ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

В.А. Чуриков

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ДРОБНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРА АДАМАРА

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161я73
Ч932

Чуриков В.А.

Ч932 Краткое введение дробный анализ на основе оператора Адамара: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 81 с.

В пособии изложены научные основы дробного анализа на основе оператора Адамара, который обобщает операции дифференцирования и интегрирования на случай нецелочисленных порядков.

Рассмотрены свойства оператора Адамара. Предложена программа построения дробного анализа как отдельных направлений дробного анализа любых вещественных порядков, которые названы ветвями дробного анализа. Каждая ветвь дробного анализа является самодостаточной и независимой от других ветвей теорией. Каждая ветвь имеет свой набор элементарных и других функций, как это имеет место в стандартном анализе. Для примера дана ветвь порядка 1/2.

Предназначена для студентов и аспирантов математических, физических и технических специальностей и всем интересующимся данной тематикой.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В математике всегда сильна тенденция к обобщению и к рассмотрению различных моделей материального мира и идеальных моделей с единой точки зрения, даже, если эти модели сильно различаются и на первый взгляд не имеют ничего общего.

В этом смысле дробный анализ не является исключением, под которым понимают обобщение устоявшегося понятия интегрирования и дифференцирования обычного стандартного анализа, основателями которого являются Лейбниц и Ньютон, на случай нецелочисленного порядка. А именно, когда порядки дробного интегрирования и дифференцирования (или просто *интегродифференцирования*) могут иметь любой конечный вещественный порядок.

Под дробным анализом (или дробным исчислением) будем понимать направление в анализе, в котором обобщаются аналитические операции дифференцирования и интегрирования «обычного» («стандартного» или «традиционного») анализа на случай производных и интегралов любого конечного вещественного порядка, как целочисленного, так и нецелочисленного. А также исследование свойств данных операций и их применения в математике и естествознании.

Развивать дробный анализ, можно используя различные подходы, многие из которых описаны в литературе [1—3].

Один из наиболее простых способов построения дробного анализа предложил Адамар с помощью введённого им оператора дробного дифференцирования степенных рядов [3]. Подходу Адамара, названный *программой Адамара*, не уделялось должного внимания, поэтому он не получил развития, хотя он представляется более естественным и интуитивно понятным, чем многие другие подходы. Простота и логичность подхода Адамара даёт основание предполагать, что в нём заложен потенциал для построения дробного анализа такого же полноценного, как и традиционный анализ. Кроме этого в данном подходе имеется возможность для самых разных обобщений.

Оператор Адамара можно обобщить для получения не только производных, но и интегралов любых конечных вещественных порядков. При определённых условиях, налагаемых на порядки интегрирования и дифференцирования на классы функций, можно построить бесконечное множество замкнутых и *самодостаточных* теорий дробного анализа. Такие теории были названы *ветвями дробного анализа* соответствующих *порядков*. Среди всех ветвей дробного анализа, «обычный» анализ является лишь частным и вырожденным случаем порядка 1, что делает его одним из самых простых вариантов дробного анализа.

В других подходах, часто, операторами дробного анализа являются интегральные преобразования, которые являются более сложными для применения, чем оператор Адамара [1]…

Многие математики, рассматривали вопросы обобщения анализа на случай производных и интегралах нецелочисленных порядков. Можно упомянуть следующих исследователей: Г. Лейбниц (G.W. Leibniz), Л. Эйлер. (L. Eulero), Н. Абель (N.H. Abel), П. Лаплас (P.S. Laplace), Ж. Фурье (J. Fourier), Б. Риман (B. Riemann), Ж. Лиувилль (J. Liouville), Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren), Ж. Адамара (J. Hadamar), А.К. Грюнвальд (A.K. Grunwald), Г. Вейль (H. Weyl), А. Маршо (A. Marchaud), М. Капуто (M. Caputo), А. Эрдейи (A. Erdélyi), Г. Харди (G.H. Hardy), Д. Литтлвуда (J. E. Littlewood), М. Рисс (M. Riesz), Х. Кобер (H. Kober), М. Сайго (M. Saigo) и др… Из российских и советских математиков вклад в развитие дробного анализа внесли: А.В. Летников, П.И. Лизоркин, Н.Я. Сонин, А.М. Нахушев, В.В. Учайкин, С.Г. Самко, А.А. Килбас , О.И. Маричев, А.В. Псху, М.М. Джрбашян, В.Е. Фортов, К.В. Чукбар, Р.Р. Нигматуллин, Ю.Г. Рудой, Р.С. Рутман, А.А. Станиславский, Р.П. Мейланов, В.М. Головизнин, Г.К. Федотов, Г.Л. Слонимский, А.И. Саичев, Р.Т. Сибатов, О.Н. Репин, В.А. Нахушева, Л.И. Сербина и др…

В настоящее время на территории бывшего СССР исследования по дробному анализу проводятся в Москве, Нальчике, Ростове-на-Дону, Саратове, Таганроге, Казане, Уфе, Алма-Ате, Минске, Ульяновске, Челябинске…

Данное руководство предназначено, прежде всего, для студентов и аспирантов, а также для всех интересующихся дробным анализом. Для восприятия текста необходима подготовка по математике в объёме первых двух курсов технических факультетов.

Изложение опирается на основные понятия стандартного анализа, которые обобщаются на случай нецелочисленных порядков, а затем исследуются их свойства.

1. ОПЕРАТОР АДАМАРА

Получение оператора Адамара

Обобщение операций дифференцирования и интегрирования на случай любого конечного вещественного порядка, можно для начала обобщив соответствующие формулы стандартного анализа для степенных функций.

Для производной и неопределённого интеграла первого порядка от степенной функции x^{α} формулы в стандартном анализе хорошо известны формулы [4]

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1} \text{ и } \int x^{\alpha}dx=\frac{1}{(\alpha+1)}x^{\alpha+1}+C_0 \ \ \alpha\neq 1.$$

Здесь C_0 — константа интегрирования.

Для частного случая $\alpha = -1$ справедлива формула интегрирования

$$\int x^{-1}dx=\ln|x|+C_0.$$

Применяя формулы дифференцирования и интегрирования последовательно n раз можно получить формулы стандартного анализа для производной порядка n от степенной функции x^m (n, $m\in\mathbb{Z}$)

$$\frac{d^n x}{dx^n}x^m=(m-n)\ldots(m-1)mx^{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}.$$

Последовательно интегрируя n раз степенную функцию x^m, получим

$$\int x^m d^n x=\frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}x^{m+n}+\sum_{i=0}^{m-1}C_i x^i=\frac{m!}{(m+n)!}x^{m+n}+\sum_{i=0}^{m-1}C_i x^i.$$

где, m и n — любые целые числа, должно выполняться неравенство $n\neq -m$; $n!$ — факториал, который записывается как произведение чисел $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n-1)\, n$.

Последнее слагаемое содержит C_i — вещественные константы интегрирования, а $\sum_{i=0}^{m-1} C_i x^i$ — полином, получающийся при n-кратном интегрировании

$$\sum_{i=0}^{m-1} C_i x^i = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{m-1} x^{m-1},\ m = 1, 2, 3\ldots$$

Для случая, когда степень функции удовлетворяет равенству: $m = -n$, будет справедлива формула после n интегрирований

$$\int x^{-n} d^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \ln x + \sum_{i=0}^{n-1} C_i x^i .$$

Для обобщения данных формул на случай нецелочисленных порядков производных заменим в них соответственно целые числа m и n на любые конечные вещественные числа s и α, а также заменяя факториалы их обобщением на непрерывный случай. Тогда получим формулу Адамара для нецелочисленного дифференцирования

$$\frac{d^s x}{dx^s} x^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-s+1)} x^{\alpha-s},\ s \le 0 .$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера или эйлеров интеграл второго рода [5], которая и является необходимым обобщением факториала на случай, когда порядок дифференцирования и интегрирования пробегает непрерывный ряд значений. В случае целочисленных значений переменной справедлива формула $\Gamma(n + 1) = n!$, $n \in \mathbb{Z}$; $C_s(x)$ — функция, получающаяся при интегрировании порядка s, которая является аналогом констант интегрирования стандартного анализа, и очевидно, должна удовлетворять свойству аналогичному из стандартного анализа, а именно, производная порядка s от $C_s(x)$ должна быть равна нулю

$$\frac{d^s x}{dx^s} C_s(x) = 0 .$$

Функцию $C_s(x)$ будем называть *полиномом дробного интегрирования порядка* s, который более подробно будет рассмотрен ниже.

Формула Адамара для нецелочисленного интегрирования

$$\int x^{\alpha} d^s x = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} x^{\alpha+s} + C_s(x), s > 0, s \neq -\alpha .$$

Для частного случая нецелочисленного интегрирования, когда $s = \alpha$, можно обобщить следующим образом

$$\int x^{-\alpha} d^{\alpha} x = \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ln x + C_{\alpha}(x), \alpha > 0 .$$

В дальнейшем для интегрирования и дифференцирования дробного порядка, будут использоваться обозначения

$$d^s x : f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^s f(x) \equiv \dfrac{d^s}{dx^s} f(x) \equiv f^{(s)}(x) \equiv \mathrm{F}^{(-s)}(x), s < 0, \\ f(x), s = 0, \\ \int f(x) dx^s \equiv \mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x) \equiv f^{(-s)}(x) + C_s(x), s > 0. \end{cases}$$

Здесь $d^s x$ — оператор дробного интегродифференцирования порядка α; двоеточие : действует как разделитель между оператором и объектом, на который он действует; $f^{(s)}(x)$ и $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ соответственно производная и первообразная порядков s.

Из данных обозначений следует, что производная порядка s является первообразной порядка $-s$, и наоборот, производная порядка $-s$, интерпретируется как первообразная порядка s

$f^{(s)}(x) = \mathrm{F}^{(-s)}(x)$ и $f^{(-s)}(x) = \mathrm{F}^{(s)}(x)$.

Принимается справедливость тождества: $d^s x \equiv (dx)^s$.

Данные формулы легко совместить в одной для случая как положительных порядков оператора (интегрирование), так и для отрицательных порядков оператора (дифференцирование). В результате получим оператор дробного интегродифференцирования действующего на степенные функции

$$d^s x : x^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} x^{\alpha+s} + C_s(x).$$

В новых обозначениях производная от полинома интегрирования

$$d^s x : C_s(x) = 0.$$

При несовпадении порядка оператора дифференцирования и порядка полинома интегрирования, общем случае выполняется неравенство

$$d^s x : C_\alpha(x) \neq 0, s \neq \alpha.$$

Для случая дробного дифференцирования ($s < 0$), полином интегрирования равен нулю

$C_{-s}(x) = 0$.

Для оператора дифференцирования и интегрирования нулевого порядка ($s = 0$), мы будем иметь важный частный случай — единичный оператор $d^0x = \mathbf{1}$

$$d^0 x : x^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+0+1)} x^{\alpha+0} = \mathbf{1} : x^{\alpha+0} = x^\alpha, C_0(x) = 0.$$

Единичный оператор переводит любую функцию $f(x)$ в саму себя

$d^0x{:}f(x) \equiv \mathbf{1}{:}f(x) = f(x)$.

Таким образом, полином интегрирования оператора Адамара d^sx для порядков ($s \leq 0$), что соответствует дробному дифференцированию ($s < 0$) и единичному оператору ($s = 0$) будет равен нулю

$C_s(x) = 0$, ($s \leq 0$).

Объединяя полученные результаты, сформулируем общее определение оператора Адамара.

Оператор Адамара

Определение. Оператор $d^{s}x$ порядка s, $s \in \mathbb{R}$ будем называть *оператором Адамара* порядка s, действующим над множеством степенных функций x^q, $s, x, q \in \mathbb{R}$, $s, q = \mathrm{const} < \infty$ [6]

$$d^s x : x^q = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)} x^{q-s}, s<0, \\ \mathbf{1}x^q = x^q, s=0, \\ \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)} x^{q+s} + C_s(x), s>0, s \neq -q, \\ \ln|x| + C_1, s=1, s=-1. \end{cases} \tag{1}$$

Величину $\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}$ будем называть *коэффициентом оператора Адамара*. $C_s(x)$ — полином интегрирования порядка s.

Случаи $s < 0$ соответствует операторам дробного дифференцирования порядка s, которые будем обозначать, как $d^{-s}x$;

В случае нулевого порядка $s = 0$ имеет место единичный оператор **1**;

Порядки $s > 0$, будут соответствовать операторам дробного интегрирования порядка s, которые будем обозначать, как $d^{+s}x$ или $d^{s}x$;

Частный случай интегрирования для порядков $s > 0$, когда $s = –q$ будем называть *логарифмическим случаем* дробного интегрирования степенной функции.

В дальнейшем под дробными порядками дифференцирования и интегрирования будем понимать любые вещественные порядки $s \in \mathbb{R}$.

Определение. Операторы дифференцирования $d^{-s}x$ и интегрирования $d^{q}x$ будем называть *взаимно обратными* друг другу или, просто, *обратными*, если модули их порядков равны, $| s | = | q |$, а сами порядки имеют противоположные знаки, $s = –q$.

Из пары обратных операторов один является оператором дифференцирования, а другой оператором интегрирования и образуют пару (взаимно)обратных операторов, а операции интегрирования и дифференцирования одного порядка s являются взаимно обратными.

Очевидно, что оператор нулевого порядка d^0x является обратным для самого себя, или *самообратным*.

В частности справедливо равенство

$d^{-s}x \cdot d^s x = d^0 x = \mathbf{1}$.

Заметим, что данное произведение операторов не является коммутативным.

В связи с тем, что в рассматриваемых задачах с дробными операторами Адамара могут участвовать операторы с различными сочетаниями порядков, можно ввести ряд понятий.

Определение. Если в рассматриваемых задачах дробного анализа участвуют только обратные операторы порядков s и $-s$, или хотя бы один из них, то будем говорить о *ветви дробного анализа порядка s*.

Определение. В задачах, в которых участвуют дробные операторы с несколькими порядками, относящиеся к нескольким ветвям $\psi > 1$ дробного анализа, тогда будем говорить о *смешанном дробном анализе* с ψ ветвями.

Укажем на некоторые важные ветви дробного анализа.

Порядки операторов Адамара могут иметь как целочисленные, так и нецелочисленные значения. Нецелочисленные порядки, в свою очередь могут быть рациональными и иррациональными.

Определение. Если порядки дифференцирования и интегрирования в рассматриваемой ветви дробного анализа будут принадлежать только множеству натуральных чисел $s \in \mathbb{N}$, то такой анализ будем называть *целочисленным дробным анализом*.

Ветви целочисленного анализа могут принимать как чётные, так и нечётные значения порядков.

Важный частным случаем целочисленного дробного анализа является анализ с единичным порядком интегрирования и дифференцирования, $s = \pm 1$, т. е. *традиционный* или *стандартный* анализ.

Другие целочисленные ветви дробного анализа является ветвями целочисленных порядков оператора Адамара $s = \pm 2, \pm 3, \pm 4 \ldots$ Данные ветви анализа во многом аналогичны случаю традиционного анализа ($s = \pm 1$), но не тождественны ему.

Важными случаями дробного анализа являются ветви с рациональными порядками, $s \in \mathbb{Q}$.

Определение. Операторы Адамара $d^s x$, у которых порядки являются рациональными числами, $s \in \mathbb{Q}$, называются *рациональными дробными операторами*.

Определение. Если порядки дифференцирования и интегрирования в рассматриваемой ветви дробного анализа будут принадлежать только множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то такой анализ будем называть *рациональным дробным анализом*.

Интересными и наиболее простыми случаями рационального анализа представляются ветви, в которых порядки операторов обратно пропорциональны натуральным числам $s = 1/\lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$. В данном случае знаменатели λ значений порядков операторов является основным параметром данных ветвей дробного анализа.

Общими и более сложными случаями рационального анализа являются ветви, в которых порядки операторов можно представить как отношение натуральных чисел $s = \chi/\lambda$, $\chi, \lambda \in \mathbb{N}$.

Для количества рациональных ветвей справедлива

Теорема. Множество ветвей рационального дробного анализа имеют мощность счётного множества.

Доказательство очевидно и основано на том, что мощность множества рациональных чисел равна мощности счётного множества [5].

Кроме указанных ветвей возможны случаи иррациональных порядков оператора Адамара s.

Определение. Операторы Адамара $d^s x$, у которых порядки s являются иррациональными числами, называются *иррациональными дробными операторами*.

Определение. Операторы Адамара, в котором действуют иррациональные дробные операторы, будем называть *иррациональным дробным анализом*.

Иррациональные ветви дробного анализа представляются более сложными для исследований, чем рациональные ветви.

Важно так же рассматривать отдельно модули порядков операторов, а именно, больше или меньше единицы $| s | > 1$ или $| s | < 1$.

Определение. Два оператора порядков s и $1/q$ называются *обратными по порядку*, если произведение их порядков даёт единицу $sq^{-1} = 1$.

Каждый оператор порядка s имеет *обратный по порядку оператор* со значением порядка $1/s$.

Операторы традиционного анализа $d^{\pm 1}x$ ($s = \pm 1$) являются обратными по порядку сами для себя.

Любая пара взаимно обратных по порядку операторов, в зависимости от знака, являются одновременно операторами дифференцирования или операторами интегрирования.

Определение. Для оператора $d^s x$ имеется противоположный $-d^s x$, такой, что в сумме они дают нулевой оператор

$d^s x + (-d^s x) = d^s x - d^s x = \mathbf{0}$.

Нулевой оператор не относится к операторам Адамара.

Операторы с дробными порядками интегрирования и дифференцирования обычно называют операторами дробного интегрирования или дробного дифференцирования. Очевидно, что операторы Адамара тоже относятся к операторам дробного интегрирования или дробного дифференцирования в зависимости от знака порядка $s \in \mathbb{R}$.

Замечание. Адамар ввёл свой оператор, как оператор дробного дифференцирования степенных рядов [6], который легко обобщается на случай интегрирования, включая частный логарифмический случай [7].

Случай стандартного анализа. Для порядков дифференцирования и интегрирования, равных единице $s = 1$, оператор Адамара даёт привычные формулы дифференцирования и интегрирования.

$$d^s x : x^q = \begin{cases} q x^{q-1}, s = -1, \\ \dfrac{1}{q+1} x^{q+1} + C_0, s = 1, q \neq -1, \\ \ln|x| + C_0, s = 1, q = -1. \end{cases}$$

Здесь C_0 — константа интегрирования.

Простые свойства оператора Адамара

Производная дробного порядка от константы. В общем случае в дробном анализе производная константы не равна нулю. Константу можно представить как полином нулевой степени, или как степенную функцию, с показателем степени равным нулю Cx^0, где C вещественное число ($C \in \mathbb{R}$), тогда производная константы будет

$$d^{-s} x : Cx^0 = C(-s\Gamma(-s))^{-1} x^{-s}.$$

Подробный вывод

$$d^{-s}x:C=d^{-s}x:Cx^{0}=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-s)}Cx^{0-s}=\frac{0!}{\Gamma(1-s)}Cx^{-s}=\frac{Cx^{-s}}{\Gamma(1-s)}=\frac{Cx^{-s}}{-s\Gamma(-s)}.$$

Здесь использовалась формулы $\Gamma(q + 1) = q\Gamma(q)$ и $\Gamma(1) = 0! = 1$.

