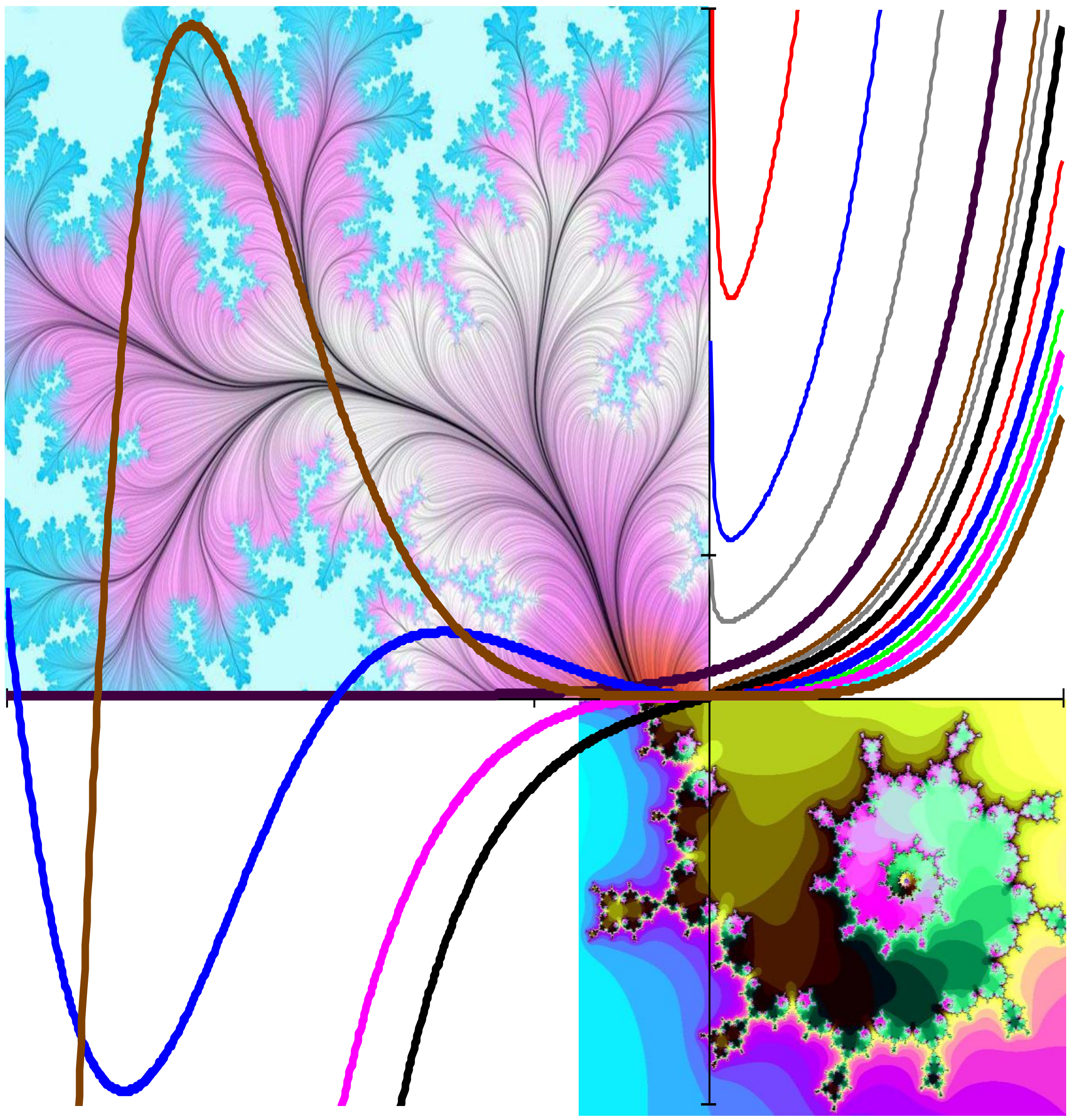
В.А. Чуриков

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ *d*-ОПЕРАТОРА



В.А. Чуриков

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ *d*-ОПЕРАТОРА

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ

Томск 2010

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161я73
Ч-93

Чуриков В.А.

Ч-93 Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе *d*-оператора: учебное пособие / Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.

В пособии последовательно изложены основы дробного анализа на основе вводимого дробного оператора, который обобщает операции дифференцирования и интегрирования степенных функций на случай вещественных порядков.

Рассмотрены свойства дробного оператора. Предложена программа построения дробного анализа как множество отдельных и независимых направлений, соответствующим отдельным вещественным порядкам, которые названы ветвями дробного анализа. Каждая из ветвей дробного анализа является самодостаточной теорией, относительно независимой от других ветвей. Каждая ветвь имеет свой набор элементарных и других функций, как это характерно для стандартного анализа. Для примера рассмотрена ветвь порядка 1/2.

Предназначено, для студентов и аспирантов математических, физических и технических специальностей, а также всем интересующимся данной тематикой.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161я73

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Чуриков Виктор Анатольевич
Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Высшей математики
Томского политехнического университета.
Почтовый адрес: 634050, г. Томск, пр. Ленина 30.
Тел. раб. (3822) 563-593, тел. сот. 89069476517.
E-mail: vachurikov@list.ru.
Научные интересы: Дробный анализ, рентгеновская и нейтронная оптика, рентгеновские и гамма-лазеры, элементарные частицы и квантовая теория поля, математическое обоснование психологии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для математики во все времена были характерны тенденции к обобщению знаний и к рассмотрению с единых позиций идеальных количественных моделей как в самой математике, так и применительно к математическим моделям материального мира, даже если эти модели существенно различаются и на первый взгляд не имеют ничего общего. В этом отношении дробный анализ не является исключением.

Под дробным анализом (или дробным исчислением) будем понимать такое направление в анализе, в котором обобщаются аналитические операции дифференцирования и интегрирования «обычного» («стандартного», «классического», «традиционного») анализа, основателями которого являются Лейбниц и Ньютон, на случай производных и интегралов любого конечного вещественного порядка, как целочисленного, так и нецелочисленного. В рамках дробного анализа исследуются свойства дробного дифференцирования и дробного интегрирования (или просто дробного *интегродифференцирования*) и их всевозможные приложения, как в самой математике, так и в естествознании.

Таким образом, развитие дробного анализа важно в двух аспектах:

1) математическое обобщение стандартного анализа на случай производных и интегралов дробных порядков;

2) приложение дробного анализа для создания математических моделей реального мира, где обычный анализ не позволяет формулировать адекватные математические модели.

Развивать дробный анализ можно с использованием различных подходов, многие из которых описаны в литературе [1-3].

Один из наиболее простых способов построения дробного анализа предложил Адамар: анализ строится с помощью одного из введённых Адамаром операторов дробного дифференцирования функций, выражаемых с помощью степенных рядов [3]. Подходу Адамара, названному *программой Адамара*, не уделялось должного внимания, поэтому он не получил дальнейшего развития, хотя и представляется более естественным и интуитивно понятным, чем многие другие подходы. Простота и логичность подхода Адамара дают основание предполагать, что заложенные в нём идеи после дальнейшего их совершенствования смогут послужить основой для построения дробного анализа, такого же полноценного, как и традиционный анализ. Кроме того, в данном подходе имеется большой потенциал для самых разных обобщений.

Несмотря на положительные моменты данной программы построения дробного анализа, оператор Адамара имеет ряд недостатков. Ели изменить оператор Адамара, налагая дополнительные условия, то можно получить оператор, лишенный недостатков оператора Адамара. В результате оператор Адамара можно заменить новым оператором дробного дифференцирования и дробного интегрирования. Новый оператор назван *d*-оператором. На вводимом операторе основывается построение дробного анализа в данной работе.

Для любого конечного вещественного порядка дробного дифференцирования и интегрирования можно построить отдельную теорию дробного анализа, которая является *самодостаточной* теорией и относительно независимой от подобных теорий других вещественных порядков. Всего таких теорий можно построить бесконечное множество. Эти теории были названы *ветвями дробного анализа* соответствующих *порядков*.

Среди всех ветвей дробного анализа «обычный» анализ является лишь частным, к тому же, вырожденным случаем порядка 1, что делает его одной из самых простых ветвей дробного анализа.

Во многих других подходах в качестве операторов дробного дифференцирования и интегрирования вводятся различные интегральные преобразования, которые являются более сложными для работы, чем *d*-оператор. Причём ряд простых результатов в разных подходах дробного анализа может совпадать, но всё же это разные, не тождественные друг другу теории, каждая из которых имеет свои особенности, свои положительные и отрицательные черты.

В связи с этим для выявления положительных и отрицательных сторон разных подходов построения дробного анализа, необходимо сравнение разных направлений дробного анализа и, в частности, подхода, основанного на *d*-операторе.

В данной работе систематически строится дробный анализ на основе широкого обобщения оператора Адамара, в котором стандартный анализ содержится как частный случай. Такое положение будем называть *принципом соответствия*, который представляется очень важным, особенно когда возникает необходимость применять дробный анализ для построения на его основе математических моделей окружающей действительности.

Построение дробного анализа на основе *d*-оператора проходит параллельно другим направлениям дробного анализа и относительно независимо от них.

Поверхностное сравнение дробного анализа на основе *d*-оператора с альтернативными направлениями показывает, что он имеет много общего с ними, но также имеются и принципиальные различия. Сравнительный анализ альтернативных направлений построения дробного анализа должен быть более объёмным и глубоким.

Данное пособие предназначено, прежде всего, для студентов и аспирантов, а также для всех интересующихся дробным анализом. Для понимания текста необходима подготовка по математике примерно в объёме первых двух курсов технического вуза.

Изложение материала в пособии опирается на основные понятия стандартного анализа, которые обобщаются на случай любых вещественных порядков. Исследуются свойства d-оператора и вводимых на его основе функций.

Глава 1. ОПЕРАТОР ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 1. Получение оператора дробного дифференцирования и интегрирования

Обобщение операций дифференцирования и интегрирования на случай любого конечного вещественного порядка можно начать с обобщения формул стандартного анализа для дифференцирования и интегрирования степенных функций.

Для производной и неопределённого интеграла первого порядка от степенной функции x^{α} в стандартном анализе хорошо известны формулы [4, 5]

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1} \text{ и } \int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+a_0;\, \alpha, a_0\in\mathbb{R};\, \alpha\neq-1. \tag{1.1}$$

Здесь a_0 - константа интегрирования.

Вторая формула справедлива для всех показателей степенной функции, кроме $\alpha = -1$. Для данного частного случая справедлива формула интегрирования

$$\int x^{-1}dx=\ln|x|+a_0. \tag{1.2}$$

Данный частный случай не вписывается во вторую формулу (1.1) и является следствием того, что производной натурального логарифма $\ln|x|$ является функция $1/x$ [4].

Применяя формулы дифференцирования и интегрирования последовательно n раз, можно получить формулы стандартного анализа для производной порядка n от степенной функции x^m ($n, m \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{d^n x}{dx^n}x^m=(m-n)\ldots(m-1)mx^{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}. \tag{1.3}$$

Последовательно интегрируя n раз степенную функцию x^m, получим

$$\int x^m d^n x = \frac{1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)} x^{m+n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i =$$
$$= \frac{m!}{(m+n)!} x^{m+n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \tag{1.4}$$

где, m и n – любые целые числа. В этом случае должно выполняться неравенство $n \neq -m$, а также для случая целых отрицательных показателей степеней степенной функции $-m$ должно выполняться условие $|m| > |n|$; $n!$ – факториал, который выражается через произведение чисел $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n$.

Последнее слагаемое содержит a_i – вещественные константы интегрирования, а $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ – полином, получающийся при n-кратном интегрировании первого порядка, который будем обозначать $C_n(x)$:

$$C_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{m-1} x^{m-1}; n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.5}$$

Для обобщения формулы дифференцирования (1.3) на случай дробных порядков, как нецелочисленных, так и целочисленных, заменим в них соответственно целые числа m и n на любые конечные вещественные числа s и α, а вместо факториала подставим его обобщение на непрерывный случай.

После замены получим оператор дифференцирования дробного порядка s степенных функций, названый *оператором Адамара* [6]:

$$\frac{d^s x}{dx^s} x^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-s+1)} x^{\alpha-s}. \tag{1.6}$$

Здесь $\Gamma(x)$ – *интеграл Эйлера второго рода*, или *гамма-функция Эйлера*, свойства которой достаточно хорошо изучены. Ознакомиться с которыми можно, например, в [7]. Гамма-функция является обобщением факториала на случай непрерывного значения аргумента.

В частности, для целочисленных значений переменной n гамма-функция переходит в факториал

$$\Gamma(n+1) = n!; n \in \mathbb{N}.$$

Заменяя в формуле (1.3) целочисленные значения n на любое вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Gamma(n + 1) \to \Gamma(\alpha + 1)$, получаем формулу (1.6).

Сделав аналогичные замены в формуле интегрирования из стандартного анализа (1.6), получим оператор Адамара для дробных порядков интегрирования [8]:

$$\int x^{\alpha} d^{s}x = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} x^{\alpha+s} + C_{s}(x). \tag{1.7}$$

Здесь $C_s(x)$ – функция, получающаяся при интегрировании порядка s, которая является обобщением константы интегрирования стандартного анализа на случай дробных порядков интегрирования. Очевидно, что $C_s(x)$, должна удовлетворять свойству аналогичному из стандартного анализа, а именно, производная порядка s от $C_s(x)$ должна быть равна нулю

$$\frac{d^{s}x}{dx^{s}} C_{s}(x) = 0. \tag{1.8}$$

Функцию $C_s(x)$ будем называть *полиномом дробного интегрирования порядка* s. Подробно свойства $C_s(x)$ будут рассмотрены ниже.

Недостатком полученных операторов Адамара дробного дифференцирования (1.6) и интегрирования (1.7) является то, что для целых отрицательных значений аргумента $n = -1, -2, -3, -4, \ldots$ и для любых нецелочисленных порядков производной и интеграла значения функций после дифференцирования и интегрирования обращаются в бесконечность:

$$\frac{d^{s}x}{dx^{s}} x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n-s+1)} x^{-n-s} = \infty;\, s>0;\, s \notin \mathbb{N};\, n=1, 2, 3, \ldots$$

$$\int x^{-n} d^{s}x = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+s+1)} x^{-n+s} + C_{s}(x) = \infty;\, s>0;\, s \notin \mathbb{N};\, n=1, 2, 3, \ldots$$

Это связано с тем, что гамма-функция $\Gamma(m)$, стоящая в числителе, имеет бесконечное счётное множество простых полюсов, когда аргумент принимает целые неположительные значения $m = 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$ Или для аргумента в рассматриваемом случае, когда $-n + 1 = 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$

$$\Gamma(-n+1)=\infty;\ n=1,2,3,4,...$$

Обойти эту трудность можно заменив в формулах (1.6) и (1.7) дробного интегродифференцирования бесконечности в полюсах гамма-функции вычетами гамма-функции в соответствующих полюсах [9] по известной формуле [7]:

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-m}\Gamma(\alpha)=\frac{(-1)^m}{m!};\ m=0,1,2,3,4,... \tag{1.9}$$

Применительно к рассматриваемому случаю, когда $m = 1 - n$, данная формула легко преобразуется к виду

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1-n}\Gamma(\alpha)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!};\ n=1,2,3,4,... \tag{1.10}$$

Подставляя значения вычетов (1.10) вместо полюсов в формулы дробного интегродифференцирования (1.6) и (1.7), получим формулы, соответственно, дробного дифференцирования и интегрирования нецелочисленных порядков «в полюсах»

$$\frac{d^s x}{dx^s}:x^{-n}=\frac{\operatorname*{Res}\limits_{s=1-n}\Gamma(1-n)}{\Gamma(-n-s+1)}x^{-s-n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(-n-s+1)}x^{-s-n}; \tag{1.11}$$

$$\int x^{-n}d^s x=\frac{\operatorname*{Res}\limits_{s=1-n}\Gamma(1-n)}{\Gamma(s-n+1)}x^{s-n}+C_s(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(s-n+1)}x^{s-n}+C_s(x), \tag{1.12}$$

в (1.11) и (1.12) $n = 1, 2, 3, 4, \dots; s \notin \mathbb{N}$.

Рассмотрим ряд важных частных случаев, когда порядки интегродифференцирования и показатели степенных функций могут принимать целочисленные значения.

Если n раз проинтегрировать функцию с показателем степени $-n$, то легко получить формулу, которая обобщает формулу стандартного анализа (1.2):

$$\underbrace{\int\int\cdots\int}_{n}x^{-n}\underbrace{dxdx...dx}_{n}\equiv\int x^{-n}d^n x=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\ln|x|+\sum_{i=0}^{n-1}C_i x^i. \tag{1.13}$$

Коэффициенты в данной формуле совпадают с вычетами (1.10), но получены они разными независимыми способами, что говорит о глубокой связи между ними.

Если при интегрировании в логарифмическом случае применить напрямую оператор Адамара дробного интегрирования (1.7), то получим бесконечность в полюсе гамма-функции $d^1x:x^{-1}=\Gamma(0)\Gamma^{-1}(1)x^0+a_0=\infty+a_0=\infty.$

Важно, что оператор Адамара во всех логарифмических случаях не даёт формулу стандартного анализа, а из формулы (1.13) в частном случае n = 1, получим с формулу стандартного анализа (1.2).

Но случаями, когда $d^nx:x^{-n}$ ($n\in\mathbb{N}$), логарифмические случаи полностью не исчерпываются. Они также возникают, когда интегралы целочисленных порядков m берутся от степенных функций с целочисленным отрицательным показателем $-n$ и $m>n$. Эти случаи полностью решаются в рамках стандартного анализа. Рассмотрим их.

$$d^mx:x^{-n}=d^{m-n}x:d^nx:x^{-n}=d^{m-n}x:\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\ln|x|\right)=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}d^{m-n}x:\ln|x|;\, m>n;\, m,n\in\mathbb{N}. \quad (1.14)$$

В данной формуле необходимо ещё найти интегралы порядков $m-n$:

$$d^{m-n}x:\ln|x|.$$

В частных случаях порядков интегрирования 1, 2 и 3 эти интегралы будут

$$d^1x:\ln|x|=x\ln|x|-x; \quad (1.15)$$

$$d^2x:\ln|x|=\frac{1}{2}x^2\ln|x|-\frac{1}{2^2}x^2-\frac{1}{2}x^2; \quad (1.16)$$

$$d^3x:\ln|x|=\frac{1}{2\cdot3}x^3\ln|x|-\frac{1}{3^2}x^3-\frac{1}{2^2\cdot3}x^3-\frac{1}{2\cdot3}x^3; \quad (1.17)$$

$$d^4x:\ln|x|=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4\ln|x|-\frac{1}{4^2}x^4-\frac{1}{3^2\cdot4}x^4-\frac{1}{2^2\cdot3\cdot4}x^4-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4. \quad (1.18)$$

Общую формулу для k интегрирований первого порядка натурального логарифма легко получить:

$$d^k x : \ln|x| = \frac{1}{k!} x^k \left(\ln|x| - \sum_{l=1}^{k} \frac{(k-l)!}{k-l+1} \right); k, l \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Подставив (1.14) в (1.19), получим общую формулу интегрирования для рассматриваемого случая $m > n$; $n, m, l \in \mathbb{N}$:

$$d^m x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!} x^{m-n} \left(\ln|x| - \sum_{l=1}^{m-n} \frac{(m-n-l)!}{m-n-l+1} \right). \tag{1.20}$$

Для частного случая, когда $m = -n$ будет справедлива формула интегрирования (1.13).

В случае, когда интегралы целочисленных порядков m берутся от степенных функций с целочисленным отрицательным показателем $-n$, но $m < n$, тогда задача полностью решается при интегрировании в рамках стандартного анализа

$$\begin{aligned} d^m x : x^{-n} &= \frac{(-1)^m}{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)} x^{m-n} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i = \\ &= \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Получить данную формулу невозможно, если использовать оператор Адамара напрямую, ввиду того что и в числителе, и в знаменателе (1.7) аргумент гамма-функции имеет целое отрицательное или нулевое значения, в которых у гамма-функции находятся полюса. Если в этом случае гамма-функции заменить вычетами в полюсах, как было сделано в формулах (1.11) и (1.12), то опять получим формулу (1.21):

$$d^m x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) =$$

$$= \frac{\underset{1-n}{\operatorname{Res}}\ \Gamma(-n+1)}{\underset{1-n+m}{\operatorname{Res}} \Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-m-1)!}{(n-1)!(-1)^{n-m-1}} x^{m-n} + C_m(x) =$$

$$= \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x); m < n; m, n \in \mathbb{N}.$$

В данном случае снова оказалось, что формула интегрирования стандартного анализа (1.21) совпадает с формулой интегрирования полученной из оператора Адамара (1.7) с помощью замены полюсов вычетами в операторе Адамара, что опять говорит в пользу предложенного способа решения проблем с полюсами.

При целочисленных порядках дифференцирования также возможно появление полюсов, которые устраняются аналогично:

$$d^{-m} x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n-m+1)} x^{-m-n} = \frac{\underset{1-n}{\operatorname{Res}}\ \Gamma(-n+1))}{\underset{1-n+m}{\operatorname{Res}} \Gamma(-n-m+1)} x^{-n-m} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n+m-1)!}{(n-1)!(-1)^{n+m-1}} x^{m-n} = \frac{(-1)^{-m}(n+m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n}; \qquad (1.22)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, ...; m \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим ещё случаи, когда операторы Адамара неприменимы. Если порядок оператора Адамара s и показатель степени степенной функции α нецелочисленные, но находятся в соотношении $\alpha - s + 1 = 0, -1, -2, -3, \ldots$ для интегрирования и $\alpha + s + 1 = 0, -1, -2, -3, \ldots$ для дифференцирования, то в знаменателе операторов Адамара гамма-функции будут иметь полюса, а значения интегралов и производных будут обращаться в ноль. Трудности с полюсами в этом случае можно обойти, заменив гамма-функции в полюсах их вычетами в тех же полюсах, как это делалось раньше.

Тогда вычеты в случае дифференцирования будут

$$\underset{\alpha - s = -1-m}{\operatorname{Res}}\ \Gamma(\alpha) = \frac{(-1)^{s-\alpha-1}}{(s-\alpha-1)!}; s - \alpha = 1, 2, 3, 4, ...$$

Подставив данные вычеты в коэффициент оператора Адамара (1.6), получим

$$\frac{d^s x}{dx^s} x^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\operatorname*{Res}_{\alpha-s=-1-m} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-s} = (-1)^{s-\alpha-1}(s-\alpha-1)!\Gamma(\alpha+1)x^{\alpha-s}; \tag{1.23}$$
$$s>0; \alpha, s \notin \mathbb{N}; \alpha - s + 1 = 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Вычеты для оператора интегрирования будут

$$\operatorname*{Res}_{\alpha+s=-1-m} \Gamma(\alpha) = \frac{(-1)^{-s-\alpha-1}}{(-s-\alpha-1)!}; -s-\alpha = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Подставив эти вычеты в оператор Адамара (1.7) и получим

$$\int x^\alpha d^s x = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\operatorname*{Res}_{\alpha+s=-1-m} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha+s} + C_s(x) =$$
$$= (-1)^{-s-\alpha-1}(-s-\alpha-1)!\Gamma(\alpha+1)x^{\alpha+s} + C_s(x); \tag{1.24}$$
$$s>0; \alpha<0; \alpha, s \notin \mathbb{N}; \alpha + s + 1 = 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Операции дробного интегрирования и дробного дифференцирования являются обратными по отношению друг к другу. Поэтому в дальнейшем для удобства эти операции будем рассматривать с единых позиций. Для этого будем использовать похожие между собой обозначения производных и интегралов дробных порядков

$$\begin{cases} d^s x : f(x) \equiv \left(\dfrac{d}{dx}\right)^s f(x) \equiv \dfrac{d^s}{dx^s} f(x) = f^{(s)}(x) = \mathrm{F}^{(-s)}(x); \\ d^0 x : f(x) \equiv f(x); \\ d^{-s} x : f(x) \equiv \displaystyle\int f(x) dx^s = \mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x) = f^{(-s)}(x) + C_s(x). \end{cases} \tag{1.25}$$

Здесь $d^s x$ – оператор дробного интегродифференцирования порядка s; двоеточие «:» носит вспомогательный характер как разделитель между операторами и объектами, на которые они действуют; $f^{(s)}(x)$ и $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ соответственно производная и первообразная порядков s.

Из данных обозначений следует, что производная порядка s является первообразной порядка $-s$ и, наоборот, производная порядка $-s$ интерпретируется как первообразная порядка s:

$$f^{(s)}(x) = \mathrm{F}^{(-s)}(x),\ f^{(-s)}(x) = \mathrm{F}^{(s)}(x). \tag{1.26}$$

Будем также считать справедливым тождество

$$d^s x \equiv (dx)^s,$$

или более общее выражение

$$d^{\alpha s} x \equiv (d^\alpha x)^s \equiv (d^s x)^\alpha \equiv (dx)^{\alpha s}.$$

В новых обозначениях производная порядка s от полинома интегрирования порядка s

$$d^{-s} x : C_s(x) = 0;\ s > 0. \tag{1.27}$$

Если порядка оператора дифференцирования не равен порядку полинома интегрирования, то в общем случае выполняется неравенство

$$d^{-s} x : C_\alpha(x) \neq 0;\ s \neq \alpha;\ \alpha > 0.$$

Для случая дробного дифференцирования полином интегрирования равен нулю:

$$C_{-s}(x) = 0. \tag{1.28}$$

Для оператора нулевого порядка ($s = 0$) будем иметь важный частный случай – единичный оператор $d^0 x = \mathbf{1}$:

$$d^0 x : x^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+0+1)} x^{\alpha+0} + C_0(x) = \mathbf{1} : x^{\alpha+0} + C_0(x) = x^\alpha + C_0(x).$$

Полином интегрирования порядка 0 равен нулю:

$$C_0(x) = 0. \tag{1.29}$$

Окончательно получим, что единичный оператор переводит любую функцию $f(x)$ саму в себя:

$$d^0 x : f(x) \equiv \mathbf{1} : f(x) = f(x). \tag{1.30}$$

§ 2. *d*-оператор дробного интегрирования и дробного дифференцирования

Объединяя полученные результаты, введём оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования.

Определение. Оператор $d^{\pm s}x$ порядка $s \geq 0$ будем называть *d-оператором*, действующим над множеством степенных функций x^q; $s, x, q \in \mathbb{R}$; $|s|, |q| = \text{const} < \infty$:

$$\begin{cases} d^{-s}x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)} x^{q-s}; \\ \quad q \neq -1, -2, -3, -4, \ldots; q-s+1 \neq 0, -1, -2, -3, \ldots; s, q \in \mathbb{R}; \\ d^{s}x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)} x^{q+s} + C_s(x); \\ \quad q \neq -1, -2, -3, -4, \ldots; q+s+1 \neq 0, -1, -2, -3, \ldots; s, q \in \mathbb{R}; \\ d^{-s}x : x^q = (-1)^{s-q-1}(s-q-1)!\Gamma(q+1)x^{q-s}; \\ \quad s, q \in \mathbb{R}; q, s \notin \mathbb{N}; q-s+1 = 0, -1, -2, -3, \ldots; \\ d^{s}x : x^q = (-1)^{-s-q-1}(-s-q-1)!\Gamma(q+1)x^{q+s} + C_s(x); \\ \quad q < 0; s, q \in \mathbb{R}; q, s \notin \mathbb{N}; q+s+1 = 0, -1, -2, -3, \ldots; \\ d^{-s}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(-s-n+1)} x^{-n-s}; n \in \mathbb{N}; s \neq 0, 1, 2, \ldots; \\ d^{s}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(s-n+1)} x^{-n+s} + C_s(x); n \in \mathbb{N}; s \neq 0, 1, 2, \ldots; \\ d^{-m}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^m (n+m-1)!}{(n-1)!} x^{-m-n}; n = 0, 1, 2, 3\ldots; m \in \mathbb{N}; \\ d^{m}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x); m < n; m, n \in \mathbb{N}; \\ d^{m}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!} x^{m-n} \left(\ln|x| - \sum_{l=1}^{m-n} \dfrac{(m-n-l)!}{m-n-l+1} \right) + C_m(x); \\ \quad m \geq n; m, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $C_s(x)$ и $C_n(x)$ – соответственно полиномы интегрирования дробного порядка s и целочисленного порядка n.

Первое равенство задаёт оператор дробного дифференцирования порядка s при отсутствии полюсов.

Второе равенство задаёт оператор дробного интегрирования порядка s при отсутствии полюсов.

Третье и четвёртое равенства: даётся способ дифференцирования и интегрирования «в полюсах», когда порядок оператора и показатель степени степенной функции нецелочисленные.

Пятое и шестое равенства: даётся способ дифференцирования и интегрирования «в полюсах», когда порядок оператора и показатель степени степенной функции целочисленные.

Седьмое равенство представляет дифференцирование «в полюсах», когда порядки дифференцирования имеют целочисленные значения m, а показатели степенных функций равны целым отрицательным числам $-n$.

Восьмое равенство представляет другие частные случаи интегрирования «в полюсах», когда порядки интегрирования имеют целочисленные значения m, а показатели степенных функций равны целым отрицательным числам $-n$, причём $m < n$. Такие случаи будем называть *дологарифмическими*.

Девятое равенство определяет интегрирование «в полюсах» аналогично восьмому равенству, только $m \geq n$. Такие случаи будем называть *логарифмическими*. Целое число $m - n + 1$ будем называть *порядком логарифма*.

Из первого равенства следует, что оператор нулевого порядка ($s = 0$) является единичным, переводящим степенную функцию саму в себя:

$$d^{\,0}x{:}x^q \equiv \mathbf{1}{:}\; x^q = x^q.$$

В рассматриваемом операторе учтены все возможные особые случаи дифференцирования и интегрирования. Это делает d-оператор очень привлекательным для построения дробного анализа полноценного, как стандартный анализ, который сам является частным случаем данного дробного анализа порядка 1.

Рассмотрим некоторые соотношения между операторами разных порядков.

