы, отличных от нуля.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \det A=1-1=0;$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix},\quad \det B=6-6=0$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det C = -1 - 15 = 17;$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det D = 0 - (-6) = 6$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \det A = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \det B = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 15 & -5 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \det C \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{c} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{c} x+y=1 \\ -5x+3y=2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 3+5=8$$

Понятие и определение ранга произвольной матрицы

$$\mathrm{rang}\mathbf{A} \equiv \mathrm{rank}\mathbf{A} \equiv r_{\mathbf{A}}.$$

Ранг матрицы определяет максимальное число линейно независимых строк (столбцов). Ранг матрицы находится с количеством строк m и столбцов n в соотношении $\mathrm{rang}\mathbf{A} \le \min(m, n)$.

Если в квадратной матрице
все строки (столбцы) линейно независимы,
то такая матрица регулярная (не вырожденная),
т.е. её определитель не равен нулю

Если в матрице есть линейно независимые
строки (столбцы), то определитель такой
матрицы будет равен нулю

В любой матрице число линейно независимых строк всегда равно числу линейно независимых столбцов

Свойства ранга матрицы

ранг матрицы не меняется при перестановке двух строк (столбцов);

ранг матрицы не меняется при умножении строки (столбца) на число не равное нулю;

ранг матрицы не меняется при сложении одной строки с другой помноженной на ненулевое число;

rang**0** = 0; rang**E** = n

(n — порядок единичной матрицы);

rang**A** = rang**A**T;

rang(**A+B**) ≥ rang**A** + rang**B**;

rang(**AB**) ≤ min(rang**A**, rang**B**).

(Если rang(**AB**) ≤ **A** и rang(**AB**) ≤ **B**; rang(**AB**) = **A**, если rang**B** = 0).

Метод окаймляющих миноров

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{pmatrix}$$

Базисный минор матрицы, это минор наивысшего порядка не равный нулю, т.е. равный рангу матрицы. Строки и столбцы базисного минора называются базисными строками и столбцами.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 11 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{cases} x+2y-4z=0; \\ 2x+3y+z=0; \\ 3x+5y-3z=0. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix}=-9-40+6+36-5+12=0$$

Минор первого элемента первой строки не равен нулю, следовательно, система сводится к двум уравнениям (третье уравнение есть сумма первых двух). Решая первые два уравнения по формулам (4), получим

Случай, когда число переменных больше числа уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= -x_2 - x_4, \\ 4x_1 + x_3 &= -2x_2 + 3x_4. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = \frac{-3x_2 + 2x_4}{6}, \quad x_3 = \frac{5}{3}\, x_4$$

$$\left\{ \frac{-3c_1 + 2c_2}{6};\ \ c_1;\ \frac{5}{3}\, c_2;\ c_2 \,\middle|\, \text{для любых } c_1,\ c_2 \in \boldsymbol{R} \right\}$$

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ \ldots\ \ + \alpha_k C_k$$

Теорема Кронекера—Капелли

Теорема Кронекера—Капелли. *Для совместности системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.*

Однородные системы линейных алгебраических уравнений всегда имеют решения ввиду того, что у них ранг матрицы коэффициентов всегда равен рангу расширенной матрицы коэффициентов

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= h_n \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$; *решения есть*

$\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \tilde{A}$; *нет решений*

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 4x_2 &= -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 5x_1 + 4x_3 &= 9. \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$r_A = r_{\underset{\sim}{A}} = 3$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 4x_2 &= -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 11. \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$r_A = r_{\underset{\sim}{A}} = 2$$

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 - 3x_3 &= 7 - x_1 - 4x_4, \\ 4x_2 + 5x_3 &= 2 - 2x_1 + x_4. \end{aligned}\right\}$$

По формулам Крамера находим:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 - x_1 - 4x_4 & -3 \\ 2 - 2x_1 + x_4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41 - 11x_1 - 17x_4}{22}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4 & 2 - 2x_1 + x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-24 + 18x_4}{22}$$

$$\left\{ c_1;\ \frac{41 - 11c_1 - 17c_2}{22};\ \frac{9c_2 - 12}{11};\ c_2 \,\middle|\, \text{для любых } c_1,\ c_2 \in \boldsymbol{R} \right\}$$

Фундаментальная система решений однородный вырожденной системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

Тривиальное решение однородной системы имеется всегда.
Но если система вырожденная,
тогда имеются и нетривиальные решения

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= -x_2 - x_4, \\ 4x_1 + x_3 &= -2x_2 + 3x_4. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = \frac{-3x_2 + 2x_4}{6}, \quad x_3 = \frac{5}{3}\, x_4$$

$$\left\{ \frac{-3c_1 + 2c_2}{6};\ \ c_1;\ \frac{5}{3}\, c_2;\ c_2 \,\middle|\, \text{для любых } c_1,\ c_2 \in R \right\}$$

Тип системы	Определитель матрицы системы	Количество решений
Однородные системы		
$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$	$\det\mathbf{A} = 0$ $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	Бесконечное число решений (система *совместная* и *неопределённая*)
$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$	$\det\mathbf{A} \neq 0$ $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	Система *совместная* и *определённая* (имеет единственное решение, причём нулевое (тривиальное) решение)
Неоднородные системы		
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq 0$	$\det\mathbf{A} \neq 0$ $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	Система *определённая* и имеет единственное решение, ненулевое (не тривиальное) решение (система *совместная*)
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq 0$	$\det\mathbf{A} = 0$ $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	Система имеет бесконечное множество решений (система *несовместная*)
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq 0$	$\det\mathbf{A} = 0$ $\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{rang}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	Не имеет решений (система *несовместная*)