Частные случаи:

1. В случае, когда $C = 0$, при любых порядках дробного оператора $d^{s}x$: 0 = 0;

2. Дробная производная единицы будет

$$d^{-s}x:1=d^{-s}x:1x^{0}=\frac{1}{-s\Gamma(-s)}x^{-s};$$

3. В случае, когда порядок оператора дифференцирования является целым числом n = –1, –2, –3 …, производная константы будет давать ноль

$$d^{-n}x:Cx^{0}=C\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-n)}x^{0-n}=C\frac{0!}{\infty}x^{-n}=C\frac{1}{\infty}x^{-n}=0,$$

т. к. гамма-функция в этих точках имеет полюсы, $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \Gamma(-2) = \Gamma(-3) = \ldots = \infty$.

4. В частном случае, производной половинного порядка, когда $s = -1/2$, от константы будет

$$d^{-1/2}x:Cx^{0}=\frac{C\Gamma(1)}{\Gamma(1-1/2)}x^{0-1/2}=C\frac{0!}{\Gamma(1/2)}x^{-1/2}=\frac{C}{\sqrt{\pi x}}=\frac{C}{\sqrt{\pi}}x^{-1/2}=C(\pi x)^{-1/2}\neq 0.$$

Производная дробного порядка от степенной функции. Рассмотрим некоторые важные случаи соотношений значений порядков операторов и степенных функций, когда при дробном дифференцировании получаются константы.

В случае, когда порядок оператора дифференцирования и показатель степени функции равны и имеет порядок s ($s \in \mathbb{R}$), будет давать константу

$$d^{-s}x:x^{s}=s\Gamma(s)=\text{const}.$$

Это легко показать

$$d^{-s}x : x^{s} = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-s)} x^{s-s} = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(1)} x^{s-s} = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(1)} x^{0} =$$

$$\Gamma(s+1)x^{0} = \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \text{const}.$$

Частные случаи:

1. В случае, когда порядок оператора дифференцирования и показатель степени степенной функции являются целым числом $n = -1, -2, -3$ …, производная будет давать константу

$$d^{-n}x : Cx^{n} = C\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-n)} x^{n-n} = C\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)} x^{0} = Cn!;$$

2. $d^{-1}x : Cx^{1} = C\dfrac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-1)} x^{1-1} = C\dfrac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)} x^{0} = C1! = C;$

3. $d^{-n}x : Cx^{m} = C\dfrac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-n)} x^{m-n} = Cm(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1), n < m;$

4. $d^{-n}x : Cx^{m} = C\dfrac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-n)} x^{m-n} = C\dfrac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(\infty)} x^{m-n} = 0, n > m.$

5. В частном случае, когда производная половинного порядка, $s = -1/2$, а показатель степени функции будут $q = 1/2$

$$d^{-1/2}x : x^{1/2} = \frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/2+1-1/2)} x^{1/2-1/2} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} x^{0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \text{const}.$$

Здесь было использовано равенство $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$.

6. В случае, когда дробный оператор имеет порядок $-1/\lambda$ (производная дробного порядка $1/\lambda$), $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, а показатель степени функции равен $1/\lambda$

$$d^{-1/\lambda}x : x^{1/\lambda} = \frac{\Gamma(1/\lambda+1)}{\Gamma(1/\lambda+1-1/\lambda)} x^{1/\lambda-1/\lambda} = \frac{\Gamma((\lambda+1)/\lambda)}{\Gamma(1)} x^{0} = \frac{\Gamma(1/\lambda)}{\lambda} = \text{const}.$$

Интегралы дробного порядка

Интеграл дробного порядка от константы и полиномы интегрирования

$d^s x : Cx^0 = C(s\Gamma(s))^{-1} x^s + C_s(x)$.

Вывод

$$d^s x : Cx^0 = C\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+s)} x^{0+s} + C_s(x) = C\frac{0!}{s\Gamma(s)} x^s + C_s(x) = C\frac{1}{s\Gamma(s)} x^s + C_s(x).$$

Здесь $C_s(x) \neq 0$ – полином интегрирования, упоминавшийся ранее, который появляется как слагаемое при интегрировании функций и являются обобщением константы интегрирования в стандартном анализе.

Определение. Функции $C_s(x)$ будем называть *интегральным полиномом порядка s* для пары обратных операторов $d^s x$ и $d^{-s} x$.

Основным свойством интегральных полиномов $C_s(x)$ должно быть то, что при действии на них оператором дифференцирования $d^{-s} x$ должен получаться ноль

$d^{-s} x$: $C_s(x) = 0$.

Тогда из данного соотношения можно получить интеграл дробного порядка от нуля если подействовать оператором интегрирования $d^s x$ на данное равенство одновременно справа и слева

$d^s x{:}0 = C_s(x)$.

Это легко показать

$d^s x{:}0 = d^s x{:}d^{-s} x{:}C_s(x) = d^0 x{:}C_s(x) = \mathbf{1}{:}C_s(x) = C_s(x)$.

Однородность дифференцирования полиномов интегрирования

$d^s x{:}aC_s(x) = a d^s x{:}C_s(x) = 0$.

Аддитивность дифференцирования полиномов интегрирования

$d^s x{:}(C_s(x) + G_s(x)) = d^s x{:}C_s(x) + d^s x{:}G_s(x) = 0$.

Однородность и аддитивность в совокупности дают свойство *линейности дифференцирования полиномов интегрирования*. Из чего следует, что если полином интегрирования порядка s умножить на константу или сложить с полиномом интегрирования того же порядка, то получим полиномы интегрирования порядка s.

Используя это равенство, найдём степени членов интегрального полинома $C_s(x)$ произвольного вещественного порядка s , для которых должно выполняться равенство

$$d^{-s}x:x^q=\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-s)}x^{q-s}=0.$$

Выполнение этого равенства возможно при соблюдении двух условий

$\Gamma(q + 1) \neq 0$ и $\Gamma(q + 1 - s) = \infty$.

Первое выполняется при $q \neq -1, -2, -3, -4 \ldots$

Для выполнения второго условия необходимо, чтобы выполнялось равенство

$q + 1 - s = 0, -1, -2, -3, -4 \ldots$

Данные равенства говорят о том, что суммы показателей степеней должны попадать в полюса гамма-функции.

Тогда получим $q = -1 + s, -2 + s, -3 + s, -4 + s \ldots = -n + s$.

Окончательно интегральный полином $C_s(x)$ для произвольных вещественных порядков s будет [7]

$$C_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{-n+s}=a_1x^{-1+s}+a_2x^{-2+s}+a_3x^{-3+s}+a_4x^{-4+s}+\ldots$$

Полином интегрирования можно переписать в виде

$$C_s(x)=x^s\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{-n}\right)=x^s(a_1x^{-1}+a_2x^{-2}+a_3x^{-3}+a_4x^{-4}+\ldots).$$

В полиномах интегрирования $C_s(x)$ соседние слагаемые имеют показатели степеней, которые отличаются на единицу, или с *единичным шагом*.

У полиномов дробного интегрирования $C_s(x)$ бесконечное счётное множество констант интегрирования a_1, a_2, a_3 …, которые, в общем случае, являются вещественными (или комплексными) числами.

Определение. Полиномы интегрирования, у которых коэффициенты a_i в общем случает различны, будем называть *неоднородными полиномами интегрирования*.

Определение. Полиномы интегрирования $ac_s(x)$, у которых все коэффициенты равны некоторому числу a ($a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a$) будем называть *однородным полиномами интегрирования*, а число a – *коэффициентом полинома интегрирования*.

$$\begin{aligned}&ac_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ax^{-n+s} = a\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n+s} = ax^{-1+s} + ax^{-2+s} + ax^{-3+s} + ax^{-4+s} + \ldots = \\ &a(x^{-1+s} + x^{-2+s} + x^{-3+s} + x^{-4+s} + \ldots + x^{-n+s} + \ldots) = \\ &ax^s(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + \ldots + x^{-n} + \ldots).\end{aligned}$$

Определение. Однородный полином интегрирования, с коэффициентом $a = 1$ будем называть *единичными однородным полиномами интегрирования*.

$$c_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n+s} = x^{-1+s} + x^{-2+s} + x^{-3+s} + x^{-4+s} + \ldots + x^{-n+s} + \ldots,$$

или в другом виде

$$c_s(x) = x^s\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n}\right) = x^s(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + \ldots + x^{-n} + \ldots).$$

Графики единичного однородного полинома интегрирования $c_{1/2}(x)$, а также $2c_{1/2}(x)$ и $0{,}5c_{1/2}(x)$ показаны на рис (рис. 1).

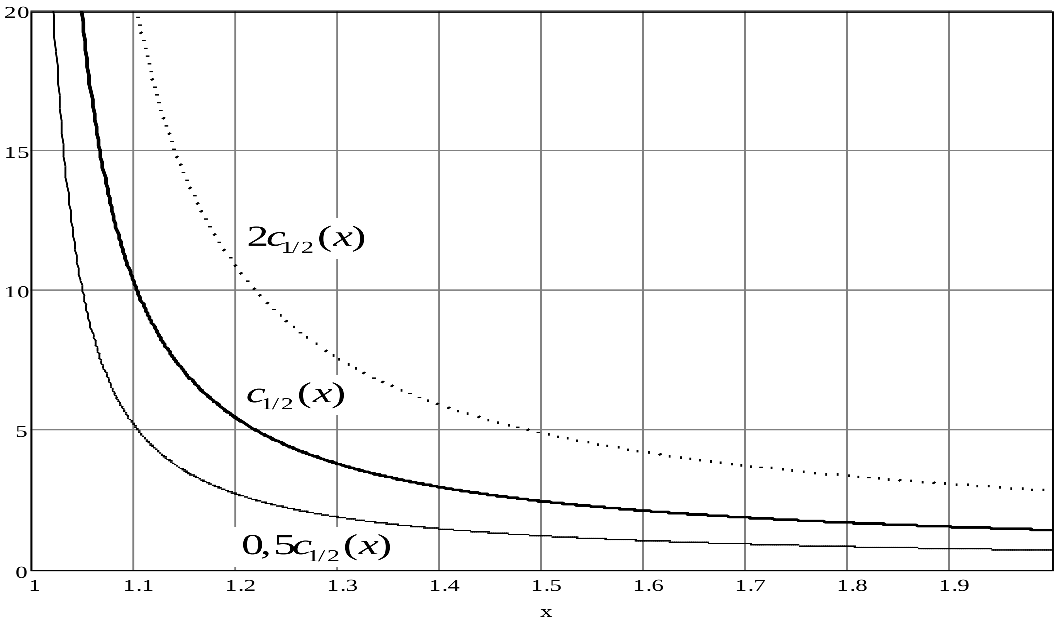

Рис. 1. Единичный однородный полином интегрирования $c_{1/2}(x)$, а также полиномов $2c_{1/2}(x)$ и $0,5c_{1/2}(x)$

Рассмотрим полиномы интегрирования для операторов интегрирования целочисленных порядков $C_m(x)$. Тогда должно выполняться равенство

$$d^{-m}x : C_m(x) = 0.$$

Найдём соотношения для порядков операторов интегрирования и показателей степеней степенных функций полинома интегрирования.

Очевидно, что для произвольных целочисленных порядков операторов дифференцирования $m = 1, 2, 3 \ldots$ и целочисленных показателей степеней степенных функций с показателями степеней $k \geq 0$ и $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ будут выполняться

$$d^{-m}x : x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)} x^{k-m} = 0.$$

Выполнение этого равенства возможно при соблюдении двух условий

$\Gamma(k + 1) \neq 0$ и $\Gamma(k + 1 - m) = \infty$.

Первое выполняется при $k \neq -1, -2, -3, -4 \ldots$

Для выполнения второго условия необходимо, чтобы выполнялось равенство $k + 1 - m = 0, -1, -2, -3, -4 \ldots$, которое можно переписать так $k = -1 + m, -2 + m, -3 + m, -4 + m \ldots$

В случае, когда выполняется условие $k + 1 - m \le 0$ или когда $k \le m - 1$, тогда значения переменной в этих точках соответствуют полюсам гамма-функции, и поэтому она обращается в бесконечность. Это значит, что для случаев целочисленных порядков показателей операторов дифференцирования и полиномы интегрирования будут обрываться в случае, а степени будут ограничиваться целочисленными значениями при $k \le m - 1, m - 2\ m - 3, \ldots 2, 1, 0$.

Окончательно получим, что для любого оператора целочисленного порядка $d^{-m}x$ полиномы интегрирования $C_m(x)$ будут иметь конечное число m слагаемых, равное порядку оператора интегрирования

$$C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{m-2} x^{m-2} + a_{m-1} x^{m-1}.$$

Здесь даны m констант интегрирования $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{m-2}, a_{m-1} \in \mathbb{R}$.

В случае традиционного анализа, для оператора дифференцирования $d^{-1}x$ равенство выполняется для случая $k = 0$. Тогда полином интегрирования будет константой $C_1(x) = a = \text{const}, a \in \mathbb{R}$.

Это просто получить

$$d^{-1}x : a = d^{-1}x : ax^0 = a\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1-1)}x^{0-1} = a\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)}x^{-1} = a\frac{\Gamma(1)}{\infty}x^{-1} = 0.$$

Например, для случая $s = 2$, получим полином интегрирования

$$C_m(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k = a_0 + a_1 x,$$

что легко проверить

$$d^{-2}x:(a_0+a_1x)=a_0\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1-2)}x^{0-2}+a_1\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(1+1-2)}x^{1-2}=$$

$$\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1)}x^{-2}+\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)}x^{-1}=\frac{\Gamma(1)}{\infty}x^{-2}+\frac{\Gamma(1)}{\infty}x^{-1}=0+0=0.$$

Теорема. Производные степени n от полинома интегрирования $C_m(x)$ будут давать ноль, если n и m целые положительные числа, для которых выполняется неравенство $n > m$

$$d^{-n}x:C_m(x)=0, n>m.$$

В неоднородных полиномах интегрирования с нецелым порядком необходимо задавать бесконечное счётное множество констант интегрирования, которые в различных задачах необходимо находить или задавать. Ряд $C_s(x)$ может быть расходящимся или сходящими, а скорости сходимости и расходимости могут быть разными. Чем быстрей сходится ряд, то в зависимости от условий задачи, тем меньшим количеством первых элементов ряда $C_s(x)$ можно ограничиться.

В случае нецелочисленных порядков $s < 1$, члены ряда $C_s(x)$ могут обращаться в бесконечность в точке $x = 0$.

Полином интегрирования для оператора нулевого порядка (единичного или самообратного оператора) d^0x будет равен нулю

$C_s(x) = 0$.

Пример. Неопределённый интеграл порядка 1/2 от константы

$$d^{1/2}x:C=C\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+1/2)}x^{0+1/2}+C_{1/2}(x)=$$

$$C\frac{0!}{\Gamma(3/2)}x^{1/2}+C_{1/2}(x)=C\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}+C_{1/2}(x).$$

Частные случаи дробного интегрирования степенных функций

Дробный интеграл порядка s от степенной функции с показателем $-s$ перепишем в виде

$$d^sx:x^{-s}=\frac{\Gamma(-s+1)}{\Gamma(s-s+1)}x^{-s+s}+C_s(x)=\frac{\Gamma(-s+1)}{\Gamma(1)}x^0+C_s(x)=\Gamma(-s+1)+C_s(x).$$

В частном случае, когда интеграл половинного порядка, $s = 1/2$, а показатель степени функции будет $q = -1/2$

$$d^{1/2}x:x^{1/2} = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(1/2-1/2+1)}x^{-1/2+1/2} + C_{1/2}(x) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(1)}x^{0} + C_{1/2}(x) =$$
$$\Gamma(1/2) + C_{1/2}(x) = \sqrt{\pi} + C_{1/2}(x).$$

Здесь было использовано равенство $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Полином интегрирования порядка 1/2 будет

$$C_{1/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n+1/2} = a_1 x^{-1/2} + a_2 x^{-3/2} + a_3 x^{-5/2} + \ldots + a_n x^{-n+1/2} + \ldots$$

Свойства неопределённого интеграла дробного порядка

Ведём понятие неопределённого интеграла любого вещественного порядка от функции $f(x)$

$d^{\,s}x{:}f(x) = \mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)$.

Здесь сумма $\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)$ — первообразная функция порядка s функции $f(x)$, для каждого конкретного полинома интегрирования $C_s(x)$.

Определение. Сумма функций $\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)$ называется первообразной порядка s функции $f(x)$, если производная порядка s функции $\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)$ равна функции $f(x)$

$d^{\,-s}x$: $(\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x)) = d^{\,-s}x$: $\mathrm{F}^{(s)}(x) = 0$.

Очевидно, что функция $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ тоже будет первообразной порядка s функции $f(x)$.

Определение. Первообразную $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ функции $f(x)$ будем называть *базовой первообразной* $f(x)$.

У функций возможно бесконечное количество первообразных, которые имеют одну базовую первообразную, но отличающиеся полиномами интегрирования.

Определение. Неопределённый интеграл дробного порядка s функции $f(x)$ является множеством всех первообразных порядка s функции $f(x)$.

Справедливы следующие стандартные свойства неопределённого дробного интеграла

Однородность

$d^s x{:}af(x) = ad^s x{:}f(x) = a\mathrm{F}^{(s)}(x) + aC_s(x) = a(\mathrm{F}^{(s)}(x) + C_s(x))$.

Аддитивность

$d^s x{:}(f(x) + \varphi(x)) = d^s x{:}f(x) + d^s x{:}g(x)) = \mathrm{F}^{(s)}(x) + \Phi^{(s)}(x) + C_s(x) + G_s(x)$.

Здесь функции $\mathrm{F}^{(s)}(x) + \Phi^{(s)}(x)$ соответственно базовые первообразные порядка s для функций $f(x)$ и $g(x)$.

Однородность и аддитивность интегрирования в совокупности дают свойство *линейности дробного интегрирования*.

Метод замены переменных при дробном интегрировании

На случай дробных порядков дифференцирования и интегрирования оператор Адамара легко обобщить метод замены переменных, который в стандартном анализе широко используется для дифференцирования и интегрирования функций. Например, если оператор Адамара воздействует на степенную функцию $(ax)^q$, (a = const), тогда будет справедлива формула

$$d^s x:(ax)^q = a^{-s}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}(xa)^{q+s}.$$

Вывод данной формулы

$$d^s x:(ax)^q = a^q\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}x^{q+s} =$$

$$a^{-s}a^{q+s}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}x^{q+s} = a^{-s}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}(xa)^{q+s}.$$

В частности можно записать формулу замены переменной для оператора Адамара

$d^s x{:}\,(ax)^q = a^{-s}d^s(ax){:}\,(ax)^q$.

Для дифференцирования и интегрирования в стандартном анализе (соответственно $s = -1$ и $s = 1$), как частный случай получаются стандартные формулы

$d^{-1}x{:}\,(ax)^q = a(ax)^{q-1}$,

$d^{1}x{:}\,(ax)^q = a^{-1}(ax)^{q+1}$.