Определение. Операторы дифференцирования $d^{-s}x$ и интегрирования $d^q x$ будем называть *взаимно обратными*, если их порядки равны, $s = q$.

Взаимно обратные операторы образуют пару, а операции интегрирования и дифференцирования, проводимые взаимно обратными операторами, будем называть *взаимно обратными операциями*.

Очевидно, что оператор нулевого порядка d^0x является обратным для самого себя, или *самообратным*.

В частности, справедливо равенство

$$d^{-s}x : d^s x = d^0 x = \mathbf{1}.$$

Заметим, что другая последовательность действия операторов $d^s x : d^{-s} x$ не будет коммутативной последовательности $d^{-s}x : d^s x$.

В связи с тем, что в рассматриваемых задачах с d-оператором могут участвовать операторы с различными сочетаниями порядков интегродифференцирования, можно ввести ряд понятий.

Определение. Если в рассматриваемых задачах дробного анализа участвуют только обратные друг другу операторы порядка s (или хотя бы один из них), то будем говорить о *ветви дробного анализа порядка* s.

Определение. В задачах, в которых участвуют дробные операторы с разными порядками, относящиеся к нескольким ветвям $\psi > 1$ дробного анализа, тогда будем говорить о *смешанном дробном анализе* с ψ ветвями.

Укажем на некоторые важные ветви дробного анализа.

Порядки d-операторов могут иметь как целочисленные, так и нецелочисленные значения. Нецелочисленные порядки, в свою очередь могут быть как рациональными, так и иррациональными.

Определение. Если порядки дифференцирования и интегрирования в рассматриваемой ветви дробного анализа будут принадлежать только множеству натуральных чисел, $s \in \mathbb{N}$, то такой анализ будем называть *целочисленным дробным анализом*.

Ветви целочисленного анализа могут принимать как чётные, так и нечётные значения порядков.

Важными случаями дробного анализа являются ветви с рациональными порядками, $s \in \mathbb{Q}$.

Определение. d-операторы $d^s x$, у которых порядки являются рациональными числами, $s \in \mathbb{Q}$, будем называть *рациональными дробными операторами*.

Определение. Если порядки дифференцирования и интегрирования в рассматриваемой ветви дробного анализа будут принадлежать только множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то такой анализ будем называть *рациональным дробным анализом*.

Интересными и наиболее простыми случаями рационального анализа представляются ветви, в которых порядки операторов обратно пропорциональны натуральным числам: $s = 1/\lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$. В данном случае знаменатели λ в значениях порядков операторов являются основным параметром соответствующих ветвей дробного анализа.

Общими и более сложными случаями рационального анализа являются ветви, в которых порядки операторов можно представить как отношение натуральных чисел: $s = \chi/\lambda$, χ; $\lambda \in \mathbb{N}$.

Для количества рациональных ветвей будет справедлива следующая теорема.

Теорема. Множество ветвей рационального дробного анализа имеет мощность бесконечного счётного множества.

Доказательство данной теоремы очевидно. Оно основано на том, что каждому рациональному числу соответствует одна ветвь анализа, а мощность множества рациональных чисел равна мощности счётного множества [10].

Кроме указанных ветвей возможны случаи иррациональных порядков d-операторов s.

Определение. d-операторы $d^s x$, у которых порядки s являются иррациональными числами, будем называть *иррациональными дробными операторами*.

Определение. Ветви дробного анализа, в котором действуют иррациональные дробные d-операторы, будем называть *иррациональным ветвями* дробного анализа.

Иррациональные ветви дробного анализа представляются более сложными для исследования, чем рациональные ветви.

Важно также обращать внимание на численные значения порядков операторов по сравнению с единицей, а именно, больше или меньше единицы порядок оператора, $s > 1$ или $s < 1$.

Определение. Два оператора порядков s и $1/q$ называются *обратными по порядку*, если произведение их порядков даёт единицу $sq^{-1} = 1$.

Каждый оператор порядка s имеет *обратный по порядку оператор* со значением порядка $1/s$.

Операторы традиционного анализа $d^{-1}x$ и d^1x являются обратными по порядку сами для себя.

Любая пара взаимно обратных по порядку операторов, в зависимости от знака перед указателем порядка, являются одновременно операторами дифференцирования или операторами интегрирования.

Определение. Для оператора $d^s x$ имеется противоположный $-d^s x$, такой, что в сумме они дают нулевой оператор

$$d^s x + (-d^s x) = d^s x - d^s x = \mathbf{0}.$$

Нулевой оператор не является d-оператором.

Оператор (2.1) записан в развёрнутом виде, но его можно выразить более компактно, если производные и интегралы для рассматриваемых случаев записать одним равенством

$$\begin{cases} d^{\pm s}x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q \pm s+1)} x^{q\pm s} + C_s(x); \\ \quad q \neq -1, -2, -3, -4, \ldots; q \pm s + 1 \neq 0, -1, -2, -3, \ldots; \\ d^{\pm s}x : x^q = (-1)^{s-q-1} (\mp s - q - 1)! \Gamma(q+1) x^{q \pm s}, \\ \quad q, s \neq -1, -2, -3, -4, \ldots; q \pm s + 1 = 0, -1, -2, -3, \ldots; \\ d^{\pm s}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(\pm s - n + 1)} x^{-n\pm s} + C_s(x); n \in \mathbb{N}; s \notin \mathbb{N}; \\ d^{\pm m}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^m (n \mp m + 1)!}{(n-1)!} x^{\pm m - n} + C_m(x); m < n; m, n \in \mathbb{N}; \\ d^m x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!} x^{m-n} \left(\ln|x| - \sum\limits_{l=1}^{m-n} \dfrac{(m-n-l)!}{m-n-l+1} \right) + C_m(x); \\ \quad m \geq n; m, n \in \mathbb{N}; \\ C_{-s}(x) = C_0(x) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Последнее шестое, равенство в (2.2) явно указывает на то, что полиномы интегрирования в случае дифференцирования (порядки $-s$) и в случае нулевого порядка (единичный оператор) всегда равны нулю.

d-оператор в виде (2.2) выглядит всё ещё громоздко. Выразит его в более компактном виде можно, если не указывать все возможные случаи с полюсами, а просто записать правило замены полюсов на все возможные случаи:

$$\begin{cases} d^{-s}x:x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}x^{q-s}; \\ \quad q \neq -1,-2,-3,-4,...;\, q-s+1 \neq 0,-1,-2,-3,...;\, s,q \in \mathbb{R}; \\ d^{s}x:x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}x^{q+s} + C_s(x); \\ \quad q \neq -1,-2,-3,-4,...;\, q+s+1 \neq 0,-1,-2,-3,...;\, s,q \in \mathbb{R}; \\ \Gamma(q \vee / \wedge q \pm s = -m) \to \underset{q \wedge / \vee q \pm s = -m}{\operatorname{Res}} \Gamma(q \vee / \wedge q \pm s) = \dfrac{(-1)^m}{m!};\, m \in \mathbb{N}; \\ d^m x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!}x^{m-n}\left(\ln|x| - \sum\limits_{l=1}^{m-n}\dfrac{(m-n-l)!}{m-n-l+1}\right) + C_m(x); \\ \quad m \geq n;\, m,n \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Первые два равенства определяют дробное дифференцирование и интегрирование, когда нет особых случаев, и соответствуют первым двум равенствам в формуле (2.1).

Третье соотношение определяет способ замены бесконечности в полюсах на вычет в данных полюсах. Запись $q \vee / \wedge q \pm s = -m$ формально означает, что если значение переменной q и/или $q \pm s$ под знаком гамма-функции будет равно целому отрицательному числу, то в соответствующем случае у гамма-функций возникает полюс или полюса будут в обоих случаях. Тогда гамма-функции с аргументами, попавшими в полюса, необходимо заменить вычетами в соответствующих полюсах гамма-функций.

Последнее соотношение определяет интегрирование «в полюсах» и все возможные логарифмические случаи, что соответствует последнему равенству (2.1).

Предложенный d-оператор является существенно переработанным оператором Адамара, введённым для обобщения операций дифференцирования и интегрирования степенных рядов на случай дробных порядков [6], что соответствует первому равенству в (2.1). Позже оператор Адамара был обобщён на случай дробного интегрирования [8] – второму равенству в (2.1).

В операторе Адамара отсутствует возможность работать в полюсах и не учтены логарифмические случаи, что, видимо, не позволило положить его в основу построения дробного анализа, несмотря на его простоту и удобство для работы.

Рассматриваемый d-оператор в виде (2.1) по сути является таблицей дробных производных и дробных интегралов для степенных функций. В d-операторе учтены все возможные особые случаи дифференцирования и интегрирования степенных функций. Возникающие полюса в гамма-функциях заменяются вычетами в соответствующих полюсах. Также учтены логарифмические случаи при интегрировании.

Благодаря перечисленным качествам d-оператор является привлекательным для систематического и непротиворечивого построения полноценного дробного анализа.

§ 3. Производные дробного порядка

Производная дробного порядка от константы

В общем случае в дробном анализе производная константы не равна нулю. Константу можно представить как полином нулевой степени, или как степенную функцию, с показателем степени, равным нулю Cx^0, где C – вещественное число. Тогда производная константы будет:

$$d^{-s}x:Cx^0 = C(-s\Gamma(-s))^{-1}x^{-s}, C\in\mathbb{R}. \qquad (3.1)$$

Вывод данной формулы:

$$d^{-s}x:C = d^{-s}x:Cx^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-s)}Cx^{0-s} = \frac{0!}{\Gamma(1-s)}Cx^{-s} = \frac{Cx^{-s}}{\Gamma(1-s)} = \frac{Cx^{-s}}{-s\Gamma(-s)}.$$

Здесь использовались формулы $\Gamma(q + 1) = q\Gamma(q)$ и $\Gamma(1) = 0! = 1$.

Частные случаи формулы (3.1):

1) в случае, когда $C = 0$, при любых порядках дробного оператора будет

$$d^s x: 0 = 0;$$

2) дробная производная порядка s от единицы будет

$$d^{-s}x:1 = d^{-s}x:1x^0 = \frac{1}{-s\Gamma(-s)}x^{-s};$$

3) в случае, когда порядок оператора дифференцирования является целым числом $n = -1, -2, -3, \ldots$, производная константы будет давать ноль:

$$d^{-n}x : Cx^0 = C\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-n)}x^{0-n} = C\frac{0!}{\infty}x^{-n} = C\frac{1}{\infty}x^{-n} = 0,$$

т. к. гамма-функция для указанных значений n имеет полюсы, $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \Gamma(-2) = \Gamma(-3) = \ldots = \infty$;

4) в частном случае производной половинного порядка ($s = 1/2$) от константы будет

$$d^{-1/2}x : Cx^0 = \frac{C\Gamma(1)}{\Gamma(1-1/2)}x^{0-1/2} = C\frac{0!}{\Gamma(1/2)}x^{-1/2} =$$
$$= \frac{C}{\sqrt{\pi x}} = \frac{C}{\sqrt{\pi}}x^{-1/2} = C(\pi x)^{-1/2} \neq 0.$$

Производная дробного порядка от степенной функции

Рассмотрим некоторые важные случаи соотношений значений порядков операторов и показателей степенных функций, когда при дробном дифференцировании получаются константы.

В случае, когда порядок оператора дифференцирования и показатель степени функции равны и имеют порядок s, тогда операция дифференцирования будет давать константу

$$d^{-s}x : x^s = s\Gamma(s) = \mathrm{const}. \tag{3.2}$$

Это легко показать:

$$d^{-s}x : x^s = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-s)}x^{s-s} = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(1)}x^{s-s} = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(1)}x^0 =$$
$$= \Gamma(s+1)x^0 = \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \mathrm{const}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда при операции дробного дифференцирования степенной функции будет получаться константа.

Когда порядок оператора дифференцирования и показатель степени степенной функции являются целым числом $n = 1, 2, 3, \ldots$, производная будет давать константу

$$d^{-n}x : Cx^{n} = C\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-n)}x^{n-n} = C\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)}x^{0} = Cn! = \text{const}.$$

$$d^{-n}x : Cx^{n} = C\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-n)}x^{n-n} = C\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)}x^{0} = Cn! = \text{const}. \tag{3.3}$$

Для случая, когда $n = 1$, получим формулу из стандартного анализа:

$$d^{-1}x : Cx^{1} = C\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-1)}x^{1-1} = C\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}x^{0} = C1! = C = \text{const}.$$

Когда порядок дифференцирования меньше показателя степенной функции, $n < m$ будет

$$d^{-n}x : Cx^{m} = C\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-n)}x^{m-n} = Cm(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Если порядок дифференцирования больше показателя степенной функции, $n > m$, получим

$$d^{-n}x : Cx^{m} = C\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-n)}x^{m-n} = C\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(\infty)}x^{m-n} = 0;\, n > m.$$

Для случая, когда производная половинного порядка ($s = 1/2$), а показатель степени функции будут $q = 1/2$

$$d^{-1/2}x : x^{1/2} = \frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/2+1-1/2)}x^{1/2-1/2} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)}x^{0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \text{const}.$$

Здесь было использовано равенство $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$.

Производная дробного порядка $1/\lambda$, $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{N}$, а показатель степени степенной функции тоже равен $1/\lambda$

$$d^{-1/\lambda}x : x^{1/\lambda} = \frac{\Gamma(1/\lambda+1)}{\Gamma(1/\lambda+1-1/\lambda)}x^{1/\lambda-1/\lambda} = \frac{\Gamma((\lambda+1)/\lambda)}{\Gamma(1)}x^{0} = \frac{\Gamma(1/\lambda)}{\lambda} = \text{const}.$$

Для любого рационального порядка β/λ оператора дифференцирования $\lambda > 0$, β, $\lambda \in \mathbb{N}$ и показателя степени степенной функции равного β/λ

$$d^{-\beta/\lambda}x : x^{\beta/\lambda} = \frac{\Gamma(\beta/\lambda+1)}{\Gamma(\beta/\lambda+1-\beta/\lambda)}x^{\beta/\lambda-\beta/\lambda} =$$
$$= \frac{\Gamma((\beta/\lambda+1)}{\Gamma(1)}x^0 = \frac{\beta}{\lambda}\frac{\Gamma((\beta/\lambda)}{\Gamma(1)}x^0 = \frac{\beta\Gamma(\beta/\lambda)}{\lambda} = \text{const}.$$

§ 4. Первообразные и интегралы дробных порядков

Интеграл дробного порядка от степенных функций и полиномы интегрирования

Найдём интеграл порядка s от константы β:

$$d^s x : \beta = \frac{\beta}{s\Gamma(s)}x^s + C_s(x). \tag{4.1}$$

Здесь $C_s(x) \neq 0$ – полином интегрирования, упоминавшийся ранее, он появляется как слагаемое при интегрировании функций и является обобщением константы интегрирования в стандартном анализе.

Вывод формулы (4.1):

$$d^s x : \beta = d^s x : \beta x^0 = \beta\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+s)}x^{0+s} + C_s(x) =$$
$$= \beta\frac{0!}{s\Gamma(s)}x^s + C_s(x) = \frac{\beta}{s\Gamma(s)}x^s + C_s(x).$$

Рассмотрим подробно свойства полиномов интегрирования.

Определение. Функцию $C_s(x)$ будем называть *полиномом интегрирования порядка* s для оператора интегрирования $d^s x$, если

$$d^{-s}x : C_s(x) = 0. \tag{4.2}$$

Однородность дифференцирования полиномов интегрирования:

$$d^{-s}x : aC_s(x) = ad^{-s}x : C_s(x) = 0.$$

Аддитивность дифференцирования полиномов интегрирования:

$$d^{-s}x : (C_s(x) + G_s(x)) = d^{-s}x : C_s(x) + d^{-s}x : G_s(x) = 0.$$

Однородность и аддитивность в совокупности дают свойство *линейности дифференцирования полиномов интегрирования*. Из чего следует, что если полином интегрирования порядка s умножить на константу или сложить с полиномом интегрирования того же порядка, то опять получим полиномы интегрирования порядка s.

Можно показать, что интеграл дробного порядка s от нуля будет равен полиному интегрирования порядка s

$$d^{s}x : 0 = C_s(x).$$

Это легко показать, если на данное равенство подействовать оператором дифференцирования слева $d^{-s}x : d^{s}x : 0 = d^{0}x : 0 = \mathbf{1} : 0 = 0$ и справа $d^{-s}x : C_s(x) = 0$, что и доказывает равенство.

Ноль является полиномом интегрирования для операторов дробного дифференцирования любого порядка, или

$$d^{-s}x : 0 = 0.$$

Из рассмотренных свойств полиномов интегрирования можно сформулировать следующие утверждения.

Теорема. Множество всех операторов интегрирования относительно операций умножения на число и сложения образуют линейное пространство.

Теорема. Множество всех операторов интегрирования относительно операции сложения образует коммутативную (абелеву) группу.

Найдём полином интегрирования $C_s(x)$ порядка s, предполагая, что он является степенным рядом или его остатком.

Для этого найдём показатели степеней степенных функций в слагаемых полинома интегрирования $C_s(x)$ вещественного порядка s, для которого должно выполняться равенство

$$d^{-s}x : x^{q} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-s)}x^{q-s} = 0.$$

Выполнение этого равенства возможно при соблюдении двух условий: $\Gamma(q + 1) \neq 0$ и $\Gamma(q + 1 - s) = \infty$. Первое выполняется при $q \neq -1, -2, -3, -4, \ldots$

Для выполнения второго условия необходимо, чтобы выполнялось равенство $q + 1 - s = 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$

Данные равенства говорят о том, что суммы показателей степеней должны совпадать с полюсами гамма-функции. Тогда получим $q = -1 + s, -2 + s, -3 + s, -4 + s, \ldots = -n + s$.

Окончательно полином интегрирования $C_s(x)$ для произвольных вещественных порядков s будет [8]

$$C_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n+s} = a_1 x^{-1+s} + a_2 x^{-2+s} + a_3 x^{-3+s} + a_4 x^{-4+s} + \ldots \qquad (4.3)$$

$C_s(x)$ можно переписать иначе:

$$C_s(x) = x^s \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n} \right) = x^s (a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + a_4 x^{-4} + \ldots). \qquad (4.4)$$

В полиномах интегрирования $C_s(x)$ соседние слагаемые имеют показатели степеней, которые отличаются на единицу, или с *единичным шагом*.

У полиномов дробного интегрирования $C_s(x)$ бесконечное счётное множество констант интегрирования $a_1, a_2, a_3, \ldots$, которые являются вещественными (или комплексными) числами.

Определение. Полиномы интегрирования, у которых коэффициенты a_i в общем случае различны, будем называть *неоднородными полиномами интегрирования*.

Определение. Полиномы интегрирования $ac_s(x)$, у которых все коэффициенты равны некоторому числу a ($a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a$), будем называть *однородными полиномами интегрирования*, а число a – *коэффициентом однородного полинома интегрирования*:

$$ac_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a x^{-n+s} = a \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n+s} = a x^{-1+s} + a x^{-2+s} + a x^{-3+s} + a x^{-4+s} + \ldots =$$
$$= a(x^{-1+s} + x^{-2+s} + x^{-3+s} + x^{-4+s} + \ldots) = a x^s (x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + \ldots).$$

Определение. Однородные полиномы интегрирования, с коэффициентом $a = 1$, будем называть *единичными полиномами интегрирования*.

Единичный полином интегрирования будем обозначать $c_s(x)$, тогда

$$c_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n+s} = x^{-1+s} + x^{-2+s} + x^{-3+s} + x^{-4+s} + \ldots, \qquad (4.5)$$

или его можно записать в другом виде:

$$c_s(x) = x^s \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} \right) = x^s (x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + \ldots). \qquad (4.6)$$

Рассмотрим полиномы интегрирования для операторов интегрирования целочисленных порядков $C_m(x)$. Тогда производная порядка m от $C_m(x)$ должна давать ноль, что является частным случаем уравнения (4.2):

$$d^{-m}x : C_m(x) = 0. \qquad (4.7)$$

Найдём соотношения для порядков операторов интегрирования и показателей степеней степенных функций полинома интегрирования.

Очевидно, что для произвольных целочисленных порядков операторов дифференцирования $m = 1, 2, 3, \ldots$ и целочисленных показателей степеней степенных функций с показателями степеней $k \geq 0$ и $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ будут выполняться равенства

$$d^{-m}x : x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)} x^{k-m} = 0.$$

Второе условие связано с попаданием в полюса гамма-функции. Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство $k + 1 - m = 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$, которое можно переписать так $k = -1 + m, -2 + m, -3 + m, -4 + m, \ldots$

В случае, когда выполняется условие $k + 1 - m \leq 0$ или когда $k \leq m - 1$, тогда значения переменной в этих точках соответствуют полюсам гамма-функции, и поэтому она обращается в бесконечность. Это значит, что для случаев целочисленных порядков показателей операторов дифференцирования полиномы интегрирования будут обрываться, когда степени будут ограничиваться целочисленными значениями при $k \le m - 1, m - 2, m - 3, \dots, 2, 1, 0$.

Окончательно получим, что для любого оператора целочисленного порядка $d^{-m}x$ полиномы интегрирования $C_m(x)$ будут иметь конечное число слагаемых, равное порядку оператора интегрирования m:

$$C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{m-2} x^{m-2} + a_{m-1} x^{m-1}, \quad (4.8)$$

что совпадает с результатом полученным ранее в стандартном анализе (1.4).

В (4.8) даны m констант интегрирования $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, a_{m-1} \in \mathbb{R}$.

В случае стандартного анализа полином интегрирования будет константой $C_1(x) = a_0 = \text{const}$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

В этом легко убедиться:

$$d^{-1}x : a = d^{-1}x : ax^0 = a\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1-1)}x^{0-1} = a\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)}x^{-1} = a\frac{\Gamma(1)}{\infty}x^{-1} = 0\,.$$

Для порядка интегрирования $s = 2$ полином интегрирования будет

$$C_2(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k = a_0 + a_1 x\,.$$

Покажем, что для него выполняется условие (4.7):

$$d^{-2}x : (a_0 + a_1 x) = a_0\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1-2)}x^{0-2} + a_1\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(1+1-2)}x^{1-2} =$$
$$= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1)}x^{-2} + \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)}x^{-1} = \frac{\Gamma(1)}{\infty}x^{-2} + \frac{\Gamma(1)}{\infty}x^{-1} = 0 + 0 = 0.$$

Теорема. Производные степени n от полинома интегрирования $C_m(x)$ будут давать ноль, если n и m целые положительные числа, для которых выполняется неравенство $n > m$:

$$d^{-n}x : C_m(x) = 0; \, n > m.$$

В неоднородных полиномах интегрирования с нецелым порядком появляется бесконечное счётное множество констант интегрирования, которые в различных задачах необходимо находить из каких то дополнительных условий. Ряд $C_s(x)$ функциональный и может быть расходящимся или сходящимся для разных значений переменной x, при этом скорости сходимости и расходимости могут быть разными. В зависимости от скорости сходимости ряда и от условий задачи можно ограничиваться тем или иным числом первых элементов ряда $C_s(x)$.

В случае нецелочисленных порядков s члены ряда интегральных полиномов $C_s(x)$ обращаются в бесконечность в точке $x = 1$, область определения его будет от 1 до $+\infty$.

Пример. Неопределённый интеграл порядка 1/2 от константы:

$$d^{1/2}x : C = C\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+1/2)}x^{0+1/2} + C_{1/2}(x) =$$

$$= C\frac{0!}{\Gamma(3/2)}x^{1/2} + C_{1/2}(x) = C\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2} + C_{1/2}(x).$$

Полином интегрирования порядка 2/5 будет

$$C_{2/5}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n+2/5} = a_1x^{-3/5} + a_2x^{-8/5} + a_3x^{-13/5} + a_4x^{-18/5} + \ldots \qquad (4.9)$$

Ряд единичного однородного полинома интегрирования $c_{2/5}(x)$ будет

$$c_{2/5}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n+2/5} = x^{-3/5} + x^{-8/5} + x^{-13/5} + x^{-18/5} + \ldots$$

На рис. 1 для примера, изображены графики единичных однородных полиномов интегрирования нецелочисленных порядков ($c_{2/5}(x)$, $c_{7/8}(x)$, $c_{3/2}(x)$, $c_{5/2}(x)$, $c_{17/4}(x)$) и целочисленных порядков ($c_4(x)$, $c_5(x)$).

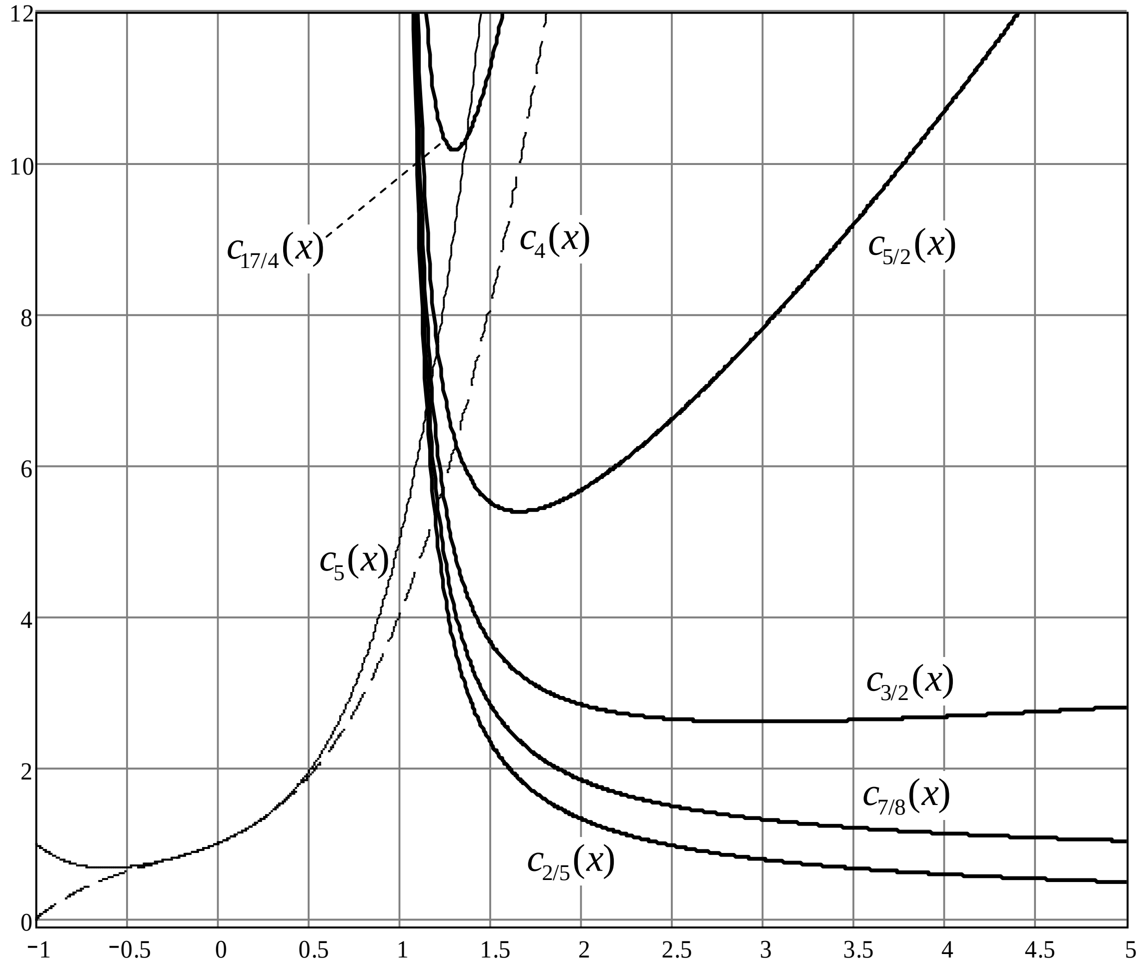


Рис. 1. Единичные однородные полиномы интегрирования нецелочисленных порядков ($c_{2/5}(x)$, $c_{7/8}(x)$, $c_{3/2}(x)$, $c_{5/2}(x)$, $c_{17/4}(x)$) и целочисленных порядков ($c_4(x)$, $c_5(x)$)

Неопределённый интеграл дробного порядка и его свойства

Введём понятие первообразной и неопределённого интеграла любого вещественного порядка s функции $f(x)$.

Определение. Сумма функций $\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)$ называется первообразной порядка s функции $f(x)$, если производная порядка s функции $\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)$ равна функции $f(x)$:

$$d^{-s}x : (\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)) = d^{-s}x : \mathrm{F}^{(s)}(x) + d^{-s}x : C_s(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Здесь $C_s(x)$ – полином интегрирования порядка s. Очевидно, что функция $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ тоже будет первообразной порядка s функции $f(x)$.

Определение. Первообразную $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ порядка s функции $f(x)$ будем называть *базовой первообразной* $f(x)$.

Первообразная функции $f(x)$ является базовой, когда полином интегрирования в первообразной будет равен нулю $C_s(x) = 0$. Множество всех первообразных данного порядка бесконечно, а базовая первообразная одна. Все различные первообразные порядка s функции $f(x)$ отличаются полиномами интегрирования.

Определение. Неопределённый интеграл дробного порядка s функции $f(x)$ является множеством всех первообразных порядка s функции $f(x)$.

Справедливы следующие стандартные свойства неопределённого дробного интеграла: однородность и аддитивность.

1) однородность:

$$d^s x : af(x) = ad^s x : f(x) = a\mathrm{F}^{(s)}(x) + aC_s(x) = a(\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)).$$

2) аддитивность:

$$d^s x : (f(x) + \varphi(x)) = d^s x : f(x) + d^s x : g(x)) =$$

$$= \mathrm{F}^{(s)}(x) + \Phi^{(s)}(x) + O_s(x) + G_s(x) =$$

$$= \mathrm{F}^{(s)}(x) + \Phi^{(s)}(x) + C_s(x),\ C_s(x) = O_s(x) + G_s(x)\ .$$

Здесь функции $\mathrm{F}^{(s)}(x) + \Phi^{(s)}(x)$ соответственно базовые первообразные порядка s для функций $f(x)$ и $g(x)$; $C_s(x)$, $O_s(x)$, $G_s(x)$ – полиномы интегрирования порядка s.

