

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.А. Чуриков

**ДРОБНЫЙ АНАЛИЗ
НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРА АДАМАРА**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Рабочая программа

Издательство
Томского политехнического университета
2009

Содержание

0. Введение	3
1. Оператор Адамара и его простейшие свойства.....	3
2. Пространство операторов Адамара и операторных полиномов.....	3
3. Элементарные и специальные функции и их свойства в дробном анализе.....	4
4. Функциональные пространства в дробном анализе	5
5. Дробно-степенные ряды и их алгебраическая структура ..	5
6. Внешняя алгебраическая структура дробных операторов по отношению их воздействия на функции.....	6
7. Ветви дробного анализа рациональных порядков. Модельные ветви дробного анализа.....	6
8. Применения и обобщения дробного анализа в математике. Многомерный дробный анализ.....	7
9. Дробный анализ в комплексной плоскости.....	7
Литература	8

Программа курса «Дробный анализ на основе оператора Адамара»

0. Введение

История вопроса. Возникновение и развитие дробного анализа.

Современное состояние дробного анализа.

Построение дробного анализа на основе различных операторов дробного интегродифференцирования.

Приблизительная классификация операторов дробного интегродифференцирования.

Сравнение операторов дробного интегродифференцирования.

Особенности некоторых направлений дробного анализа.

Программа Адамара построения дробного анализа

1. Оператор Адамара и его простейшие свойства

Получение оператора Адамара.

Определение оператора Адамара.

Различные формы представления оператора Адамара (бетта-функция, непрерывный факториал (функция Гаусса), символ Похгаммера...).

Простейшие свойства оператора Адамара (интегрирование и дифференцирование константы).

Особенности оператора Адамара при нецелочисленных порядках.

Дробные производные на примере степенных функций

Производные констант.

Дифференциалы дробного порядка.

Дробные интегралы на примере степенных функций (неопределённые и определённые).

Полиномы интегрирования их свойства при дробных порядках интегрирования.

Особенности оператора Адамара при целочисленных порядках. Полиномы интегрирования при целочисленных порядках и их свойства...

2. Пространство операторов Адамара и операторных полиномов

Внутренняя алгебраическая структура дробных операторов

Пространство операторов Адамара.

Основные операции над операторами: умножение на число, произведение (композиция) операторов.

Алгебраические свойства оператора Адамара.

Умножение на число.

Сложение операторов Адамара. Абелева группа относительно операции Адамара.

Линейность оператора Адамара: однородность и аддитивность.

Умножение операторов Адамара.

Ассоциативность.

Операторные вектора. Алгебраические операции над операторными векторами: умножение на число, сложение.

Линейное пространство операторных векторов и мощности его базисов.

Топологические свойства оператора Адамара

Непрерывность. Одномерность. Плотность. Отделимость (хаусдорфово пространство).

3. Элементарные и специальные функции и их свойства в дробном анализе

Алгебраические функции

Константы и степенные функции. Линейные функции, полиномы, дробно-рациональные функции.

Показательные функции.

Экспоненты дробных порядков и их свойства: область определения, область допустимых значений, свойства симметрии, свойства связанные с периодичностью.

Способ получения дробных экспонент $\exp_s x$. Генератор дробной экспоненты.

Теорема (о сходимости рядов экспонент). Рассмотреть сходимость экспонент $\exp_s x$.

Классификация экспонент:

Экспоненты нечётных целочисленных порядков: 3, 5, 7 ...

Экспоненты чётных целочисленных порядков: 2, 4, 6 ...

Экспоненты нецелочисленных рациональных порядков с показателями меньше единицы: $1/2, 1/3, 3/5, 5/7 \dots$

Экспоненты нецелочисленных рациональных порядков с показателями больше единицы: $3/2, 5/2, \dots$

Частные случаи дробной экспоненты

Экспонента в анализе $\mathbb{Q}_{1/2}$.

Генератор экспоненты в анализе $\mathbb{Q}_{1/2}$ из экспоненты e^x .

Функции $\xi_{p/q} x$ и их связь с экспонентами целочисленных порядков, целочисленными экспонентами и функциями $\xi_{1/n} x$.

Экспоненты дробного порядка и их связь с экспонентами.

Экспоненты дробного порядка и их связь с другими элементарными функциями дробного порядка.

Трансцендентные функции

Гиперболические функции в дробном анализе, их свойства, определение и графики.

Тригонометрические функции в дробном анализе их свойства и графики.

Обратные функции в дробном анализе. Функции обратные к экспонентам, обратные к гиперболическим функциям, обратные к тригонометрическим функциям и т. д.

4. Функциональные пространства в дробном анализе

Дробностепенные ряды с дробным шагом. Первый член ряда и шаг ряда.

Представление дробных элементарных функций дробных порядков через дробностепенные ряды с дробным порядком.

Понятие гладкости функций по отношению к дробному дифференцированию.