Формулы для дробного дифференцирования и интегрирования порядка s функции $f(ax)$, $a = \mathrm{const}$, $a > 0$, будут справедливы формулы

$$d^{-s}x:\, f(ax) = a^{s} f^{(s)}(ax),$$

$$d^{s}x:\, f(ax) = a^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(ax) + C_s(x).$$

Определённый интеграл дробного порядка

Формула Ньютона — Лейбница для дробных порядков интегрирования

$$\int_a^b f(x)d^s x \equiv d^s x:\, f(x)\Big|_a^b = \mathrm{F}^{(s)}(x)\Big|_a^b = \mathrm{F}^{(s)}(b) - \mathrm{F}^{(s)}(a).$$

Здесь a, b – пределы интегрирования

Определённые интегралы дробных порядков с переменными пределами.

Определённые дробные интегралы с верхним переменным пределом

$$d^s_{+a}y:\, f(y) \equiv \mathrm{F}^{(s)}_{+a}(x) = \int_a^x f(y)d^s y \equiv d^s y:\, f(y)\Big|_a^x = \mathrm{F}^{(s)}(y)\Big|_a^x = \mathrm{F}^{(s)}(x) - \mathrm{F}^{(s)}(a).$$

Определённые дробные интегралы с нижним переменным пределом

$$d^s_{-b}y:\, f(y) \equiv \mathrm{F}^{(s)}_{-b}(x) = \int_x^b f(y)d^s y \equiv d^s y:\, f(y)\Big|_x^b = \mathrm{F}^{(s)}(y)\Big|_x^b = \mathrm{F}^{(s)}(b) - \mathrm{F}^{(s)}(x).$$

Несобственные дробные интегралы

Первого рода

$$\int_a^\infty f(x)d^s x \equiv d^s x:\, f(x)\Big|_a^\infty = \mathrm{F}^{(s)}(x)\Big|_a^\infty = \mathrm{F}^{(s)}(\infty) - \mathrm{F}^{(s)}(a).$$

Второго рода

$$\lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)d^s x \equiv \lim_{\delta\to 0}(d^s x:\, f(x)\Big|_a^{b-\delta}) = \lim_{\delta\to 0}\mathrm{F}^{(s)}(x)\Big|_a^{b-\delta} = \lim_{\delta\to 0}(\mathrm{F}^{(s)}(b-\delta) - \mathrm{F}^{(s)}(a)).$$

Аналогично можно записать несобственные интегралы для нижних пределов, а также для нижних и верхних пределов и различных комбинации несобственных интегралов первого и второго рода.

2. ВНУТРЕННЯЯ АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Оператор Адамара носит скорее алгебраический, чем аналитический характер, в отличие от большинства других операторов дробного интегродифференцирования, которые, как правило, являются более сложными с математической точки зрения, интегральными преобразованиями [1]. Выясним общие алгебраические свойства операторов Адамара [8].

Алгебраическую структуру операторов Адамара будем делить на две составляющие: на *внутреннюю алгебру операторов Адамара* и на *внешнюю алгебру операторов Адамара*.

Внутренняя алгебра рассматривает алгебраическую структуру, которая возникает только между операторами Адамара, а внешняя при взаимодействии операторов Адамара и функциями на которые они действуют.

Вначале введем понятие пространств, основанных на операторах Адамара.

Определение. Операторы Адамара $d^{s_i}x$ всех конечных вещественных порядков, $s_i \in \mathbb{R}$, $s_i < \infty$, образуют множество, которое будем называть *пространством операторов Адамара*, которое будем обозначать как $D_{\text{A}}(\mathbb{R})$.

Пространство $D_{\text{A}}(\mathbb{R})$представляет объединение трёх множеств

$$D_{\text{A}}(\mathbb{R})=D^{+}{}_{\text{A}}(\mathbb{R})\cup D^{0}{}_{\text{A}}(\mathbb{R})\cup D^{-}{}_{\text{A}}(\mathbb{R}).$$

Здесь $D^{+}{}_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ – множество всех операторов интегрирования; $D^{-}{}_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ – множество всех операторов дифференцирования; $D^{0}{}_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})=\{d^{0}x\}$ – множество, состоящее из одного элемента – единичного оператора $d^{0}x \equiv \mathbf{1}$.

Очевидно, что каждому вещественному числу s соответствует единственный оператор Адамара $d^{\eta}x$ порядка η. В силу этого, между множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ и пространством операторов Адамара имеет место взаимнооднозначное (биективное) отображение «↔»

$$\mathbb{R} \leftrightarrow D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R}).$$

Биекцию между пространством $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно осуществить бесконечным числом способов. Наиболее подходящим из таких отображений является одно, а именно

Определение. Биекцию между пространством $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ будем называть *тривиальной*, если каждому оператору Адамара $d^{s}x$ будем ставить в соответствие число s, которое определяет порядок данного оператора.

Далее будем рассматривать только тривиальную биекцию между $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$.

Биекция $\mathbb{R} \leftrightarrow D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ значительно упрощает исследование алгебраических и топологических свойств пространства $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$.

В частности, очевидна

Теорема. Множество всех операторов Адамара имеет мощность множества континуума $\aleph_1$.

Пространство $D_{\text{А}}(\mathbb{R})$ является узким и не позволяет последовательно ввести алгебраические операции, такие, как умножение операторов на число и их сложение, так, чтобы результаты операции были замкнуты. Поэтому, необходимо ввести более широкое пространство, чем $D_{\text{А}}(\mathbb{R})$.

Определение. Линейные комбинации операторов Адамара $d^{s_i}x$ будем называть *операторными векторами* $\boldsymbol{d}x$.

Операторные вектора будут выражаться так

$$\boldsymbol{d}x = \sum_{i=0}^{S} \alpha_i d^{s_i} x = \alpha_0 d^{s_0} x + \alpha_1 d^{s_1} x + \alpha_2 d^{s_2} x + \ldots + \alpha_{i-1} d^{s_{i-1}} x + \alpha_i d^{s_i} x + \ldots$$

где S – предел суммирования может быть как конечным, так и бесконечным, а коэффициенты α_i – вещественные (комплексные) и конечные числа.

Определение. Множество всех операторных векторов будем называть пространством *операторных векторов*, и обозначать как $\Sigma_{\text{А}}(\mathbb{R})$.

В частном случае, когда все коэффициенты α_i в операторном векторе равны нулю, тогда получим нулевой оператор

$$\mathbf{0} = \sum_{s_i=1}^{S} \alpha_i d^{s_i} x, \alpha_i = 0 .$$

Здесь $d^{s_i}x$ операторы Адамара порядков s_i, из пространства $D_{\text{А}}(\mathbb{R})$.

При воздействии нулевого оператора на функцию с конечной нормой, получаем ноль

$$\mathbf{0}: f(x) = 0, \| f(x) \| < \infty.$$

Пространство $D_{\text{А}}(\mathbb{R})$ является подпространством пространства $\Sigma_{\text{А}}(\mathbb{R})$, $D_{\text{А}}(\mathbb{R}) \subset \Sigma_{\text{А}}(\mathbb{R})$.

Операторы Адамара $d^{s_i}x$ являются линейно независимыми для разных порядков s_i операторов пространства $D_A(\mathbb{R})$ и образуют базис в пространстве $\Sigma_A(\mathbb{R})$, по которому раскладываются операторные вектора.

Пространство $D_A(\mathbb{R})$ образует наиболее простой базис пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$, когда все коэффициенты базиса равны единице (β_i=1), который будем называть *нормированным базисом* пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$.

Теорема. Базис пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$ имеет множество слагаемых мощности континуума $\aleph_1$.

Данное утверждение справедливо в силу того, что пространство $D_A(\mathbb{R})$ биективно множеству вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пространство $D_A(\mathbb{R})$ образуют не единственно возможный базис пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$. Любое множество операторов $\beta_i d^{s_i}x$, где коэффициенты β_i отличны от нуля и являются вещественными числами ($\beta_i \neq 0$, $\beta_i, I \in \mathbb{R}$). Такой базис не является нормированным в пространстве $\Sigma_A(\mathbb{R})$.

Теорема. Множество всех возможных базисов пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$ имеет мощность, следующую за мощностью континуума – мощность $\aleph_2$, ($\aleph_2 > \aleph_1$).

Это следует из того, что числовые коэффициенты β_i в операторных полиномах и их индексы i пробегают множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, поэтому их можно рассматривать как функции над множеством $\mathbb{R}$, а множество всех функций над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ имеет мощность $\aleph_2$ [9].

В пространстве $\Sigma_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ между операторными векторами можно ввести ряд операций, которые будут образовывать внутренне замкнутую алгебраическую структуру операторных векторов, легко выводимых из свойств оператора Адамара.

Операция умножение операторных векторов на число. Число умножается на операторный вектор слева.

Умножения операторных векторов на единицу (унитарность)

Ch_1. $1\boldsymbol{d}x = \boldsymbol{d}x$;

Ассоциативность умножения на число

Ch_2. $(ab)\boldsymbol{d}x=a(b\boldsymbol{d}x)$, a, b = const;

Операцию сложения «+»операторных векторов

Ассоциативность относительно операции сложения операторных векторов

G_1. $(\boldsymbol{d}_1x + \boldsymbol{d}_2x) + \boldsymbol{d}_3x = \boldsymbol{d}_1x + (\boldsymbol{d}_2x + \boldsymbol{d}_3x)$;

Сложение с нулевым оператором

G_2. $\boldsymbol{d}x + \mathbf{0} = \boldsymbol{d}x$;

Наличие у каждого операторного вектора $\boldsymbol{d}x$ противоположного оператора $-\boldsymbol{d}x$;

G_3. $\boldsymbol{d}x - \boldsymbol{d}x = 0$;

Коммутативность относительно операции сложения

G_4. $\boldsymbol{d}_1x + \boldsymbol{d}_2x = \boldsymbol{d}_2x + \boldsymbol{d}_1x$;

Кроме этого справедливы законы дистрибутивности, связывающие операции сложения и умножения

D_1. $(a + b)\boldsymbol{d}x = a\boldsymbol{d}x + b\boldsymbol{d}x$;

D_2. $a(\boldsymbol{d}_1x + \boldsymbol{d}_2x) = a\boldsymbol{d}x + a\boldsymbol{d}x$.

Теорема. Относительно операции сложения операторные вектора образует коммутативную группу над пространством $\Sigma_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$.

Данное утверждение справедливо в силу свойств G_1, G_2, G_3, G_4.

В силу восьми приведённых свойств Ch_1, Ch_2, G_1, G_2, G_3, G_4, D_1, D_2 для операторных векторов в пространстве $\Sigma_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ справедлива

Теорема. Операторные вектора из пространства $\Sigma_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ относительно операций умножения на число и сложения образуют линейное пространство.

Операторы Адамара, являются частными случаями операторных векторов, поэтому они образуют в пространстве $\Sigma_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ относительно операции сложения коммутативную группу, а относительно операций умножения на число и сложения образуют линейное пространство.

Для реальных вычислений достаточно использовать не полностью пространства $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ и $\Sigma_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$, а их подпространства с конечным или бесконечным счётным числом операторов Адамара или операторных векторов.

Например, в каждой отдельной ветви дробного анализа порядка s, удобно работать с базисными операторными векторами, на основе операторов Адамара, порядки которых удовлетворяют соотношению $s_n=ns$, $s \in \mathbb{R}$, $n\in \mathbb{Z}$. Векторные операторы, ветви анализа порядка s, можно обозначить как

$$\boldsymbol{d}^s x = \sum_{n=0}^{S} \alpha_n d^{ns} x = \alpha_0 d^0 x + \alpha_1 d^s x + \alpha_2 d^{2s} x + \ldots + \alpha_n d^{ns} x + \ldots \, .$$

Здесь α_1, α_2, α_3, … α_n, – вещественные (или комплексные) числа.

Такие операторные вектора будем называть операторными векторами порядка s.

Пространство $\mathit{\Sigma}_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ можно разбить на факторможества $\mathit{\Sigma}_s(\mathbb{R})$ по порядку векторных операторов s

$$\Sigma_A(\mathbb{R}) = \bigcup_{\forall s\in\mathbb{R},\,|s|<\infty} \Sigma_s(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{\forall s\in\mathbb{R},\,|s|<\infty} \Sigma_s(\mathbb{R}) = \varnothing.$$

Для пересечения двух факторможеств справедливо соотношение

$$\Sigma_{s_1}(\mathbb{R}) \cap \Sigma_{s_2}(\mathbb{R}) = \begin{cases} \varnothing, \; s_1 \neq s_2 \\ \Sigma_{s_1}(\mathbb{R}), \; s_1 = s_2 \Rightarrow \Sigma_{s_1}(\mathbb{R}) = \Sigma_{s_2}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Между операторами Адамара введём операцию умножения (*произведение*, *композиция*) операторов. Операция умножения будет замкнута внутри пространства $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$.

Произведение двух операторов порядков s и r можно выразить как один оператор порядка $s + r$.

$d^s x{:}d^r x = d^r x{:}d^s x = d^{s+r} x = d^{r+s} x;$

Оператор Адамара порядка $s + r$ можно разложить на произведение двух операторов порядков s и r (*декомпозиция*)

$d^{s+r} x = d^s x \cdot d^r x;$

Для оператора Адамара выполняется условие ассоциативности

$(d^s x{:}d^q x)\, d^d x = d^s x{:}(d^q x{:}d^d x);$

Для единичного оператора $\mathbf{1}=d^0 x$ справедливы равенства

$d^0 x{:}d^s x = d^s x{:}d^0 x = d^s x$ или в другой записи $\mathbf{1}{:}d^s x = d^s x{:}\mathbf{1} = d^s x;$

Наличие обратного элемента

$d^s x{:}d^{-s} x = d^{-s} x{:}d^s x = d^0 x = \mathbf{1};$

Коммутативность умножения операторов

$d^s x{:}d^q x = d^q x{:}d^s x.$

Теорема. Относительно операции умножения операторы Адамара образуют коммутативную группу в пространстве $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$.

На множестве операторов Адамара можно ввести отношение строгого порядка (> или <), которое удовлетворяет двум аксиомам:

1. Из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$ (*транзитивность*);

2. Невозможно одновременного выполнения $a < b$ и $a > b$.

Определение. Для двух операторов $d^s x$ и $d^q x$ больше тот, у которого больше порядок. Из $s > q$ следует, что $d^s x > d^q x$.

Очевидно, что в случае, когда порядки операторов равны, то равны и сами операторы, т. е. из $s = q$ следует, что $d^s x = d^q x$.

Теорема. Отношение строгого порядка над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ гомоморфно отношению строгого порядка в пространстве операторов Адамара $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$.

В силу равномощности $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$ справедлива следующая

Теорема. Отношение строгого порядка над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ и пространством операторов Адамара $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ изоморфны друг другу.

Над пространством $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ можно ввести меру ρ, в качестве которой удобно взять модуль показателя порядка оператора Адамара $|s|$. В этом случае будут выполняться все свойства меры

1) $\rho(s_1, s_2) = 0$, когда $s_1 = s_2$ (*аксиома тождества*);
2) $\rho(s_1, s_2) = \rho(s_2, s_1)$ (*аксиома симметрии*);
3) $\rho(s_1, s_3) \leq \rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_3)$ (*аксиома треугольника*).

Порядок в множестве $\mathbb{R}$ является архимедовским [10], что в силу изоморфности между $\mathbb{R}$ и $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ выполняется и для операторов из $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$, который для операторов Адамара можно сформулировать.

Определение. Если для двух операторов Адамара справедливо неравенство $d^{|s|}x < d^{|q|}x$, то найдётся такой оператор Адамара $d^{n|s|}x$, $n \in \mathbb{N}$, что будет выполняться неравенство $d^{n|s|}x > d^{|q|}x$.

Теорема. Порядок в пространстве операторов $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ является архимедовским.

Кроме того, в силу изоморфности $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$ мы можем говорить, что в пространстве операторов Адамара $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ порядок архимедовский, как и над множеством $\mathbb{R}$.

Из биективности $\mathbb{R} \leftrightarrow D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ между множеством вещественных чисел и множеством операторов Адамара следует, что в пространстве операторов Адамара можно ввести нетривиальную топологию. Из чего автоматические вытекают самые простые топологические свойства пространства $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$.

Теорема. Пространство операторов Адамара $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ и множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ топологически эквивалентны (*гомеоморфны*).

Теорема. Пространство операторов Адамара $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ одномерно, $\dim(D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})) = 1$.

Теорема. Множество операторов Адамара $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ плотно.

Теорема. Множество операторов Адамара $D_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ связно.

Для операторов Адамара из пространства $D_{\text{A}}(\mathbb{R})$ удовлетворяется аксиома отделимости Хаусдорфа (T_2 – пространство) [11], а значит справедлива

Теорема. Пространство операторов Адамара $D_{\text{A}}(\mathbb{R})$ хаусдорфово.

3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ

Представляется очень важным, для построения полноценного дробного анализа наличие функций, которые для каждой ветви имели бы такое же значение, какое имеют элементарные функции в стандартном анализе.

Элементарные функции составляют базу необходимого инструментария традиционного анализа. Без элементарных функций невозможно себе представить современный анализ. Важность элементарных функций велика не только для анализа, но и для математики вообще, а также для различных приложений в естественных, технических науках и гуманитарных. Естественнонаучные законы в подавляющем большинстве случаев имеют формулировку через элементарные функции.

Многие достижения науки связаны именно с использованием элементарных функций. Поэтому представляется, что полноценный дробный анализ должен обладать своим набором функций, которые будем называть элементарными функциями дробных порядков, многие из которых должны быть аналогичны известным элементарным функциям традиционного анализа.

Кроме того, элементарные функции дробного порядка в случае порядка равного 1 будут переходить в элементарные функции традиционного анализа. Такое положение будем называть *принципом соответствия*.

Кроме этого ввиду большей сложности дробного анализа, в нём могут появляться свои функции, которые можно отнести к элементарным.

Свойства дробных элементарных функций не всегда будут совпадать со свойствами традиционных элементарных функций.

Представляется, что каждая ветвь дробного анализа может стать полноценным направлением дробного анализа, когда в нём будет свой набор элементарных функций.

Аналогичные рассуждения можно использовать для других типов функций, например для специальных функций, которые имеются в традиционном анализе.

Правда надо заметить, что между элементарными и специальными функциями нет строгого различия. Многие элементарные функции можно как специальные, рассматривать как решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим некоторые типы элементарных функций в дробном анализе и начнём с экспонент.

Было показано, что экспоненты разных ветвей дробного анализа не эквивалентны между собой [7], поэтому можно сделать вывод, что каждая ветвь дробного анализ должна иметь свою экспоненту, которая отлична от экспонент других ветвей.

Экспоненты для дробных операторов разных порядков

Экспонента одна из важнейших функций, значение которой трудно переоценить. Важнейшее свойство экспоненты заключается в том, что она не меняется при дифференцировании и при интегрировании (с точностью до сложения с константой интегрирования).

Если выходить за рамки традиционно анализа, то, представляется, что полноценную теорию можно построить только тогда, когда в ней будут использоваться такие функции, которые будут иметь свойства экспоненты — неизменности по отношению к операции дифференцирования, а также и к операции интегрирования, но с точностью до сложения с полиномом интегрирования.