Однородность и аддитивность интегрирования в совокупности дают свойство *линейности дробного интегрирования*.

Метод замены переменных при дробном интегродифференцировании

На случай дробных порядков дифференцирования и интегрирования d-оператором степенных функций легко обобщить метод замены переменных, который в стандартном анализе широко используется для дифференцирования и интегрирования функций. Например, если d-оператор действует на степенную функцию $(ax)^q$, $a = \mathrm{const}$, то будут справедливы формулы

$$d^{-s} x : (ax)^q = a^s \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-s)} (xa)^{q-s}; \tag{4.10}$$

$$d^s x:(ax)^q = a^{-s}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1\pm s)}(xa)^{q+s} + C_s(x)\,. \qquad (4.11)$$

Вывод последней формулы:

$$d^s x:(ax)^q = a^q\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}x^{q+s} + C_s(x) =$$

$$= a^{-s}a^{q+s}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}x^{q+s} + C_s(x) = a^{-s}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}(xa)^{q+s} + C_s(x).$$

В частности можно записать формулу замены переменной в общем виде через оператор

$$d^{\pm s}x:(ax)^q = a^{\mp s}d^{\pm s}x:(xa)^{q\pm s}. \qquad (4.12)$$

Для дифференцирования и интегрирования в стандартном анализе (соответственно $s = -1$ и $s = 1$) как частный случай получаются стандартные формулы

$$d^{-1}x:(ax)^q = a(ax)^{q-1};$$

$$d^{1}x:(ax)^q = a^{-1}(ax)^{q+1}.$$

Формулы для дробного дифференцирования и интегрирования порядка s функции $f(ax)$, $a = \mathrm{const}$, $a > 0$, будут следующие:

$$d^{-s}x: f(ax) = a^s f^{(s)}(ax); \qquad (4.13)$$

$$d^{s}x: f(ax) = a^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(ax) + C_s(x). \qquad (4.14)$$

Определённый интеграл дробного порядка

Определённый интеграл стандартного анализа легко обобщается на дробные порядки.

Для начала введём обозначения определённого интеграла дробных порядков, среди которых будут привычные обозначения из стандартного анализа:

$$\int_a^b f(x) d^s x \equiv \int_a^b d^s x f(x) \equiv \int_a^b d^s x f(x) \equiv \int{}_a^b d^s x f(x). \qquad (4.15)$$

Здесь показаны разные обозначения определённого интеграла от функции $f(x)$ дробного порядка s по переменной x в пределах интегрирования от a до b.

Кроме этого введём новое обозначение для определённых интегралов дробного порядка s в пределах от a до b:

$$\int_a^b f(x) d^s x \equiv d^s x_a^b : f(x). \qquad (4.16)$$

Вычислять неопределённый интеграл дробного порядка можно с помощью *формулы Ньютона – Лейбница*, которую для дробных порядков интегрирования запишем через базовую первообразную $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ порядка s функции $f(x)$ с пределами интегрирования от a до b:

$$\int_a^b f(x) d^s x \equiv d^s x\,{}_a^b : f(x) = \mathrm{F}^{(s)}(x)\Big|_a^b = \mathrm{F}^{(s)}(b) - \mathrm{F}^{(s)}(a). \qquad (4.17)$$

Свойства определённого дробного интеграла:

1) однородность:

$$d^s x_a^b : qf(x) = q d^s x_a^b : f(x); q = \mathrm{const}. \qquad (4.18)$$

2) аддитивность:

$$d^s x_a^b : [f(x) + g(x)] = d^s x_a^b : f(x) + d^s x_a^b : g(x). \qquad (4.19)$$

Однородность и аддитивность в совокупности дают свойство *линейности определённого дробного интеграла*.

3) антисимметричность относительно перестановки пределов интегрирования:

$$d^s x_a^b : f(x) = -d^s x_b^a : f(x). \qquad (4.20)$$

4) разбиение области интегрирования на две:

$$d^s x_a^b : f(x) = d^s x_a^c : f(x) + d^s x_c^b : f(x). \tag{4.21}$$

5) определённые дробные интегралы с верхним переменным пределом x:

$$\int_a^x f(y) d^s y \equiv d^s y\,{}_a^x : f(y) = \mathrm{F}_{a+}^{(s)}(x) \equiv \mathrm{F}^{(s)}(y)\Big|_a^x = \mathrm{F}^{(s)}(x) - \mathrm{F}^{(s)}(a). \tag{4.22}$$

6) определённые дробные интегралы с нижним переменным пределом x:

$$\int_a^x f(y) d^s y \equiv d^s y_x^b : f(y) = \mathrm{F}_{b-}^{(s)}(x) \equiv \mathrm{F}^{(s)}(y)\Big|_x^b = \mathrm{F}^{(s)}(b) - \mathrm{F}^{(s)}(x). \tag{4.23}$$

Несобственные дробные интегралы

Аналогично несобственным интегралам стандартного анализа можно ввести несобственные интегралы первого и второго рода дробных порядков.

Несобственный интеграл первого рода:

$$\int_a^\infty f(x) d^s x \equiv d^s x_a^\infty : f(x) = \mathrm{F}^{(s)}(x)\Big|_a^\infty = \mathrm{F}^{(s)}(\infty) - \mathrm{F}^{(s)}(a). \tag{4.24}$$

Несобственный интеграл второго рода:

$$\begin{gathered}\lim_{\delta\to 0} \int_a^{b-\delta} f(x) d^s x \equiv \lim_{\delta\to 0} (d^s x_a^{b-\delta} : f(x)) = \\ = \lim_{\delta\to 0} \mathrm{F}^{(s)}(x)\Big|_a^{b-\delta} = \lim_{\delta\to 0} (\mathrm{F}^{(s)}(b-\delta) - \mathrm{F}^{(s)}(a)).\end{gathered} \tag{4.25}$$

Аналогично можно записать несобственные интегралы для нижних пределов, а также для нижних и верхних пределов и различных комбинаций несобственных интегралов первого и второго рода.

Глава 2. ВНУТРЕННЯЯ АЛГЕБРА И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА *d*-ОПЕРАТОРА

§ 5. Пространства операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования

d-оператор носит скорее алгебраический, чем аналитический характер, в отличие от большинства других операторов дробного интегро-дифференцирования, которые, как правило, являются более сложными, с математической точки зрения, интегральными преобразованиями [1]. Выясним общие алгебраические свойства *d*-операторов, которые аналогичны свойствам оператора Адамара, рассмотренным в [11].

Алгебраическую структуру *d*-операторов будем делить на две составляющие: на *внутреннюю алгебру d-операторов* и на *внешнюю алгебру d-операторов*.

Внутренняя алгебра рассматривает алгебраическую структуру, которая возникает между самими *d*-операторами, а внешняя – при взаимодействии между *d*-операторами и функциями, на которые они действуют.

Вначале введём понятие пространств, образованных *d*-операторами.

Определение. *d*-операторы $d^{s_i}x$ всех конечных вещественных порядков, $s_i \in \mathbb{R}$, $s_i < \infty$, образуют множество, которое будем называть *пространством d-операторов* и обозначать как $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$.

Пространство $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ представляет объединение трёх множеств

$$D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\} = D^{+}{}_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\} \cup D^{0}{}_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\} \cup D^{-}{}_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}. \qquad (5.1)$$

Здесь $D^{+}{}_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ – множество всех операторов интегрирования; $D^{-}{}_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ – множество всех операторов дифференцирования; $D^{0}{}_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\} = \{d^0x\}$ – множество, состоящее из одного элемента – единичного оператора $d^0x \equiv \mathbf{1}$.

Очевидно, что каждому вещественному числу s соответствует единственный *d*-оператор $d^{\eta}x$ порядка η. В силу этого между множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ и пространством d-операторов имеет место взаимнооднозначное (биективное) отображение «$\leftrightarrow$»:

$$\mathbb{R} \leftrightarrow D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}.$$

Биекцию между пространством $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно осуществить бесконечным числом способов. Охарактеризуем наиболее удобный способ.

Определение. Биекцию между пространством $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ будем называть *тривиальной*, если каждому d-оператору $d^s x$ будем ставить в соответствие число s, которое определяет порядок данного оператора.

Далее будем рассматривать только тривиальную биекцию между $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ и $\mathbb{R}$.

Биекция $\mathbb{R} \leftrightarrow D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ значительно упрощает исследование алгебраических и топологических свойств пространства $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$.

В частности, очевидна следующая теорема.

Теорема. Множество всех d-операторов имеет мощность множества континуума $\aleph_1$.

Пространство $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ является узким и не позволяет последовательно ввести алгебраические операции, такие как умножение операторов на число и их сложение, так, чтобы результаты операции были замкнуты. Поэтому введём более широкое пространство, чем $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$.

Определение. Линейные комбинации d-операторов $d^{s_i}x$ будем называть *операторными векторами* и обозначать $\boldsymbol{d}x$.

Тогда операторные вектора будут выражаться так:

$$\boldsymbol{d}x = \sum_{i=0}^{S} \alpha_i d^{s_i} x = \alpha_0 d^{s_0} x + \alpha_1 d^{s_1} x + \alpha_2 d^{s_2} x + \ldots + \alpha_{i-1} d^{s_{i-1}} x + \alpha_i d^{s_i} x + \ldots \,, \quad (5.2)$$

где S – предел суммирования – может быть как конечным, так и бесконечным, а коэффициенты α_i – вещественные (комплексные) и конечные числа.

Определение. Множество всех операторных векторов будем называть *пространством операторных векторов* и обозначать как $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$.

В частном случае, когда все коэффициенты α_i в операторном векторе равны нулю, получим нулевой операторный вектор

$$\mathbf{0} = \sum_{s_i=1}^{S} \alpha_i d^{s_i} x,\ \alpha_i = 0\,.$$

Здесь $d^{s_i} x$ d-операторы порядков s_i, из пространства $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$.

При воздействии нулевого оператора на функцию с конечной нормой получаем ноль

$$\mathbf{0}: f(x) = 0, \| f(x) \| < \infty.$$

Пространство $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ является подпространством пространства $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$, или

$$D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\} \subset \Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}.$$

d-операторы $d^{s_i} x$ являются линейно независимыми для разных порядков s_i операторов пространства $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ и образуют базис в пространстве $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$, по которому раскладываются операторные вектора.

Пространство $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ образует наиболее простой базис пространства $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$, когда все коэффициенты базиса равны единице ($\beta_i = 1$). Такой базис будем называть *нормированным базисом* пространства $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$.

Теорема. Базис пространства $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ имеет множество слагаемых мощности континуума $\aleph_1$.

Данное утверждение справедливо в силу того, что пространство $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ биективно множеству вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пространство $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ образует не единственно возможный базис пространства $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$. Любое множество операторов $\beta_i \boldsymbol{d}^{s_i} x$, где коэффициенты β_i отличны от нуля и являются вещественными числами ($\beta_i \neq 0$, β_i, $i \in \mathbb{R}$) образует базис в пространстве $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$, который не является нормированным.

Теорема. Множество всех возможных базисов пространства $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ имеет мощность, следующую за мощностью континуума, – мощность $\aleph_2$ ($\aleph_2 > \aleph_1$).

Это следует из того, что числовые коэффициенты β_i в операторных полиномах и их индексы i пробегают множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, поэтому их можно рассматривать как функции над множеством $\mathbb{R}$, а множество всех функций над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ имеет мощность $\aleph_2$ [10].

§ 6. Внутренняя алгебра операторов дробного интегродифференцирования

В пространстве $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ между операторными векторами можно ввести ряд операций, которые будут образовывать внутренне замкнутую алгебраическую структуру операторных векторов, легко выводимых из свойств d-оператора.

Рассмотрим операцию умножения операторных векторов на число. Число умножается на операторный вектор слева.

Ch_1. Умножения операторных векторов на единицу (унитарность)

$$1\boldsymbol{d}x = \boldsymbol{d}x.$$

Ch_2 Ассоциативность умножения на число

$$(ab)\boldsymbol{d}x = a(b\boldsymbol{d}x),\ a,\ b = \mathrm{const}.$$

Теперь рассмотрим операцию сложения «+» операторных векторов:

G_1. Ассоциативность относительно операции сложения операторных векторов

$$(\boldsymbol{d}_1 x + \boldsymbol{d}_2 x) + \boldsymbol{d}_3 x = \boldsymbol{d}_1 x + (\boldsymbol{d}_2 x + \boldsymbol{d}_3 x).$$

G_2. Сложение с нулевым оператором

$$\boldsymbol{d}x + \mathbf{0} = \boldsymbol{d}x.$$

G_3. Наличие у каждого операторного вектора $\boldsymbol{d}x$ противоположного оператора $-\boldsymbol{d}x$;

$$\boldsymbol{d}x - \boldsymbol{d}x = 0.$$

G_4. Коммутативность относительно операции сложения

$$\boldsymbol{d}_1 x + \boldsymbol{d}_2 x = \boldsymbol{d}_2 x + \boldsymbol{d}_1 x.$$

Кроме этого справедливы законы дистрибутивности:

D_1. Связывающий операцию сложения чисел с их умножением на операторный вектор:

$$(a + b)\boldsymbol{d}x = a\boldsymbol{d}x + b\boldsymbol{d}x.$$

D_2. Связывающий операции сложения операторных векторов с умножением на число:

$$a(\boldsymbol{d}_1 x + \boldsymbol{d}_2 x) = a\boldsymbol{d}x + a\boldsymbol{d}x.$$

Теорема. Относительно операции сложения операторные вектора образуют коммутативную группу над пространством $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$.

Данное утверждение справедливо в силу свойств G_1, G_2, G_3, G_4.

Будет справедлива теорема.

Теорема. Операторные вектора из пространства $\Sigma_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ относительно операций умножения на число и сложения образуют линейное пространство.

Доказывается данное утверждение справедливостью восьми приведённых свойств Ch_1, Ch_2, G_1, G_2, G_3, G_4, D_1, D_2.

d-операторы являются частными случаями операторных векторов, поэтому они образуют в пространстве $\Sigma_A\{\mathbb{R}\}$ относительно операции сложения коммутативную группу, а относительно операций умножения на число и сложения – линейное пространство.

Для реальных вычислений достаточно использовать не полностью пространства $D_A\{\mathbb{R}\}$ и $\Sigma_A\{\mathbb{R}\}$, а их подпространства с конечным или бесконечным счётным числом *d*-операторов или операторных векторов.

Например, в каждой отдельной ветви дробного анализа порядка *s* удобно работать с базисными операторными векторами на основе *d*-операторов, порядки которых удовлетворяют соотношению $s_n = ns,\ s \in \mathbb{R},\ \ n \in \mathbb{Z}$. Векторные операторы соответствующие ветви дробного анализа порядка *s*, можно обозначить как

$$\boldsymbol{d}^s x = \sum_{n=0}^{S} \alpha_n d^{ns} x = \alpha_0 d^0 x + \alpha_1 d^s x + \alpha_2 d^{2s} x + ... + \alpha_n d^{ns} x + ... \qquad (6.1)$$

Здесь α_1, α_2, α_3, … , α_n – вещественные (или комплексные) числа.

Такие операторные вектора будем называть операторными векторами порядка *s*.

Пространство $\Sigma_A\{\mathbb{R}\}$ можно разбить на фактормножества $\Sigma_s\{\mathbb{R}\}$ по порядку векторных операторов *s*:

$$\Sigma_A\{\mathbb{R}\} = \bigcup_{\forall s \in \mathbb{R},\, s<\infty} \Sigma_s\{\mathbb{R}\}, \quad \bigcap_{\forall s \in \mathbb{R},\, s<\infty} \Sigma_s\{\mathbb{R}\} = \varnothing.$$

Для пересечения двух фактормножеств справедливо соотношение

$$\Sigma_{s_1}\{\mathbb{R}\} \cap \Sigma_{s_2}\{\mathbb{R}\} = \begin{cases} \varnothing,\ s_1 \neq s_2 \\ \Sigma_{s_1}\{\mathbb{R}\},\ s_1 = s_2 \Rightarrow \Sigma_{s_1}\{\mathbb{R}\} = \Sigma_{s_2}\{\mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Между *d*-операторами введём операцию умножения (*произведение, композиция*) операторов. Операция умножения будет замкнута внутри пространства $D_A\{\mathbb{R}\}$.

Произведение двух операторов порядков s и r можно выразить как один оператор порядка $s + r$ (*композиция*):

$$d^s x : d^r x = d^r x : d^s x = d^{s+r} x = d^{r+s} x.$$

d-оператор порядка $s + r$ можно разложить на произведение двух операторов порядков s и r (*декомпозиция*):

$$d^{s+r} x = d^s x \cdot d^r x.$$

Для d-оператора выполняется условие ассоциативности

$$(d^s x : d^q x)\ d^d x = d^s x : (d^q x : d^d x).$$

Для единичного оператора $\mathbf{1} = d^0 x$ справедливы равенства

$$d^0 x : d^s x = d^s x : d^0 x = d^s x,$$

или в другой записи

$$\mathbf{1} : d^s x = d^s x : \mathbf{1} = d^s x.$$

Наличие обратного элемента

$$d^s x : d^{-s} x = d^{-s} x : d^s x = d^0 x = \mathbf{1}.$$

Коммутативность умножения операторов

$$d^s x : d^q x = d^q x : d^s x.$$

Теорема. Относительно операции умножения d-операторы образуют коммутативную группу в пространстве $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$.

На множестве d-операторов можно ввести отношение строгого порядка (> или <), которое удовлетворяет двум аксиомам:

1) из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$ (*транзитивность*);

2) невозможно одновременное выполнене $a < b$ и $a > b$.

Определение. Для двух операторов $d^s x$ и $d^q x$ больше тот, у которого больше порядок. Из $s > q$ следует, что $d^s x > d^q x$.

Очевидно, что в случае, когда порядки операторов равны, равны и сами операторы, т. е. из $s = q$ следует, что $d^s x = d^q x$.

Теорема. Отношение строгого порядка над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ гомоморфно отношению строгого порядка в пространстве d-операторов $D_\text{А}\{\mathbb{R}\}$.

В силу равномощности $D_\text{А}\{\mathbb{R}\}$ и $\mathbb{R}$ справедлива следующая теорема.

Теорема. Отношение строгого порядка над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ и пространством d-операторов $D_\text{А}\{\mathbb{R}\}$ изоморфны друг другу.

Кроме того, в силу изоморфности между множествами $D_\text{А}\{\mathbb{R}\}$ и $\mathbb{R}$ следует, что в пространстве d-операторов $D_\text{А}\{\mathbb{R}\}$ порядок архимедовский, как и над множеством $\mathbb{R}$ [12]. Следовательно, справедлива теорема, которую удобней сформулировать для модулей показателей степеней.

Теорема. Порядок в пространстве операторов $D_\text{А}\{\mathbb{R}\}$ является архимедовским, т. е. если для двух d-операторов справедливо неравенство $d^{|s|}x < d^{|q|}x$, то найдётся такой d-оператор $d^{n|s|}x$, $n \in \mathbb{N}$, что будет выполняться неравенство $d^{n|s|}x > d^{|q|}x$.

§ 7. Топологические свойства пространства операторов

Пространство $D_\text{А}\{\mathbb{R}\}$ *метризуемо*, т. е. над пространством $D_\text{А}\{\mathbb{R}\}$ можно ввести меру ρ, в качестве которой удобно взять модуль разности показателей порядков в d-операторах:

$$\rho(s_1, s_2) = |s_1 - s_2| = +\sqrt{(s_1 - s_2)^2}\,. \tag{7.1}$$

В этом случае будут выполняться все свойства меры:

1) $\rho(s_1, s_2) = 0$, когда $s_1 = s_2$ (*аксиома тождества*);
2) $\rho(s_1, s_2) = \rho(s_2, s_1)$ (*аксиома симметрии*);
3) $\rho(s_1, s_3) \le \rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_3)$ (*аксиома треугольника*).

Очевидно, что метрика над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ и метрика пространства $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ (7.1) равны, т. е. пространства $\mathbb{R}$ и $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ *изометричны*.

Из биективности $\mathbb{R} \leftrightarrow D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ между множеством вещественных чисел и множеством d-операторов следует, что в пространстве d-операторов можно ввести нетривиальную топологию, из чего автоматически вытекают самые простые топологические свойства пространства $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$, которые можно сформулировать в виде ряда теорем.

Теорема. Пространство d-операторов $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ и множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ топологически эквивалентны (*гомеоморфны*).

Теорема. Пространство d-операторов $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ одномерно:

$$\dim(D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}) = 1. \tag{7.2}$$

Теорема. Множество d-операторов $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ связно.

Теорема. Множество d-операторов $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ плотно.

Множество d-операторов в пространстве $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ плотно, т. е. для них удовлетворяется аксиома отделимости Хаусдорфа (T_2 – пространство) [13], а значит справедлива

Теорема. Пространство d-операторов $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ хаусдорфово.

Из хаусдорфовости пространства $D_{\mathrm{A}}\{\mathbb{R}\}$ следует, что для любых двух не равных друг другу d-операторов всегда найдётся такой, который по порядку лежит между ними.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ

§ 8. Роль элементарных функций для дробного анализа

Для построения полноценного дробного анализа необходимы функции, которые для каждой ветви имели бы такое же фундаментальное значение, какое имеют элементарные функции в стандартном анализе.

Элементарные функции составляют базу необходимого инструментария в традиционном анализе. Без элементарных функций невозможно представить себе современный анализ. Их важность велика не только для анализа, но и для математики вообще, а также для различных приложений в естественных и технических науках. Важна их роль и в гуманитарных науках. Естественно-научные законы в подавляющем большинстве случаев сформулированы с помощью элементарных функций.

Многие достижения науки связаны именно с использованием элементарных функций. Поэтому представляется, что полноценный дробный анализ должен обладать своим набором таких функций, которые будем называть *элементарными функциями дробных порядков*. Многие из этих функций должны быть аналогами элементарных функций, известных в традиционном анализе.

Кроме того, элементарные функции дробного порядка в случае, когда порядок равен 1, должны переходить в элементарные функции традиционного анализа.

Также ввиду большей сложности дробного анализа по сравнению с традиционным в нём могут появляться свои функции, которые можно отнести к элементарным.

Свойства дробных элементарных функций не всегда будут совпадать со свойствами традиционных элементарных функций.

Представляется, что каждая ветвь дробного анализа может стать полноценным направлением дробного анализа, когда в нём будет свой набор элементарных функций.

Аналогичные рассуждения можно использовать для других типов функций, например для специальных функций, которые имеются в традиционном анализе.

Между элементарными и специальными функциями нет строгого разграничения. Многие, но не все специальные функции можно интерпретировать как решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим некоторые типы элементарных функций в дробном анализе и начнём с экспонент.

§ 9. Экспоненты для дробных операторов разных порядков

Экспонента – одна из важнейших функций, значение которой трудно переоценить. Важнейшее свойство экспоненты заключается в том, что она не меняется при дифференцировании и при интегрировании (с точностью до сложения с константой интегрирования).

Если выходить за рамки традиционного анализа, то представляется, что полноценную теорию можно построить только тогда, когда в ней будут использоваться такие функции, которые будут иметь свойства экспоненты – инвариатности по отношению к операции дифференцирования, а также к операции интегрирования, но с точностью до сложения с полиномом интегрирования.

Было показано, что экспоненты разных ветвей дробного анализа не эквивалентны между собой [8], поэтому можно сделать вывод, что каждая ветвь дробного анализа должна иметь свою экспоненту, которая отлична от экспонент других ветвей.

Традиционная экспонента для дробных порядков интегродифференцирования теряет своё главное свойство – не меняться при дифференцировании и при интегрировании, но с точностью до сложения с полиномом интегрирования. В этом легко убедиться, например, продифференцировав экспоненту $\exp(x)$ d-оператором порядка 1/2, т. е., $d^{-1/2}x:\exp(x) \neq \exp(x)$.

Результат этого можно записать следующим образом:

$$d^{-1/2}x:\exp(x) = d^{-1/2}x:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = d^{-1/2}x:\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\right) =$$

$$=\left(\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^2x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}+\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}+\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\ldots\right) \neq \exp(x).$$

Прежде чем получить экспоненты для d-операторов любого порядка, обратим внимание на свойства традиционной экспоненты $\exp(x)$.

Свойство членов ряда $a_i(x)$ экспоненты $\exp(x)$ при дифференцировании и интегрировании в стандартном анализе ($s = \pm 1$) следующее:

$$d^{1}x : a_i(x) = a_{i+1}(x).$$

При дифференцировании все члены ряда, кроме первого, переводятся в предыдущий:

$$d^{-1}x : a_{i+1}(x) = a_i\,(x).$$

Производная первого члена ряда экспоненты равна нулю

$$d^{-1}x : a_1(x) = 0.$$

Расписав эту производную через d-оператор полностью, получим

$$d^{-1}x : a_1 = d^{-1}x : 1 = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1-1)}x^{0-1} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)}x^{-1} = \frac{1}{\infty}x^{-1} = 0\,.$$

Последнее свойство говорит о том, что первый член ряда экспоненты пропорционален первому члену полинома интегрирования. Но ввиду того, что в традиционном анализе полиномом интегрирования является константа, то тогда первый член ряда там пропорционален константе. Данной константой должна быть единица, чтобы обеспечить равенство $d^{\,1}x : a_1(x) = a_2(x)$.

Для задания экспоненты достаточно задать первый член ряда и последовательно интегрировать, получая при каждом интегрировании последующий член ряда.

Получим традиционную экспоненту описанным способом, используя данные соотношения между соседними членами ряда:

$$\begin{gathered}\exp(x) = (d^0x + d^1x + d^2x + d^3x + ... + d^nx + ...)x^0 = \\ = (1 + d^1x + d^2x + d^3x + ... + d^nx + ...)1 = \\ = \left(\sum_{n=0}^{\infty} d^n x\right):1 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.\end{gathered}$$

Распространим аналогичные свойства на экспоненты любого вещественного порядка s, которые в дальнейшем будем обозначать как $\exp_s(x)$.

В степенном ряду экспоненты $\exp_s(x)$ для пары обратных друг другу d-операторов $d^{\pm s}x$ между соседними членами имеют место соотношения $d^{\,s}x$: $a_i(x) = a_{i+1}(x)$, а первым членом ряда является ненулевая функция $a_1(x) = \Gamma^{-1}(s)x^{-1+s}$, которая пропорциональна первому члену ряда полинома интегрирования $C_s(x)$.

Первый член ряда при действии на него обратным оператором дифференцирования $d^{-s}x$, так чтобы выполнялось равенство, аналогичное равенству справедливому для традиционной экспоненты, при дифференцировании оно даёт ноль:

$$d^{-s}x : \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} = 0. \qquad (9.1)$$

Или, расписав подробно:

$$d^{-s}x : \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma(1-1+s)}{\Gamma(1-1+s-s)} x^{s-s-1} = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)\Gamma(0)} x^{-1} = \frac{1}{\Gamma(0)} x^{-1} = \frac{1}{\infty} x^{-1} = 0.$$

Функцию $\Gamma^{-1}(s)x^{-1+s}$ будем называть *стартовой функцией*, используя которую можно получить экспоненту любого вещественного порядка $s \neq 0$.

Коэффициент $a_1 = \Gamma^{-1}(s)$ является корректирующим, он необходим для правильного преобразования между членами ряда экспоненты $\exp_s(x)$.

В частности, для нулевого оператора $d^0x = \mathbf{1}$ стартовая функция равна нулю: $x^{-1}/\Gamma(0) = x^{-1}/\infty = 0$.

Найдём экспоненты $\exp_s(x)$ для операторов любого вещественного порядка $s \neq 0$ для любой пары обратных операторов $d^{\pm s}x$:

$$\begin{aligned}&(d^0x + d^sx + (d^sx)^2 + (d^sx)^3 + \ldots + (d^sx)^n + \ldots)\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(d^sx)^n\right)\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} = \exp_s(x) + C_s(x).\end{aligned} \qquad (9.2)$$

Здесь введён символ, который обозначает последовательное действие n операторов интегрирования: $(d^sx)^n \equiv d^sx : d^sx : d^sx : \ldots d^sx : d^sx$.

После интегрирования получим ряд для экспоненты $\exp_s(x)$:

$$\exp_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)} = \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} + \frac{x^{2s-1}}{\Gamma(2s)} + \frac{x^{3s-1}}{\Gamma(3s)} + \frac{x^{4s-1}}{\Gamma(4s)} + \ldots \qquad (9.3)$$

Определение. Функцию $\exp_s(x)$ будем называть *дробной экспонентой*.

Если сделать сдвиг значения индекса $m = n - 1$, то экспоненту можно записать в виде ряда, нумерация элементов в котором начинается с нулевого:

$$\exp_s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)} = \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} + \frac{x^{2s-1}}{\Gamma(2s)} + \frac{x^{3s-1}}{\Gamma(3s)} + \frac{x^{4s-1}}{\Gamma(4s)} + \ldots \quad (9.4)$$

Если гамма-функцию Эйлера выразить через функцию *непрерывного факториала* (*функция Гаусса*) $\Pi(x)$, $\Gamma(x + 1) = \Pi(x)$ [14], то дробную экспоненту можно записать так:

$$\begin{aligned} \exp_s(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(m+1)s-1}}{\Pi((m+1)s-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Pi(ns-1)} = \\ &= \frac{x^{s-1}}{\Pi(s-1)} + \frac{x^{2s-1}}{\Pi(2s-1)} + \frac{x^{3s-1}}{\Pi(3s-1)} + \ldots \end{aligned} \quad (9.5)$$

Дробная экспонента, по сути, является бесконечным множеством экспонент, в котором для каждого вещественного порядка s имеется не менее одной экспоненты.

Мощность этого множества равна мощности множества всех возможных порядков d-оператора, или мощности континуума.

Определение. Для конкретных вещественных чисел s дробная экспонента будет давать экспоненты, которые будем называть *частными экспонентами порядка* s.

С помощью дробной экспоненты можно получить экспоненту любого вещественного порядка для любой пары обратных операторов, подставив вместо s конкретное значение модуля их порядков $| s |$ обратных операторов.