Пространства функций для разных ветвей дробного анализа вещественного порядка.

Норма в пространствах: нормированные и метрические пространства.

Гильбертовы пространства.

Банаховы пространства.

5. Дробно-степенные ряды и их алгебраическая структура

Определение дробностепенных рядов. Шаг степенного ряда.

Алгебраические операции над дробностепенными рядами с дробным шагом.

Алгебраическая структура дробностепенных рядов.

Сходимость дробностепенных рядов.

О расходимости дробностепенных рядов в нулевой точке в случае дробных степеней меньше единицы.

Интегрирование и дифференцирование дробностепенных рядов.

Многослойные ряды.

Примеры дробнстепенных рядов с разными шагами:

Степенные ряды с целочисленным шагом n ;

Степенные ряды с шагом 2;

Частные случаи дробных анализов с шагом $1/q$;

Степенные ряды с шагом $1/2$;

Степенные ряды с рациональным шагом p/q ;

Степенные ряды с иррациональным шагом;

Многозначность дробных производных и интегралов от функций отрицательного и мнимого аргумента.

Программа построения дробного анализа

Программа Адамара. Изменённая программа Адамара в основе которой лежат дробнстепенные ряды с дробным шагом.

6. Внешняя алгебраическая структура дробных операторов по отношению их воздействия на функции

Не коммутативность (2-е причины).

Невозможность в общем случае умножения (композиции) операторов на произведение операторов дробного порядка операторов Адамара при воздействии на функции.

Невозможность в общем случае разбиения (декомпозиции) операторов на произведение операторов дробного порядка операторов Адамара при воздействии на функции.

**7. Ветви дробного анализа рациональных порядков.
Модельные ветви дробного анализа**

Понятие ветвей дробного анализа.

Классификация ветвей дробного анализа.

Маркирующие функции.

Ветви целочисленных порядков.

Дробный анализ с целочисленным порядком 1 (стандартный анализ)

Нечётный порядок 3, 5, 7, ...

Чётный порядок 2, 4, ...

Ветви нецелочисленных рациональных порядков (с показателем больше и меньше единицы) ($1/2, 1/3, 3/2, 5/2, \dots p/q$).

Переходы между ветвями при варьировании порядком. Гладкие и скачкообразные переходы.

Модельные ветви дробного анализа.

Дробный анализ с целочисленным порядком 2. Система функций данного порядка.

Дробный анализ с целочисленным порядком 3. Система функций данного порядка.

Дробный анализ порядка $1/2$. Система функций данного порядка.

Дробный анализ порядка $3/2$. Система функций данного порядка.

Дробный анализ порядка $5/2$. Система функций данного порядка.

Иррациональный дробный анализ и его особенности.

Приближение иррациональных ветвей дробного анализа рациональными ветвями.

8. Применения и обобщения дробного анализа в математике. Многомерный дробный анализ

Дробный анализ нескольких вещественных переменных.

Частные и полные производные в дробном анализе.

Повторные и многомерные дробные интегралы.

Дробный векторный анализ.

Теория поля в дробном анализе.

9. Дробный анализ в комплексной плоскости

Необходимость перехода в комплексную плоскость.

Операторы Адамара для функций комплексной переменной.

Функции в дробном анализе мнимой и комплексной переменной.

Производные и интегралы.

Особенности дифференцирования и интегрирования функций мнимого аргумента.

Условие Коши — Римана (Даламбера — Эйлера).

Аналитические функции.

Дробностепенные ряды Лорана с дробным шагом.

Особые точки. Полюсы дробных порядков.

Операторы Адамара мнимых и комплексных порядков.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. С. 301.
4. Фортков В. Е. Модели уравнений состояний вещества. Черногловка, РИО ОИХФ АН СССР, 1979. 49 с.
5. Hadamar J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. – J. math. pures et appl. Ser. 4. 1892. V. VIII, – p. 101 – 186.
6. Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ, 1992, **90**, № 3. С. 354–368.
7. Рутман Р. С. О физических интерпретациях фрактального интегрирования и дифференцирования // ТМФ, 1995, **105**, № 3. С. 393–404.
8. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
9. Чуриков В.А. Программа и принципы построения дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
10. Чуриков В.А. Внутренняя алгебра операторов дробного интегрирования и дифференцирования // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
11. Чуриков В.А. О многозначности дробных производных и интегралов отрицательного и мнимого аргумента (в печати).
12. Чуриков В. А. Дробный анализ порядка $1/2$ на основе подхода Адамара // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 312 (Математика и механика. Физика), — № 2. — С. 21 — 23.
13. Чуриков В.А., Шахматов В.М. Полиномы дробных порядков в дробном анализе (в печати).
14. Чуриков В.А. Степенные ряды с дробным шагом и построение дробного анализа на основе оператора Адамара (в печати).
15. Чуриков В.А. Гиперболические и тригонометрические функции дробных порядков для дробного анализа на основе оператора Адамара (в печати).