Традиционная экспонента, для дробных порядков оператора уже теряет своё главное свойство не меняться при воздействии оператора дифференцирования и интегрирования (с точностью до сложения с полиномом интегрирования). В этом легко убедиться, например, продифференцировав экспоненту $\exp x$ оператором Адамара порядка 1/2, т. е., $d^{-1/2}x\colon \exp x \neq \exp x$.

Подробно это можно записать

$$d^{-1/2}x:\exp x = d^{-1/2}x:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = d^{-1/2}x:\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\right)=$$

$$\left(\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^2x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}+\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}+\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\ldots\right)\neq \exp x.$$

Прежде, чем получить экспоненты для операторов Адамара любого порядка, обратим внимание на свойства традиционной экспоненты $\exp x$.

Свойство членов ряда $a_i(x)$ экспоненты $\exp x$ при обычном дифференцировании и интегрировании (порядки операторов $s = \pm 1$) имеют следующие свойства:

$d^{\,1}x\colon a_i(x) = a_{i+1}(x)$.

При дифференцировании все члены ряда, кроме первого, переводится в предыдущий

$d^{\,-1}x\colon a_{i+1}(x) = a_i\,(x)$.

Производная первого члена ряда экспоненты равна нулю

$d^{\,-1}x\colon a_1(x) = 0$.

Расписав эту производную через оператор Адамара, получим

$$d^{-1}x:a_1(x)=\frac{1}{\Gamma(0)}x^{-1}=\frac{x^{-1}}{\infty}=0.$$

Или в подробной записи

$$d^{-1}x:a_1=d^{-1}x:1=\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1-1)}x^{0-1}=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)}x^{-1}=\frac{1}{\infty}x^{-1}=\frac{x^{-1}}{\infty}=0.$$

Последнее свойство говорит о том, что первый член ряда экспоненты пропорционален первому члену полинома интегрирования. Но ввиду того, что в традиционном анализе полиномом интегрирования является константа, то тогда первый член ряда пропорционален константе. Данной константой должна быть единица, чтобы обеспечить равенство d^1x: $a_1(x) = a_2(x)$.

Для задания экспоненты достаточно задать первый член ряда и последовательно интегрировать, получая при каждом интегрировании последующий член ряда.

Получим традиционную экспоненту описанным способом, используя данные соотношения между соседними членами ряда

$$\exp x = (d^0x + d^1x + d^2x + d^3x + ... + d^nx + ...)x^0 =$$
$$(1 + d^1x + d^2x + d^3x + ... + d^nx + ...)1 =$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} d^n x\right):1 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Распространим аналогичные свойства на экспоненты любого вещественного порядка s, которые в дальнейшем будем обозначать как $\exp_s x$.

В степенном ряду экспоненты $\exp_s x$ для пары обратных дробных операторов Адамара $d^{\pm s}x$ между соседними членами имеют место соотношения d^sx: $a_i(x) = a_{i+1}(x)$, а первым членом ряда является ненулевая функция $a_1(x) = \Gamma^{-1}(s)x^{-1+s}$, которая пропорциональна первому члену ряда полинома интегрирования $C_s(x)$.

Первый член ряда при действии на него обратного оператора дифференцирования $d^{-s}x$, так чтобы выполнялось равенство, справедливое для традиционной экспоненты, а именно

$$d^{-s}x : \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma(1-1+s)}{\Gamma(1-1+s-s)} x^{s-s-1} = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)\Gamma(0)} x^{-1} = \frac{1}{\infty} x^{-1}.$$

Используя определение экспоненты любого вещественного порядка $s \neq 0$ можно получить, используя функцию $\Gamma^{-1}(s)x^{-1+s}$, которую назовём *стартовой функцией*.

Или расписав подробно

$$d^{-s}x:\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}=\frac{1}{\Gamma(s)}\frac{\Gamma(1-1+s)}{\Gamma(1-1+s-s)}x^{s-s-1}=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)\Gamma(0)}x^{-1}=\frac{1}{\Gamma(0)}x^{-1}=\frac{1}{\infty}x^{-1}.$$

Используя определение экспоненты любого вещественного порядка $s \neq 0$ можно получить, используя функцию $\Gamma^{-1}(s)x^{-1+s}$, которую назовём *стартовой функцией* порядка s.

Коэффициент $a_1 = \Gamma^{-1}(s)$ является корректирующим и необходим для правильного преобразования между членами ряда экспоненты $\exp_s x$.

В частности, для нулевого оператора $d^0x = \mathbf{1}$ стартовая функция равна нулю $x^{-1}/\Gamma(0) = x^{-1}/\infty = 0$.

Найдём экспоненты $\exp_s x$ для операторов любого вещественного порядка $s \neq 0$ для любой пары обратных операторов $d^{\pm s}x$

$$(d^0x+d^sx+(d^sx)^2+(d^sx)^3+\ldots+(d^sx)^n+\ldots)\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}=$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(d^sx)^n\right)\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}=\exp_s x+C_s(x).$$

Здесь введён символ, который обозначает последовательное действие n операторов интегрирования $(d^sx)^n \equiv d^sx:d^sx:d^sx:\ldots d^sx:d^sx.$

После интегрирования получим ряд для экспоненты $\exp_s x$

$$\exp_s x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}=\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}+\frac{x^{2s-1}}{\Gamma(2s)}+\frac{x^{3s-1}}{\Gamma(3s)}+\frac{x^{4s-1}}{\Gamma(4s)}+\ldots$$

Определение. Функцию $\exp_s x$ будем называть *дробной экспонентой*.

Если сделать сдвиг значения индекса $m = n – 1$, тогда экспоненту можно записать в виде ряда нумерация в котором начинается с нулевого элемента

$$\exp_s x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}=\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}+\frac{x^{2s-1}}{\Gamma(2s)}+\frac{x^{3s-1}}{\Gamma(3s)}+\frac{x^{4s-1}}{\Gamma(4s)}+\ldots$$

Если гамма-функцию Эйлера выразить через функцию непрерывного факториала (функция Гаусса) $\Pi(x)$, $\Gamma(x + 1) = \Pi(x)$ [12], то дробную экспоненту можно записать так

$$\exp_s x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(m+1)s-1}}{\Pi((m+1)s-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Pi(ns-1)} = \frac{x^{s-1}}{\Pi(s-1)} + \frac{x^{2s-1}}{\Pi(2s-1)} + \frac{x^{3s-1}}{\Pi(3s-1)} + \ldots$$

Дробная экспонента, по сути, представляет бесконечное множество экспонент любого вещественного порядка s.

Мощность этого множества равна мощности множества всех возможных порядков оператора Адамара, или мощность континуума.

Определение. Для конкретных вещественных чисел s дробная экспонента будет давать экспоненты, которые будем называть *частными экспонентами порядка* s.

С помощью дробной экспоненты можно получить экспоненту любого вещественного порядка для любой пары обратных операторов, подставив вместо s конкретное значение модуля их порядков $|s|$ обратных операторов.

Можно экспоненту выразить в операторном виде.

Введём интегральный оператор $\mathbf{G}_s(x)$, который назовём *генератором дробной экспоненты порядка s*

$$\mathbf{G}_s(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (d^s x)^n \,.$$

Воздействие генератора экспоненты порядка s на стартовую функцию порядка s даст дробную экспоненту порядка s

$$\mathbf{G}_s(x) : \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)} = \exp_s x + C_s(x)\,.$$

Теорема. *Интегральный генератор экспоненты порядка s*, действуя на экспоненту порядка s, переводит её в саму себя с точностью до прибавления полинома интегрирования

$$\mathbf{G}_s(x) : \exp_s x = \exp_s x + C_s(x).$$

Теорема. Для каждой пары обратных операторов Адамара $d^{\pm s}x$ имеется своя частная экспонента $\exp_s x$, причём единственная и, отличная от экспонент других пар обратных операторов.

Теорема. Для каждой частной экспоненты $\exp_s x$ имеется только единственная пара обратных операторов Адамара $d^{\pm s}x$.

Это можно записать

$\exp_s x = \exp_q x$, $s = q$

и

$\exp_s x \neq \exp_q x$, $s \neq q$.

Для дробной экспоненты будут выполняться основные свойства — независимости от дифференцирования и интегрирования.

Интеграл порядка s от экспоненты $\exp_s x$ будет

$d^{s}x{:}\exp_s x = \exp_s x + C_s(x)$.

Дифференцируя правую часть оператором $d^{-s}x$, получим

$d^{-s}x{:}(\exp_s x + C_s(x)) = \exp_s x$.

В частности, производная порядка α от дробной экспоненты порядка α переводит экспоненты в неё саму

$d^{-s}x{:}\exp_s x = \exp_s x$.

Докажем это равенство

$$d^{\alpha}x:\exp_{\alpha}(-x) = d^{\alpha}x:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{-1+n\alpha}}{\Gamma(ns)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(-1+1+n\alpha)}{\Gamma(-1+1+n\alpha-\alpha)}\frac{(-x)^{-1+n\alpha-\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma((n-1)\alpha)}\frac{(-x)^{-1+n\alpha-\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{-1+n\alpha-\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha)} = \frac{(-x)^{-1+s}}{\Gamma(s)} + \frac{(-x)^{-1+2s}}{\Gamma(2s)} + \frac{(-x)^{-1+3s}}{\Gamma(3s)} + \ldots + \frac{(-x)^{-1+ns}}{\Gamma(ns)} + \ldots$$

Позже будет показано, что в целочисленном дробном анализе возможно существование функций, которые как экспоненты не меняются при дробном интегрировании и дифференцировании отличных от экспонент.

Рассмотрим некоторые свойства дробной экспоненты.

Теорема. Ряд дробной экспонента $\exp_s x$ с порядками $s \geq 1$ является сходящимся, с радиусом сходимости R равным бесконечности (R = ∞).

Теорема. Ряд дробной экспоненты $\exp_s x$ с порядками $s < 1$ имеют особую точку $x = 0$, в которой ряд расходится, а в остальных точках являются сходящимися рядом, с радиусом сходимости R равным бесконечности (R = ∞).

Заметим, что все степенные ряды с положительными целочисленными степенями в точке $x = 0$ всегда сходятся [13].

Поскольку каждая отдельная ветвь дробного анализа, имеет свою экспоненту, отличную от экспонент других ветвей, имеет смысл рассмотреть качественные и количественные свойства частных экспонент из рациональных ветвей дробного анализа, построить их графики и дать их предварительную классификацию на основе, прежде всего, компьютерных вычислений.

Экспонента в дробном анализе уже не является показательной функцией, как в случае стандартного анализа ($s = 1$). В дробном анализе экспоненты, в общем случае можно отнести к другому типу элементарных функций, которые в стандартном анализе вырождаются в показательные функции.

Поэтому свойство $\exp_s(-x) = (\exp_s(x))^{-1}$, которое выполняется для традиционной экспоненты, для частных экспонент уже не выполняется, т. е. в общем случае справедливо неравенство $\exp_s(-x) \neq (\exp_s(x))^{-1}$, $(s \neq 1)$.

Воздействие на дробную экспоненту $\exp_s(ax)$, $a = \mathrm{const}$, оператором Адамара интегрирования $d^s x$ и дифференцирования $d^{-s}x$ того же порядка дают соотношения [14]

$$d^{-s}x{:}\exp_s(ax) = a^s \exp_s(ax),$$

$$d^{s}x{:}\exp_s(ax) = a^{-s} \exp_s(ax) + C_s(x).$$

Пример. Для дифференцирования и интегрирования экспоненты exp (ax) в стандартном анализе (соответственно $s = -1$ и $s = 1$), в частности получаются стандартные формулы

$$d^{-1}x{:}\exp(ax) = a \exp(ax),$$

$d^{1}x{:}\exp(ax) = a^{-1}\exp(ax) + C$.

Пример. Для дифференцирования и интегрирования частной экспоненты $\exp_{1/2}(ax)$ стандартного анализа (соответственно $s = -1/2$ и $s = 1/2$), получим

$d^{-1/2}x{:}\exp_{1/2}(ax) = a^{1/2}\exp_{1/2}(ax)$,

$d^{1/2}x{:}\exp_{1/2}(ax) = a^{-1/2}\exp_{1/2}(ax) + C_{1/2}(x)$.

Порядки рассматриваемых экспонент не очень сильно отличаются от единицы, соответствующей стандартному анализу. Иррациональные ветви в данной работе не рассматриваются. Более полный анализ частных экспонент как численно, и что более важно — аналитически, является значительно более сложной задачей и представляется делом будущего. Поэтому приведённые результаты носят предварительный характер.

Для этого необходимо выделить все множества экспонент, в каждом из которых экспоненты будут иметь аналогичные свойства, которые назовём *родственными экспонентами*.

Исходя из расчётов и из аналитических выкладок, можно выделить следующие типы экспонент.

Экспоненты целочисленных порядков:

Порядок $s = 0$, тривиальный случай, здесь $\exp_0 x = 0$, родственных экспонент не имеет.

Традиционная экспонента, порядок $s = 1$, вырожденный случай, родственных экспонент нет.

Чётные целочисленные порядки, $s = 2, 4, 6 \ldots$ имеют бесконечное множество родственных экспонент;

Нечётные целочисленные порядки, $s = 3, 5, 7 \ldots$ имеют бесконечное счётное множество родственных экспонент.

Экспоненты нецелочисленного рационального порядка:

Степени $1/n = 1/2, 1/3, 1/4 \ldots$ имеют бесконечное счётное множество родственных экспонент.

Степени $m/n < 1$, имеют бесконечное счётное бесконечное счётное множество родственных экспонент.

Степени $m/n > 1$, имеют бесконечное счётное множество родственных экспонент.

Степени $m/n = 5/2, 7/2, 9/2 \ldots$ особенностью этих экспонент является более быстрое возрастание, чем у других рациональных экспонент.

Экспоненты иррациональных порядков.

Более подробная классификация экспонент требует дальнейшего рассмотрения.

Рассмотрим некоторые частные экспоненты

В частном случае, когда $s = 0$, получим $\exp_0 x = 0$.

Например, легко получить традиционную экспоненту $\exp x$, подставив значение $s = 1$ в дробную экспоненту

$$\exp_1 x \equiv \exp x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Для порядка $s = 2, 3, 4$ получим экспоненты

$$\exp_2 x \equiv \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$$

$$\exp_3 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{3m-1}}{(3m-1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{14}}{14!} + \ldots$$

$$\exp_4 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{19}}{19!} + \ldots$$

Для примера получим экспоненту порядка 1/2, $\exp_{1/2} x$ для пары обратных операторов $d^{\pm 1/2}x$ рационального дробного анализа с шагом 1/2 будем обозначать $\exp_{1/2} x$, которая будет записана

$$\exp_{1/2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-1+n/2}}{\Gamma(n/2)} = \frac{x^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + \frac{x^0}{\Gamma(1)} + \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)} +$$

$$\frac{x}{\Gamma(2)} + \frac{x^{3/2}}{\Gamma(5/2)} + \frac{x^2}{\Gamma(3)} + \frac{x^{5/2}}{\Gamma(7/2)} + \frac{x^3}{\Gamma(4)} + \ldots + \frac{x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} + \ldots$$

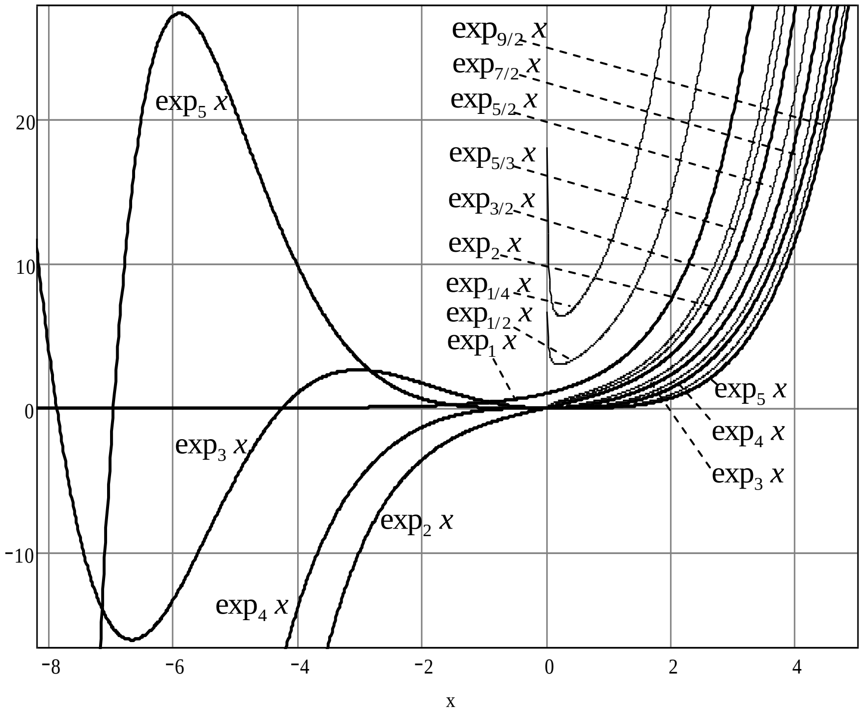

Рис. 2. Дробные экспоненты разных порядков
на вещественной плоскости

Экспоненты целочисленных порядков вещественного аргумента всегда являются вещественными функциями и определены на всей вещественной оси. Для нецелочисленных значений порядков экспонент требуется выход в комплексную плоскость для отрицательных значений переменных.

На рис. 2 показаны экспоненты разных порядков на вещественной плоскости.

Элементарные функции дробного анализа связанные с дробной экспонентой

На основе дробной экспоненты можно вводить функции, которые являются обобщением функций используемых в традиционном анализе. Простым примером могут служить тригонометрические и гиперболические функций, которые можно обобщить для любых конечных вещественных порядков дробного анализа s. Это можно сделать разными способами.