Дробную экспоненту можно выразить иначе, если в формуле (9.2) сумму операторов заменить одним интегральным оператором, который обозначим как $\mathbf{G}_s(x)$. Назовём его *генератором дробной экспоненты порядка* s:

$$\mathbf{G}_s(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (d^s x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d^{ns} x. \quad (9.6)$$

Воздействие генератора экспоненты порядка s на стартовую функцию порядка s даст сумму дробной экспоненты порядка s и полинома интегрирования того же порядка

$$\mathbf{G}_s(x):\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}=\exp_s(x)+C_s(x). \qquad (9.7)$$

Теорема. *Интегральный генератор экспоненты порядка s*, действуя на экспоненту порядка s, переводит её саму в себя с точностью до прибавления полинома интегрирования:

$$\mathbf{G}_s(x):\exp_s(x)=\exp_s(x)+C_s(x).$$

Теорема. Для каждой пары обратных d-операторов $d^{\pm s}x$ с $s\neq 0$ имеется своя частная экспонента $\exp_s(x)$, причём единственная и, отличная от экспонент других пар обратных операторов.

Теорема. Для каждой частной экспоненты $\exp_s(x)$ имеется только единственная пара обратных d-операторов $d^{\pm s}x$.

Это можно записать

$$\exp_s(x)=\exp_q(x),\ s=q$$

и

$$\exp_s(x)\neq\exp_q(x),\ s\neq q.$$

Для дробной экспоненты будут выполняться основные свойства – независимость от дифференцирования и интегрирования, причём интегрирования с точностью до сложения с полиномом интегрирования.

Интеграл порядка s от экспоненты $\exp_s(x)$ будет

$$d^{s}x:\exp_s(x)=\exp_s(x)+C_s(x).$$

Дифференцируя правую часть оператором $d^{-s}x$, получим

$$d^{-s}x:(\exp_s(x)+C_s(x))=\exp_s(x).$$

В частности, производная порядка α от дробной экспоненты порядка α переводит экспоненты в неё саму:

$$d^{-s}x:\exp_s(x)=\exp_s(x).$$

Докажем это равенство.

$$d^{\alpha}x:\exp_{\alpha}(-x)=d^{\alpha}x:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{-1+n\alpha}}{\Gamma(ns)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(-1+1+n\alpha)}{\Gamma(-1+1+n\alpha-\alpha)}\frac{(-x)^{-1+n\alpha-\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma((n-1)\alpha)}\frac{(-x)^{-1+n\alpha-\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{-1+n\alpha-\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha)}=\frac{(-x)^{-1+s}}{\Gamma(s)}+\frac{(-x)^{-1+2s}}{\Gamma(2s)}+\frac{(-x)^{-1+3s}}{\Gamma(3s)}+\ldots+\frac{(-x)^{-1+ns}}{\Gamma(ns)}+\ldots$$

Можно показать, что в дробном анализе целочисленного порядка n возможно существование таких функций, которые, как экспоненты, не меняются при дробном интегрировании и дифференцировании порядка n, но не являются экспонентами соответствующего порядка n.

Рассмотрим некоторые свойства дробной экспоненты.

Теорема. Ряд дробной экспонента $\exp_s(x)$ с порядками $s \geq 1$ является сходящимся, с радиусом сходимости R равным бесконечности (R = ∞).

Теорема. Ряды дробной экспоненты $\exp_s(x)$ с порядками $s < 1$ имеют особую точку $x = 0$, в которой они расходится, а остальные точки являются точками сходимости рядов, с радиусом сходимости R, равным бесконечности (R = ∞).

Заметим, что все степенные ряды с положительными целочисленными степенями в точке $x = 0$ всегда сходятся [15].

Поскольку каждая отдельная ветвь дробного анализа имеет свою экспоненту, отличную от экспонент других ветвей, имеет смысл рассмотреть качественные и количественные свойства частных экспонент из рациональных ветвей дробного анализа, построить их графики и дать их предварительную классификацию на основе, прежде всего, компьютерных вычислений.

Экспонента в дробном анализе уже не является показательной функцией, как в случае стандартного анализа ($s = 1$). В дробном анализе экспоненты, в общем случае можно отнести к другому типу элементарных функций, которые в стандартном анализе вырождаются в показательные функции.

Поэтому свойство $\exp_s(-x) = (\exp_s(x))^{-1}$, которое выполняется для традиционной экспоненты, для частных экспонент уже не выполняется, т. е. в общем случае справедливо неравенство $\exp_s(-x) \neq (\exp_s(x))^{-1}$, $(s \neq 1)$.

Воздействие на дробную экспоненту $\exp_s(ax)$, $a = \mathrm{const}$, d-оператором интегрирования $d^{s}x$ и дифференцирования $d^{-s}x$ того же порядка дают соотношения [16]:

$$d^{-s}x : \exp_s(ax) = a^s \exp_s(ax);$$

$$d^{s}x : \exp_s(ax) = a^{-s} \exp_s(ax) + C_s(x).$$

Пример. Для дифференцирования и интегрирования экспоненты exp (ax) в стандартном анализе (соответственно $s = -1$ и $s = 1$), в частности, получаются стандартные формулы

$$d^{-1}x : \exp(ax) = a \exp(ax);$$

$$d^{1}x : \exp(ax) = a^{-1}\exp(ax) + a_0.$$

Пример. Для дифференцирования и интегрирования частной экспоненты $\exp_{1/2}(ax)$ стандартного анализа (соответственно $s = -1/2$ и $s = 1/2$) получим

$$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(ax) = a^{1/2}\exp_{1/2}(ax);$$

$$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(ax) = a^{-1/2}\exp_{1/2}(ax) + C_{1/2}(x).$$

Порядки рассматриваемых экспонент не очень сильно отличаются от единицы, соответствующей стандартному анализу. Иррациональные ветви в данной работе не рассматриваются. Более полный анализ частных экспонент как численно, так и что более важно, аналитически, является значительно более сложной задачей и представляется делом будущего. Поэтому приведённые результаты носят предварительный характер.

Для такого анализа необходимо экспоненты всех порядков разбить на множества, в каждом из которых они будут иметь качественно похожие свойства. Экспоненты с похожими свойствами назовём *родственными экспонентами*.

Исходя из расчётов и из аналитических выкладок, можно выделить следующие типы экспонент.

Экспоненты целочисленных порядков:

– порядок $s = 0$ представляет тривиальный случай, в котором $\exp_0(x) = 0$, а родственные экспоненты отсутствуют;

– традиционная экспонента, порядок $s = 1$, вырожденный случай, родственных экспонент нет;

– чётные целочисленные порядки, $s = 2, 4, 6, \ldots$ имеют бесконечное множество родственных экспонент;

– нечётные целочисленные порядки, $s = 3, 5, 7, \ldots$ имеют бесконечное счётное множество родственных экспонент.

Экспоненты нецелочисленного рационального порядка:

– степени $1/n = 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ имеют бесконечное счётное множество родственных экспонент;

– степени $m/n < 1$ имеют бесконечное счётное множество родственных экспонент;

– степени $m/n > 1$ имеют бесконечное счётное множество родственных экспонент.

Экспоненты иррациональных порядков требуют отдельного рассмотрения, поэтому на них останавливаться не будем.

Рассмотрим некоторые частные экспоненты

В частном случае, когда $s = 0$, получим $\exp_0(x) = 0$.

Например, легко получить традиционную экспоненту $\exp x$, подставив значение $s = 1$ в дробную экспоненту:

$$\exp_1(x) \equiv \exp(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad (9.8)$$

Для целочисленных порядков s = 2, 3, 4 ряды экспонент будут

$$\begin{gathered} \exp_2(x) \equiv \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = \\ = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots; \end{gathered} \quad (9.9)$$

$$\begin{gathered} \exp_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{3m-1}}{(3m-1)!} = \\ = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{14}}{14!} + \ldots \end{gathered} ; \quad (9.10)$$

$$\begin{gathered} \exp_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} = \\ = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{19}}{19!} + \ldots \end{gathered} \quad (9.11)$$

Для примера запишем экспоненту $\exp_{1/3}(x)$ порядка 1/3 для пары обратных операторов $d^{\pm 1/3}x$:

$$\exp_{1/3}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-1+n/3}}{\Gamma(n/2)}=\frac{x^{-2/3}}{\Gamma(1/2)}+\frac{x^{-1/3}}{\Gamma(1/2)}+\frac{x^{0}}{\Gamma(1)}+\frac{x^{1/3}}{\Gamma(3/2)}+$$
$$+\frac{x^{2/3}}{\Gamma(2)}+\frac{x^{1}}{\Gamma(5/2)}+\frac{x^{4/3}}{\Gamma(3)}+\frac{x^{5/3}}{\Gamma(7/2)}+\frac{x^{2}}{\Gamma(4)}+\ldots \tag{9.12}$$

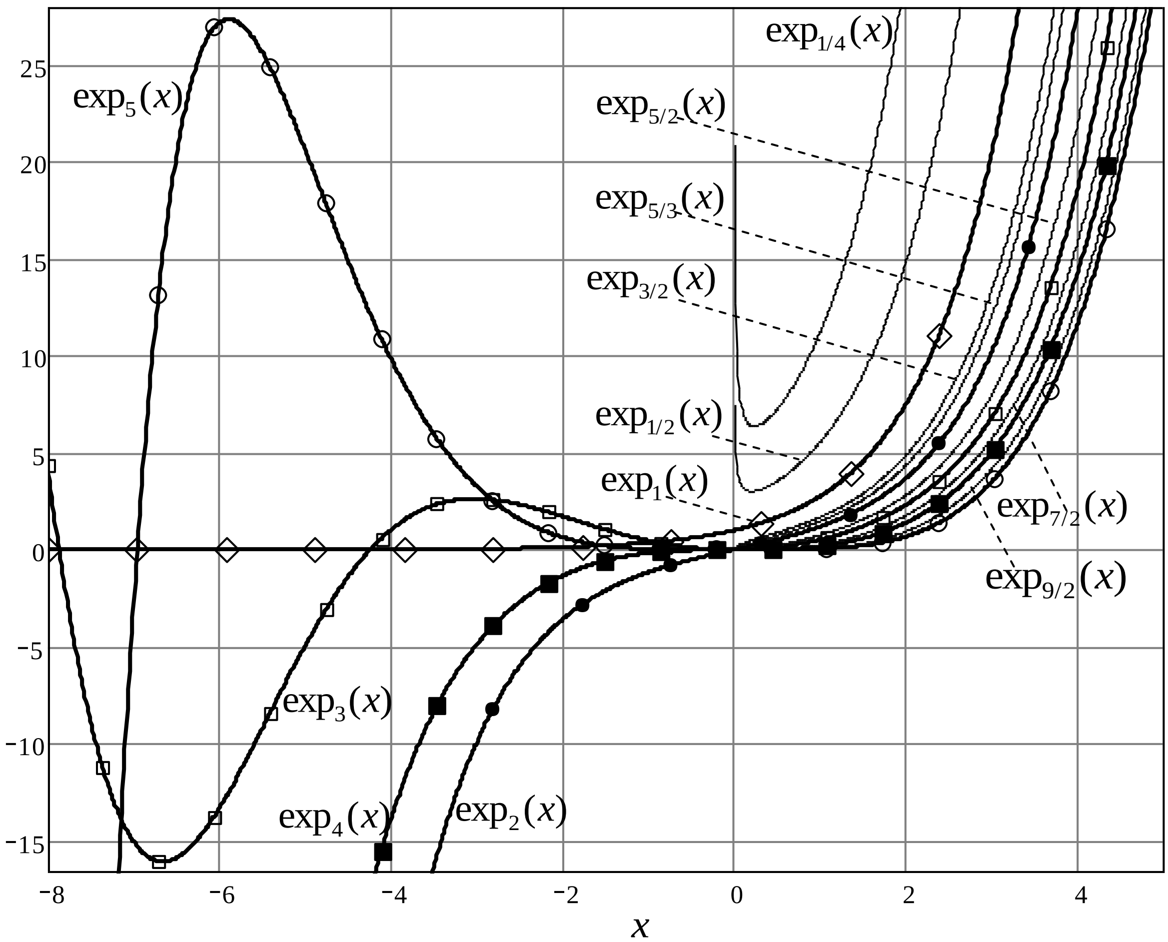


Рис. 2. Дробные экспоненты разных порядков
на вещественной плоскости

Экспоненты целочисленных порядков вещественного аргумента всегда являются вещественными функциями и определены на всей вещественной оси. Для нецелочисленных значений порядков экспонент требуется выход в комплексную плоскость для отрицательных значений переменных.

На рис. 2 показаны экспоненты разных порядков на вещественной плоскости.

§ 10. Элементарные функции дробного анализа, связанные с дробной экспонентой

На основе дробной экспоненты можно вводить функции, которые являются обобщением функций, используемых в традиционном анализе. Простым примером могут служить тригонометрические и гиперболические функции, которые можно обобщить для любых конечных вещественных порядков дробного анализа s. Это можно сделать разными способами.

Гиперболические функции в дробном анализе на основе d-оператора легко получить из дробной экспоненты порядка s, используя обобщение стандартной формулы: $\exp_s(\pm x) = \mathrm{ch}_s(x) \pm \mathrm{sh}_s(x)$. В результате получим [8, 17, 18]:

$$\begin{gathered}\mathrm{ch}_s(x) = \frac{1}{2}(\exp_s(x) + \exp_s(-x)) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1} + (-x)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s-1} + (-x)^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}\right);\end{gathered} \tag{10.1}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{sh}_s(x) = \frac{1}{2}(\exp_s(x) - \exp_s(-x)) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1} - (-x)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s-1} - (-x)^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}\right);\end{gathered} \tag{10.2}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{th}_s(x) = \frac{\mathrm{sh}_s(x)}{\mathrm{ch}_s(x)};\ \mathrm{cth}_s(x) = \frac{\mathrm{ch}_s(x)}{\mathrm{sh}_s(x)}; \\ \mathrm{sch}_s(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}_s(x)};\ \mathrm{csch}_s(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}_s(x)}.\end{gathered} \tag{10.3}$$

Для тригонометрических функций дробных порядков можно получить формулы, обобщающие формулы Эйлера, которые связывают экспоненты с синусами и косинусами дробного порядка: $\exp_s(\pm ix) = \cos_s(x) \pm i\sin_s(x)$. Тогда будет [8, 17, 18]:

$$\cos_s(x) = \frac{1}{2}(\exp_s(ix) + \exp_s(-ix)) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{ns-1} + (-ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \quad (10.4)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ix)^{(m+1)s-1} + (-ix)^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}\right);$$

$$\sin_s x = \frac{1}{2i}(\exp_s(ix) - \exp_s(-ix)) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{ns-1} - (-ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \quad (10.5)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ix)^{(m+1)s-1} - (-ix)^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}\right);$$

$$\mathrm{tg}_s(x) = \frac{\sin_s(x)}{\cos_s(x)};\ \mathrm{ctg}_s\, x = \frac{\cos_s(x)}{\sin_s(x)};$$
$$(10.6)$$
$$\sec_s(x) = \frac{1}{\cos_s(x)};\ \mathrm{cosec}_s(x) = \frac{1}{\sin_s(x)}.$$

Будут справедливы соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями дробных порядков:

$$\cos_s(x) = \mathrm{ch}_s(ix);\quad i\sin_s(x) = \mathrm{sh}_s(ix);$$

$$\cos_s(ix) = \mathrm{ch}_s(x);\ \sin_s(ix) = i\,\mathrm{sh}_s(x);$$
$$(10.7)$$
$$i\,\mathrm{tg}_s(x) = \mathrm{th}_s(ix);\ \mathrm{ctg}_s(x) = i\,\mathrm{cth}_s(ix);$$

$$\mathrm{tg}_s(ix) = i\,\mathrm{th}_s(x);\ i\,\mathrm{ctg}_s(ix) = \mathrm{cth}_s(x).$$

На рис. 3–6 приведены графики синусов и косинусов порядков, близких к единице.

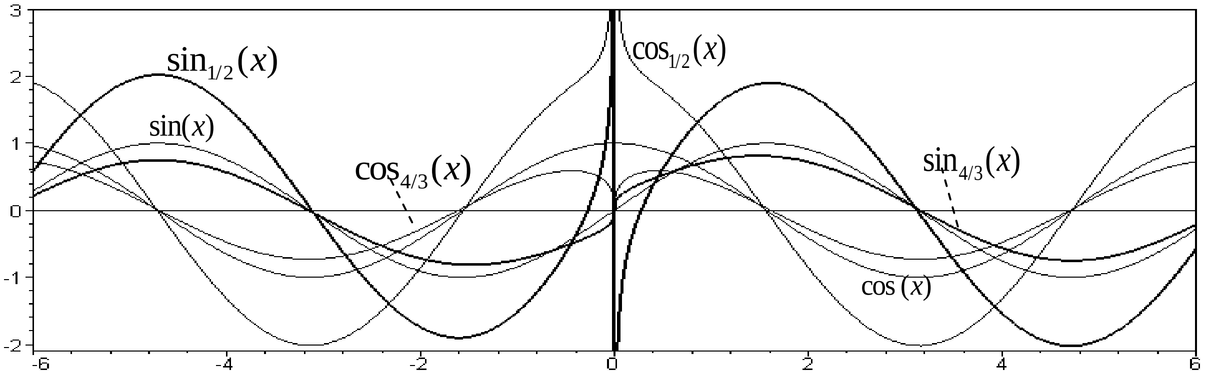


Рис. 3. Синусы и косинусы порядков 1/2, 1 и 4/3

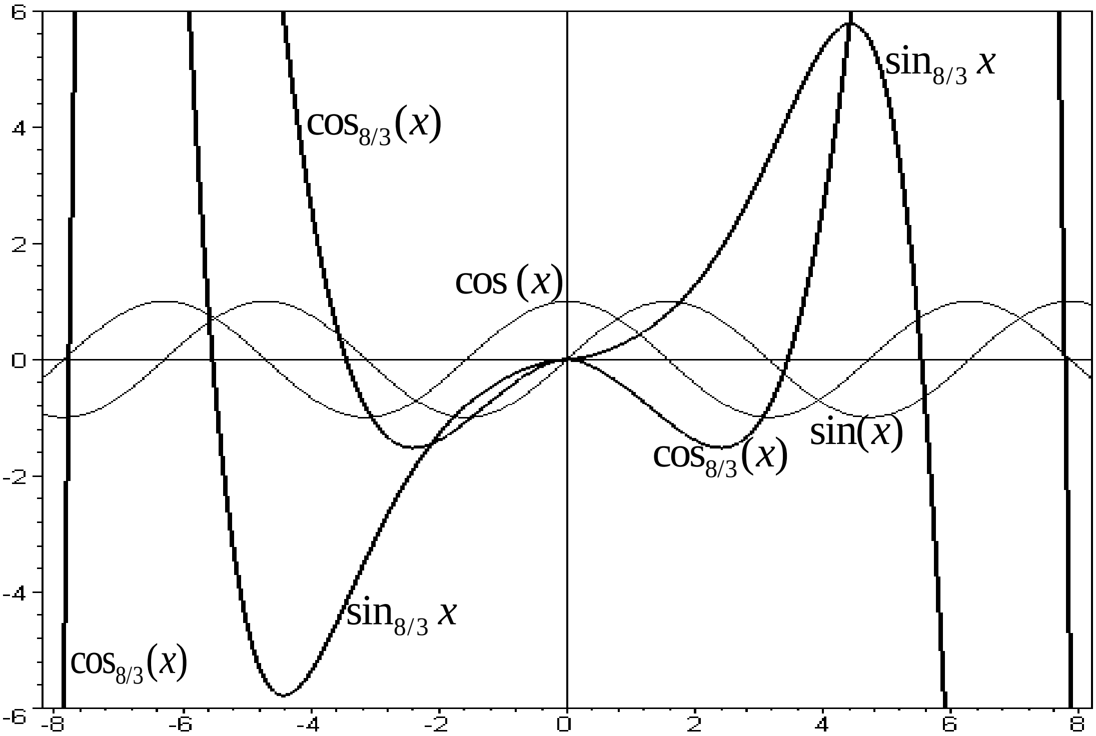


Рис. 4. Синусы и косинусы порядков 1 и 8/3

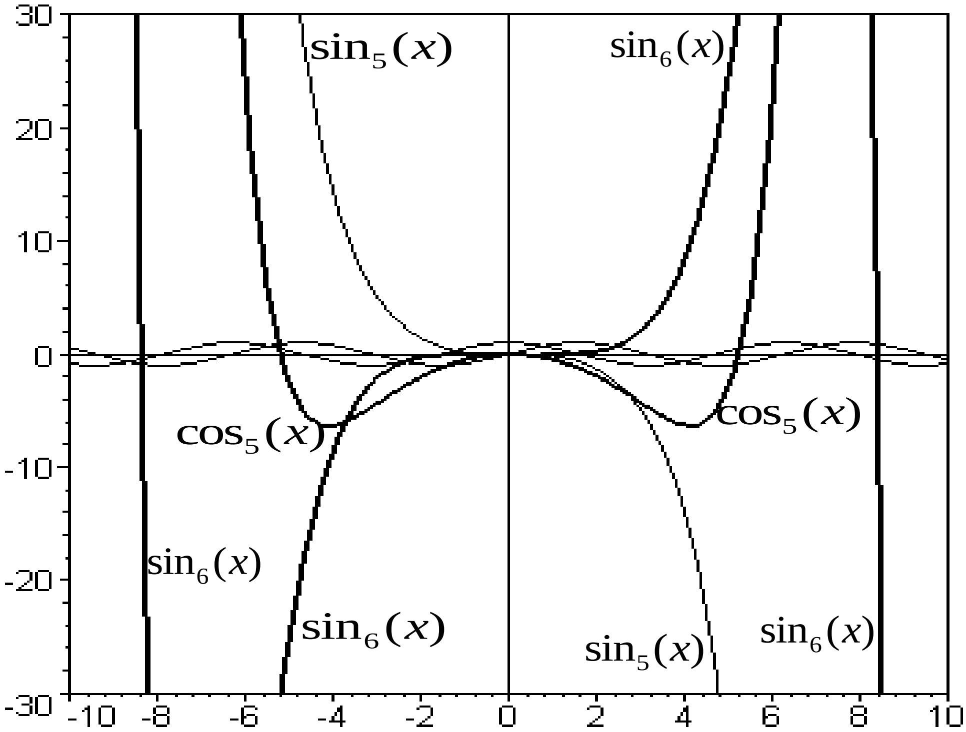


Рис. 5. Синусы порядков 1, 5, 6 и косинусы порядков 1, 5

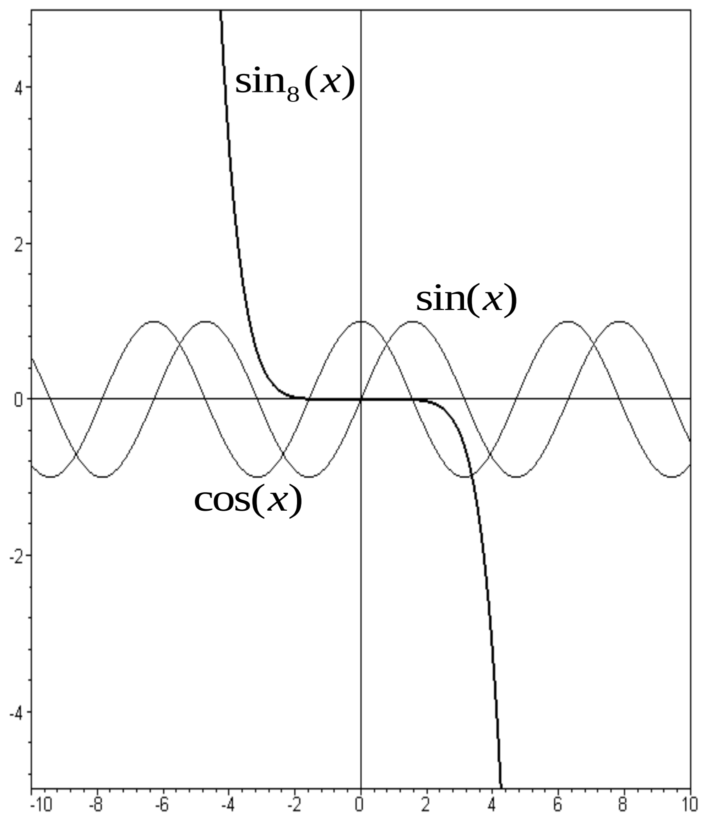


Рис. 6. Синус и косинус порядка 1 и синус порядка 8

Чем больше дробный порядок у синусов и косинусов отличается от единицы, тем сильней эти функции отличаются от соответствующих функций традиционного анализа.

Справедливы свойства симметрии для приведённых функций для любых вещественных порядков s:

$$\begin{gathered}\mathrm{ch}_s(x)=\mathrm{ch}_s(-x),\, \mathrm{sh}_s\, x=-\mathrm{sh}_s(-x);\\ \cos_s(x)=\cos_s(-x),\, \sin_s x=-\sin_s(-x).\end{gathered} \tag{10.8}$$

Одним из важных вопросов для развития дробного анализа является классификация элементарных функций, таких как экспоненты, гиперболические и тригонометрические функции, по их свойствам. Это поможет, в свою очередь, проклассифицировать множество всех ветвей дробного анализа и разбить их на множества похожих по свойствам относительно независимых теорий [17, 18].

§ 11. Полиномы дробных порядков в дробном анализе

В стандартном анализе одними из самых важных элементарных функций являются полиномы. Через полиномы выражаются некоторые другие элементарные функции.

Полиномы дробных порядков $P_{s|n}(x)$ [19] являются обобщением полиномов стандартного анализа с целочисленными порядками [20]

Определение. Функции вида

$$P_{s|n}(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{s(i+1)-1},\, a_i=\mathrm{const},\, n=0,1,2,3,\dots,\, n<\infty, \tag{11.1}$$

будем называть *дробными полиномами порядка s степени n*, или *полиномами дробных порядков*.

Или, в подробной записи, полином будет иметь вид

$$P_{s|n}(x)=a_0x^{s-1}+a_1x^{2s-1}+a_2x^{3s-1}+\dots+a_{n-1}x^{sn-1}+a_nx^{s(n+1)-1}. \tag{11.2}$$

Для дробных полиномов по аналогии с полиномами традиционного анализа (s = 1) легко ввести алгебраические операции и рассмотреть их алгебраическую структуру.

Введём основные алгебраические операций для дробных полиномов и рассмотрим их основные свойства.

Умножение на вещественное (или комплексное) число α:

$$\alpha P_{s|n}(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^{s(i+1)-1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^{s(i+1)-1}.$$

Свойства умножения дробных полиномов на число.

1. Умножение на единицу (*унитарность*):

$$1P_{s|n}(x) = P_{s|n}(x).$$

2. Ассоциативность умножения на число:

$$\alpha(\beta P_{s|n}(x)) = (\alpha\beta)P_{s|n}(x).$$

Сложение дробных полиномов порядка s определяется равенством

$$P_{s|n}(x) + Q_{s|n}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{s(i+1)-1} + \sum_{i=0}^{n} b_i x^{s(i+1)-1} = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^{s(i+1)-1}.$$

3. Ассоциативность относительно операции сложения дробных полиномов:

$$(P_{s|n}(x) + Q_{s|n}(x)) + R_{s|n}(x) = P_{s|n}(x) + (Q_{s|n}(x) + R_{s|n}(x)).$$

4. Сложение с нулевым полиномом:

$$P_{s|n}(x) + 0 = P_{s|n}(x).$$

5. Наличие у каждого дробного полинома $P_{s|n}(x)$ противоположного $-P_{s|n}(x)$:

$$P_{s|n}(x) + (-P_{s|n}(x)) = 0.$$

6. Коммутативность относительно операции сложения:

$$P_{s|n}(x) + Q_{s|n}(x) = Q_{s|n}(x) + P_{s|n}(x).$$

Справедливы законы дистрибутивности.

7. Дистрибутивность относительно сложения полиномов:

$$\alpha(P_{s|n}(x)+Q_{s|n}(x))=\alpha Q_{s|n}(x)+\alpha P_{s|n}(x).$$

8. Дистрибутивность относительно сложения чисел:

$$(\alpha+\beta)P_{s|n}=\alpha P_{s|n}(x)+\beta P_{s|n}(x).$$

Из свойств 3–6 следует теорема.

Теорема. Относительно операции сложения дробные полиномы порядка s степени n образуют коммутативную (абелеву) группу.

В силу свойств 1–8 следует теорема.

Теорема. Относительно операций умножения дробных полиномов на число и относительно операции сложения дробные полиномы порядка s степени n образуют линейное пространство.

Для полиномов дробного порядка введём следующие пространства.

Определение. Пространством дробных полиномов порядка s степени n будем называть множество всех возможных полиномов порядка s степени n и обозначать $R_{s|n}\{\mathbb{R}\}$.

Определение. Пространством дробных полиномов порядка s всех конечных степеней будем называть множество всех возможных полиномов порядка s и обозначать $R_s\{\mathbb{R}\}$.

Тогда каждое пространство $R_{s|n}\{\mathbb{R}\}$ является коммутативной группой относительно сложения и линейным пространством относительно операций умножения на число и сложения.

Для пространств $R_{s|n}\{\mathbb{R}\}$ справедливы отношения включения

$$R_{s|0}\{\mathbb{R}\}\subset R_{s|1}\{\mathbb{R}\}\subset R_{s|2}\{\mathbb{R}\}\subset\ldots\subset R_{s|n}\{\mathbb{R}\}\subset R_{s|(n+1)}\{\mathbb{R}\}\subset\ldots$$

Из отношения включения следует, что рассмотренные операции и их свойства для полиномов одного порядка s, но разных степеней, n и k ($n\geq k$) верны. При этом полиномы степени k являются частными случаями полиномов степени n.

От дробных полиномов можно находить дробные производные и дробные интегралы. Рассмотрим свойства дробных полиномов относительно операций дифференцирования и интегрирования.