Гиперболические функции в дробном анализе на основе оператора Адамара, легко получить из дробной экспоненты порядка s, используя обобщение стандартной формулы: $\exp_s(\pm x) = \mathrm{ch}_s\, x \pm \mathrm{sh}_s\, x$. В результате получим [7, 15, 16]

$$\mathrm{ch}_s x = \frac{1}{2}(\exp_s(x) + \exp_s(-x)) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1} + (-x)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s-1} + (-x)^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}\right),$$

$$\mathrm{sh}_s x = \frac{1}{2}(\exp_s(x) - \exp_s(-x)) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1} - (-x)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s-1} - (-x)^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}\right),$$

$$\mathrm{th}_s x = \frac{\mathrm{sh}_s x}{\mathrm{ch}_s x}, \mathrm{cth}_s\, x = \frac{\mathrm{ch}_s x}{\mathrm{sh}_s x},\ \mathrm{sch}_s x = \frac{1}{\mathrm{ch}_s x}, \mathrm{csch}_s x = \frac{1}{\mathrm{sh}_s x}.$$

Для тригонометрических функций дробных порядков можно получить формулы обобщающие формулы Эйлера, которые связывают экспоненты с синусами и косинусами дробного порядка: $\exp_s(\pm ix) = \cos_s x \pm i \sin_s x$. Тогда будет [7, 15, 16]

$$\cos_s x = \frac{1}{2}(\exp_s(ix) + \exp_s(-ix)) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{ns-1} + (-ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ix)^{(m+1)s-1} + (-ix)^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}\right),$$

$$\sin_s x = \frac{1}{2i}(\exp_s(ix) - \exp_s(-ix)) =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^{ns-1}-(-ix)^{ns-1}}{\Gamma(ns)}\right) =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ix)^{(m+1)s-1}-(-ix)^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}\right),$$

$$\mathrm{tg}_s\, x = \frac{\sin_s x}{\cos_s x},\ \mathrm{ctg}_s\, x = \frac{\cos_s x}{\sin_s x},\ \sec_s x = \frac{1}{\cos_s x},\ \mathrm{cosec}_s\, x = \frac{1}{\sin_s x}.$$

Будут справедливы соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями дробных порядков

$$\cos_s x = \mathrm{ch}_s(ix),\ i\sin_s x = \mathrm{sh}_s(ix),\ \cos_s(ix) = \mathrm{ch}_s\, x,\ \sin_s(ix) = i\,\mathrm{sh}_s\, x,$$
$$i\,\mathrm{tg}_s x = \mathrm{th}_s(ix),\ \mathrm{ctg}_s x = i\,\mathrm{cth}_s(ix),\ \mathrm{tg}_s(ix) = i\,\mathrm{th}_s x,\ i\,\mathrm{ctg}_s(ix) = \mathrm{cth}_s x.$$

На рис. 3–6 приведены графики синусов и косинусов порядков, близких к единице

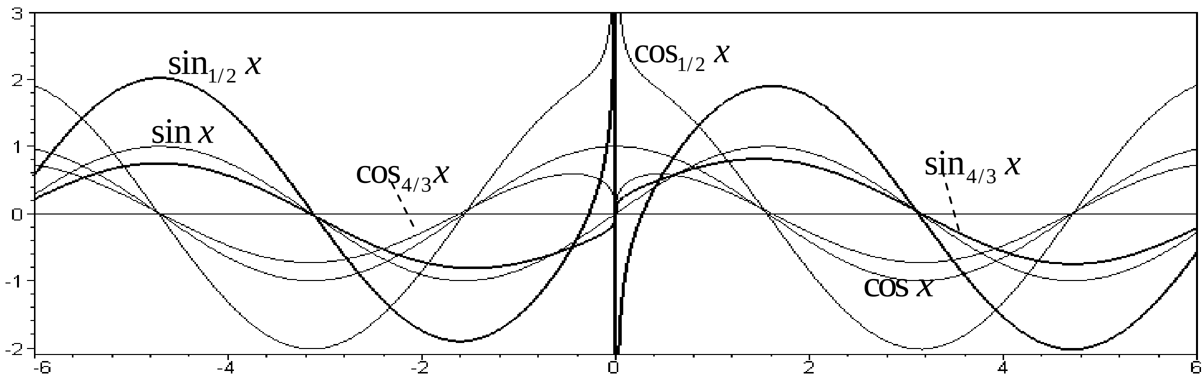

Рис. 3. Синусы и косинусы порядков 1/2, 1, 4/3

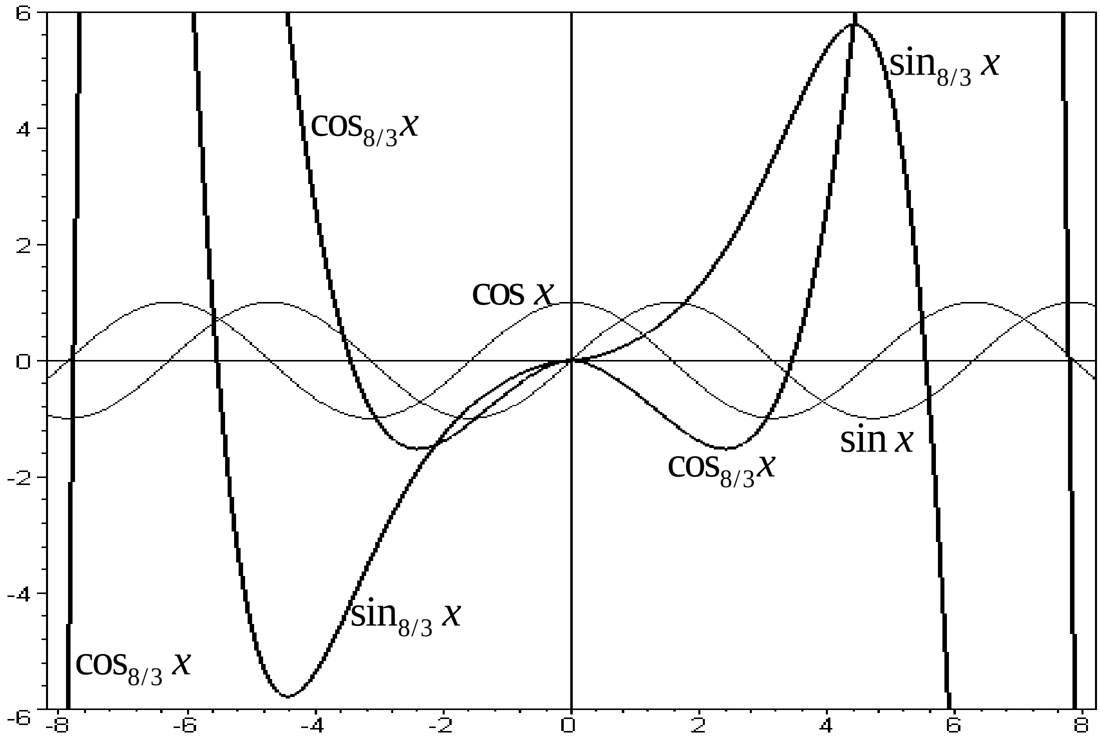

Рис. 4. Синусы и косинусы порядков 1, 8/3

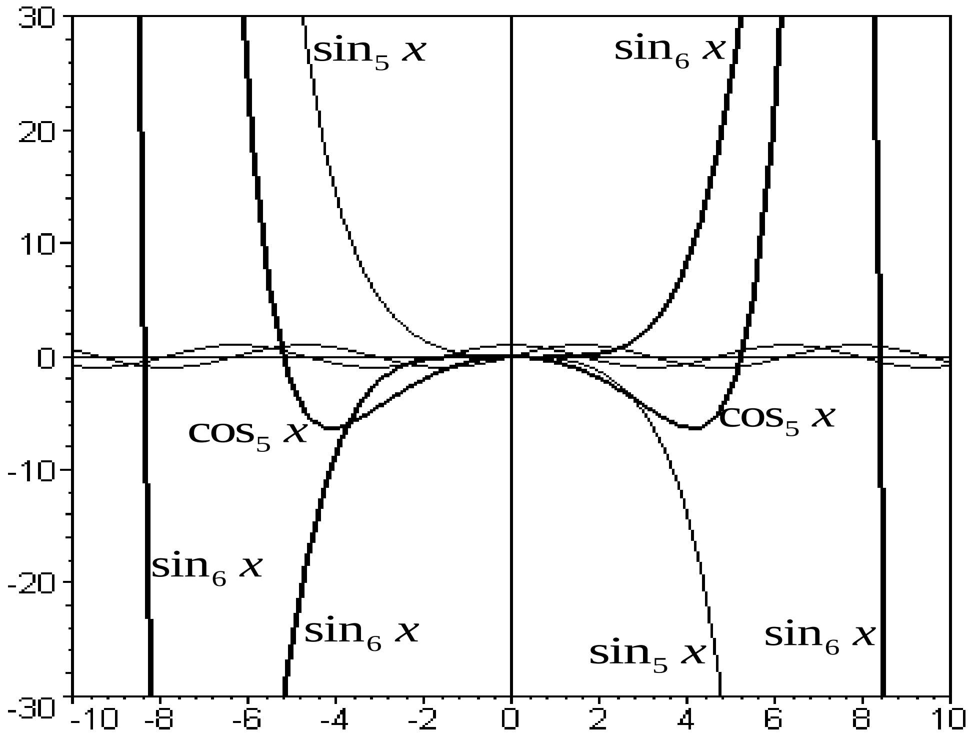

Рис. 5. Синусы порядков 1, 5, 6 и косинусы порядков 1, 5

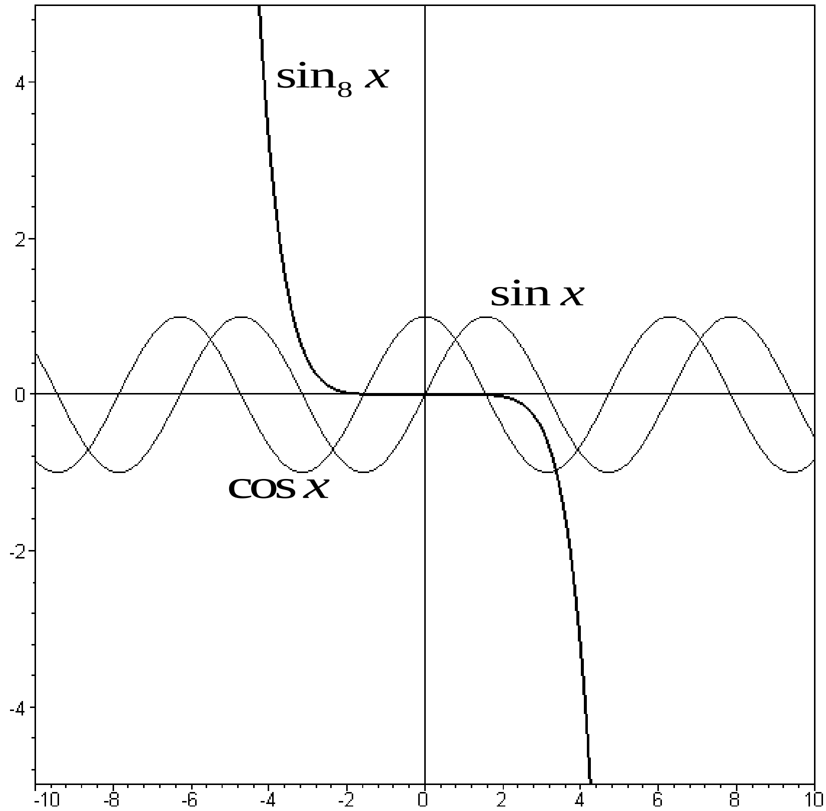

Рис. 6. Синус и косинус порядка 1 и синусы порядков 6 и 8

Чем больше дробный порядок у синусов и косинусов отличается от единицы, тем сильней эти функции отличаются от соответствующих функций традиционного анализа.

Справедливы свойства симметрии для приведённых функций для любых вещественных порядков s

$$\mathrm{ch}_s\, x = \mathrm{ch}_s(-x),\, \mathrm{sh}_s\, x = -\mathrm{sh}_s(-x),$$
$$\cos_s x = \cos_s(-x),\, \sin_s x = -\sin_s(-x).$$

Одним из важных вопросов является классификация элементарных функций, таких как, экспоненты, гиперболические и тригонометрические функции по их свойствам. Это поможет, в свою очередь, проклассифицировать множество всех ветвей дробного анализа и разбить их на множества похожих по свойствам независимых теорий [15, 16].

Полиномы дробных порядков в дробном анализе

В стандартном анализе одними из самых важных элементарных функций являются полиномы. Через полиномы выражаются некоторые другие элементарные функций.

Полиномы дробных порядков $P_{s|n}(x)$ [17] являются обобщением полиномов стандартного анализа с целочисленными порядками [18]

Определение. Функции вида

$$P_{s|n}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{s(i+1)-1},\ a_i = \mathrm{const},\ n = 0, 1, 2, 3\ldots,\ n < \infty$$

будем называть *дробными полиномами порядка s степени n*, или *полиномами дробных порядков*.

Или в подробной записи полином будет иметь вид

$$P_{s|n}(x) = a_0 x^{s-1} + a_1 x^{2s-1} + a_2 x^{3s-1} + \ldots + a_{n-1} x^{sn-1} + a_n x^{s(n+1)-1}.$$

Для дробных полиномов по аналогии с полиномами традиционного анализа (s = 1) легко ввести алгебраические операции и рассмотреть их алгебраическую структуру.

Умножение на вещественное (или комплексное) число α

$$\alpha P_{s|n}(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^{s(i+1)-1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^{s(i+1)-1}.$$

Свойства операции умножения на число

1. Умножения операторных векторов на единицу (унитарность)

$1P_{s|n}(x) = P_{s|n}(x)$;

2. Ассоциативность умножения на число

$\alpha(\beta P_{s|n}(x)) = (\alpha\beta) P_{s|n}(x)$;

Сложение дробных полиномов порядка s определяется равенством

$$P_{s|n}(x) + Q_{s|n}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{s(i+1)-1} + \sum_{i=0}^{n} b_i x^{s(i+1)-1} = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^{s(i+1)-1}.$$

Операция сложения имеет следующие свойства, которые получаются просто.

3. Ассоциативность относительно операции сложения дробных полиномов

$$(P_{s|n}(x)+Q_{s|n}(x))+R_{s|n}(x)=P_{s|n}(x)+(Q_{s|n}(x)+R_{s|n}(x));$$

4. Сложение с нулевым полиномом

$$P_{s|n}(x)+0=P_{s|n}(x);$$

5. Наличие у каждого дробного полинома $P_{s|n}(x)$ противоположного – $P_{s|n}(x)$

$$P_{s|n}(x)+(-P_{s|n}(x))=0;$$

6. Коммутативность относительно операции сложения

$$P_{s|n}(x)+Q_{s|n}(x)=Q_{s|n}(x)+P_{s|n}(x);$$

Справедливы законы дистрибутивности, связывающие операции сложения и умножения

7. $\alpha(P_{s|n}(x)+Q_{s|n}(x))=\alpha Q_{s|n}(x)+\alpha P_{s|n}(x);$

8. $(\alpha+\beta)P_{s|n})=\alpha P_{s|n}(x)+\beta P_{s|n}(x).$

Из свойств 3 – 4 следует

Теорема. Относительно операции сложения дробные полиномы порядка s степени n образуют коммутативную (абелеву) группу.

В силу свойств 1 – 8 следует

Теорема. Относительно операций умножения дробных полиномов на число и относительно операции сложения дробные полиномы порядка s степени n образуют линейное пространство.

Для полиномов дробного порядка введём следующие пространства

Определение. Пространством дробных полиномов порядка s степени n будем называть множество всех возможных полиномов порядка s степени n и будем обозначать $R_{s|n}[x]$.

Определение. Пространством дробных полиномов порядка s всех степеней будем называть множество всех возможных полиномов порядка s и будем обозначать $R_s[x]$.

Тогда каждое пространство $R_{s|n}[x]$ является коммутативной группой относительно сложения и линейным пространством относительно операции умножения на число и сложения.

Для пространств $R_{s|n}[x]$ справедливы отношения включения

$$R_{s|0}(x) \subset R_{s|1}(x) \subset R_{s|2}(x) \subset \ldots \subset R_{s|n}(x) \subset R_{s|(n+1)}(x) \subset \ldots$$

Свойства полиномов относительно операций дифференцирования и интегрирования.

При взятии производной или интеграла порядка s от полинома порядка s, то мы получаем полином того же порядка, но степень его уменьшается на единицу при дифференцировании и увеличивается на единицу при интегрировании

$$d^{-s}x : P_{s|n}(x) = P_{s|(n-1)}(x),$$

$$d^{s}x : P_{s|n}(x) = P_{s|(n+1)}(x) + C_s(x).$$

Определение. Если функцию можно продифференцировать m раз оператором дифференцирования порядка s, то такую функцию будем называть *m-гладкой порядка s*. Если $m = \infty$, то такую функцию будем называть *бесконечно гладкой порядка s*.

Теорема. Полиномы порядка s степени n можно продифференцировать $n + 1$ раз $(d^{-s}x)^{n+1} : P_{s|n}(x) = 0$. Или полиномы порядка s степени n являются $(n + 1)$-*гладкими функциями порядка s.*

Теорема. Относительно операций дифференцирования и интегрирования порядка s дробные полиномы порядка s степени n образуют линейное пространство.

Теорема. Относительно операций умножения на число и сложения дробными полиномами порядка s степени n образуют линейное пространство.

Примеры дробных полиномов. В случае $s = 1$ имеет место полиномы традиционного анализа

$$P_n(x) \equiv P_{1|n}(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n .$$

Для порядка $s = 1/2$ полиномы степени n будут выглядеть

$$P_{(1/2)|n}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i+1)/2-1} = a_0 x^{-1/2} + a_1 x^0 + a_2 x^{3/2} +$$

$$a_3 x^2 + ... + a_{n-3} x^{(n-2)/2} + a_{n-2} x^{(n-1)/2} + a_{n-1} x^{n/2}.$$

Степенные и показательные функции единые для всех ветвей дробного анализа.

Степенные функции x^{α} порядка s. В случае, когда у дробностепенных полиномов вещественного порядка s один числовой коэффициент отличен от нуля, а все остальные равны нулю, получим степенную функцию порядка s степени $n - 1$

x^{sn-1}, $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

Показатели степеней степенных функций x^{α} у ветви дробного анализа порядка s будут определяться соотношением

$\alpha = sn - 1.$

Теорема. Степенные функции порядка s степени $n - 1$ являются *n-гладкой порядка s* и их можно продифференцировать $n + 1$ раз оператором $d^{-s}x$

$(d^{-s}x)^{n+1}:x^{sn-1} = 0.$

Если показатель степени α не удовлетворяет условию $\alpha = sn - 1$, то такие функции могут быть в общем случае бесконечно гладкими порядка s.

4. О МНОГОЗНАЧНОСТИ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО И МНИМОГО АРГУМЕНТА

Если функция $f(x)$ представляется дробностепенным рядом с дробным шагом s [15—16]

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn-1},\ a_n,\ s \in \mathbb{R},\ n_0,\ n \in \mathbb{Z},$$

то для таких функций легко получить соотношения для дифференцирования и интегрирования дробных порядков s с помощью оператора Адамара [14]

$$d^{-s}x{:}f(\lambda x) = \lambda^s f^{(s)}(\lambda x),\ \lambda = \mathrm{const},$$

$$d^{s}x{:}f(\lambda x) = \lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(\lambda x) + C_s(x).$$

Здесь $C_s(x)$ – полином интегрирования, $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ – *базовая первообразная* функции $f(x)$.