Теорема. При взятии производной порядка s от полинома порядка s получаем полином того же порядка, но степень его уменьшается на единицу, а при интегрировании степень увеличивается на единицу:

$$d^{-s}x : P_{s|n}(x) = P_{s|(n-1)}(x);$$

$$d^{s}x : P_{s|n}(x) = P_{s|(n+1)}(x) + C_s(x).$$

Определение. Если функцию можно продифференцировать m раз оператором дифференцирования порядка s, пока очередная производная не превратится в ноль, то такую функцию будем называть *m-гладкой порядка s*.

Теорема. Полиномы порядка s степени n можно продифференцировать n + 1 раз $(d^{-s}x)^{n+1} : P_{s|n}(x) = 0$. Или полиномы порядка s степени n являются (n + 1)-*гладкими функциями порядка s.*

Теорема. Относительно операций дифференцирования и интегрирования порядка s дробные полиномы порядка s степени n образуют линейное пространство.

Теорема. Относительно операций умножения на число и сложения дробные полиномы порядка s степени n образуют линейное пространство.

Примеры дробных полиномов. В случае $s = 1$ имеют место полиномы традиционного анализа

$$P_n(x) \equiv P_{1|n}(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n. \tag{11.3}$$

Для порядка $s = 1/3$ полиномы степени n будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{(1/3)|n}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i+1)/3-1} = a_0x^{-2/3} + a_1x^{-1/3} + a_2x^0 + a_3x^{1/3} + \\ + a_4x^{2/3} + a_5x^1 + ... + a_{n-3}x^{(n-2)/3} + a_{n-2}x^{(n-1)/3} + a_{n-1}x^{n/3}. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Степенные функции в каждой ветви имеют особенности. Рассмотрим их.

Степенные функции x^{α} порядка s.

В случае, когда у дробностепенных полиномов вещественного порядка s один числовой коэффициент отличен от нуля, а все остальные равны нулю, получим степенную функцию порядка s степени $n - 1$:

$$x^{sn-1};\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{11.5}$$

Показатели степеней степенных функций x^{α} у ветви дробного анализа порядка s будут определяться соотношением

$$\alpha = sn - 1. \tag{11.6}$$

Теорема. Степенные функции порядка s степени $n - 1$ являются *n-гладкой порядка s*, и их можно продифференцировать n раз оператором $d^{-s}x$:

$$(d^{-s}x)^{n+1} : x^{sn-1} = 0.$$

Если в степенных функциях показатель степени α не удовлетворяет условию $\alpha = sn - 1$, то такие функции могут быть в общем случае бесконечно гладкими порядка s.

Глава 4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ

§ 12. Дробностепенные ряды и степенные ряды с дробным шагом

Оператор дробного интегродифференцирования может действовать не только на степенные функции, но и на более общие функции, которые можно представить в виде степенных рядов, имеющих в дробном анализе фундаментальное значение.

Степенные ряды в дробном анализе оказались адекватным и удобным инструментом для представления функций и для работы. При этом оказалось, что в дробном анализе степенные ряды имеют свои особенности и, как следствие, несколько иные свойства, в отличие от типичных степенных рядов традиционного анализа.

Это видно уже из того, что полученные ранее элементарные функции дробного анализа представляются в виде степенных рядов. Более того, из полученных функций следует, что степенные ряды в дробном анализе в общем случае должны иметь дробные порядки *с постоянным дробным шагом*.

Поэтому имеет смысл рассмотреть вопрос о роли степенных рядов с дробными степенями в дробном анализе более глубоко.

Определение. Ряды, элементы которых являются степенными функциями любых конечных вещественных порядков, будем называть *дробностепенными рядами*:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{\alpha_n} = a_{n_0}(x-x_0)^{\alpha_0} + a_{n_0+1}(x-x_0)^{\alpha_1} + a_{n_0+2}(x-x_0)^{\alpha_2} + \ldots \tag{12.1}$$
$$\ldots + a_{n_0+n}(x-x_0)^{\alpha_n} + \ldots;\ n_0, n \in \mathbb{Z};\ x_0, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Введём важный частный случай дробностепенного ряда.

Определение. Дробностепенной ряд будем называть рядом с *постоянным шагом* β, если показатели степеней α_{n+1} и α_n между соседними элементами ряда с номерами $n+1$ и n различаются на постоянное число β:

$$\beta = |\alpha_{n+1} - \alpha_n| = \mathrm{const} > 0;\ \alpha_{n+1}, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}.$$

Такой ряд в общем виде можно записать так:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{\alpha_0+n\beta} = a_{n_0}(x-x_0)^{\alpha_0} + a_{n_0+1}(x-x_0)^{\alpha_0+\beta} + \\ + a_{n_0+2}(x-x_0)^{\alpha_0+2\beta} + \ldots + a_{n_0+n}(x-x_0)^{\alpha_0+n\beta} + \ldots;\ n_0, n \in \mathbb{Z}, n_0;\ \beta, \alpha_0 \in \mathbb{R}. \qquad (12.2)$$

Определение. Дробностепенные ряды с постоянным шагом называются *равношаговыми*, если шаги этих рядов равны.

Степенные ряды ветви дробного анализа порядка s задаются рядами с шагом s

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{sn-l};\ a_n, s, l \in \mathbb{R}; l > 0; n_0, n, x_0 \in \mathbb{Z}. \qquad (12.3)$$

Кроме шага в дробностепенных рядах важно задать *начальную* (*минимальную*) степень ряда n_0 и центр ряда x_0. Константа l здесь взята для общности, и обычно она равна 1.

Начальный элемент ряда n_0 может быть как целым конечным числом (положительным, нулевым или отрицательным), так и бесконечным отрицательным.

Такие ряды будем называть *степенными рядами с дробным шагом* s (или *дробностепенным рядом порядка* s).

Определение. Дробностепенной ряд порядка s вида

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn-l}, \qquad (12.4)$$

будем называть *дробностепенным рядом порядка* s с центром в нуле.

Если рассматривать разложение в дробностепенной ряд не в точке x, а в точке $x - x_0$, тогда перейдём к ряду более общего типа.

Определение. Дробностепенной ряд порядка s вида

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{sn-l}, \qquad (12.5)$$

будем называть *дробностепенным рядом порядка* s с центром в точке x_0.

Такие ряды легко обобщить на случай, когда суммирование по индексу n будет производиться в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Определение. Дробностепенной ряд порядка s вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn-l}, \tag{12.6}$$

то такой ряд будем называть *дробностепенным рядом Лорана порядка s* функции $f_s(x)$ с центром в точке x_0.

Определение. Если функция представима в виде дробностепенного ряда порядка s, то такую функцию будем называть *дробноаналитической функцией порядка s*.

Полученные ранее элементарные функции, такие как дробные экспоненты, дробные тригонометрические и дробные гиперболические функции порядка s, выражаются через ряд порядка s, в котором константа $l = 1$:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn-1};\ a_n, s \in \mathbb{R};\ n_0, n \in \mathbb{Z}. \tag{12.7}$$

§ 13. Операции над дробностепенными рядами

Для дробностепенных рядов можно ввести операции, аналогичные операциям с рядами в традиционном анализе. Рассмотрим эти операции на примере дробностепенных рядов порядка s.

Умножение ряда на вещественное (или комплексное) число α:

$$\alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn-l} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha a_n (x - x_0)^{sn-l}.$$

Сложение рядов определяется так:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn-l} + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{sn-l} = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^{sn-l}.$$

Перечислим основные свойства этих операций.

1. Умножение на единицу (унитарность):

$$1 \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn-l} = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn-l}.$$

2. Ассоциативность умножения на числа:

$$\alpha\left(\beta\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}\right)=(\alpha\beta)\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}.$$

3. Ассоциативность сложения дробностепенных рядов:

$$\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}+\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{sn-l}\right)+\sum_{n=n_0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{sn-l}=$$
$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}+\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{sn-l}+\sum_{n=n_0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{sn-l}\right).$$

4. Коммутативность сложения дробностепенных рядов:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}+\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{sn-l}=\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{sn-l}+\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}.$$

5. Существование нулевого ряда 0, у которого все элементы и их сумма равны нулю:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}+0=\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}.$$

6. Существование противоположного ряда для данного ряда, все элементы которого противоположны по знаку элементам данного ряда:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}+\left(-\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}\right)=0.$$

7. Дистрибутивность относительно сложения чисел α и β:

$$(\alpha+\beta)\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}=\alpha\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}+\beta\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{sn-l}.$$

8. Дистрибутивность относительно сложения рядов:

$$\alpha\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{sn-l}+\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{sn-l}\right)=$$
$$=\alpha\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{sn-l}+\alpha\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{sn-l}.$$

Из перечисленных алгебраических свойств операций над дробностепенными рядами легко получить следующие утверждения.

Теорема. В операциях умножения на число и сложения дробностепенным рядам порядка s ставятся в соответствие дробностепенные ряды того же порядка s.

В данной теореме сформулировано очень важное утверждение о том, что множество дробностепенных рядов порядка s относительно операций умножения на число и сложения является замкнутым.

Теорема. Относительно операции сложения дробностепенные ряды порядка s образуют коммутативную группу.

Теорема. Относительно операций умножения на число и сложения дробностепенные ряды порядка s образуют линейное пространство.

Кроме простых алгебраических операций с равношаговыми дробностепенными рядами возможны и аналитические операции дробного дифференцирования и дробного интегрирования.

Рассмотрим важные случаи дробного интегродифференцирования степенных рядов с постоянным дробным шагом s дробными операторами того же порядка s.

Дробная производная порядка s от дробностепенных рядов порядка s:

$$d^{-s}x:\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{sn-l}=\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\frac{\Gamma(sn-l+1)}{\Gamma(sn-s-l+1)}(x-x_0)^{sn-l-s}=$$
$$=\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\frac{\Gamma(sn-l+1)}{\Gamma(s(n-1)-l+1)}(x-x_0)^{s(n-1)-l}.$$

Дробный интеграл порядка s дробностепенных рядов порядка s:

$$d^{s}x:\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{sn-l}=\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\frac{\Gamma(sn-l)}{\Gamma(sn-l+s)}(x-x_0)^{sn-l+s}+C_s(x)=$$
$$=\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\frac{\Gamma(sn-l)}{\Gamma(s(n+1)-l)}(x-x_0)^{s(n+1)-l}+C_s(x).$$

Отсюда видно, что при взятии производной или интеграла порядка s от дробностепенных рядов порядка s мы получаем дробностепенные ряды того же порядка s, т. е. справедлива важная теорема.

Теорема. Дробное интегродифференцирование d-оператором $d^{\pm s}x$ степенного ряда с постоянным дробным шагом s переводит его в ряд с постоянным дробным шагом s.

Очевидно, что дробностепенные ряды можно дифференцировать бесконечное количество раз.

Определение. Ели функцию можно продифференцировать бесконечное количество раз операторами дробных порядков, то такие функции будем называть *бесконечно дробно гладкими*.

Определение. Если функцию можно продифференцировать бесконечное количество раз оператором порядка s, то такую функцию будем называть *бесконечно гладкой порядка* s.

Теорема. Дробноаналитические функции являются бесконечно дробно гладкими.

Теорема. Все рассмотренные операции над дробностепенными рядами порядка s ставят им в соответствие дробностепенные ряды того же порядка s. Это значит, что относительно рассмотренных операций множество дробностепенных рядов порядка s является замкнутым.

Поэтому для работы в рамках дробного анализа удобно ввести пространства дробностепенных рядов.

§ 14. Пространства дробностепенных рядов

Для последовательного построения дробного анализа необходимо введение необходимых для работы функций.

Каждая ветвь дробного анализа s имеет свои пространства функций, которые представимы в виде множества степенных рядов с дробными порядками s.

Выбор такого пространства обусловлен тем, что в операциях дробного интегрирования и дифференцирования элементы рядов с такими степенями или появляются (при интегрировании), или «исчезают» (при дифференцировании), или переходят в соседние элементы ряда.

Определение. Множество всех возможных рядов порядка s будем называть *пространством дробностепенных рядов порядка* s и обозначать $DR_s\{\mathbb{R}\}$.

Определение. Множество всех возможных дробностепенных рядов всех конечных порядков будем называть *пространством дробно-*

степенных рядов всех конечных вещественных порядков и обозначать $DR\{\mathbb{R}\}$.

Тогда каждое пространство рядов одного порядка $DR_s\{\mathbb{R}\}$ является коммутативной группой относительно сложения и линейным пространством относительно операций умножения на число и сложения.

Для пространств $DR_s\{\mathbb{R}\}$ справедливо равенство

$$\bigcup_{-\infty<i<\infty} DR_{s_i}\{\mathbb{R}\} = DR\{\mathbb{R}\}; i \in \mathbb{R}.$$

Пространство $DR\{\mathbb{R}\}$ тоже образует коммутативную (абелеву) группу относительно операции сложения и линейное пространство относительно операции умножения на число и сложения дробностепенных рядов любых порядков.

Для пространств различных порядков $DR_s\{\mathbb{R}\}$ будут справедливы отношения включения

$$DR_{ns}\{\mathbb{R}\} \subset DR_s\{\mathbb{R}\} \subset DR_{(1/n)s}\{\mathbb{R}\}.$$

Глава 5. МНОГОЗНАЧНОСТЬ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО И МНИМОГО АРГУМЕНТА

§ 15. Замена переменных в дробностепенных рядах

Для функции $f(x)$, представимой степенным рядом с дробным шагом s [17–18]

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn-1};\ a_n, s \in \mathbb{R};\ n_0, n \in \mathbb{Z},$$

можно применить формулы замены переменных (4.10), (4.11) и (4.12) при операциях дифференцирования и интегрирования дробного порядка s. Тогда можно переписать функцию в виде [16]

$$f(\lambda x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (\lambda x)^{sn-1},\ a_n, s, \lambda \in \mathbb{R}, n_0, n \in \mathbb{Z}.$$

И тогда можно получить формулы, совпадающие с (4.13) и (4.14):

$$d^{-s}x : f(\lambda x) = \lambda^s f^{(s)}(\lambda x),\ \lambda = \text{const}:$$

$$d^{s}x : f(\lambda x) = \lambda^{-s} \mathrm{F}^{(s)}(\lambda x) + C_s(x).$$

Здесь $C_s(x)$ – полином интегрирования, $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ – *базовая первообразная* функции $f(x)$, или такая первообразная, в которой полином интегрирования $C_s(x) = 0$.

Рассмотрим важные случаи, когда константа является отрицательным $-\lambda$ или мнимым числом $i\lambda$. Тогда можно получить соотношения для интегралов и производных дробных порядков:

$$d^{-s}x : f(-\lambda x) = (-1)^s \lambda^s f^{(s)}(-\lambda x); \tag{15.1}$$

$$d^{s}x : f(-\lambda x) = (-1)^{-s} \lambda^{-s} \mathrm{F}^{(s)}(-\lambda x) + C_s(x); \tag{15.2}$$

$$d^{-s}x : f(i\lambda x) = i^s \lambda^s f^{(s)}(i\lambda x); \tag{15.3}$$

$$d^{s}x : f(i\lambda x) = i^{-s} \lambda^{-s} \mathrm{F}^{(s)}(i\lambda x) + C_s(x). \tag{15.4}$$

В случае дробного порядка дифференцирования и интегрирования получаются дробные степени отрицательных и мнимых констант. Отрицательное и мнимое число любой вещественной степени будет набором комплексных чисел от одного для традиционного анализа ($s = 1$) до бесконечного счётного множества для иррациональных порядков. Для рациональных порядков степенями отрицательных и мнимых чисел будет конечное множество комплексных чисел [21]:

$$\begin{gathered}(-1)^{\pm s} = \exp(\pm is\pi(1+2k)) = \\ = \cos(s\pi(1+2k)) \pm i\sin(s\pi(1+2k));\end{gathered} \tag{15.5}$$

$$\begin{gathered}i^{\pm s} = \exp(\pm is(\pi/2+2\pi k)) = \\ = \cos(s(\pi/2+2\pi k)) \pm i\sin(s(\pi/2+2\pi k)); k \in \mathbb{Z}.\end{gathered} \tag{15.6}$$

Тогда производная и интеграл примут вид для отрицательных значений аргумента

$$\begin{gathered}d^{-s}x: f(-\lambda x) = \exp(is\pi(1+2k))\lambda^s f^s(-\lambda x) = \\ = [\cos(s\pi(1+2k)) + i\sin(s\pi(1+2k))]\lambda^s f^s(-\lambda x);\end{gathered} \tag{15.7}$$

$$\begin{gathered}d^{s}x: f(-\lambda x) = \exp(-is\pi(1+2k))\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(-\lambda x) + C_s(x) = \\ = [\cos(s\pi(1+2k)) - i\sin(s\pi(1+2k))]\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(-\lambda x) + C_s(x).\end{gathered} \tag{15.8}$$

Производная и интеграл для мнимых значений аргумента будут

$$\begin{gathered}d^{-s}x: f(i\lambda x) = \exp(is(\pi/2+2\pi k))\lambda^s f^{(s)}(ix) = \\ = [\cos(s(\pi/2+2\pi k)) + i\sin(s(\pi/2+2\pi k))]\lambda^s f^{(s)}(ix);\end{gathered} \tag{15.9}$$

$$\begin{gathered}d^{s}x: f(i\lambda x) = \exp(-is(\pi/2+2\pi k))\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(ix) + C_s(x) = \\ = [\cos(s(\pi/2+2\pi k)) - i\sin(s(\pi/2+2\pi k))]\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(ix) + C_s(x).\end{gathered} \tag{15.10}$$

В силу многозначности коэффициентов получаем, что операция дробного интегрирования и дифференцирования вещественных порядков от функций отрицательного и мнимого аргументов, является неоднозначной для всех случаев, кроме традиционного анализа.

Это значит, что при дробном дифференцировании и интегрировании функции будет появляться конечное число для рациональных порядков и бесконечное для иррациональных порядков операторов интегрирования и дифференцирования. Среди множества значений дробных производных и интегралов можно выделить один.

Определение. Производные и интегралы дробных порядков, для которых число $k = 0$, будем называть *главными производными и главными интегралами*.

§ 16. Замена переменных в экспонентах

Главные производная и интеграл любого вещественного порядка s от дробной экспоненты порядка s отрицательного аргумента будут

$$d^{-s}x: f(-\lambda x) = \exp(is\pi)\lambda^s f^s(-\lambda x) = \\ = [\cos(s\pi) + i\sin(s\pi)]\lambda^s f^s(-\lambda x); \tag{16.1}$$

$$d^s x: f(-\lambda x) = \exp(-is\pi)\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(-\lambda x) + C_s(x) = \\ = [\cos(s\pi) - i\sin(s\pi)]\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(-\lambda x) + C_s(x). \tag{16.2}$$

Главные производная и интеграл любого вещественного порядка s от функции мнимого аргумента будут

$$d^{-s}x: f(i\lambda x) = \exp(is\pi/2)\lambda^s f^{(s)}(ix) = \\ = [\cos(s\pi/2) + i\sin(s\pi/2)]\lambda^s f^{(s)}(ix); \tag{16.3}$$

$$d^s x: f(i\lambda x) = \exp(-is\pi/2)\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(ix) + C_s(x) = \\ = [\cos(s\pi/2) - i\sin(s\pi/2)]\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(ix) + C_s(x). \tag{16.4}$$

Производная и интеграл от экспонент порядка s для отрицательных значений аргумента от экспонент мнимого аргумента порядка s будут

$$d^{-s}x: \exp_s(-\lambda x) = \exp(is\pi(1+2k))\lambda^s \exp_s(-\lambda x) = \\ = [\cos(s\pi(1+2k)) + i\sin(s\pi(1+2k))]\lambda^s \exp_s(-\lambda x);$$

$$d^s x: \exp_s(-\lambda x) = \exp(-is\pi(1+2k))\lambda^{-s} \exp_s(-\lambda x) + C_s(x) = \\ = [\cos(s\pi(1+2k)) - i\sin(s\pi(1+2k))]\lambda^{-s} \exp_s(-\lambda x) + C_s(x).$$

Главные производная и интеграл любого вещественного порядка s от экспонент порядка s будут

$$d^{-s}x:\exp_s(-\lambda x)=\exp(-is\pi)\lambda^s\exp_s(-\lambda x)=$$
$$=(\cos(s\pi)+i\sin(s\pi))\lambda^s\exp_s(-\lambda x);$$

$$d^{s}x:\exp_s(-\lambda x)=\exp(-s\pi)\lambda^{-s}\exp_s(-\lambda x)+C_s(x)=$$
$$=(\cos(s\pi)-i\sin(s\pi))\lambda^{-s}\exp_s(-\lambda x)+C_s(x).$$

Тогда производная и интеграл любого вещественного порядка *s* от экспонент мнимого аргумента порядка *s* будут

$$d^{-s}x:\exp_s(i\lambda x)=i^s\lambda^s\exp_s(ix)=\exp(is(\pi/2+2\pi k))\lambda^s\exp_s(ix)=$$
$$=[\cos(s(\pi/2+2\pi k))+i\sin(s(\pi/2+2\pi k))]\lambda^s\exp_s(ix);$$

$$d^{s}x:\exp_s(i\lambda x)=i^{-s}\lambda^{-s}\exp_s(ix)+C_s(x)=$$
$$=\exp(-is(\pi/2+2\pi k))\lambda^{-s}\exp_s(ix)+C_s(x)=$$
$$=[\cos(s(\pi/2+2\pi k))-i\sin(s(\pi/2+2\pi k))]\lambda^{-s}\exp_s(ix)+C_s(x).$$

Главные производная и интеграл любого вещественного порядка *s* от мнимого аргумента будут

$$d^{-s}x:\exp_s(i\lambda x)=\exp(is\pi/2)\lambda^s\exp_s(ix)=$$
$$=(\cos(s\pi/2)+i\sin(s\pi/2))\lambda^s\exp_s(ix);$$

$$d^{s}x:\exp_s(i\lambda x)=\exp(is\pi/2)\lambda^{-s}\exp_s(ix)+C_s(x)=$$
$$=(\cos(s\pi/2)-i\sin(s\pi/2))\lambda^{-s}\exp_s(ix)+C_s(x).$$

Для примера приведём производные и интегралы половинного порядка от экспоненты половинного порядка отрицательного аргумента:

$$d^{-1/2}x:\exp_{1/2}(-x)=(-1)^{1/2}\exp_{1/2}(-x)=\pm i\exp_{1/2}(-x);$$

$$d^{1/2}x:\exp_{1/2}(-x)=(-1)^{-1/2}\exp_{1/2}(-x)+C_{1/2}(x)=\pm i\exp_{1/2}(-x)+C_{1/2}(x).$$

У экспоненты половинного порядка с отрицательным аргументом будут по две производные и по два интеграла. Их главные значения соответственно будут

$$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(-x) = i\exp_{1/2}(-x);$$

$$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(-x) = -i\exp_{1/2}(-x) + C_{1/2}(x).$$

Производные и интегралы половинного порядка от экспоненты половинного порядка мнимого аргумента:

$$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(ix) = i^{1/2}\exp_{1/2}(ix);$$

$$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(ix) = i^{-1/2}\exp_{1/2}(ix) + C_{1/2}(x).$$

Квадратные корни из мнимой единицы имеют по два решения:

$$i^{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), i^{-1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Тогда для функций мнимого аргумента половинного порядка будем иметь две производные и два интеграла

$$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(ix) = i^{1/2}\exp_{1/2}(ix) = \pm 2^{-1/2}(1+i)\exp_{1/2}(ix);$$

$$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(ix) = i^{-1/2}\exp_{1/2}(ix) = \pm 2^{-1/2}(1-i)\exp_{1/2}(ix) + C_{1/2}(x).$$

Из этих двух производных и интегралов главными значениям соответствует знак «+»:

$$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(ix) = 2^{-1/2}(1+i)\exp_{1/2}(ix);$$

$$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(ix) = 2^{-1/2}(1-i)\exp_{1/2}(ix) + C_{1/2}(x).$$

Из сказанного следует, что в дробном анализе, рассмотрение функций, которые выражаются через степенные ряды с дробным шагом, требует перехода в комплексную плоскость.

Глава 6. ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА *d*-ОПЕРАТОРОВ

§ 17. Основные соотношения внешней алгебры

Внешняя алгебра *d*-операторов выражает их отношение к функциям. При взаимодействии операторов дробного интегродифференцирования и функций, на которые они действуют, выясняется, что алгебраические свойства операторов не всегда соответствуют внутренней алгебре операторов [11]. Поэтому имеет смысл рассмотреть данный вопрос более подробно.

d-оператор линейный, т. е. удовлетворяет условиям однородности и аддитивности.

1. Однородность.

В общем случае для любых функций справедливо равенство

$$d^s x : af(x) = ad^s x : f(x);\ a = \text{const}. \tag{17.1}$$

В частности для степенных функций данное равенство будет

$$d^s x : ax^q = ad^s x : x^q .$$

Это соотношение легко получить:

$$d^s x : ax^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)} ax^{q+s} = a\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)} x^{q+s} = ad^s x : x^q .$$

В частности справедливы равенства

$$d^s x : 1f(x) = d^s x : f(x);\ a = \text{const (\textit{унитарность})};$$

$$d^s x : 0f(x) = 0 \text{ (\textit{умножение на ноль})}.$$

2. Аддитивность для сложения функций:

$$d^s x : (f(x) + g(x)) = d^s x : f(x) + d^s x : g(x). \tag{17.2}$$

Аддитивность для сложения операторов:

$$(d^s x + d^q x)f(x) = d^q x : f(x) + d^s x : f(x).$$

Рассмотрим действие произведения d-операторов и их композиций на функции.

Теорема. Последовательное действие d-операторов $d^s x$ и $d^r x$ на функцию и действие композиция этих операторов $d^{s+r}x$ на ту же функцию в общем случае дают различные результаты.

Это значит, что в общем случае справедливо неравенство

$$d^{\alpha}x \cdot d^{\beta}x : f(x) \neq d^{\beta+\alpha}x : f(x). \qquad (17.3)$$

Это можно показать на примере степенных функций. При последовательном действии операторов $d^{-1}x$ и $d^{-1/2}x$ на константу a получим

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1}x : a = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

При действии на константу a композиции операторов $d^{-1}x$ и $d^{-1/2}x$ даёт

$$d^{-3/2}x : a = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-3/2+1)} x^{0-3/2} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2)} x^{-3/2} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} \neq 0.$$

Из этого следует, что справедливо неравенство

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1}x : a \neq d^{-3/2}x : a.$$

Если расписать последовательно действие двух дробных операторов, то получим

$$d^s x \cdot d^{\gamma} x : x^q = d^s x : \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma)} x^{q+\gamma} =$$

$$= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma)} \frac{\Gamma(q+1+\gamma)}{\Gamma(q+1+\gamma+s)} x^{q+s+\gamma} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma+s)} x^{q+s+\gamma} = d^{s+\gamma}x : x^q.$$

Из этого равенства видно, что оно справедливо при выполнении условий, которые можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Композиция операторов $d^s x$ и $d^r x$ в оператор $d^{s+r}x$ и декомпозиция оператора $d^{s+r}x$ в последовательность операторов $d^s x \cdot d^r x$ при воздействии их на степенную функцию x^q возможна, когда одновременно выполняются неравенства $q + s \neq -1, -2, -3, \ldots$; $q + r \neq -1, -2, -3, \ldots$; $q + s + r \neq -1, -2, -3, \ldots$

При этом очевидно, что выполняется равенство $d^{s+r}x = d^{r+s}x$, а декомпозиция правой и левой частей дадут операторы $d^r x \cdot d^s x$ и $d^s x \cdot d^r x$.

Теорема. Композиция и декомпозиция d-операторов с целочисленными порядками при их воздействии не дают одинаковые результаты

$$d^n x \cdot d^m x : f(x) = d^{m+n} x : f(x).$$

Эти утверждения верны по причине попадания сумм порядков операторов дифференцирования в полюсы гамма-функции.

Выполняется ещё одно важное свойство во внешней алгебре.

Теорема. Воздействие произведения трёх операторов на функцию ассоциативно:

$$d^s x(d^r x \cdot d^q x) f(x) = (d^s x \cdot d^r x) d^q x : f(x).$$

§ 18. Коммутативность и не коммутативность во внешней алгебре

Рассмотрим коммутативность d-операторов по отношению к функциям, на которые они действуют.

Для начала рассмотрим некоторые частные случаи.

Покажем это на примере:

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1}x : 1 = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

Вывод данного соотношения:

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1}x : 1 = d^{-1/2}x : \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1+1)} x^{-1} =$$

$$= d^{-1/2}x : \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} x^{-1} = d^{-1/2}x : \frac{1}{\infty} x^{-1} = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

Для другой последовательности операторов результат будет

$$d^{-1}x \cdot d^{-1/2}x : 1 = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} \neq 0.$$

Вывод данного соотношения:

$$d^{-1}x \cdot d^{-1/2}x:1 = d^{-1}x\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2+1)}x^{-1/2} = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(-1-1/2+1)}x^{-1-1/2} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-1/2)}x^{-3/2} = \frac{1}{\Gamma(-1/2)}x^{-3/2} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}x^{-3/2} \neq 0.$$

Другой пример воздействия оператора дифференцирования на полином интегрирования:

$$d^{-1}x : C_{1/2}(x) \neq 0;$$

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1/2}x : C_{1/2}(x) = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

Для операторов дробного интегродифференцирования с целочисленными порядками будет справедлива следующая теорема.

Теорема. Воздействие произведения двух операторов $d^{\pm s}x$ и $d^{\pm r}x$ на функцию $f(x)$ не коммутативно:

$$d^{\pm s}x \cdot d^{\pm r}x : f(x) \neq d^{\pm r}x \cdot d^{\pm s}x : f(x). \tag{18.1}$$

Рассмотрим случаи, когда коммутативность возможна.

Теорема. Воздействие произведения двух операторов $d^{\pm s}x$ и $d^{\pm r}x$ на степенную функцию x^q не коммутативно, когда одновременно выполняются неравенства $q + s \neq -1, -2, -3, \ldots$, $q + r \neq -1, -2, -3, \ldots$, $q + s + r \neq -1, -2, -3, \ldots$

Для операторов целочисленного порядка выполняются более простые соотношения.