Рассмотрим важные случаи, когда константа является отрицательным $-\lambda$ или мнимым числом $i\lambda$, тогда можно получить соотношения для интегралов и производных дробных порядков.

$$d^{-s}x{:}f(-\lambda x) = (-1)^s\lambda^s f^{(s)}(-\lambda x),$$

$$d^{s}x{:}\ f(-\lambda x) = (-1)^{-s}\lambda^{-s}\mathrm{F}^{(s)}(-\lambda x) + C_s(x),$$

$$d^{-s}x{:}f(i\lambda x) = i^s\lambda^s f^{(s)}(i\lambda x),$$

$$d^{s}x{:}f(i\lambda x) = i^{-s}\lambda^{-s}\mathrm{F}^{(s)}(i\lambda x) + C_s(x).$$

В случае дробного порядка дифференцирования и интегрирования получаются дробные степени отрицательных и мнимых констант. Отрицательное и мнимое число любой вещественной степени будет набором комплексных чисел от одного для традиционного анализа ($s = 1$) до бесконечного счётного множества для иррациональных порядков. Для рациональных порядков степенями отрицательных и мнимых чисел будет конечное множество комплексных чисел [19]

$$(-1)^{\pm s} = \cos(s\pi(1+2k)) \pm i\sin(s\pi(1+2k)),$$

$$i^{\pm s} = \cos(s(\pi/2 + 2\pi k)) \pm i\sin(s(\pi/2 + 2\pi k)), k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда производная и интеграл примут вид для отрицательных значений

$$d^{-s}x: f(-\lambda x) = (\cos(s\pi(1+2k)) + i\sin(s\pi(1+2k)))\lambda^s f^s(-\lambda x),$$

$$d^s x: f(-\lambda x) = (\cos(s\pi(1+2k)) - i\sin(s\pi(1+2k)))\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(-\lambda x) + C_s(x).$$

Производная и интеграл для мнимых значений будут

$$d^{-s}x: f(ix) = (\cos(s(\pi/2 + 2\pi k)) + i\sin(s(\pi/2 + 2\pi k)))\, f^{(s)}(ix),$$

$$d^s x: f(ix) = (\cos(s(\pi/2 + 2\pi k)) - i\sin(s(\pi/2 + 2\pi k)))\,\mathrm{F}^{(s)}(ix) + C_s(x).$$

В результате многозначность коэффициентов получаем, что операция дробного интегрирования и дифференцирования вещественных порядков от функций отрицательного и мнимого аргументов является неоднозначной для всех случаев, кроме традиционного анализа.

Определение. Производные и интегралы дробных порядков, для которых число k = 0 будем называть главными производными и интегралами.

Главные производная и интеграл любого вещественного порядка s от функции с отрицательным аргументом будут

$$d^{-s}x: f(-\lambda x) = (\cos(s\pi) + i\sin(s\pi))\lambda^s f^{(s)}(-\lambda x),$$

$$d^s x: \exp(-\lambda x) = (\cos(s\pi) - i\sin(s\pi))\lambda^{-s}\,\mathrm{F}^{(s)}(-\lambda x) + C_s(x).$$

Главные производная и интеграл любого вещественного порядка s от функции мнимого аргумента будут

$$d^{-s}x: f(ix) = (\cos(s\pi/2) + i\sin(s\pi/2))\, f^{(s)}(ix),$$

$$d^s x: f(ix) = (\cos(s\pi/2) - i\sin(s\pi/2))\,\mathrm{F}^{(s)}(ix) + C_s(x).$$

Если для примера взять экспоненту порядка s и взять от данной экспоненты отрицательного и мнимого аргумента производную и интеграл вещественного порядка.

Производная и интеграл от экспонент порядка s для отрицательных значений аргумента от экспонент мнимого аргумента порядка s будут

$$d^{-s}x:\exp_s(-\lambda x)=(\cos(s\pi(1+2k))+i\sin(s\pi(1+2k)))\lambda^s\exp_s(-\lambda x),$$

$$d^{s}x:\exp_s(-\lambda x)=(\cos(s\pi(1+2k))-i\sin(s\pi(1+2k)))\lambda^{-s}\exp_s(-\lambda x)+C_s(x).$$

Главные производная и интеграл любого вещественного порядка s от экспонент порядка s будут

$$d^{s}x:\exp_s(-\lambda x)=(\cos(s\pi)+i\sin(s\pi))\lambda^s\exp_s(-\lambda x),$$

$$d^{s}x:\exp_s(-\lambda x)=(\cos(s\pi)-i\sin(s\pi))\lambda^{-s}\exp_s(-\lambda x)+C_s(x).$$

Тогда производная и интеграл любого вещественного порядка s от экспонент мнимого аргумента порядка s будут

$$d^{-s}x:\exp_s(ix)=i^s\exp_s(ix)=$$
$$(\cos(s(\pi/2+2\pi k))+i\sin(s(\pi/2+2\pi k)))\exp_s(ix),$$
$$d^{s}x:\exp_s=i^{-s}\exp_s(ix)+C_s(x)=$$
$$(\cos(s(\pi/2+2\pi k))-i\sin(s(\pi/2+2\pi k)))\exp_s(ix)+C_s(x).$$

Главные производная и интеграл любого вещественного порядка s будут

$$d^{-s}x:\exp_s(ix)=(\cos(s\pi/2)+i\sin(s\pi/2))\exp_s(ix),$$
$$d^{s}x:\exp_s(ix)=(\cos(s\pi/2)-i\sin(s\pi/2))\exp_s(ix)+C_s(x).$$

Для примера приведём производные и интегралы половинного порядка от экспоненты половинного порядка отрицательного аргумента

$$d^{-1/2}x:\exp_{1/2}(-x) = (-1)^{1/2}\exp_{1/2}(-x) = \pm i\exp_{1/2}(-x),$$

$$d^{1/2}x:\exp_{1/2}(-x) = (-1)^{-1/2}\exp_{1/2}(-x) + C_{1/2}(x) = \pm i\exp_{1/2}(-x) + C_{1/2}(x).$$

У экспоненты половинного порядка с отрицательным аргументом будет по две производные и два интегралы. Их главные значения соответственно будут

$$d^{-1/2}x:\exp_{1/2}(-x) = i\exp_{1/2}(-x),$$

$$d^{1/2}x:\exp_{1/2}(-x) = -i\exp_{1/2}(-x) + C_{1/2}(x).$$

Производные и интегралы половинного порядка от экспоненты половинного порядка мнимого аргумента

$$d^{-1/2}x:\exp_{1/2}(ix) = i^{1/2}\exp_{1/2}(ix),$$

$d^{\,1/2}x$:$\exp_{1/2}(ix) = i^{\,-1/2}\exp_{1/2}(ix) + C_{1/2}(x)$.

Квадратные корни из мнимой единицы имеют по два решения

$$i^{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\, i^{-1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Тогда для функций мнимого аргумента половинного порядка будем иметь две производные и два интеграла

$$d^{-1/2}x:\exp_{1/2}(ix) = i^{1/2}\exp_{1/2}(ix) = \pm 2^{-1/2}(1+i)\exp_{1/2}(ix),$$
$$d^{1/2}x:\exp_{1/2}(ix) = i^{-1/2}\exp_{1/2}(ix) = \pm 2^{-1/2}(1-i)\exp_{1/2}(ix) + C_{1/2}(x).$$

Из этих двух производных и интегралов главными значениям соответствует знак «+»

$$d^{-1/2}x:\exp_{1/2}(ix) = 2^{-1/2}(1+i)\exp_{1/2}(ix),$$
$$d^{1/2}x:\exp_{1/2}(ix) = 2^{-1/2}(1-i)\exp_{1/2}(ix) + C_{1/2}(x).$$

Из сказанного следует, что рассмотрение функций в дробном анализе, которые выражаются через дробностепенные ряды с дробным шагом, требует перехода в комплексную плоскость.

5. ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ АДАМАРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Внешняя алгебра операторов Адамара выражает их отношению к функциям. При взаимодействии операторов дробного интегродифференцирования и функций, выясняется что алгебраические свойства операторов не всегда соответствуют внутренней алгебре операторов [8]. Поэтому имеет смысл рассмотреть данный вопрос более подробно.

Оператор Адамара линейный, т. е. удовлетворяет условиям однородности и аддитивности

1. Однородность

В общем случае, для любых функций справедливо равенство

$d^{s}x{:}af(x) = ad^{s}x{:}f(x)$, $a = \text{const}$.

В частности для степенных функций данное равенство будет

$$d^s x : ax^q = ad^s x : x^q.$$

Это соотношение легко получить

$$d^s x : ax^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)} ax^{q+s} = a\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)} x^{q+s} = ad^s x : x^q.$$

В частности справедливы равенства

$d^s x{:}1f(x) = d^s x{:}f(x)$, a = const (унитарность),

$d^s x{:}0f(x) = 0$ (умножение на ноль).

2. Аддитивность для сложения функций

$$d^s x{:}(f(x)+g(x)) = d^s x{:}f(x) + d^s x{:}g(x).$$

Аддитивность для сложения операторов

$(d^s x + d^q x)f(x) = d^q x{:}f(x) + d^s x{:}f(x)$.

Рассмотрим действие произведения операторов Адамара и их композиций на функции.

Теорема. При последовательном действии операторов Адамара $d^s x{\cdot}d^r x$ и их композиция $d^{s+r}x$ на функции в общем случае дают различные результаты.

Это значит, что в общем случае справедливо неравенство

$$d^\alpha x \cdot d^\beta x : f(x) \neq d^{\beta+\alpha} x : f(x).$$

Это можно показать на примере степенных функций. При последовательном действии операторов $d^{-1}x$ и $d^{-1/2}x$ на константу a, то получим

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1}x : a = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

При действии на функцию композиции операторов $d^{-3/2}x$ даст

$$d^{-3/2}x : a = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-3/2+1)} x^{0-3/2} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2)} x^{-3/2} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} \neq 0.$$

Из этого следует, что справедливо неравенство

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1}x : a \neq d^{-3/2}x : a.$$

Если расписать последовательно действие двух дробных операторов, то получим

$$d^s x\cdot d^\gamma x:x^q = d^s x:\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma)}x^{q+\gamma} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma)}\frac{\Gamma(q+1+\gamma)}{\Gamma(q+1+\gamma+s)}x^{q+s+\gamma} =$$

$$\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma+s)}x^{q+s+\gamma} = d^{s+\gamma}x:x^q.$$

Из этого равенство видно, что оно справедливо при выполнении условий, которые можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Композиция операторов $d^s x$ и $d^r x$ в оператор $d^{s+r}x$ и и декомпозиция оператора $d^{s+r}x$ в последовательность операторов $d^s x\cdot d^r x$ при воздействии их на степенную функцию x^q возможна, когда одновременно выполняются неравенства $q + s \neq -1, -2, -3 \ldots$, $q + r \neq -1, -2, -3 \ldots$, $q + s + r \neq -1, -2, -3 \ldots$

При этом очевидно, что выполняется равенством $d^{s+r}x = d^{r+s}x$, а вот декомпозиция правой и левой частей дадут операторы $d^r x\cdot d^s x$ и $d^s x\cdot d^r x$.

Будут ли эти операторы коммутативны при действии их на функции. Рассмотрим коммутативность операторов Адамара по отношению к функциям, на которые они действуют.

Для начала рассмотрим некоторые частные случаи

Покажем это на примере

$$d^{-1/2}x\cdot d^{-1}x:1 = d^{-1/2}x:0 = 0.$$

Вывод данного соотношения

$$d^{-1/2}x\cdot d^{-1}x:1 = d^{-1/2}x:\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1+1)}x^{-1} = d^{-1/2}x:\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)}x^{-1} =$$

$$d^{-1/2}x:\frac{1}{\infty}x^{-1} = d^{-1/2}x:0 = 0.$$

Для другой последовательности операторов результат будет

$$d^{-1}x\cdot d^{-1/2}x:1 = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}x^{-3/2} \neq 0.$$

Вывод данного соотношения

$$d^{-1}x\cdot d^{-1/2}x:1=d^{-1}x\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2+1)}x^{-1/2}=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(-1-1/2+1)}x^{-1-1/2}=$$

$$\frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-1/2)}x^{-3/2}=\frac{1}{\Gamma(-1/2)}x^{-3/2}=\frac{-1}{2\sqrt{\pi}}x^{-3/2}\neq 0.$$

Другой пример воздействия оператора дифференцирования на полином интегрирования

$$d^{-1}x:C_{1/2}(x)\neq 0,$$
$$d^{-1/2}x\cdot d^{-1/2}x:C_{1/2}(x)=d^{-1/2}x:0=0.$$

Из сказанного, можно сформулировать и более общую теорему.

Теорема. Воздействие произведения двух операторов $d^s x$ и $d^r x$ на функцию $f(x)$ не коммутативно

$d^s x\cdot d^r x:f(x) \neq d^r x\cdot d^s x:f(x)$.

Рассмотрим случаи, когда коммутативность возможна.

Теорема. Воздействие произведения двух операторов $d^s x$ и $d^r x$ на степенную функцию x^q некоммутативно когда одновременно выполняются неравенства $q + s \neq -1, -2, -3 \ldots$, $q + r \neq -1, -2, -3 \ldots$, $q + s + r \neq -1, -2, -3 \ldots$

Для операторов целочисленного порядка выполняются более простые соотношения.

Теорема. Композиция и декомпозиция операторов Адамара с целочисленными порядками при их воздействии функции выполняется равенство

$d^n x\cdot d^m x:f(x) = d^{m+n} x:f(x)$.

Теорема. Операторы с целочисленными порядками коммутируют с точностью до сложения с полиномом интегрирования

$d^n x\cdot d^m x:f(x) = d^m x\cdot d^n x:f(x)$.

Эти утверждения верны по причине попадания сумм порядков операторов дифференцирования в полюсах гамма-функции.

Причин не коммутативности в дробном анализе две. Первую причину мы уже рассмотрели. В соответствии с ней не коммутативность связана с соотношением между порядками операторов дифференцирования и показателями степеней степенных функций.

По второй причине не коммутативность связана с появлением полиномов интегрирования $C_s(x)$ в случае, если хотя бы один из двух перемножаемых операторов является оператором интегрирования.

На примере пары обратных операторов ненулевого порядка, которые можно записать

$d^{-s}x{\cdot}d^{s}x = d^{0}x = \mathbf{1},$

$d^{s}x\ d^{-s}x = \mathbf{1} + C_s(x).$

Из этих равенств очевидна некоммутативность, которая характерна для традиционного анализа

$d^{-s}x{\cdot}d^{s}x{:}x^{q} = d^{0}x{:}x^{q} = \mathbf{1}{:}x^{q} = x^{q},$

$d^{s}x\ d^{-s}x{:}x^{q} = \mathbf{1}{:}x^{q} + C_s(x) = x^{q} + C_s(x).$

Можно записать и более общие соотношения

$d^{-s}x{\cdot}d^{s}x{:}f(x) = d^{0}x{:}f(x) = \mathbf{1}{:}f(x) = f(x),$

$d^{s}x\ d^{-s}x{:}f(x) = \mathbf{1}{:}f(x) + C_s(x) = f(x) + C_s(x).$

В этом случае справедливо неравенство

$d^{s}x{\cdot}d^{-s}x{:}f(x) \neq d^{-s}x\ d^{s}x{:}f(x).$

Данный тип коммутативности удобно выразить через коммутатор

$[d^{s}x, d^{-s}x]x^{q} = (d^{s}x\ d^{-s}x - d^{-s}x{\cdot}d^{s}x)x^{q} = C_s(x).$

В более общем случае, когда операторы не обратные и их порядки не равны нулю, и один из них является оператором дифференцирования, а второй оператором интегрирования коммутативность не выполняется $d^{s}x{\cdot}d^{-q}x \neq d^{-q}x{\cdot}d^{s}x.$

Это можно записать в виде коммутатора

$$[d^{q}x, d^{-s}x]f(x) = (d^{q}x\cdot d^{-s}x - d^{-s}x\cdot d^{q}x)f(x) =$$

$$C_q(x) - d^{-s}x : C_q(x).$$

Покажем это

$$d^{-s}x\cdot d^{q}x:f(x)=d^{-s}x(\mathrm{F}^{(q)}(x)+C_q(x))=d^{-s}x:\mathrm{F}^{(q)}(x)+d^{-s}x:C_q(x)),$$
$$d^{q}x\cdot d^{-s}x:f(x)=d^{q}x:f^{(s)}(x)\equiv\int f^{(s)}(x)d^{q}x+C_q(x).$$

Справедливы соотношения

$$d^{-s}x:\mathrm{F}^{(q)}(x)=d^{q}x:f^{(s)}(x)\equiv\int f^{(s)}(x)d^{q}x,$$
$$q-s\neq -1,-2,-3...;\ s-q\neq -1,-2,-3...$$

Для примера рассмотрим данное соотношение для степенной функции

$$d^{-s}x\cdot d^{q}x:x^{r}=d^{-s}x:\left(\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+q)}x^{r+q}+C_q(x)\right)=$$
$$\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+q)}\frac{\Gamma(r+q+1)}{\Gamma(r+q+1-s)}x^{r+q-s}+d^{-s}x:C_q(x)=$$
$$\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1-s)}x^{r+q-s}+d^{-s}x:C_q(x),$$
$$d^{q}x\cdot d^{-s}x:x^{r}=d^{q}x:\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-s)}x^{r-s}=$$
$$\frac{\Gamma(r-s+1)}{\Gamma(r+q+1-s)}\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-s)}x^{r+q-s}+C_q(x)=\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1-s)}x^{r+q-s}+C_q(x),$$
$$q+r-s\neq -1,-2,-3...;\ q-s\neq -1,-2,-3...$$

Окончательно получим

$$[d^{q}x,d^{-s}x]x^{r}=(d^{q}x\cdot d^{-s}x-d^{-s}x\cdot d^{q}x)x^{r}=C_q(x)-d^{-s}x:C_q(x).$$

Рассмотрим случай, когда операторы дифференцирования и интегрирования в коммутаторе стоят в другом порядке, тогда будет

$$[d^{-s}x,d^{q}x]f(x)=-[d^{q}x,d^{-s}x]f(x)=$$
$$(d^{-s}x\cdot d^{q}x-d^{q}x\cdot d^{-s}x)f(x)=d^{-s}x:C_q(x)-C_q(x).$$

Если в коммутаторе оба оператора будут операторами интегрирования, тогда получим

$$[d^s x, d^q x]x^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1+s)} x^{r+q+s} + d^s x : C_q(x)$$
$$- \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1+s)} x^{r+q+s} - d^q x : C_s(x) = d^s x : C_q(x) - d^q x : C_s(x).$$

В общем случае, произведение операторов и функций не является коммутативным, как это имеет место в обычном анализе

$d^s x{:}f(x) \neq f(x) d^s x.$

В частности, умножение оператора Адамара на число *a* не будет коммутативным

$ad^s x \neq dx^s{:}a.$

Выполняется ещё одно важное свойство во внешней алгебре.

Теорема. Воздействие произведения трёх операторов на функцию ассоциативно

$d^s x(d^r x \cdot d^q x) f(x) = (d^s x \cdot d^r x) d^q x{:}f(x).$

6. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕТВЕЙ ДРОБНОГО АНАЛИЗА И МОДЕЛЬНЫЕ ВЕТВИ ДРОБНОГО АНАЛИЗА

Упростить исследования дробного анализа можно путём разбиения множества всех ветвей на отдельные множества похожих ветвей, которые будем называть *родственными ветвями*. В качестве критерия схожести ветвей можно использовать степень схожесть некоторых стандартных функций, которые будем называть *маркирующими функциями*. Например, в качестве маркирующей функции можно выбрать частные экспоненты тех или иных ветвей анализа. Такой выбор производится по причине фундаментального значения экспонент для математики, а также ввиду того, что через них выражаются многие важные функции, например элементарные, специальные и другие.

Если в родственных ветвях выбрать по одной или несколько ветвей, которые будем называть *модельными ветвями*, и подробно их исследовать, то по ним можно составлять качественные и некоторые количественные представления о других родственных ветвях.

Исходя из полученных данных об экспонентах, можно дать предварительную классификацию родственных ветвей дробного анализа.

Классификация ветвей дробного анализа

Ветви целочисленных порядков

Тривиальный случай: 0;

Стандартный анализ: 1;

Нечётный порядок: 3, 5, 7…

Чётный порядок: 2, 4, 8 …

Ветви нецелочисленных рациональных порядков

с показателями степеней меньше единицы: 1/2, 1/3, 2/5 …

с показателями степеней больше единицы, но меньше двух: 3/2, 5/3, 7/5 …

с показателями степеней больше двух: 5/2, 7/3, 9/4 …

Ветви иррациональных порядков пока неясно как классифицировать.

В качестве модельных ветвей дробного анализа можно выбрать ветви следующих порядков:

Ветви дробных порядков меньше единицы

Дробный анализ порядка 1/2;

Дробный анализ порядка 1/3;

Ветви дробных порядков больше единицы, но меньше двух

Дробный анализ порядка 3/2;

Дробный анализ порядка 4/3;

Дробный анализ порядка 5/3;

Ветви дробных порядков больше двух

Дробный анализ порядка 5/2;

Дробный анализ порядка 7/3;

Ветви целочисленных порядков

Традиционный анализ, порядок 1;

Нечётные порядки 3, 5, 7;

Чётные порядки: чётно-нечётные 2, 6 и чётно-чётные 4, 8.

В качестве модельных ветвей иррационального анализа с иррациональными порядками могут быть выбраны ветви, например, с показателями:

$$1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{e}/2, e/2, e/3,$$
$$\sqrt{\pi}/2, \pi/2, \pi/3, \pi/6, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, e, \pi.$$

Наиболее простой рациональной ветвью дробного анализа представляется ветвь порядка 1/2. Рассмотрим эту ветвь подробней.

Дробный анализ порядка 1/2 на основе оператора Адамара

В модели дробного анализа рационального дробного анализа порядки дифференцирования и интегрирования принимают значения равные 1/2. Данная ветвь начала рассматриваться в работе [20].

Оператор Адамара порядка 1/2 действующий на степенную функцию будет

$$d^s x : x^q = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1/2)} x^{q-1/2}, s = -1/2, \\ \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+3/2)} x^{q+1/2} + C_{1/2}(x), s = 1/2, q \neq -1/2 \\ \dfrac{-i}{\sqrt{\pi}} \ln x + C_{1/2}(x), s = -1/2, q = -1/2. \end{cases}$$

Здесь $C_{1/2}(x)$ — полином интегрирования порядка 1/2

$$C_{1/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n+1/2} = a_1 x^{-1/2} + a_2 x^{-3/2} + a_3 x^{-5/2} + a_4 x^{-7/2} + \dots$$

Рассмотрим с экспоненты данной ветви. Ряд частной экспоненты $\exp_{1/2}x$ можно получить как частный случай дробной экспоненты $\exp_s x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}$, для порядка $s = 1/2$.

Значения гамма-функций можно преобразовать, используя формулы $\Gamma(m+1) = m!$, $\Gamma(m+1/2) = \sqrt{\pi}(1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2m-1))/2^m$, тогда для экспоненты $\exp_{1/2}x$ получим ряд

$$\exp_{1/2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-1+n/2}}{\Gamma(n/2)} = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + 1 + \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x}{1!} + \frac{2^2 x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}} +$$
$$\frac{x^2}{2!} + \frac{2^3 x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2^4 x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}} + \frac{x^4}{4!} + \frac{2^5 x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}} + \ldots$$

Далее, перемножив числа в коэффициентах ряда, получим разложение в ряд

$$\exp_{1/2} x = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + 1 + \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x}{1!} + \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{x^2}{2!} +$$
$$\frac{8x^{5/2}}{15\sqrt{\pi}} + \frac{x^3}{3!} + \frac{16x^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} + \frac{x^4}{4!} + \frac{32x^{9/2}}{945\sqrt{\pi}} + \ldots$$

Переписав вместе члены ряда с целыми и с дробными порядками, получим

$$\exp_{1/2} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots\right) +$$
$$\left(\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^2 x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}} + \frac{2^3 x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}} + \frac{2^4 x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}} + \frac{2^5 x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}} + \ldots\right).$$

В первой части получается экспонента $\exp x$, а во второй части стоит ряд, который обозначим как функцию $\xi_{1/2}x$.

Функцию $\xi_{1/2}x$ перепишем, выделив общий сомножитель $\pi^{-1/2}x^{1/2}$

$$\xi_{1/2}x=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{2^n x^{n-1}}{(2n+1)!!}=$$
$$\sqrt{\frac{x}{\pi}}\left\{\frac{1}{x}+2+\frac{2^2 x}{1\cdot 3}+\frac{2^3 x^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2^4 x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{2^5 x^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+...+\frac{2^n x^{n-1}}{(2n+1)!!}+...\right\}.$$

Тогда экспоненту $\exp_{1/2}x$, кратко можно записать как $\exp_{1/2}x=\exp x+\xi_{1/2}x$.

Легко убедиться, что функцию $\xi_{1/2}x$ можно получить из экспоненты $\exp x$, действуя на неё оператором дифференцирования $d^{-1/2}x$:

$d^{-1/2}x$: $\exp x=\xi_{1/2}x$.

Тогда будет справедлива формула $\exp_{1/2}x=\exp x+d^{-1/2}x$: $\exp x=(1+d^{-1/2}x)\exp x$.

Производная порядка 1/2 от функции $\xi_{1/2}x$ будет равна $d^{-1/2}x$:$\xi_{1/2}x=\exp x$.

Оператор дифференцирования $d^{-1/2}x$ должен переводить экспоненту $\exp_{1/2}x$ саму в себя. В этом можно легко убедиться почленным дифференцированием ряда:

$d^{-1/2}x$: $\exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x$.

Производную порядка 1/2 от экспоненты $\exp_{1/2}x$ можно найти, используя форму $\exp_{1/2}x=\exp x+\xi_{1/2}x$:

$d^{-1/2}x$: $\exp_{1/2}x=d^{-1/2}x$: $(\exp x+\xi_{1/2}x)=\xi_{1/2}x+\exp x=\exp_{1/2}x$.

Подействовав дважды оператором $d^{-1/2}x$ на экспоненту, $\exp_{1/2}x$, получим опять экспоненту $\exp_{1/2}x$:

$d^{-1/2}x$: $d^{-1/2}x$: $\exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x$.

Легко проверить, что производная первого порядка от экспоненты $\exp_{1/2}x$ не переводит её в саму себя, т. е., $d^{-1}x$:$\exp_{1/2}x \neq \exp_{1/2}x$.

Найдём производную $d^{-1}x$: $\exp_{1/2}x$. Вначале рассмотрим производную первого порядка $d^{-1}x$:$\xi_{1/2}x$

$$d^{-1}x:\xi_{1/2}(x)=-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+$$
$$\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot3\cdot5\sqrt{\pi}}+\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\sqrt{\pi}}+\frac{2^5x^{9/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\sqrt{\pi}}+...$$

Или окончательно получаем

$$d^{-1}x:\xi_{1/2}(x)=\xi_{1/2}(x)-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Это значит, что производная первого порядка $d^{-1}x$: $\exp_{1/2}x$ будет

$$d^{-1}x:\exp_{1/2}x=e^x+\xi_{1/2}(x)-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}=\exp_{1/2}x-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Аналогично можно получить формулы для высших производных целочисленного порядка

$$d^{-2}x:\exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}},$$

$$d^{-3}x:\exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}}-\frac{3\cdot5x^{-7/2}}{2^3\sqrt{\pi}},$$

…

$$d^{-n}x:\exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i(2i-1)!!}{\sqrt{\pi}2^i}x^{-i-1/2}=$$
$$\exp_{1/2}x-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}}-\frac{3\cdot5x^{-7/2}}{2^3\sqrt{\pi}}+\frac{3\cdot5\cdot7x^{-9/2}}{2^4\sqrt{\pi}}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9x^{-11/2}}{2^5\sqrt{\pi}}+...$$

Расписав более подробно, получим

$$d^{-1}x:\exp_{1/2}x=d^{-1}x:\left(\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\right)=d^{-1}x:\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}...\right)+$$
$$d^{-1}x:\left(\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^2x^{3/2}}{1\cdot3\sqrt{\pi}}+\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot3\cdot5\sqrt{\pi}}+\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\sqrt{\pi}}+\frac{2^5x^{9/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\sqrt{\pi}}+...\right).$$

Рассмотрим далее экспоненту с отрицательным аргументом $\exp_{1/2}(-x)$

$$\exp_{1/2}(-x)=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-x)^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n/2}x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{i^n x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=$$

$$\frac{(-x)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2(-x)^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}+\frac{4(-x)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+$$

$$\frac{8(-x)^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}-\frac{x^3}{3!}+\frac{16(-x)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{32(-x)^{9/2}}{945\sqrt{\pi}}+\ldots=$$

$$-\frac{ix^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2ix^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}-\frac{4ix^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+\frac{8ix^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}-\frac{x^3}{3!}-\frac{16ix^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}+$$

$$\frac{x^4}{4!}+\frac{32ix^{9/2}}{945\sqrt{\pi}}+\ldots=-\frac{i}{\sqrt{x\pi}}+1+\frac{2ix^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}-\frac{4ix^{1/2}x}{3\sqrt{\pi}}+$$

$$\frac{x^2}{2!}+\frac{8ix^{1/2}x^2}{15\sqrt{\pi}}-\frac{x^3}{3!}-\frac{16ix^{1/2}x^3}{105\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{32ix^{1/2}x^4}{945\sqrt{\pi}}+\ldots$$

Ряд для экспоненты с мнимой переменной $\exp_{1/2}ix$ будет

$$\exp_{1/2}ix=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(ix)^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=\frac{(ix)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2(ix)^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{ix}{1!}+\frac{2^2(ix)^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}-$$

$$\frac{x^2}{2!}+\frac{2^3(ix)^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{2^4(ix)^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{2^5(ix)^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}}+\ldots=$$

$$\frac{x^{-1/2}}{i^{1/2}\sqrt{\pi}}+1+\frac{2i^{1/2}x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{ix}{1!}+\frac{2^2ii^{1/2}x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}-\frac{x^2}{2!}-\frac{2^3i^{1/2}x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}-\frac{ix^3}{3!}-$$

$$\frac{2^4ii^{1/2}x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{2^5ii^{1/2}x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}}+\ldots$$

На основе дробной экспоненты можно легко получить некоторые элементарные функции для ветви дробного анализа порядка $s = 1/2$, в частности гиперболические и тригонометрические функции в соответствии с соотношениями введёнными в [15, 16].

Для гиперболического синуса $\mathrm{sh}_{1/2}x$ и косинуса $\mathrm{ch}_{1/2}x$ порядка $s = 1/2$ легко получить формулы

$$\mathrm{ch}_{1/2}x=\mathrm{ch}x+\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(x)+\xi_{1/2}(-x)),\ \mathrm{sh}_{1/2}x=\mathrm{sh}x+\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(x)-\xi_{1/2}(-x)).$$

Для тригонометрических синуса $\sin_{1/2}x$ и косинуса $\cos_{1/2}x$ порядка $s = 1/2$ будут следующие соотношения

$$\cos_{1/2}x = \cos x + \frac{1}{2}(\xi_{1/2}(ix) + \xi_{1/2}(-ix)),\ \sin_{1/2}x = \sin x + \frac{1}{2i}(\xi_{1/2}(ix) + \xi_{1/2}(-ix)).$$

Другие гиперболические и тригонометрические функции, обозначения которых соответствуют общепринятым, только у них имеется нижний индекс s = 1/2, указывающий на порядок ветви дробного анализа

$$\mathrm{th}_{1/2}x = \frac{\mathrm{sh}_{1/2}x}{\mathrm{ch}_{1/2}x},\ \mathrm{cth}_{1/2}x = \frac{\mathrm{ch}_{1/2}x}{\mathrm{sh}_{1/2}x},\ \mathrm{sch}_{1/2}x = \frac{1}{\mathrm{ch}_{1/2}x},\ \mathrm{csch}_{1/2}x = \frac{1}{\mathrm{sh}_{1/2}x},$$

$$\mathrm{tg}_{1/2}x = \frac{\sin_{1/2}x}{\cos_{1/2}x},\ \mathrm{ctg}_{1/2}x = \frac{\cos_{1/2}x}{\sin_{1/2}x},\ \sec_{1/2}x = \frac{1}{\cos_{1/2}x},\ \mathrm{cosec}_{1/2}x = \frac{1}{\sin_{1/2}x}.$$

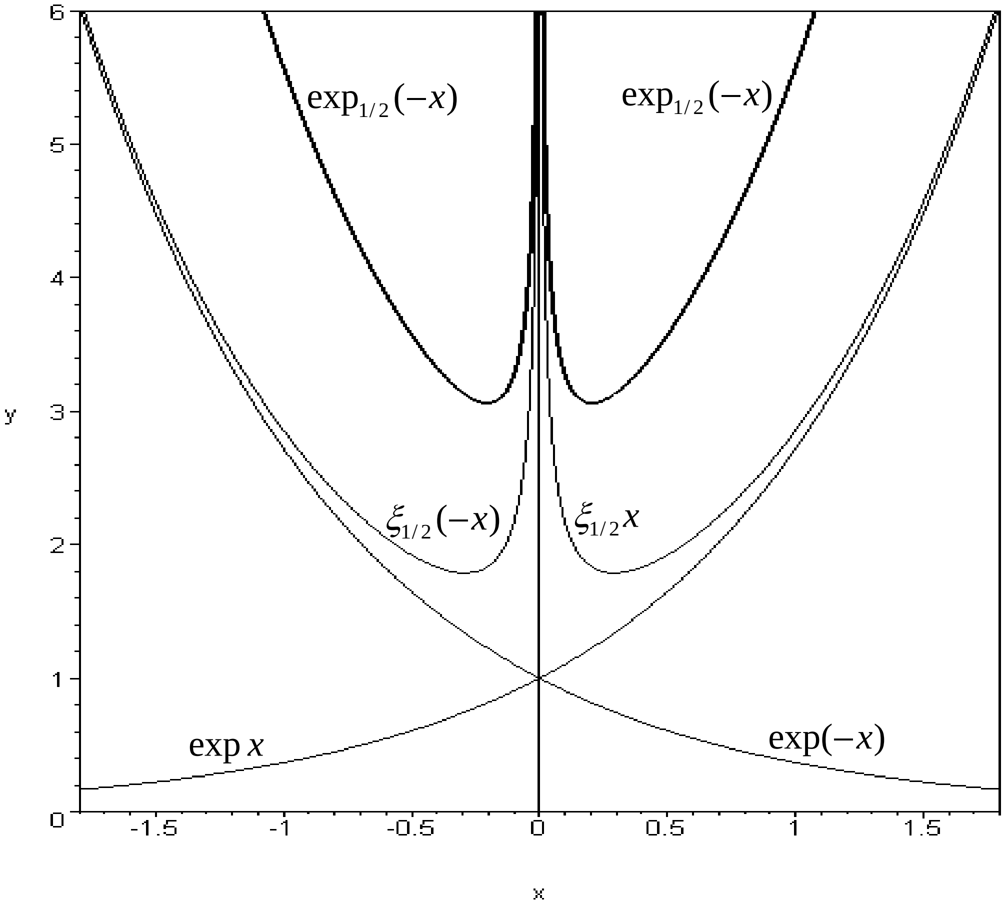

Рис. 7. Графики функций $\exp_{1/2}x$, $\exp_{1/2}(-x)$, $\xi_{1/2}x$, $\xi_{1/2}(-x)$, $\exp x$, $\exp(-x)$

Графики некоторых рассмотренных функций представлены на рис. 1 – 5, где для сравнения приведены графики функций традиционного анализа. Графики функций $\exp_{1/2}x$, $\exp x$, $\xi_{1/2}x$, $\exp_{1/2}(-x)$, $\exp(-x)$, $\xi_{1/2}(-x)$ даны на рис. 7. Графики функций $\sin_{1/2}x$, $\cos_{1/2}x$, $\sin x$, $\cos x$ изображены на рис. 8. Графики функций $\sec_{1/2}x$, $\mathrm{cosec}_{1/2}x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}\,x$ показаны на рис. 9. Графики функций $\mathrm{tg}_{1/2}x$, $\mathrm{tg}\,x$ представлены на рис. 10, а функций $\mathrm{ctg}_{1/2}x$, $\mathrm{ctg}\,x$ – на рис. 11.