Теорема. Операторы с целочисленными порядками коммутируют с точностью до сложения с полиномом интегрирования

$$d^n x \cdot d^m x : f(x) = d^m x \cdot d^n x : f(x). \tag{18.2}$$

Причин не коммутативности в дробном анализе две. Первую мы уже рассмотрели. В соответствии с ней не коммутативность связана с соотношением между порядками операторов дифференцирования и показателями степеней степенных функций.

Вторая причина не коммутативности связана с появлением полиномов интегрирования $C_s(x)$ в случае, если хотя бы один из двух перемножаемых операторов является оператором интегрирования.

Из этих равенств очевидна не коммутативность для степенных функций, которая характерна для традиционного анализа:

$$d^{-s}x \cdot d^{s}x : x^{q} = d^{0}x : x^{q} = \mathbf{1} : x^{q} = x^{q};$$

$$d^{s}x \cdot d^{-s}x : x^{q} = \mathbf{1} : x^{q} + C_{s}(x) = x^{q} + C_{s}(x).$$

Будут справедливы и более общие соотношения для любых функций:

$$d^{-s}x \cdot d^{s}x : f(x) = d^{0}x : f(x) = \mathbf{1} : f(x) = f(x);$$

$$d^{s}x \cdot d^{-s}x : f(x) = \mathbf{1} : f(x) + C_{s}(x) = f(x) + C_{s}(x).$$

Поэтому для дробностепенного интегродифференцирования справедливо неравенство

$$d^{s}x \cdot d^{-s}x : f(x) \neq d^{-s}x\, d^{s}x : f(x). \tag{18.3}$$

Данный тип коммутативности удобно выразить через *коммутатор*:

$$[d^{s}x, d^{-s}x]x^{q} = (d^{s}x \cdot d^{-s}x - d^{-s}x \cdot d^{s}x)x^{q} = C_{s}(x). \tag{18.4}$$

В более общем случае, когда операторы, не обратные друг к другу, и их порядки не равны нулю и один из них является оператором дифференцирования, а второй – оператором интегрирования, коммутативность не выполняется:

$$d^{s}x \cdot d^{-q}x \neq d^{-q}x \cdot d^{s}x. \tag{18.5}$$

Это можно записать в виде коммутатора:

$$\begin{gathered}[d^{q}x, d^{-s}x]f(x) = \\ = (d^{q}x \cdot d^{-s}x - d^{-s}x \cdot d^{q}x)f(x) = C_{q}(x) - d^{-s}x : C_{q}(x).\end{gathered} \tag{18.6}$$

Покажем это

$$d^q x \cdot d^{-s} x : f(x) = d^q x : f^{(s)}(x) \equiv \int f^{(s)}(x) d^q x + C_q(x);$$

$$d^{-s} x \cdot d^q x : f(x) = d^{-s} x(\mathrm{F}^{(q)}(x) + C_q(x)) = d^{-s} x : \mathrm{F}^{(q)}(x) + d^{-s} x : C_q(x).$$

Вычтя из первого соотношения второе, получим (18.6).

Справедливы соотношения между порядками операторов и порядками производных и первообразных:

$$d^{-s} x : \mathrm{F}^{(q)}(x) = d^q x : f^{(s)}(x) \equiv \int f^{(s)}(x) d^q x;$$
$$q - s \neq -1, -2, -3 \ldots; \; s - q \neq -1, -2, -3, \ldots$$

Это соотношение можно записать следующим образом:

$$d^{-s} x : \mathrm{F}^{(q)} = \mathrm{F}^{(q-s)}; \quad d^q x : f^{(s)} = f^{(s-q)}(x).$$

Или более кратко:

$$\mathrm{F}^{(q-s)} = f^{(s-q)}(x).$$

Для примера рассмотрим соотношение (18.6) для степенной функции:

$$d^q x \cdot d^{-s} x : x^r = d^q x : \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-s)} x^{r-s} =$$
$$= \frac{\Gamma(r-s+1)}{\Gamma(r+q+1-s)} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-s)} x^{r+q-s} + C_q(x) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1-s)} x^{r+q-s} + C_q(x)$$

и

$$d^{-s} x \cdot d^q x : x^r = d^{-s} x : \left(\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+q)} x^{r+q} + C_q(x) \right) =$$
$$= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+q)} \frac{\Gamma(r+q+1)}{\Gamma(r+q+1-s)} x^{r+q-s} + d^{-s} x : C_q(x) =$$
$$= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1-s)} x^{r+q-s} + d^{-s} x : C_q(x).$$

Здесь $q + r - s \neq -1, -2, -3, \ldots$; $q - s \neq -1, -2, -3, \ldots$

Вычтя из первого соотношения второе, опять получим (18.6).

Рассмотрим случай, когда операторы дифференцирования и интегрирования в коммутаторе стоят в другом порядке. Тогда будет

$$[d^{-s}x, d^q x] f(x) = -[d^q x, d^{-s}x] f(x) =$$
$$= (d^{-s}x \cdot d^q x - d^q x \cdot d^{-s}x) f(x) = d^{-s}x : C_q(x) - C_q(x).$$

Если в коммутаторе оба оператора будут операторами интегрирования, тогда получим

$$[d^s x, d^q x] f(x) = d^s x : C_q(x) - d^q x : C_s(x). \tag{18.7}$$

Получить данное соотношение просто:

$$\begin{gathered}[d^s x, d^q x] f(x) = \\ = d^s x \cdot d^q x : f(x) + d^s x : C_q(x) - d^q x \cdot d^s x : f(x) - d^q x : C_s(x).\end{gathered} \tag{18.8}$$

Для случая, кода выполняется коммутативность $d^s x \cdot d^q x : f(x) = d^q x \cdot d^s x : f(x)$, соотношение будет принимать вид

$$[d^s x, d^q x] f(x) = d^s x : C_q(x) - d^q x : C_s(x). \tag{18.9}$$

Для степенной функции соотношение (18.7) будет

$$\begin{gathered}[d^s x, d^q x] x^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1+s)} x^{r+q+s} + d^s x : C_q(x) - \\ - \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1+s)} x^{r+q+s} - d^q x : C_s(x) = d^s x : C_q(x) - d^q x : C_s(x).\end{gathered} \tag{18.10}$$

В общем случае произведение операторов $d^{\pm s}x$ и функций так же не является коммутативным, как в обычном анализе:

$$d^{\pm s}x : f(x) \neq f(x) d^{\pm s}x.$$

В частности, умножение оператора $d^{\pm s}x$ на число a не будет коммутативным

$$a d^{\pm s}x \neq d^{\pm s}x : a.$$

Глава 6. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕТВЕЙ ДРОБНОГО АНАЛИЗА И МОДЕЛЬНЫЕ ВЕТВИ ДРОБНОГО АНАЛИЗА

§ 19. Разнообразие ветвей дробного анализа

Упростить исследования дробного анализа можно путём разбиения множества всех ветвей на отдельные множества похожих ветвей, которые будем называть *родственными ветвями*. В качестве критерия схожести ветвей можно использовать степень схожести некоторых стандартных функций, которые будем называть *маркирующими функциями*. Например, в качестве маркирующей функции можно выбрать частные экспоненты тех или иных ветвей анализа. Такой выбор производится по причине фундаментального значения экспонент для математики, а также ввиду того, что через них выражаются многие важные функции, например, элементарные, специальные и др.

Если в родственных ветвях выбрать по одной или несколько ветвей, которые будем называть *модельными ветвями*, и подробно их исследовать, то по ним можно составлять качественные и некоторые количественные представления о других родственных ветвях.

Исходя из полученных данных об экспонентах, можно дать предварительную классификацию родственных ветвей дробного анализа.

Ветви целочисленных порядков:

– тривиальный случай: 0,

– стандартный анализ: 1,

– нечётные порядки: 3, 5, 7, …

– чётные порядки: 2, 4, 8, …

Ветви нецелочисленных рациональных порядков:

– с показателями степеней меньше единицы: 1/2, 1/3, 2/5, …

– с показателями степеней больше единицы, но меньше двух: 3/2, 5/3, 7/5, …

– с показателями степеней больше двух: 5/2, 7/3, 9/4, …

Ветви иррациональных порядков пока не ясно, как классифицировать.

В качестве модельных ветвей дробного анализа можно выбрать ветви следующих порядков.

Ветви дробных порядков меньше единицы:

– дробный анализ порядка 1/2,

– дробный анализ порядка 1/3,

– дробный анализ порядка 2/3.

Ветви дробных порядков больше единицы, но меньше двух:

– дробный анализ порядка 3/2,

– дробный анализ порядка 4/3,

– дробный анализ порядка 5/3.

Ветви дробных порядков больше двух:

– дробный анализ порядка 5/2,

– дробный анализ порядка 7/3.

Ветви целочисленных порядков:

– традиционный анализ, порядок 1,

– нечётные порядки 3, 5, 7,

– чётные порядки: чётно-нечётные 2, 6 и чётно-чётные 4, 8.

В качестве модельных ветвей иррационального анализа с иррациональными порядками могут быть выбраны ветви, например, с порядками: $1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{e}/2, e/2, e/3, \sqrt{\pi}/2, \pi/2, \pi/3, \pi/6, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, e, \pi$.

Для начала сделаем несколько замечаний относительно ветви $s = 1$.

§ 20. Ветвь стандартного анализа и принцип соответствия

Исключительно важным частным случаем целочисленного дробного анализа является ветвь с единичным порядком интегрирования и дифференцирования, $s = 1$, т. е. *традиционный*, или *стандартный*, анализ, творцами которого являются, прежде всего, Г. Лейбниц и И. Ньютон.

Важность ветви традиционного анализа обусловлена рядом причин.

Данная ветвь анализа возникла как исторически первый пример анализа, сразу получивший широкое развитие и интенсивно развивающийся и в настоящее время. Традиционный анализ показал не только свою жизнеспособность как математическая теория, но и огромную важность при описании окружающей действительности в самых разных практических приложениях. Без данной ветви анализа невозможно представить научно-технический прогресс, который пережило человечество за последние три века.

Накопленный опыт по созданию традиционного анализа может и должен быть использован для развития дробного анализа. Поэтому традиционный анализ имеет огромное значение для дробного анализа в методологическом плане. При этом стандартный анализ является не только образцом для построения дробного анализа, но и объектом обобщения.

Стандартный анализ выступает по отношению к дробному анализу и в некотором смысле *метаязыком*, поэтому он исключительно важен для дробного анализа ещё и в объяснительном, и в понятийном смысле. Другими словами, менее частная теория – стандартный анализ является образцом для построения более общей теории – дробного анализа – вообще и в частности для построения отдельных его ветвей. Имеет место преемственность между стандартным и дробным анализом. И подобная взаимозависимость между более общими и менее общими теориями в науке вполне обычно.

Стандартный анализ является не просто частным, но даже вырожденным случаем дробного анализа. Это видно уже по очень простым операторам дифференцирования и интегрирования степенных функций стандартного анализа (1.1) и (1.2), в сравнении с операторами вещественных порядков (2.1). Операторы традиционного анализа легко получить из d-оператора (2.1) для частного случая порядка $s = 1$

$$\begin{cases} d^{-1}x : x^q \equiv \dfrac{d}{dx} x^q = qx^{q-1}; \\ d^1 x : x^q \equiv \displaystyle\int x^q dx = \dfrac{1}{q+1} x^{q+1} + a_0; \\ d^1 x : x^{-1} \equiv \displaystyle\int x^{-1} dx = \ln|x| + a_0. \end{cases} \qquad (20.1)$$

Здесь a_0 – константа интегрирования.

Формула (20.1) совпадает привычными формулами дифференцирования и интегрирования (1.1) и (1.2) стандартного анализа.

В формуле (20.1) первое и второе равенства являются следствием первого и второго равенств в формуле (2.1) для $s = 1$, а третье равенство представляет логарифмический случай и является следствием девятого равенства (2.1). С третьего по шестое равенства в формуле (2.1) для порядка $s = 1$ теряют смысл: они не имеют в нём аналогов из-за того, что в них порядок дифференцирования и интегрирования s всегда нецелочисленный, а рассматриваемая ветвь $s = 1$ имеет целочисленный порядок.

Седьмое и восьмое равенства в формуле (2.1) для порядка $s = 1$ дают частные случаи первого и второго равенств формуле (20.1), когда показатель степенной функции имеет отрицательное целочисленное значение.

Пример. Рассмотрим случай интегрирования степенной функцией d-оператором, в котором отсутствует логарифмический случай, т. е. пятая формула в (2.1) не считается истинной.

В этом случае, если применять вторую формулу интегрирования из (2.1), получим бесконечность в полюсе гамма-функции:

$$d^1x:x^{-1}=\frac{\Gamma(-1+1)}{\Gamma(-1+1+1)}x^{-1+1}+a_0=\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(1)}x^0+a_0=\frac{\infty}{1}+a_0=\infty.$$

Данный пример показывает, что логарифмический случай важен, если требуется, чтобы в частном случае порядка $s = 1$ дробный анализ переходил в стандартный.

Наличие логарифмического случая может служить одним из критериев соответствия ветви дробного анализа порядка $s = 1$ стандартному анализу.

Поэтому имеет смысл сформулировать для дробного анализа важное требование, которое назовём *принципом соответствия*.

Принцип соответствия в дробном анализе заключается в том, что в частном случае, когда порядок дифференцирования и интегрирования равен 1, будем иметь ветвь дробного анализа, которая будет соответствовать традиционному анализу.

Конкретно это означает, что должен выполняться ряд простых, но важных требований, среди которых следующие:

1) операторы дробного интегрирования и дифференцирования для порядка $s = 1$ будут давать привычные формулы дифференцирования и интегрирования;

2) в частном случае интегрирования степенной функции x^{-1} должен приводить к логарифмическому случаю;

3) полином интегрирования в данном случае вырождается в константу интегрирования;

4) производная первого порядка от константы C даёт ноль, что следует из формулы (3.1), если в вместо s поставить 1, тогда получим

$$d^{-1}x:C=d^{-1}x:Cx^0=0;$$

5) элементарные и другие важные функции дробного анализа переходят в соответствующие функции стандартного анализа для порядка $s = 1$ и имеют свойства, соответствующие стандартному анализу, или теряют в нём смысл, или вырождаются в ноль, если в стандартном анализе в принципе невозможно существование их эквивалентов.

Таким образом, видно, что для d-оператора (2.1) принцип соответствия выполняется.

Принцип соответствия аналогичен известному принципу соответствия в физике, который требует, чтобы более общая теория содержала в себе менее общую теорию как частный и, как правило, предельный случай.

В физике таким примером, общей теории может служить квантовая механика, а её частным предельным случаем является механика Ньютона, которая вытекает из квантовой механики, если постоянную Планка устремить к нулю.

Формулировка данного принципа в математике имеет огромное значение, прежде всего, для приспособления математических моделей к описанию реальности.

Поэтому принцип соответствия представляется очень важным при использовании дробного анализа в различных естественно-научных приложениях, например, как принцип отбора среди различных направлений дробного анализа, делающий обоснованным применение дробного анализа для описания реальности.

Если исходить из того, что в случае дифференцирования и интегрирования порядков 1 адекватным анализом для описания реальности является традиционный анализ, тогда логично предположить, что адекватным дробным анализом для описания реальности должен быть такое его направление, которое удовлетворяет принципу соответствия, т. е. содержит в себе традиционный анализ как частный случай.

Если принципу соответствия удовлетворяет несколько направлений дробного анализа, то отбор среди них должен происходить исходя из внутренней непротиворечивости теории, но абсолютным и окончательным критерием отбора среди различных направлений дробного анализа должна быть практика.

Возможна и такая ситуация, когда для одних задач эквивалентным может оказаться одно направление дробного анализа, а для других другое.

Также полностью нельзя исключить и такой возможности, когда дробный анализ, не удовлетворяющий принципу соответствия, может стать, в некоторых случаях, более адекватным для описания реальности, чем дробный анализ, удовлетворяющий данному принципу.

Другие целочисленные ветви дробного анализа являются ветвями целочисленных порядков d-оператора $s = 2, 3, 4, 5, \ldots$ Эти ветви анализа во многом аналогичны случаю традиционного анализа ($s = 1$), но также имеют и существенные от него отличия.

Наиболее простой рациональной ветвью дробного анализа представляется ветвь порядка 1/2. Рассмотрим её подробнее.

§ 21. Ветвь дробного анализа порядка 1/2

Данную ветвь дробного анализа начали рассматривать в работе [22]. Ветвь дробного анализа порядка 1/2, видимо, самая простая среди ветвей с дробными рациональными порядками, поэтому она интересна не только сама по себе, но и как модель для развития других ветвей нецелочисленных рациональных порядков.

d-оператор порядка 1/2, действующий на степенные функции, легко получить из (2.1), подставив непосредственно $s = 1/2$. Тогда для данной ветви дробный оператор будет

$$\begin{cases} d^{-1/2}x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1/2)} x^{q-1/2}, q \neq -1, -2, -3, -4, ...; \\ d^{1/2}x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+3/2)} x^{q+1/2} + C_{1/2}(x),\ q \neq -1, -2, -3, -4, ...; \\ d^{-1/2}x : x^q = (-1)^{-q-1/2}(-q-1/2)!\Gamma(q+1)x^{q-1/2}; \\ \quad q = -1/2, -3/2, -5/2, ...; \\ d^{1/2}x : x^q = (-1)^{-q-3/2}(-q-3/2)!\Gamma(q+1)x^{q+1/2} + C_{1/2}(x); \\ \quad q = -3/2, -5/2, -7/2, ...; \\ d^{-1/2}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1/2-n)} x^{-n-1/2}; n = 1, 2, 3, 4, ...; \\ d^{1/2}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(3/2-n)} x^{-n+1/2} + C_{1/2}(x); n = 1, 2, 3, 4, ... \end{cases} \tag{21.1}$$

Здесь $C_{1/2}(x)$ – полином интегрирования порядка 1/2, который записывается в виде следующего ряда:

$$C_{1/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n+1/2} = a_1 x^{-1/2} + a_2 x^{-3/2} + a_3 x^{-5/2} + a_4 x^{-7/2} + ... \tag{21.2}$$

При дифференцировании оператором $d^{1/2}x$ полинома интегрирования $C_{1/2}(x)$ получим ноль:

$$d^{-1/2}x : C_{1/2}(x) = 0.$$

Оператор можно преобразовать к более простому виду, если использовать известные формулы для гамма-функции [7]:

$$\Gamma(q+1)=q\Gamma(q), \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}, \Gamma(1/2-n)=\frac{(-1)^n 2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!};$$

$$\Gamma(3/2-n)=\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}\sqrt{\pi}}{(2n+1)!!}.$$

Тогда получим d-оператор порядка 1/2 в следующем виде

$$\begin{cases} d^{-1/2}x:x^q=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1/2)}x^{q-1/2}; q\neq -1,-2,-3,-4,...; \\ d^{1/2}x:x^q=\dfrac{\Gamma(q+1)}{(q+1/2)\Gamma(q+1/2)}x^{q+1/2}+C_{1/2}(x);\ q\neq -1,-2,-3,-4,...; \\ d^{-1/2}x:x^{-n+1/2}=\dfrac{2^{n+1}\sqrt{\pi}(n-1)!}{(2n+1)!!}x^{-n}; n\in\mathbb{N}; \\ d^{1/2}x:x^{-n-1/2}=-\dfrac{2^n\sqrt{\pi}(n-1)!}{(2n-1)!!}x^{-n}+C_{1/2}(x); n\in\mathbb{N}; \\ d^{-1/2}x:x^{-n}=\dfrac{-(2n-1)!!}{2^n\sqrt{\pi}(n-1)!}x^{-n-1/2}; n=1,2,3,4,...; \\ d^{1/2}x:x^{-n}=\dfrac{(2n+1)!!}{2^{n+1}\sqrt{\pi}(n-1)!}x^{-n+1/2}+C_{1/2}(x); n=1,2,3,4,... \end{cases} \tag{21.3}$$

Для важного случая целочисленных $q = m$ первые две формулы в операторе можно упростить, используя формулы для гамма-функции и двойного факториала [7]:

$$\Gamma(m+1)=m!, \Gamma(m+1/2)=\frac{(2m-1)!!\sqrt{\pi}}{2^m};$$

$$(2m-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1), (-1)!!=1.$$

После простых преобразований получим:

$$\begin{cases} d^{-1/2}x : x^m = \dfrac{2^m m!}{(2m-1)!!\sqrt{\pi}} x^{m-1/2}; \\ d^{1/2}x : x^m = \dfrac{2^m m!}{(m+1/2)(2m-1)!!\sqrt{\pi}} x^{q+1/2} + C_{1/2}(x); \\ \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{21.4}$$

Рассмотрим экспоненты данной ветви. Ряд частной экспоненты $\exp_{1/2}(x)$ можно получить как частный случай дробной экспоненты $\exp_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}$, для порядка s = 1/2.

Значения гамма-функций можно преобразовать, используя формулы $\Gamma(m+1) = m!$, $\Gamma(m+1/2) = \sqrt{\pi}(1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1))/2^m$. Тогда для экспоненты $\exp_{1/2}(x)$ получим ряд

$$\begin{aligned} \exp_{1/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-1+n/2}}{\Gamma(n/2)} = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + 1 + \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x}{1!} + \frac{2^2 x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}} + \\ + \frac{x^2}{2!} + \frac{2^3 x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2^4 x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}} + \frac{x^4}{4!} + \frac{2^5 x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}} + \ldots \end{aligned} \tag{21.5}$$

Далее, перемножив числа в коэффициентах ряда, получим разложение в ряд:

$$\begin{aligned} \exp_{1/2}(x) = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + 1 + \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x}{1!} + \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{x^2}{2!} + \\ + \frac{8x^{5/2}}{15\sqrt{\pi}} + \frac{x^3}{3!} + \frac{16x^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} + \frac{x^4}{4!} + \frac{32x^{9/2}}{945\sqrt{\pi}} + \ldots \end{aligned} \tag{21.6}$$

Сгруппировав в (21.5) вместе члены ряда с целыми и с дробными порядками, получим

$$\begin{aligned} \exp_{1/2}(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots\right) + \left(\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^2 x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}} + \right. \\ \left. + \frac{2^3 x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}} + \frac{2^4 x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}} + \frac{2^5 x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}} + \ldots\right). \end{aligned} \tag{21.7}$$

В первой части получается экспонента традиционного анализа $\exp(x)$, а во второй части стоит ряд, который обозначим как функцию $\xi_{1/2}(x)$. Функцию $\xi_{1/2}(x)$ перепишем, выделив общий сомножитель $x^{1/2}\pi^{-1/2}$:

$$\xi_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{2^n x^{n-1}}{(2n+1)!!} =$$
$$\sqrt{\frac{x}{\pi}} \left\{ \frac{1}{x} + 2 + \frac{2^2 x}{1\cdot 3} + \frac{2^3 x^2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{2^4 x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2^5 x^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots \right\}. \tag{21.8}$$

Тогда экспоненту $\exp_{1/2}(x)$ кратко можно представить как

$$\exp_{1/2}(x) = \exp(x) + \xi_{1/2}(x). \tag{21.9}$$

Легко убедиться, что функцию $\xi_{1/2}(x)$ можно получить из экспоненты $\exp(x)$, действуя на неё оператором дифференцирования $d^{-1/2}(x)$:

$$d^{-1/2}x : \exp(x) = \xi_{1/2}(x).$$

Тогда будет справедлива формула

$$\exp_{1/2}(x) = \exp(x) + d^{-1/2}x : \exp(x) = (1 + d^{-1/2}x)\exp(x).$$

Производная порядка 1/2 от функции $\xi_{1/2}(x)$ будет равна

$$d^{-1/2}x : \xi_{1/2}(x) = \exp(x).$$

Оператор дифференцирования $d^{-1/2}x$ должен переводить экспоненту $\exp_{1/2}(x)$ саму в себя. В этом можно легко убедиться почленным дифференцированием ряда:

$$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(x) = \exp_{1/2}(x).$$

Производную порядка 1/2 от экспоненты $\exp_{1/2}(x)$ можно найти, используя форму $\exp_{1/2}(x) = \exp(x) + \xi_{1/2}(x)$:

$$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(x) = d^{-1/2}x : (\exp(x) + \xi_{1/2}(x)) = \xi_{1/2}(x) + \exp(x) = \exp_{1/2}(x).$$

Подействовав дважды оператором $d^{-1/2}x$ на экспоненту $\exp_{1/2}(x)$, получим опять экспоненту $\exp_{1/2}(x)$:

$$d^{-1/2}x : d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(x) = \exp_{1/2}(x).$$

Легко проверить, что производная первого порядка от экспоненты $\exp_{1/2}(x)$ не переводит её саму в себя, т. е., $d^{-1}x : \exp_{1/2}(x) \neq \exp_{1/2}(x)$.

Найдём производную $d^{-1}x : \exp_{1/2}(x)$. Вначале рассмотрим производную первого порядка $d^{-1}x : \xi_{1/2}(x)$:

$$d^{-1}x : \xi_{1/2}(x) = -\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} +$$
$$+\frac{2^3 x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}} + \frac{2^4 x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}} + \frac{2^5 x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}} + \ldots$$

Или окончательно получаем:

$$d^{-1}x : \xi_{1/2}(x) = \xi_{1/2}(x) - \frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Это значит, что производная первого порядка $d^{-1}x : \exp_{1/2}(x)$ будет

$$d^{-1}x : \exp_{1/2}(x) = e^x + \xi_{1/2}(x) - \frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} = \exp_{1/2}(x) - \frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Аналогично можно получить формулы для высших производных целочисленного порядка:

$$d^{-2}x : \exp_{1/2}(x) = \exp_{1/2}(x) - \frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}};$$

$$d^{-3}x : \exp_{1/2}(x) = \exp_{1/2}(x) - \frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}} - \frac{3\cdot 5x^{-7/2}}{2^3\sqrt{\pi}};$$

…

$$d^{-n}x:\exp_{1/2}(x)=\exp_{1/2}(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i(2i-1)!!}{\sqrt{\pi}2^i}x^{-i-1/2}=$$

$$=\exp_{1/2}(x)-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}}-\frac{3\cdot 5x^{-7/2}}{2^3\sqrt{\pi}}+\frac{3\cdot 5\cdot 7x^{-9/2}}{2^4\sqrt{\pi}}-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9x^{-11/2}}{2^5\sqrt{\pi}}+\ldots$$

Расписав более подробно, получим

$$d^{-1}x:\exp_{1/2}(x)=d^{-1}x:\left(\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\right)=d^{-1}x:\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\right)+$$

$$=d^{-1}x:\left(\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^2x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}+\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}+\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\frac{2^5x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}}+\ldots\right).$$

Рассмотрим далее экспоненту с отрицательным аргументом $\exp_{1/2}(-x)$:

$$\exp_{1/2}(-x)=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-x)^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n/2}x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{i^nx^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=$$

$$+\frac{(-x)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2(-x)^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}+\frac{4(-x)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+$$

$$+\frac{8(-x)^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}-\frac{x^3}{3!}+\frac{16(-x)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{32(-x)^{9/2}}{945\sqrt{\pi}}+\ldots=$$

$$=-\frac{ix^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2ix^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}-\frac{4ix^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+\frac{8ix^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}-\frac{x^3}{3!}-\frac{16ix^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{x^4}{4!}+\frac{32ix^{9/2}}{945\sqrt{\pi}}+\ldots=-\frac{i}{\sqrt{x\pi}}+1+\frac{2ix^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}-\frac{4ix^{1/2}x}{3\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{x^2}{2!}+\frac{8ix^{1/2}x^2}{15\sqrt{\pi}}-\frac{x^3}{3!}-\frac{16ix^{1/2}x^3}{105\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{32ix^{1/2}x^4}{945\sqrt{\pi}}+\ldots$$

Ряд для экспоненты с мнимой переменной $\exp_{1/2}(ix)$ будет

$$\exp_{1/2}(ix)=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(ix)^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=\frac{(ix)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2(ix)^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{ix}{1!}+\frac{2^2(ix)^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}-\frac{x^2}{2!}+$$
$$+\frac{2^3(ix)^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{2^4(ix)^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{2^5(ix)^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}}+\ldots=$$
$$=\frac{x^{-1/2}}{i^{1/2}\sqrt{\pi}}+1+\frac{2i^{1/2}x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{ix}{1!}+\frac{2^2 ii^{1/2}x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}-\frac{x^2}{2!}-\frac{2^3 i^{1/2}x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}-\frac{ix^3}{3!}-$$
$$-\frac{2^4 ii^{1/2}x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{2^5 ii^{1/2}x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}}+\ldots$$

На основе дробной экспоненты можно легко получить некоторые элементарные функции для ветви дробного анализа порядка $s = 1/2$. Гиперболические и тригонометрические функции можно получить на основе соотношений, введенных в [17, 18].

Для гиперболических синуса $\mathrm{sh}_{1/2}(x)$ и косинуса $\mathrm{ch}_{1/2}(x)$ порядка $s = 1/2$ легко получить формулы

$$\mathrm{ch}_{1/2}(x)=\mathrm{ch}(x)+\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(x)+\xi_{1/2}(-x));\qquad(21.10)$$

$$\mathrm{sh}_{1/2}(x)=\mathrm{sh}(x)+\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(x)-\xi_{1/2}(-x)).\qquad(21.11)$$

Для тригонометрических синуса $\sin_{1/2}(x)$ и косинуса $\cos_{1/2}(x)$ порядка $s = 1/2$ будут следующие соотношения

$$\sin_{1/2}(x)=\sin(x)+\frac{1}{2i}(\xi_{1/2}(ix)+\xi_{1/2}(-ix));\qquad(21.12)$$

$$\cos_{1/2}(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(ix)+\xi_{1/2}(-ix)).\qquad(21.13)$$

Другие гиперболические и тригонометрические функции порядка $s = 1/2$ будут

$$\mathrm{th}_{1/2}(x)=\frac{\mathrm{sh}_{1/2}(x)}{\mathrm{ch}_{1/2}(x)};\ \mathrm{cth}_{1/2}\,x=\frac{\mathrm{ch}_{1/2}(x)}{\mathrm{sh}_{1/2}(x)};\qquad(21.14)$$

$$\operatorname{sch}_{1/2}(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}_{1/2}(x)};\ \operatorname{csch}_{1/2}(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}_{1/2}(x)}; \qquad (21.15)$$

$$\operatorname{tg}_{1/2}(x)=\frac{\sin_{1/2}(x)}{\cos_{1/2}(x)};\ \operatorname{ctg}_{1/2}(x)=\frac{\cos_{1/2}(x)}{\sin_{1/2}(x)}; \qquad (21.16)$$

$$\sec_{1/2}(x)=\frac{1}{\cos_{1/2}(x)};\ \operatorname{cosec}_{1/2}(x)=\frac{1}{\sin_{1/2}(x)}. \qquad (21.17)$$

Графики некоторых рассмотренных функций представлены на рис. 1–5, где для сравнения приведены графики функций традиционного анализа. Графики функций $\exp_{1/2}(x)$, $\exp(x)$, $\xi_{1/2}(x)$, $\exp_{1/2}(-x)$, $\exp(-x)$, $\xi_{1/2}(-x)$ даны на рис. 7.