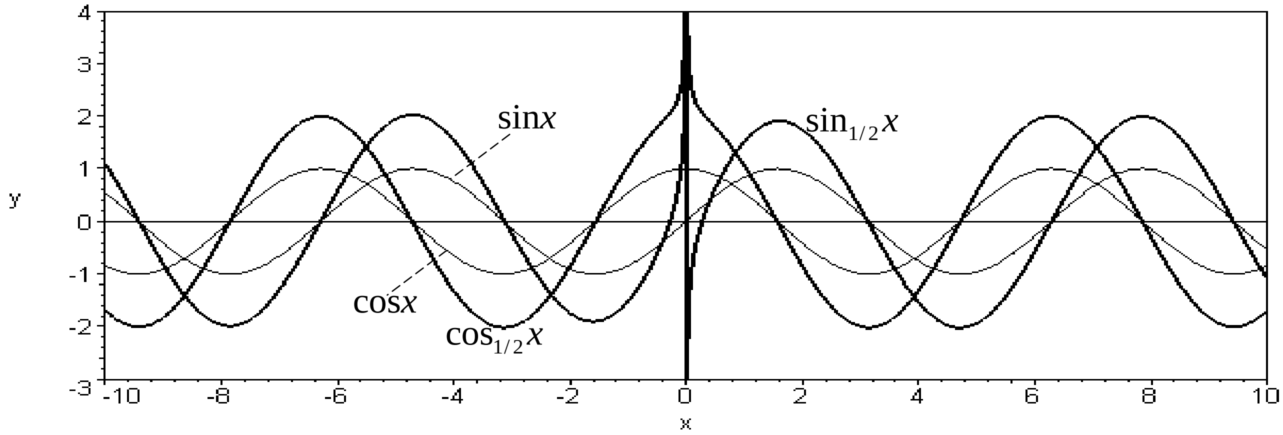

Рис. 8. Графики функций $\sin_{1/2}x$, $\cos_{1/2}x$, $\sin x$, $\cos x$

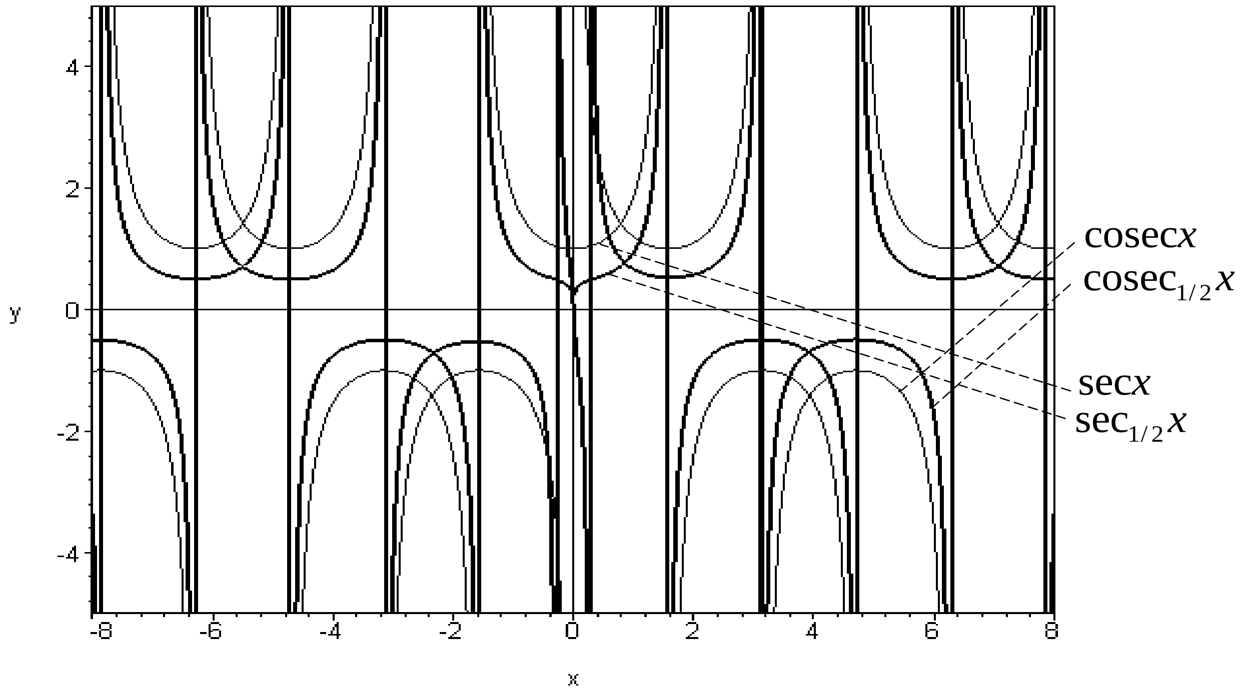

Рис. 9. Графики функций $\sec_{1/2}x$, $\mathrm{cosec}_{1/2}x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}\,x$

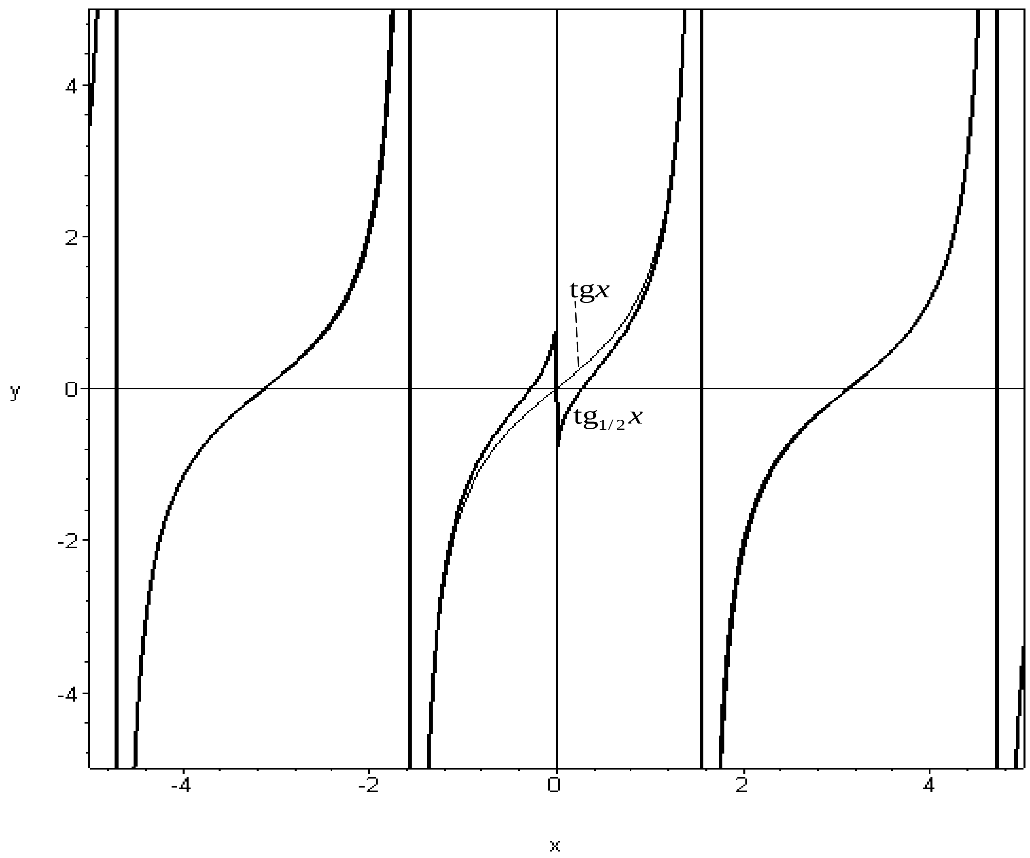

Рис. 10. Графики функций tg$_{1/2}x$, tg x

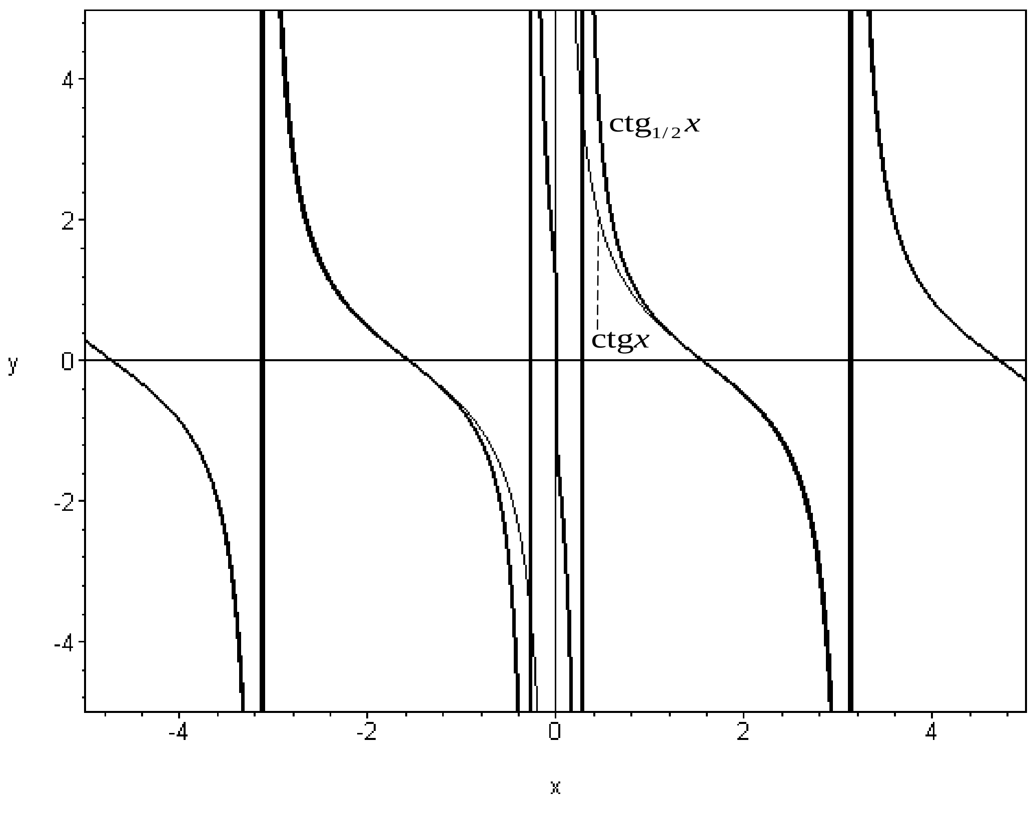

Рис. 11. Графики функций ctg$_{1/2}x$, ctg x

Рассмотрим полиномы интегрирования порядка 1/2 $C_{1/2}(x)$, которые появляются при интегрировании функций оператором $d^{1/2}x$

$$C_{1/2}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{1/2-n}=a_1x^{-1/2}+a_2x^{-3/2}+a_3x^{-5/2}+a_4x^{-7/2}+...+a_nx^{-n+1/2}+...,$$

а при дифференцировании оператором $d^{1/2}x$ дают ноль

$d^{-1/2}x{:}C_{1/2}(x) = 0.$

Неопределённый интеграл порядка 1/2 от некоторой функции $f(x)$ можно в общем виде записать

$d^{1/2}x{:}f(x)=F^{(1/2)}(x)+C_{1/2}(x).$

Здесь $F^{(1/2)}(x)$ – первообразная порядка 1/2 функции $f(x)$.

Подводя итоги, отметим, что элементарные функции в дробном анализе порядка 1/2 требуют более углубленных исследований, итоги которых будут приведены нами в последующих работах.

7. ПРОГРАММА И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДРОБНОГО АНАЛИЗА

Оператор Адамара носит алгебраический характер, что делает его более простым, чем другие операторы дробного интегродифференцирования [6, 7].

Подход, основанный на построении дробного анализа с помощью оператора Адамара над множеством степенных рядов, был назван *программой Адамара*.

Из сказанного следует необходимость сформулировать другую программу построения дробного анализа, отличную от программы Адамара, в которой два пункта [15—16].

1. Каждая отдельная пара взаимно обратных операторов Адамара (интегрирования и дифференцирования), с порядками $\pm s$ ($s \in \mathbb{R}$), задают частную теорию дробного анализа, которую будем называть *ветвью дробного анализа порядка* s.

2. Степенные ряды, которые необходимо использовать при построении каждой отдельной ветви дробного анализа порядка s, должны иметь показатели степеней переменных кратные порядку s, которые задают ветвь дробного анализа порядка s

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn+l},\ a_n, s, l \in \mathbb{R}, n_0, n \in \mathbb{Z}.$$

В более общем случае, когда центр ряда находится в точке x_0 будет

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn+l}, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Такие ряды будем называть *дробностепенными рядами с шагом* s.

Из второго положения следует то, что каждая ветвь дробного анализа должна иметь свой, индивидуальный набор элементарных, специальных и других важных функций, которые, в общем случае, отличны от соответствующих наборов функций остальных ветвей дробного анализа. Это хорошо видно уже из сравнения ветвей $s = 1$ и $s = 1/2$ [20].

Каждая ветвь является внутренне замкнутой и самодостаточной теорией, отличной и независимой от остальных ветвей дробного анализа.

Другими словами, под дробным анализом будем понимать бесконечное множество ветвей дробного анализа, в основе которых лежат операторы дробного интегродифференцирования всех конечных порядков s, которые действуют в пространствах функций, представляемых в виде степенных рядов с соответствующим дробным шагом s.

Отличие предлагаемой программы от программы, предложенной Адамаром, заключается в том, что последняя не предполагает разбиение дробного анализа на множество независимых ветвей, а само дробное интегродифференцирование развивается в рамках стандартного анализа, расширяя его аналитические возможности.

Данная программа может быть изменена или расширена в нескольких направлениях. Например, при построении отдельных ветвей дробного анализа могут использоваться операторы разных типов, а не только оператор Адамара. Возможно построение ветвей дробного анализа, в основе которых лежат различные возможные обобщения оператора Адамара, а также операторы дробного интегродифференцирования других типов.

Кроме разработки отдельных («чистых») ветвей возможно развитие *смешанного дробного анализа*, в основе которого лежат различные комбинации операторов дробного интегродифференцирования разных порядков. При этом для отдельных порядков могут использоваться как один, так несколько типов дробных операторов.

Модели смешанного анализа представляются более сложными, чем отдельные ветви дробного анализа. В этом случае встаёт, в частности, вопрос о возможности построения замкнутых моделей смешанного дробного анализ. Если это возможно, то в каких случаях?

Дробный анализ может развиваться так, что ветвь порядка $s = 1$, будет соответствовать стандартному анализу. В этом случае будем говорить, что в данном дробном анализе выполнятся *принцип соответствия*.

Также возможна ситуация, когда принцип соответствия выполняться не будет, т. е. в таком дробном анализе ни одна ветвь (включая $s = 1$) не будет соответствовать стандартному анализу.

Дробный анализ, в котором выполняется принцип соответствия, представляется более естественным, чем возможные направления дробного анализа, в которых данный принцип не выполняется. Но не исключено, что и такие направления могут найти применение в математике и в приложениях.

Для реализации предложенной программы построения отдельных ветвей дробного анализа необходимы следующие формальные шаги

1. Замена операторов, которая заключается в том, что ветвь, определяемая взаимно обратными операторами порядков $\pm s$, или просто – ветвь s, строится по аналогии со стандартным анализом, где степени операторов

дифференцирования и интегрирования степени 1 заменяется оператором дробного интегродифференцирования степени s

$$\frac{d}{dx} \equiv d^{-1}x \to d^{-s}x \text{ и } \int f(x)\, dx \equiv d^{1}x : f(x) \to d^{s}x : f(x).$$

В случае, когда имеется не одна, а несколько переменных, тогда частные производные первого порядка необходимо заменить частными производными дробных порядков

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s} \equiv \partial^{-s}x, \frac{\partial}{\partial y} \to \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s} \equiv \partial^{-s}y.$$

Здесь для примера взяты две переменные x и y.

Частные производные второго порядка нужно заменить на частные производные дробных порядков

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s} \equiv \partial^{-s}x : \partial^{-s}x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s} \equiv \partial^{-s}x : \partial^{-s}y.$$

Для функции двух переменных $f(x, y)$ операторы интегрирования запишем

$$\int f(x, y)dx \equiv d^{1}x : f(x, y) \to \partial^{s}x : f(x, y),$$

$$\int f(x, y)dy \equiv d^{1}y : f(x, y) \to \partial^{s}y : f(x, y).$$

Двойной повторный интеграл

$$\iint f(x, y)dxdx \equiv d^{1}x : d^{1}x : f(x, y) \to \partial^{s}x : \partial^{s}x : f(x, y).$$

Двойной интеграл со смешанным интегрированием

$$\iint f(x, y)dxdy \equiv d^{1}x : d^{1}y : f(x, y) \to \partial^{s}x : \partial^{s}y : f(x, y).$$

Заметим, что при $s \neq 1$ для операторов Адамара в общем случае справедливы неравенства

$$\partial^{s}x : \partial^{s}x : f(x, y) \neq \partial^{s+s}x : f(x, y).$$

2. Замена рядов заключается в замене целочисленных степеней аргумента в степенных рядах стандартного анализа, через которые выражаются функции стандартного анализа $f(x) \equiv f_1(x)$ на дробностепенные ряды с шагом s, через которые выражаются функции $f_s(x)$ ветви порядка s

$$f(x) \equiv f_1(x) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m x^{m+q} \to f_s(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn+l},$$

$$m_0, n_0, q, m, n \in \mathbb{Z};\ a_m, a_n, s, l \in \mathbb{R}\ .$$

Таким способом можно получить дробную экспоненту порядка s, $\exp_s x$, полученную другим способом в [7]

$$\exp x \equiv \exp_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \to \exp_s x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}.$$

Такая непосредственная и формальная замена возможна не для всех функций. В этом случае необходимы более сложные преобразования.

Полиномы дробных порядков, в свою очередь, являются остатками дробностепенных рядов.

Упростить исследования дробного анализа можно путём разбиения множества всех его ветвей на отдельные множества ветвей, похожих между собой, которые будем называть *родственными ветвями*. Критерием схожести ветвей можно использовать, например, схожесть некоторых стандартных функций, которые будем называть *маркирующими функциями*. В качестве маркирующих функций удобно выбрать частные экспоненты разных порядков. Такой выбор производится по причине фундаментального значения экспонент для математики и по причине того, что через них выражаются многие важные функции, например, элементарные, специальные и другие.

Если среди родственных ветвей выбрать по одной или несколько ветвей, которые будем называть *модельными ветвями*, и подробно их исследовать, то по ним можно составлять качественные представления о других родственных ветвях.

Одной из задач дробного анализа будет разбиение множества всех ветвей дробного анализа на множества ветвей с родственными свойствами.

Прежде всего, множество ветвей дробного анализа можно разделить на ветви с иррациональными и рациональными порядками. Рациональные ветви можно разделить на целочисленные (первого порядка, чётных и нечётных порядков) и дробные, с порядками больше и меньше единицы.

Построение ветвей иррациональных порядков является задачей более сложной, чем рациональных.

Исследования в области дробного анализа должны проводиться как аналитически, так и численно. Для численных исследований необходимо создание компьютерных программ, а сама роль численных расчётов в дробном анализе представляется относительно более важной, чем в стандартном.

Дробный анализ в последнее время всё шире используется в приложениях, см., например, [1, 2, 21—24]. Для практических целей могут применяться разные операторы дробного интегродифференцирования. Поэтому встаёт вопрос об адекватности описания реальности разных подходов дробного анализа, основанных на альтернативных операторах дробного интегродифференцирования.

Кроме этого, в дробном анализе важно сравнение подходов, основанных на разных операторах дробного интегродифференцирования, и, в частности, с анализом на основе оператора Адамара.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

3. *Потапов А. А*. Краткое историческое эссе о зарождении и становлении теории дробного интегродифференцирования // Нелинейный мир, 2003. т. 1, вып. № 1—2, С.

4. *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997. — 554 с.

5. *Бейтмен Г., Эрдейи* А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 295 с.

6. *Hadamar J.* Essai sur l'étude des fonctions données par leur dévelopment de Taylor. – J. math. pures et appl. Ser. 4. 1892. V. VIII, – p. 101 – 186.

7. *Чуриков В. А.* Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 312 (Математика и механика. Физика), — № 2. — С. 16 — 20.

8. *Чуриков В.А.* Внутренняя алгебра операторов дробного интегродифференцирования // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 12–15.

9. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной.– М.: Наука, 1974. – 480 с.

10. *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.

11. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1977. – 496 с.

12. *Маделунг*. Математика для физиков.

13. *Кудявцев Л. Д*. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1981. – 687 с.

14. *Чуриков В.А.* О многозначности дробных производных и интегралов отрицательного и мнимого аргумента (в печати).

15. *Чуриков В.А.* Программа и принципы построения дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 9–12.

16. *Чуриков В.А.* Степенные ряды с дробным шагом и построение дробного анализа на основе оператора Адамара (в печати).

17. *Чуриков В.А.*, *Шахматов В.М.* Полиномы дробных порядков в дробном анализе (в печати).

18. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1969. 431 с.

19. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 1. М.: Наука, 1967. 487 с.

20. 2. *Чуриков В. А.* Дробный анализ порядка 1/2 на основе подхода Адамара // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 312 (Математика и механика. Физика), — № 2. — С. 21 — 23.

21. *Фортов В. Е.* Модели уравнений состояний вещества. Черноголовка, РИО ОИХФ АН СССР, 1979. 49 с.

22. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. С. 301.

23. *Учайкин В.В*. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. 2003. Т. 173. № 8. С.846 — 876.

24. *Гук И.Л.* Формализм Лагранжа для частиц, движущихся в пространстве фрактальной размерности // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. – № 4. – С. 7–11.