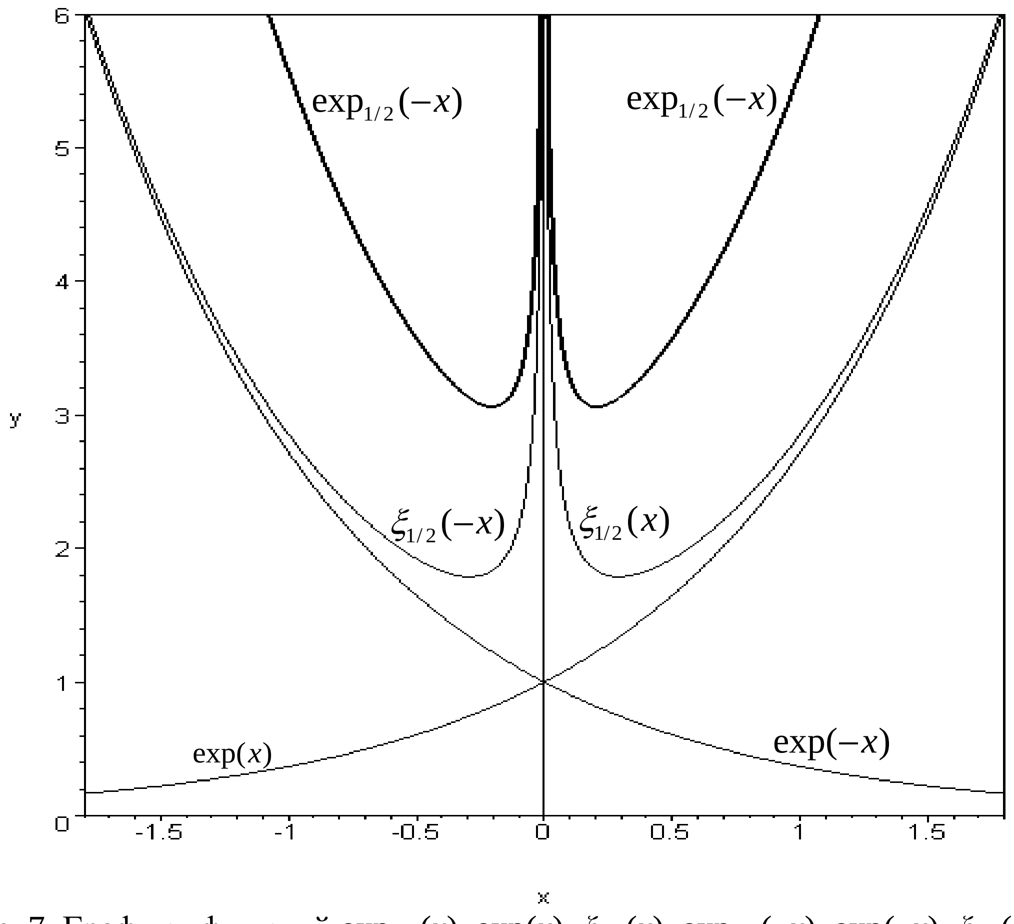


Рис. 7. Графики функций $\exp_{1/2}(x)$, $\exp(x)$, $\xi_{1/2}(x)$, $\exp_{1/2}(-x)$, $\exp(-x)$, $\xi_{1/2}(-x)$

Графики функций $\sin_{1/2}(x)$, $\cos_{1/2}(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ изображены на рис. 8. Графики функций $\sec_{1/2}(x)$, $\operatorname{cosec}_{1/2}(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$ показаны на рис. 9. Графики функций $\mathrm{tg}_{1/2}(x)$, $\mathrm{tg}(x)$ представлены на рис. 10, а функций $\mathrm{ctg}_{1/2}(x)$, $\mathrm{ctg}(x)$ – на рис. 11.

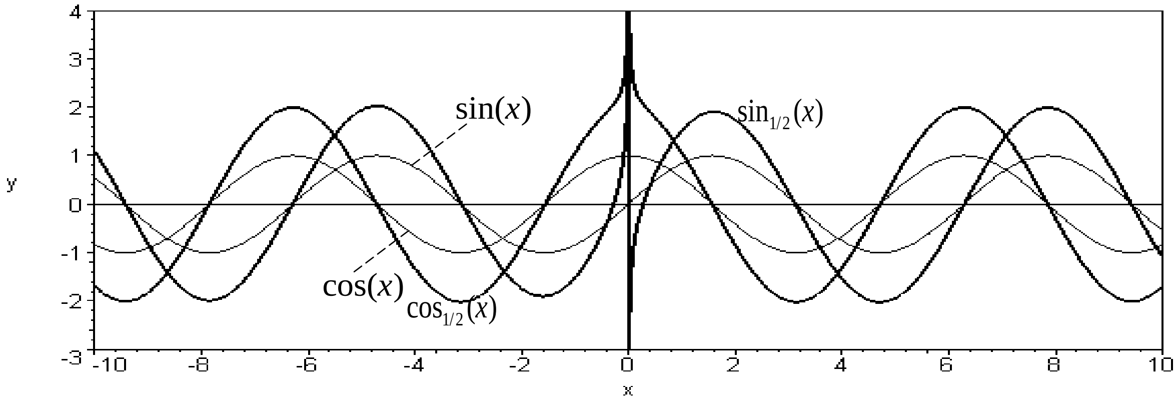


Рис. 8. Графики функций $\sin_{1/2}(x)$, $\cos_{1/2}(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$

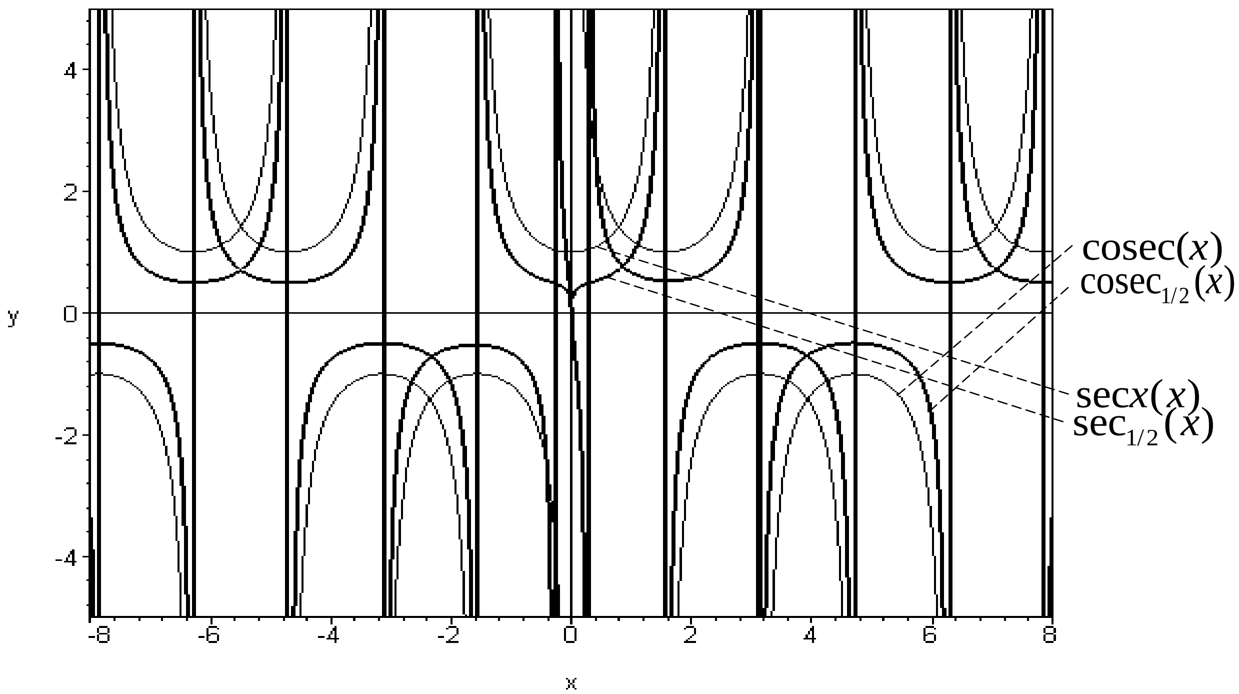


Рис. 9. Графики функций $\sec_{1/2}(x)$, $\mathrm{cosec}_{1/2}(x)$, $\sec(x)$, $\mathrm{cosec}(x)$

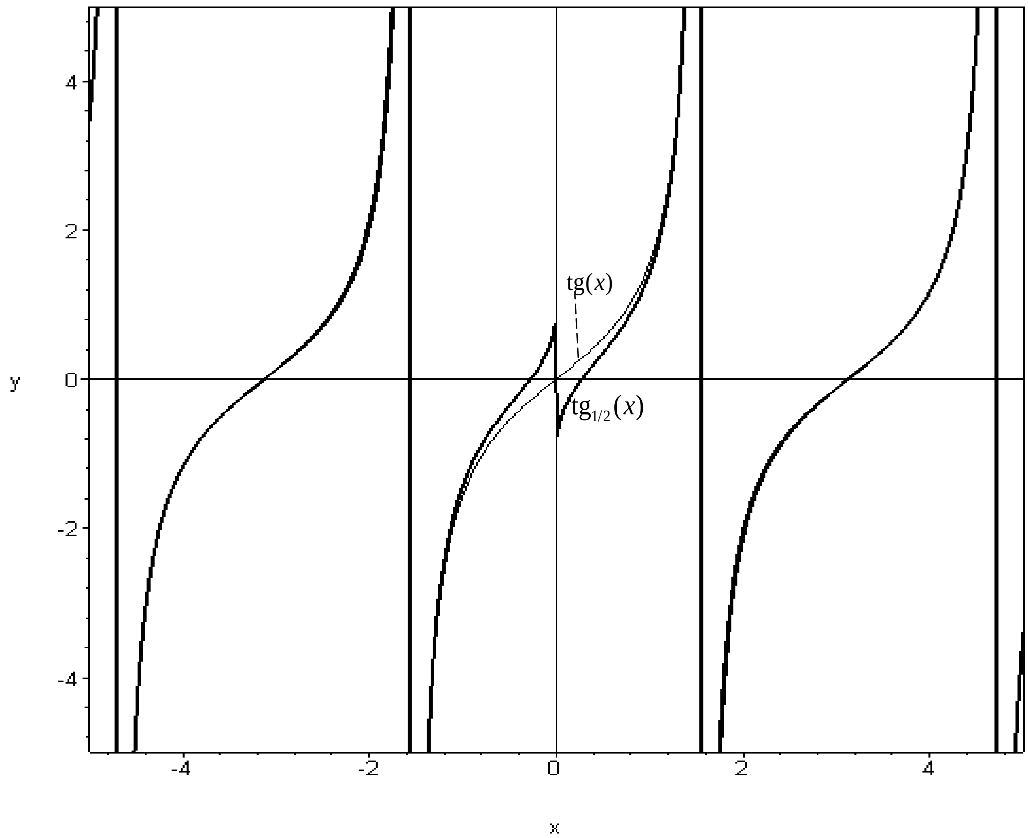


Рис. 10. Графики функций $\mathrm{tg}_{1/2}(x)$, $\mathrm{tg}(x)$

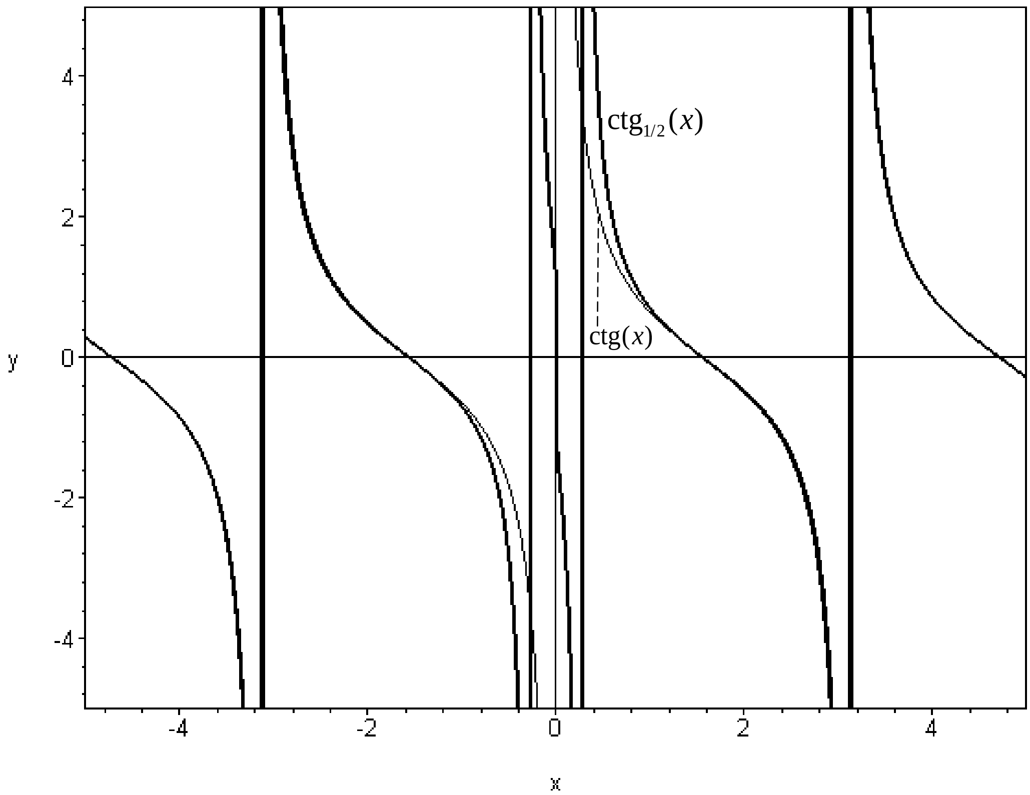


Рис. 11. Графики функций $\mathrm{ctg}_{1/2}(x)$, $\mathrm{ctg}(x)$

Неопределённый интеграл порядка 1/2 от некоторой функции $f(x)$ можно в общем виде записать

$$d^{1/2}x : f(x) = F^{(1/2)}(x) + C_{1/2}(x).$$

Здесь $F^{(1/2)}(x)$ – базовая первообразная порядка 1/2 функции $f(x)$ и полиномы интегрирования порядка 1/2 $C_{1/2}(x)$.

Рассмотрим полиномы интегрирования порядка 1/2 $C_{1/2}(x)$, которые появляются при интегрировании функций оператором $d^{1/2}x$.

Полином интегрирования порядка 1/2 будет

$$C_{1/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n+1/2} = a_1 x^{-1/2} + a_2 x^{-3/2} + a_3 x^{-5/2} + a_4 x^{-7/2} + \ldots \quad (21.18)$$

Однородный единичный полином интегрирования порядка 1/2 будет

$$c_{1/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n+1/2} = x^{-1/2} + x^{-3/2} + x^{-5/2} + a_n x^{-7/2} + \ldots \quad (21.19)$$

Графики единичного однородных полиномов интегрирования $c_{1/2}(x)$, $0{,}5c_{1/2}(x)$ и $2c_{1/2}(x)$ показаны на рис (рис. 12).

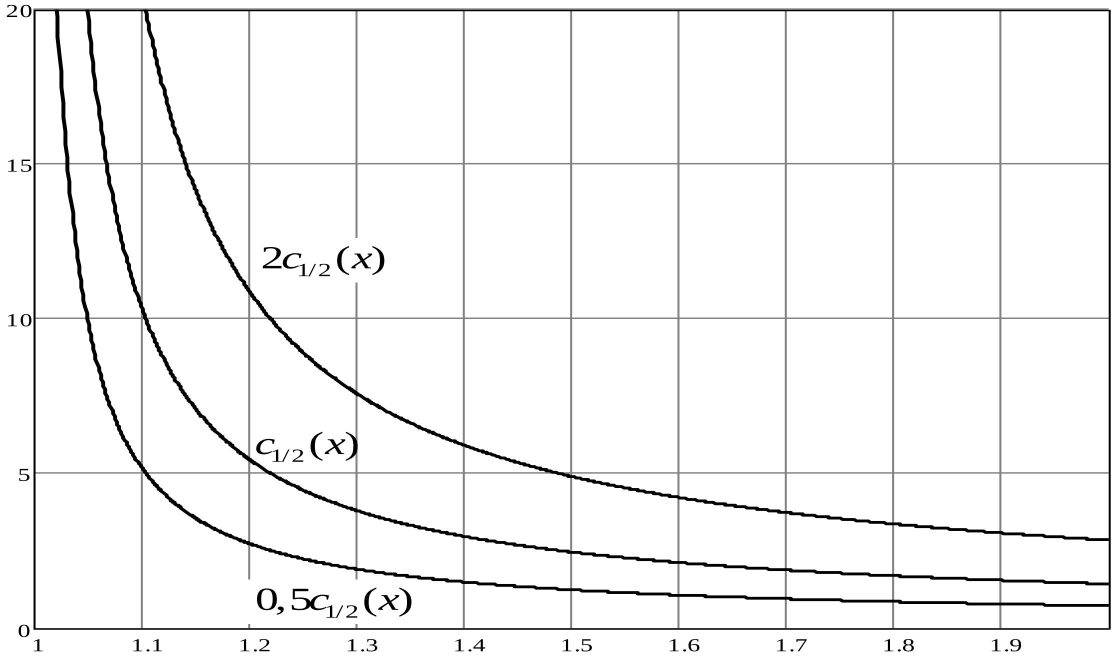


Рис. 12. Однородные полиномы интегрирования $c_{1/2}(x)$, $0{,}5c_{1/2}(x)$ и $2c_{1/2}(x)$

Для порядка s = 1/2 полиномы степени n будут выглядеть

$$P_{(1/2)|n}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i+1)/2-1} = a_0 x^{-1/2} + a_1 x^0 + a_2 x^{1/2} + \\ + a_3 x^1 + \ldots + a_{n-3} x^{(n-2)/2} + a_{n-2} x^{(n-1)/2} + a_{n-1} x^{n/2}. \tag{21.20}$$

Элементарные функции в дробном анализе порядка 1/2 требуют более глубоких исследований.

Глава 7. ПРОГРАММА И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДРОБНОГО АНАЛИЗА

§ 22. Программа построения дробного анализа

Программа построения дробного анализа, предложенная Адамаром, представляется простой и естественной, но её реализация в первоначальном виде встречается с рядом трудностей.

1. Оператор Адамара имеет ряд недостатков. Операции дробного дифференцирования с помощью оператора Адамара не определены в полюсах (1.11).

При доопределении оператора Адамара до дробного интегрирования, опять же, дробное интегрирование не определено в полюсах (1.12) и в этом случае не охватываются логарифмические случаи (1.13).

2. Пространство степенных рядов с шагом 1 является узким для построения дробного анализа и не может служить этой цели.

Из сказанного вытекает необходимость сформулировать другую программу построения дробного анализа, которая является усовершенствованной программой Адамара и включает также два пункта [17, 18].

1. За основу для построения анализа берётся d-оператор. Каждая отдельная пара взаимно обратных d-операторов (интегрирования и дифференцирования), с порядками $\pm s$ ($s \in \mathbb{R}$), задаёт частную теорию дробного анализа, которую будем называть *ветвью дробного анализа порядка* s.

Отметим ряд важных достоинств d-оператора.

А. d-оператор один из самых простых операторов дробного интегродифференцирования из всех ранее предложенных. d-оператор носит алгебраический характер, что делает его в применении более простым, чем большинство других операторов дробного интегродифференцирования [8].

Б. С помощью данного оператора можно находить производные и интегралы любых конечных вещественных порядков от степенных функций любых конечных вещественных степеней. Это значит, что у предлагаемого d-оператора нет таких особых порядков дифференцирования и интегрирования, для которых он не определён или не действовал бы. Также d-оператор работает при любых сочетаниях порядков интегродифференцирования на степенные функции с любыми показателями. d-оператор в этом смысле является универсальным. Ряд других операторов дробного интегродифференцирования таким свойством не обладает.

2. Степенные ряды, которые необходимо использовать при построении каждой отдельной ветви дробного анализа порядка s, должны иметь показатели степеней переменных, кратные порядку s. Через степенные ряды порядка s выражаются практически все основные функции характерные для ветви дробного анализа порядка s.

Такими рядами могут служить дробностепенные ряды с шагом s (12.4):

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn+l};\, a_n, s, l \in \mathbb{R};\, n_0, n \in \mathbb{Z}.$$

В более общем случае, когда центр ряда находится в точке x_0 будут дробностепенные ряды вида (12.5):

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn+l};\, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Наиболее общим случаем дробностепенных рядов являются дробностепенные ряды Лорана (12.6):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn-l}.$$

Из второго положения следует то, что каждая ветвь дробного анализа должна иметь свой, индивидуальный набор элементарных, специальных и других важных функций, которые, в общем случае, отличны от соответствующих наборов функций остальных ветвей дробного анализа. Это хорошо видно уже из сравнения ветвей $s = 1$ и $s = 1/2$ [21].

Каждая ветвь является внутренне замкнутой и самодостаточной теорией, отличной и независимой от остальных ветвей дробного анализа.

Другими словами, под дробным анализом будем понимать бесконечное множество ветвей дробного анализа, в основе которых лежат операторы дробного интегродифференцирования всех конечных порядков s, действующих в пространствах функций, представляемых в виде степенных рядов с соответствующим дробным шагом s.

Важным следствием сформулированной программы является выполнение принципа соответствия, в силу которого стандартный анализ является ветвью дробного анализа порядка 1.

Отличие предлагаемой программы от программы, предложенной Адамаром, заключается в том, что в программе Адамара не предполагается разбиение дробного анализа на множество независимых ветвей, а само дробное интегродифференцирование развивается в рамках стандартного анализа, расширяя его аналитические возможности.

Данная программа может быть изменена или расширена в нескольких направлениях. Например, при построении отдельных ветвей дробного анализа могут использоваться операторы разных типов, а не только d-оператор. Возможно построение ветвей дробного анализа, в основе которых лежат различные обобщения d-оператора, а также операторы дробного интегродифференцирования других типов.

Кроме разработки отдельных («чистых») ветвей возможно развитие *смешанного дробного анализа*, в основе которого лежат различные комбинации операторов дробного интегродифференцирования разных порядков. При этом для отдельных порядков могут использоваться как один, так несколько типов дробных операторов.

Модели смешанного анализа представляются более сложными, чем отдельные ветви дробного анализа. В этом случае встаёт, в частности, вопрос о возможности построения замкнутых моделей смешанного дробного анализа. Если это возможно, то в каких случаях?

Дробный анализ может развиваться так, что ветвь порядка $s = 1$ будет соответствовать стандартному анализу. В этом случае будем говорить, что в данном дробном анализе выполнятся *принцип соответствия*.

Также возможна ситуация, когда принцип соответствия выполняться не будет, т. е. в таком дробном анализе ни одна ветвь (включая $s = 1$) не будет соответствовать стандартному анализу.

Дробный анализ, в котором выполняется принцип соответствия, представляется более естественным, чем возможные направления дробного анализа, в которых данный принцип не выполняется. Но не исключено, что и такие направления могут найти применение в математике и в приложениях.

§ 23. Шаги построения дробного анализа

Для реализации предложенной программы построения отдельных ветвей дробного анализа необходимы следующие формальные шаги.

1. Замена операторов, которая заключается в том, что ветвь, определяемая взаимно обратными операторами порядков $\pm s$, или просто – ветвь s, строится по аналогии со стандартным анализом, где степени

операторов дифференцирования и интегрирования степени 1 заменяются оператором дробного интегродифференцирования степени s:

$$\frac{d}{dx} \equiv d^{-1}x \to d^{-s}x \text{ и } \int f(x)\,dx \equiv d^{1}x : f(x) \to d^{s}x : f(x).$$

В случае, когда имеется не одна, а несколько переменных, тогда частные производные первого порядка необходимо заменить частными производными дробных порядков:

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s} \equiv \partial^{-s}x,\ \frac{\partial}{\partial y} \to \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s} \equiv \partial^{-s}y.$$

Здесь для примера взяты две переменные – x и y.

Частные производные второго порядка нужно заменить на частные производные дробных порядков:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s} \equiv \partial^{-s}x : \partial^{-s}x;\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s} \equiv \partial^{-s}x : \partial^{-s}y.$$

Для функции двух переменных $f(x, y)$ операторы интегрирования запишем

$$\int f(x, y)dx \equiv d^{1}x : f(x, y) \to \partial^{s}x : f(x, y);$$
$$\int f(x, y)dy \equiv d^{1}y : f(x, y) \to \partial^{s}y : f(x, y).$$

Двойной повторный интеграл:

$$\iint f(x, y)dxdx \equiv d^{1}x : d^{1}x : f(x, y) \to \partial^{s}x : \partial^{s}x : f(x, y).$$

Двойной интеграл со смешанным интегрированием:

$$\iint f(x, y)dxdy \equiv d^{1}x : d^{1}y : f(x, y) \to \partial^{s}x : \partial^{s}y : f(x, y).$$

Заметим, что при $s \neq 1$ для d-операторов в общем случае справедливы неравенства

$$\partial^s x : \partial^s x : f(x,y) \neq \partial^{s+s} x : f(x,y).$$

2. Замена рядов заключается в замене целочисленных степеней аргумента в степенных рядах стандартного анализа, через которые выражаются функции стандартного анализа $f(x) \equiv f_1(x)$, на дробностепенные ряды с шагом s, через которые выражаются функции $f_s(x)$ ветви порядка s:

$$f(x) \equiv f_1(x) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m x^{m+q} \to f_s(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn+l};$$

$$m_0, n_0, q, m, n \in \mathbb{Z}; a_m, a_n, s, l \in \mathbb{R}.$$

Таким способом можно получить дробную экспоненту порядка s, $\exp_s(x)$, полученную другим способом в [8]:

$$\exp x \equiv \exp_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \to \exp_s x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}.$$

Такая непосредственная и формальная замена возможна не для всех функций. Когда это невозможно, тогда необходимы более сложные преобразования.

Одной из задач дробного анализа будет разбиение множества всех ветвей дробного анализа на множества ветвей с родственными свойствами.

Исследования в области дробного анализа должны проводиться как аналитически, так и численно. Для численных исследований необходимо создание компьютерных программ, а сама роль численных расчётов в дробном анализе представляется относительно более важной, чем в стандартном.

Дробный анализ в последнее время всё шире используется в приложениях, см., например, [1, 2, 23–27]. Для практических целей могут применяться разные операторы дробного интегродифференцирования. Поэтому встаёт вопрос об адекватности описания реальности разных подходов дробного анализа, основанных на альтернативных операторах дробного интегродифференцирования.

Кроме этого, в дробном анализе важно сравнение подходов, основанных на разных операторах дробного интегродифференцирования, и, в частности, сравнение с анализом на основе d-оператора.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ДРОБНОМУ АНАЛИЗУ

Задачи к главе 1. Оператор дробного дифференцирования и интегрирования

Производные дробного порядка

1.1. Найти производную дробного порядка от степенной функции
$d^{-1/2}x:x^{-3/2}, d^{-3/2}x:x^{-1/2}, dx^{-3/2}x:x^{-3/5}, d^{-1/3}x:x^{-3}, d^{-2}x:x^{-2}, d^{-3}x:x^{3/2},$
$d^{-1/2}x:x^{8/3}, d^{-3/7}x:x^{-5}, d^{-8/5}x:x^{-7/8}, d^{-1/7}x:x^{-7}, d^{-3/4}x:x^{-1}, d^{-3/7}x:x^{9}.$

1.2. Найти производную дробного порядка от функции
$d^{-1/2}x:(x-2)^{0}, d^{-1/2}x:(x-4)^{2}, d^{-1/2}x:(x-1)^{1/2}, dx^{-1/2}x:(x-3)^{1/2},$
$d^{-1/3}x:(x-5)^{1/3}, d^{-2}x:(x-7)^{-2}, d^{-3}x:(x+1)^{3/2}, d^{-1/2}x:(x-1/2)^{8/3},$
$d^{-3/7}x:(x-3/2)^{3}, d^{-3/5}x:(x-2/5)^{-3/8}, d^{-1/7}x:(x-3/5)^{-7}.$

1.3. Найти производную дробного порядка от функции
$d^{1/2}x:(x-5)^{0}, d^{1/2}x:(x-4)^{1/2}, dx^{1/2}x:(x-6)^{1/2},$
$d^{1/3}x:(x-2)^{1/3}, d^{-2}x:(x-8)^{2}, d^{3}x:(x+2)^{3/2}, d^{1/2}x:(x-3/2)^{8/3},$
$d^{3/7}x:(x-\sqrt{2})^{3}, d^{3/5}x:(x-\pi/5)^{-3/8}, d^{1/7}x:(x-7/5)^{-7}.$

1.4. Записать полиномы интегрирования различных порядков
$C_3(x), C_5(x), C_7(x), C_{11}(x), C_{1/2}(x), C_{3/2}(x), C_{1/3}(x), C_{1/4}(x),$
$C_{3/2}(x), C_{7/3}(x), C_{8/5}(x).$

1.5. Найти производную дробного порядка от полинома интегрирования
$d^{-1/2}x:C_{1/2}(x), d^{-1/2}x:C_{3/2}(x), d^{-1/2}x:C_{1/3}(x), d^{-1/3}x:C_{1/2}(x),$
$d^{-2}x:C_{1/3}(x), d^{-3}x:C_{3/5}(x), d^{-1/2}x:C_{9/5}(x), d^{-3/7}x:C_{7/5}(x), d^{-8/5}x:C_{3/11}x.$

Первообразные и интегралы дробных порядков

1.6. Найти неопределённый интеграл дробного порядка от степенной функции

$$d^{1/2}x:x^{-3/2},\, d^{3/2}x:x^{1/2},\, dx^{3/2}x:x^{-3/5},\, d^{1/3}x:x^{-3},\, d^{2}x:x^{-2},\, d^{3}x:x^{3/2},$$

$$d^{1/2}x:x^{8/3},\, d^{3/7}x:x^{-5},\ d^{8/5}x:x^{-7/8},\, d^{1/7}x:x^{-7},\, d^{3/4}x:x^{-1},$$

$$d^{3/7}x:x^{9},\, d^{5/7}x:x^{-2},\, d^{7}x:x^{-3}.$$

1.7. Найти неопределённый интеграл (сумму базовой первообразной и полинома интегрирования) дробного порядка от полинома интегрирования

$$d^{1/2}x:C_{1/2}(x),\, d^{1/4}x:C_{3/2}(x),\, d^{1/5}x:C_{1/4}(x),\, d^{2/3}x:C_{5/2}(x),$$

$$d^{1}x:C_{1/2}(x),\, d^{2}x:C_{1/5}(x),\, d^{1/3}x:C_{7/3}(x),\, d^{2/7}x:C_{5/9}(x),\, d^{8/3}x:C_{6/11}x.$$

1.8. Рассмотреть случаи интегродифференцирования полиномов интегрирования

$$d^{\pm n}x:C_{\alpha}(x)=C_{\alpha\pm s}(x),\, n\in\mathbb{N},\, \alpha\notin\mathbb{N},$$

$$d^{\pm s}x:C_{n}(x)=C_{\alpha\pm s}(x),\, n\in\mathbb{N},\, s\notin\mathbb{N}.$$

1.9. Показать, что

$$d^{\pm s}x:C_{\alpha}(x)=C_{\alpha\pm s}(x),\, s,\alpha\notin\mathbb{N},\, \alpha-s\neq 0.$$

1.10. Показать, что логарифмические случаи интегрирования имеют место только для целочисленных ветвей дробного анализа.

1.11. Сколько логарифмических случаев может возникнуть при интегрировании оператором целочисленного порядка m?

1.12. Показать, в каких случаях нецелочисленных ветвей дробного анализа встречаются случаи интегрирования и дифференцирования «в полюсах».

1.13. Найти неопределённый интеграл порядка 3 от степенной функции с показателем –1.

1.14. Найти неопределённый интеграл порядка 5 от степенной функции с показателем –2.

Задачи к главе 2. Внутренняя алгебра и топологические свойства операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования

2.1. Образует ли множество целочисленных ветвей дробного анализа плотное множество?

Ответ: нет, не образует.

2.2. Образует ли множество рациональных ветвей дробного анализа плотное множество?

Ответ: да, образует.

Задачи к главе 3. Элементарные функции в дробном анализе

Экспоненты для дробных операторов разных порядков

3.1. Записать дробностепенные ряды экспонент $\exp_s(x)$ дробных порядков

2, 3, 4, 1/5, 1/3, 2/3, 2/5, 3/2, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, 8/7, 13/6, 3/4.

3.2. Выделить в полученных в задании 3.1. экспонентах функции $\xi_s(x)$ соответствующих порядков.

3.3. Найти производную дробного порядка от экспоненты, предварительно записав соответствующие экспоненты в виде дробностепенного ряда соответствующего порядка

$$d^{-1/2}x:\exp_{1/2}(x),\ d^{-3/2}x:\exp_{3/2}(x),\ d^{-5}x:\exp_5(x),\ d^{-2}x:\exp_1(x),$$

$$d^{-2}x:\exp_3(x),\ d^{-3}x:\exp_{3/5}(x),\ d^{-3}x:\exp_{3/2}(x),\ d^{-3/2}x:\exp_3(x),$$

$$d^{-1}x:\exp_{3/2}(x),\ d^{-1/2}x:\exp_{5/6}(x),\ d^{-5}x:\exp_7(x),\ \ d^{-5/2}x:\exp_{8/5}(x).$$

3.4. Найти производную дробного порядка от функции $\xi_s(x)$, предварительно записав её в виде дробностепенного ряда соответствующего порядка

$$d^{-1/2}x:\xi_{1/2}(x),\ d^{-3/2}x:\xi_{3/2}(x),\ d^{-5}x:\xi_5(x),\ d^{-2}x:\xi_1(x),$$

$$d^{-2}x:\xi_3(x),\ d^{-3}x:\xi_{3/5}(x),\ d^{-3}x:\xi_{3/2}(x),\ d^{-3/2}x:\xi_3(x),$$

$$d^{-1}x:\xi_{3/2}(x),\ d^{-1/2}x:\xi_{5/6}(x),\ d^{-5}x:\xi_7(x),\ \ d^{-5/2}x:\xi_{8/5}(x).$$

3.5. Найти производную дробного порядка от функций

$d^{-1/2}x:\mathrm{ch}_{1/2}(x), d^{-1/3}x:\mathrm{ch}_3(x), d^{-2}x:\mathrm{sh}_2(x), d^{-2}x:\mathrm{sh}_{1/3}(x),$

$d^{-1/2}x:\sin_{2/5}(x), d^{-3/2}x:\cos_{1/2}(x), dx^{-5/2}x:(\cos_4(x)+\cos_3(x)),$

$d^{-1/3}x:(\sin_{2/3}(x)+\cos_2(x)), d^{-1/2}x:(\mathrm{ch}_{1/2}(x)+\mathrm{sh}_2(x)),$

$d^{-3}x:(\mathrm{sh}_5(x)+\mathrm{sh}_{3/5}(x)), d^{-1/3}x:(\cos_{3/2}(x)+\mathrm{ch}_{5/2}(x)).$

3.6. Найти неопределённый интеграл дробного порядка от экспоненты, предварительно записав соответствующие экспоненты

$d^{1/2}x:\exp_{1/2}(x), d^{3/2}x:\exp_{3/2}(x), d^4x:\exp_4(x), d^2x:\exp_1(x),$

$d^2x:\exp_3(x), d^3x:\exp_{3/5}(x), d^3x:\exp_{3/2}(x), d^{3/2}x:\exp_3(x),$

$d^1x:\exp_{3/2}(x), d^{1/2}x:\exp_{5/6}(x), d^5x:\exp_7(x), d^{5/2}x:\exp_{8/5}(x).$

3.7. Найти неопределённый интеграл дробного порядка от функции $\xi_s(x)$, предварительно записав её в виде дробностепенного ряда соответствующего порядка

$d^{1/2}x:\xi_{1/2}(x), d^{3/2}x:\xi_{3/2}(x), d^5x:\xi_5(x), d^2x:\xi_1(x), d^2x:\xi_3(x),$

$d^3x:\xi_{3/5}(x), d^3x:\xi_{3/2}(x), d^{3/2}x:\xi_3(x), d^1x:\xi_{3/2}(x),$

$d^{1/2}x:\xi_{5/6}(x), d^5x:\xi_7(x), d^{5/2}x:\xi_{8/5}(x).$

3.8. Найти неопределённый интеграл дробного порядка от функций

$d^{1/2}x:\mathrm{ch}_{1/2}(x), d^{1/3}x:\mathrm{ch}_3(x), d^2x:\mathrm{sh}_2(x), d^2x:\mathrm{sh}_{1/3}(x),$

$d^{1/2}x:\sin_{3/5}(x), d^{3/2}x:\cos_{1/2}(x), dx^{5/2}x:(\cos_4(x)+\cos_3(x)),$

$d^{1/3}x:(\sin_{2/3}(x)+\cos_2(x)), d^{1/2}x:(\mathrm{ch}_{1/2}(x)+\mathrm{sh}_2(x)),$

$d^3x:(\mathrm{sh}_{5/3}(x)+\mathrm{sh}_3(x)), d^{1/3}x:(\cos_{5/2}(x)+\mathrm{ch}_{3/2}(x)).$

Элементарные функции дробного анализа, связанные с дробной экспонентой

3.9. Записать дробностепенные ряды функции $\xi_s(x)$ порядков
2, 3, 4, 1/5, 1/3, 2/3, 2/5, 3/2, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, 8/7.

3.10. Записать дробностепенные ряды тригонометрических функций $\sin_s(x)$ и $\cos_s(x)$ порядков
2, 3, 4, 1/5, 1/3, 2/3, 2/5, 3/2, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, 8/7.

3.11. Записать дробностепенные ряды гиперболических функций $\mathrm{sh}_s(x)$ и $\mathrm{ch}_s(x)$ порядков

2, 3, 4, 1/5, 1/3, 2/3, 2/5, 3/2, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, 8/7.

3.12. Показать справедливость соотношений между гиперболическими и тригонометрическими функциями

$$\cos_s(x) = \mathrm{ch}_s(ix), i\sin_s(x) = \mathrm{sh}_s(ix),$$
$$\cos_s(ix) = \mathrm{ch}_s(x), \sin_s(ix) = i\,\mathrm{sh}_s(x),$$
$$i\,\mathrm{tg}_s(x) = \mathrm{th}_s(ix), \mathrm{ctg}_s(x) = i\,\mathrm{cth}_s(ix),$$
$$\mathrm{tg}_s(ix) = i\,\mathrm{th}_s(x), i\,\mathrm{ctg}_s(ix) = \mathrm{cth}_s(x).$$

3.13. Показать справедливость свойств симметрии функций

$$\mathrm{ch}_s(x) = \mathrm{ch}_s(-x), \mathrm{sh}_s(x) = -\mathrm{sh}_s(-x),$$
$$\cos_s(x) = \cos_s(-x), \sin_s(x) = -\sin_s(-x).$$

Полиномы дробных порядков в дробном анализе

3.14. Записать общий вид дробных полиномов $P_{s|n}(x)$

$$P_{1/2|5}(x), P_{3/2|4}(x), P_{2|5}(x), P_{5/7|7}(x), P_{2/3|5}(x), P_{5/4|6}(x),$$
$$P_{3|6}(x), P_{4|4}(x), P_{7/2|6}(x), P_{9/2|5}(x), P_{3/4|6}(x), P_{5/6|6}(x).$$

3.15. Написать в развёрнутом виде сумму полиномов $P_{s|n}(x) + P_{s|k}(x)$

$$P_{1/2|5}(x) + P_{1/2|3}(x), P_{1/3|6}(x) + P_{1/3|5}(x), P_{3/2|3}(x) + P_{3/2|4}(x),$$
$$P_{3/5|3}(x) + P_{3/5|4}(x), P_{1/2|4}(x) + P_{1/3|4}(x), P_{2/3|4}(x) + P_{1/3|3}(x),$$
$$P_{1/5|7}(x) + P_{3/7|5}(x), P_{3/5|3}(x) + P_{3/5|4}(x).$$

3.16. Найти суперпозицию полиномов $\alpha P_{s|n}(x) + \beta P_{s|k}(x)$

$$2P_{1/2|5}(x) + 4P_{1/3|6}(x), 0{,}5P_{1/3|5}(x) + 3P_{1/2|3}(x),$$
$$-2P_{3/5|3}(x) + 3/4P_{3/5|4}(x), 7P_{3/2|3}(x) - 3{,}5P_{3/2|4}(x),$$
$$-(3/5)P_{2/3|4}(x) + (7/8)P_{1/2|4}(x),\ 2{,}1P_{1/3|3}(x) - 6{,}5P_{1/3|4}(x),$$
$$\sqrt{2}P_{3/7|5}(x) + \sqrt{5}P_{3/5|3}(x),\ eP_{1/5|7}(x) + \pi P_{3/5|4}(x),\ P_{3/5|3}(x) + P_{3/5|4}(x).$$

3.17. Найти производную дробного порядка от полинома дробного порядка

$$d^{-1/2}x : P_{1/2|5}(x), d^{-3/2}x : P_{3/2|4}(x), dx^{-5/2}x : P_{5/2|5}(x), d^{-1/3}x : P_{1/3|5}(x),$$

$$d^{-2}x : P_{2|6}(x), d^{-3}x : P_{3|4}(x), d^{-2/3}x : P_{2/3|6}(x), d^{-5/7}x : P_{5/7|4}(x),$$

$$d^{-1/5}x : P_{3/2|5}(x), d^{-1/7}x : P_{3/5|5}(x), d^{-3/4}x : P_{3/2|6}(x), d^{-3/7}x : P_{3/2|7}(x).$$

3.18. Найти неопределённый интеграл дробного порядка от полинома дробного порядка

$$d^{1/2}x : P_{1/2|4}(x), d^{3/2}x : P_{3/2|5}(x), dx^{5/2}x : P_{5/2|4}(x), d^{1/3}x : P_{1/3|5}(x),$$

$$d^{3}x : P_{3|5}(x), d^{2}x : P_{2|3}(x), d^{2/5}x : P_{2/5|5}(x), d^{3/5}x : P_{3/5|5}(x),$$

$$d^{3/5}x : P_{1/2|4}(x), d^{3/5}x : P_{1/5|5}(x), d^{3/2}x : P_{3/4|5}(x), d^{3/2}x : P_{3/7|6}(x).$$

3.19. Найти определённый интеграл дробного порядка от полинома дробного порядка. Есть ли среди рассмотренных интегралов расходящиеся?

$$d^{1/2}x_0^1 : P_{1/2|4}(x), d^{3/2}x_{-1}^1 : P_{3/2|5}(x), dx^{5/2}x_1^2 : P_{5/2|4}(x), d^{1/3}x_2^3 : P_{1/3|5}(x),$$

$$d^{3}x_1^3 : P_{3|5}(x), d^{2}x_0^2 : P_{2|3}(x), d^{2/5}x_{-1}^0 : P_{2/5|5}(x), d^{3/5}x_{-2}^1 : P_{3/5|5}(x),$$

$$d^{3/5}x_0^{1/2} : P_{1/2|4}(x), d^{3/5}x_{-1/2}^{3/2} : P_{1/5|5}(x), d^{3/2}x_{-1}^1 : P_{3/4|5}(x), d^{3/2}x_{-2}^2 : P_{3/7|6}(x).$$

Задачи к главе 4. Степенные ряды с дробным шагом

Дробностепенные ряды и степенные ряды с дробным шагом

4.1. Какие из приведённых полиномов интегрирования относятся к дробностепенным рядам и почему? Являются ли приведённые полиномы интегрирования дробностепенными рядами с дробным шагом и почему?

$$C_3(x), C_5(x), C_7(x), C_{11}(x), C_{1/2}(x), C_{3/2}(x), C_{1/3}(x), C_{1/4}(x),$$

$$C_{3/2}(x), C_{7/3}(x), C_{8/5}(x).$$

4.2. Какие из приведённых функций выражаются через дробностепенные ряды с дробным шагом, а какие через степенные ряды с целочисленным шагом? Какие из приведённых функций не выражаются через степенные ряды?

$$\exp_{1/2}(x), \xi_1(x), \exp_{3/2}(x), \xi_{5/2}x, C_3(x), \exp_{7/4}(x), \mathrm{sh}_{5/3}(x), \xi_{3/2}(x),$$
$$\cos_{1/4}(x), \mathrm{sh}_3(x), \exp_2(x), C_{1/4}(x), \exp_{3/2}(x), C_5(x), \xi_3(x), C_{8/5}(x),$$
$$\exp_4(x), \sin_{3/5}(x), C_{3/2}(x), \cos_4(x), \sin_6(x), \mathrm{ch}_3(x), \xi_3(x), C_{7/3}(x).$$

Операции над дробностепенными рядами

4.3. Найти сумму дробностепенных рядов с дробными шагами, расписав её в виде дробностепенного ряда

$$\sin_{3/5}(x) - \mathrm{sh}_{3/5}(x); \exp_1(x) + \exp_2(x) + \exp_3(x) + \exp_5(x);$$
$$\exp_{3/2}(x) - \exp_2(x); \xi_2(x) + \xi_3(-x); \exp_{3/2}(x) - \xi_{3/2}(x);$$
$$\exp_{1/2}(x) - \exp_{3/2}(x); \exp_3(x) - \exp_2(x);$$
$$\mathrm{sh}_{3/2}(x) - \xi_{3/2}(x); \exp_{1/2}(x) - \exp_2(x).$$

4.4. Найти суперпозицию дробностепенных рядов с дробными шагами, расписав её в виде дробностепенного ряда

$$2\exp_{1/2}(x) + 0{,}5\exp_{1/2}(x); 3\exp_{1/2}(x) + 2\exp_{3/2}(x);$$
$$\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(x) + \xi_{1/2}(-x)); \frac{1}{2i}(\xi_{1/2}(x) - \xi_{1/2}(-ix));$$
$$\cos_{1/4}(x) + i\,\mathrm{sh}_{3/2}(x); i\exp_{3/2}(x) - \exp_3(x);$$
$$\exp_{1/2}(ix) - \exp_{3/2}(x); \exp_{1/2}(x) - i\exp_{3/2}(x) + 2\exp_4(x).$$

Пространства дробностепенных рядов

4.5. Показать, что дробностепенные ряды порядка 2 из пространства $DR_2\{\mathbb{R}\}$ будут принадлежать пространству рядов $DR_1\{\mathbb{R}\}$.

Задачи к главе 5. О многозначности дробных производных и интегралов отрицательного и мнимого аргумента

Замена переменных в дробностепенных рядах

5.1. Показать многозначность рядов отрицательного и мнимого аргумента при дробном дифференцировании и интегрировании.

Замена переменных в экспонентах

5.2. Найти производную дробного порядка функции отрицательного аргумента и выделить главную производную

$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(-x), d^{-3/2}x : \exp_{3/2}(-x), d^{-5}x : \exp_5(-x), d^{-2}x : \exp_1(-x),$

$d^{-2}x : \exp_3(-x), d^{-3}x : \exp_{3/5}(-x), d^{-3}x : \exp_{3/2}(-x), d^{-3/2}x : \exp_3(-x),$

$d^{-1}x : \exp_{3/2}(-x), d^{-1/2}x : \exp_{5/6}(-x), d^{-5}x : \exp_7(-x), \ d^{-5/2}x : \exp_{8/5}(-x).$

5.3. Найти производную дробного порядка функции мнимого аргумента и выделить главную производную

$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(ix), d^{-3/2}x : \exp_{3/2}(ix), d^{-5}x : \exp_5(ix), d^{-2}x : \exp_1(ix),$

$d^{-2}x : \exp_3(ix), d^{-3}x : \exp_{3/5}(ix), d^{-3}x : \exp_{3/2}(ix), d^{-3/2}x : \exp_3(ix),$

$d^{-1}x : \exp_{3/2}(ix), d^{-1/2}x : \exp_{5/6}(ix), d^{-5}x : \exp_7(ix), \ d^{-5/2}x : \exp_{8/5}(ix).$

5.4. Найти производную дробного порядка функции мнимого отрицательного аргумента и выделить главную производную

$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(-ix), d^{-3/2}x : \exp_{3/2}(-ix), d^{-5}x : \exp_5(-ix),$

$d^{-2}x : \exp_1(-ix), d^{-2}x : \exp_3(-ix), d^{-3}x : \exp_{3/5}(-ix),$

$d^{-3}x : \exp_{3/2}(-ix), d^{-3/2}x : \exp_3(-ix), d^{-1}x : \exp_{3/2}(-ix),$

$d^{-1/2}x : \exp_{5/6}(-ix), d^{-5}x : \exp_7(-ix), \ d^{-5/2}x : \exp_{8/5}(-ix).$

5.5. Найти производную дробного порядка функции

$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(3x), d^{-3/2}x : \exp_{3/2}(5x), d^{-5}x : \exp_5(-2x),$

$d^{-2}x : \exp_1(4x), d^{-2}x : \exp_3((1/2)x), d^{-3}x : \exp_{3/5}((3/2)x),$

$d^{-3}x : \exp_{3/2}(ex), d^{-3/2}x : \exp_3(3x), d^{-1}x : \exp_{3/2}(-4x),$

$d^{-1/2}x : \exp_{5/6}(7x), d^{-5}x : \exp_7(-6x), \ d^{-5/2}x : \exp_{8/5}(-9x),$

$d^{-1/2}x : \exp_{1/2}(5ix), d^{-3/2}x : \exp_{3/2}(-4ix), d^{-5}x : \exp_5(-3ix),$

$d^{-2}x : \exp_1(4x), d^{-2}x : \exp_3((1/2)x), d^{-3}x : \exp_{3/5}(-(5/3)ix),$

$d^{-3}x : \exp_{3/2}(-i\pi x), d^{-3/2}x : \exp_3(3ix), d^{-1}x : \exp_{3/2}(-7ix),$

$d^{-1/2}x : \exp_{5/6}(3ix), d^{-5}x : \exp_7(-6ix), \ d^{-5/2}x : \exp_{8/5}(-9x).$

5.6. Найти неопределённый интеграл дробного порядка функции отрицательного аргумента и выделить главную первообразную

$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(-x), d^{3/2}x : \exp_{3/2}(-x), d^4x : \exp_4(-x), d^2x : \exp_1(-x),$

$d^2x : \exp_3(-x), d^3x : \exp_{3/5}(-x), d^3x : \exp_{3/2}(-x), d^{3/2}x : \exp_3(-x),$

$d^1x : \exp_{3/2}(-x), d^{1/2}x : \exp_{5/6}(-x), d^5x : \exp_7(-x), \ d^{5/2}x : \exp_{8/5}(-x).$

5.7. Найти неопределённый интеграл дробного порядка функции мнимого аргумента и выделить главную первообразную

$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(ix), d^{3/2}x : \exp_{3/2}(ix), d^4x : \exp_4(ix), d^2x : \exp_1(ix),$

$d^2x : \exp_3(ix), d^3x : \exp_{3/5}(ix), d^3x : \exp_{3/2}(ix), d^{3/2}x : \exp_3(ix),$

$d^1x : \exp_{3/2}(ix), d^{1/2}x : \exp_{5/6}(ix), d^5x : \exp_7(ix), \ d^{5/2}x : \exp_{8/5}(ix).$

5.8. Найти неопределённый интеграл дробного порядка функции мнимого отрицательного аргумента и выделить главную первообразную

$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(-ix), d^{1/2}x : \exp_{3/2}(-ix), d^2x : \exp_5(-ix), d^2x : \exp_1(-ix),$

$d^2x : \exp_3(-ix), d^3x : \exp_{3/5}(-ix), d^3x : \exp_{3/2}(-ix), d^{3/2}x : \exp_3(-ix),$

$d^1x : \exp_{3/2}(-ix), d^{1/2}x : \exp_{5/6}(-ix), d^5x : \exp_7(-ix), \ d^{5/2}x : \exp_{8/5}(-ix).$

5.9. Найти неопределённый интеграл дробного порядка функции

$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(-2ix), d^{3/2}x : \exp_{3/2}(7ix), d^5x : \exp_5(6ix), d^2x : \exp_1(4x),$

$d^2x : \exp_3((1/2)x), d^3x : \exp_{3/5}(-(7/8)ix), d^3x : \exp_{3/2}(ex),$

$d^1x : \exp_{3/2}(-5ix), d^{1/2}x : \exp_{5/6}(8x), d^5x : \exp_7(-5ix), \ d^{3/2}x : \exp_3(3x),$

$d^{1/2}x : \exp_{1/2}(5ix), d^{3/2}x : \exp_{3/2}(-4ix), d^5x : \exp_5(-3ix), d^2x : \exp_1(4x),$

$d^2x : \exp_3((1/2)x), d^3x : \exp_{3/5}(-(5/3)ix), \ d^{5/2}x : \exp_{8/5}(-9x),$

$d^{3/2}x : \exp_3(3ix), d^1x : \exp_{3/2}(-7ix), d^{1/2}x : \exp_{5/6}(3ix),$

$d^{5/2}x : \exp_{8/5}(-3ix), d^5x : \exp_7(-6ix), d^3x : \exp_{3/2}(-i\pi x).$

Задачи к главе 6. Внешняя алгебра *d*-операторов

Коммутативность и не коммутативность во внешней алгебре

6.1. Найти коммутатор от функций
$[d^{-1}x, d^{-1}x]\exp_2(x); [d^{-1}x, d^{1}x]\exp_3(x); [d^{1}x, d^{-1}x]x^3; [d^{1}x, d^{1}x]x^2;$
$[d^{-2}x, d^{3}x]\exp_5(x); [d^{3}x, d^{-1}x](x^{-1}+x^{1}); [d^{2}x, d^{4}x]\exp_3(x);$
$[d^{1}x, d^{2}x]\exp_4(x); [d^{-1/2}x, d^{-3/2}x]\exp_{1/2}(x); [d^{1/2}x, d^{-1/2}x]x^{3/4};$
$[d^{3/2}x, d^{3/2}x]\exp_{3/2}(x); [d^{7/8}x, d^{4/3}x]\exp_{5/6}(x).$

Задачи к главе 7. Классификация ветвей дробного анализа и модельные ветви дробного анализа

7.1. Записать *d*-оператор для ветви порядка 0 и найти экспоненту $\exp_0(x)$.

7.2. Записать *d*-оператор для ветвей указанных порядков и систему основных элементарных функций, таких как $C_s(x)$, $\exp_s(x)$, $\xi_s(x)$, $\mathrm{sh}_s(x)$, $\mathrm{ch}_s(x)$, $\sin_s(x)$, $\cos_s(x)$, $P_{s|n}(x)$

– целочисленные нечётные порядки: 3, 5, 7, 9, 11;

– целочисленные чётно-нечётные порядки: 2, 6, 10, 12;

– целочисленные чётно-чётные порядки: 4, 8, 16;

– нецелочисленные рациональные порядки меньше единицы: 1/3, 2/3, 2/5, 1/5, 3/2, 4/3;

– нецелочисленные рациональные порядки больше единицы, но меньше двух: 3/2, 5/3, 4/3, 7/4, 7/5;

– нецелочисленные рациональные порядки больше двух: 5/2, 7/3, 9/4, 7/4, 8/5, 4/3, 6/5;

– нецелочисленные иррациональные порядки: $1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \sqrt{2}/2,$ $\sqrt{3}/2, \sqrt{e}/2, e/2, e/3, \sqrt{\pi}\,/\,2, \pi/2, \pi/3, \pi/6, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, e, \pi.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка / Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение / М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

3. *Потапов А.А.* Краткое историческое эссе о зарождении и становлении теории дробного интегродифференцирования // Нелинейный мир. – 2003. – Т. 1, вып. № 1–2. С 69–81.

4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / М.: Наука, 1970.– Т. 1.– 607 с.

5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / М.: Наука, 1970. – Т. 2. – 800 с.

6. *Hadamar J.* Essai sur l'étude des fonctions données par leur dévelopment de Taylor. – J. Math. Pures et Appl. Ser. 4. – 1892. – V. VIII. – P. 101–186.

7. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции / Москва: Высшая школа, 1962. – 249 с.

8. *Чуриков В.А.* Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312 (Математика и механика. Физика). – № 2. – С. 16–20.

9. *Евграфов М.А.* Аналитические функции / М.: Наука, 1991. – 448 с.

10. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / М.: Наука, 1974. – 480 с.

11. *Чуриков В.А.* Внутренняя алгебра операторов дробного интегродифференцирования // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 12–15.

12. *Успенский В. А.* Что такое нестандартный анализ? / М.: Наука, 1987. – 128 с.

13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа / М.: Наука, 1977. – 496 с.

14. *Маделунг Е.* Математика для физиков: справочное руководство / М.: Наука, 1968. – 618 с.

15. *Кудявцев Л.Д.* Курс математического анализа / М.: Высшая школа, 1981. – Т. 1. – 687 с.

16. *Чуриков В.А.* О многозначности дробных производных и интегралов отрицательного и мнимого аргумента // Труды VI Междунар. Конф. студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, 26–29 мая 2009 г. С 671–673. (IV Interna-

tional Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, May 26–29, 2009. P. 671–673).

17. *Чуриков В.А.* Программа и принципы построения дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 9–12.

18. *Чуриков В.А.* Степенные ряды с дробным шагом и построение дробного анализа на основе оператора Адамара // Материалы Междунар. Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» VII Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». – Нальчик-Эльбрус, 17 – 22 мая, 2009 г. – С. 237–242.

19. *Чуриков В.А., Шахматов В.М.* Полиномы дробных порядков в дробном анализе // Труды VI Междунар. конф. студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, 26 – 29 мая 2009 г. С 673 – 675. (IV International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, May 26–29, 2009. P. 673–675).

20. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры / М.: Наука, 1969. – 431 с.

21. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций / М.: Наука, 1967. – Т. 1. – 487 с.

22. *Чуриков В.А.* Дробный анализ порядка 1/2 на основе подхода Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312 (Математика и механика. Физика). – № 2. – С. 21–23.

23. *Фортов В.Е.* Модели уравнений состояний вещества / Черноголовка, РИО ОИХФ АН СССР, 1979. – 49 с.

24. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии / М.: Высшая школа, 1995. – С. 301.

25. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных / Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.

26. *Гук И.Л.* Формализм Лагранжа для частиц, движущихся в пространстве фрактальной размерности // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. – № 4. – С. 7–11.

27. *Учайкин В.В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. – 2003. – Т. 173. – № 8. – С. 846–876.

Учебное издание

ЧУРИКОВ Виктор Анатольевич

Дополнительные главы анализа

Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе *d*-оператора

Учебное пособие

Редактор *О.А. Казакова*
Корректор *О.А. Казакова*
Компьютерная верстка *В.А. Чуриков*
Дизайн обложки *В.А. Чуриков*

Подписано к печати 02.06.2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 6,86. Уч.-изд.л. 6,21.
Заказ . Тираж 300 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru
Типография Арт-Студия «ПолигрО». 634026, г. Томск, ул. Учебнаяб 48А.