Механические колебания

Гармонические колебания

Колебаниями называются процессы (движения или изменения состояния), повторяющиеся во времени вблизи некоторого среднего положения.

Положение, вблизи которого совершаются колебания, называют ***положением равновесия***.

В зависимости от физической природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают **механические**, **электромагнитные**, **электромеханические** и др.

Гармонические колебания

Колебания называются ***свободными*** (или ***собственными***), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Колебания называются ***периодическими***, если значения физических величин, характеризующих колебательную систему, повторяются через равные промежутки времени.

Наименьший промежуток времени ***T***, удовлетворяющий этому условию, называется **периодом колебаний**.

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

Гармонические колебания

Периодические колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по гармоническому закону (по закону синуса или косинуса), называются ***гармоническими***.

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad s' = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A характеризует максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия и называется ***амплитудой*.**

ω_0 - ***круговая (циклическая) частота***

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – ***фаза колебания*** в момент времени *t*

φ_0 – ***начальная фаза*** в момент времени $t = 0$

Гармонические колебания

Гармонически колеблющаяся величина *s* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^{\ 2} s = 0}$$

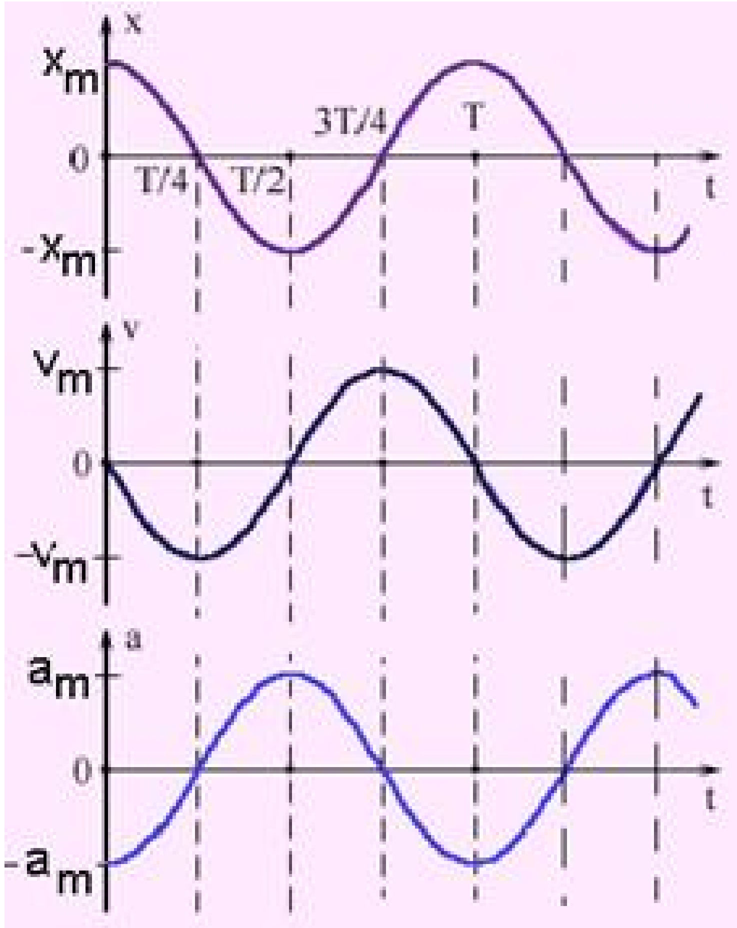
$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi\ )$$

$$= A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$



Механические гармонические колебания

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$V = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

$$F = ma$$

$$\boxed{F = -m\omega_0^2 x}$$

Механические гармонические колебания

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания:

$$E_K = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^{\ 2}}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F:

$$E_П = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Полная энергия:

$$E = E_K + E_П = \frac{mA^2\omega_0^{\ 2}}{2}$$

Механические гармонические колебания

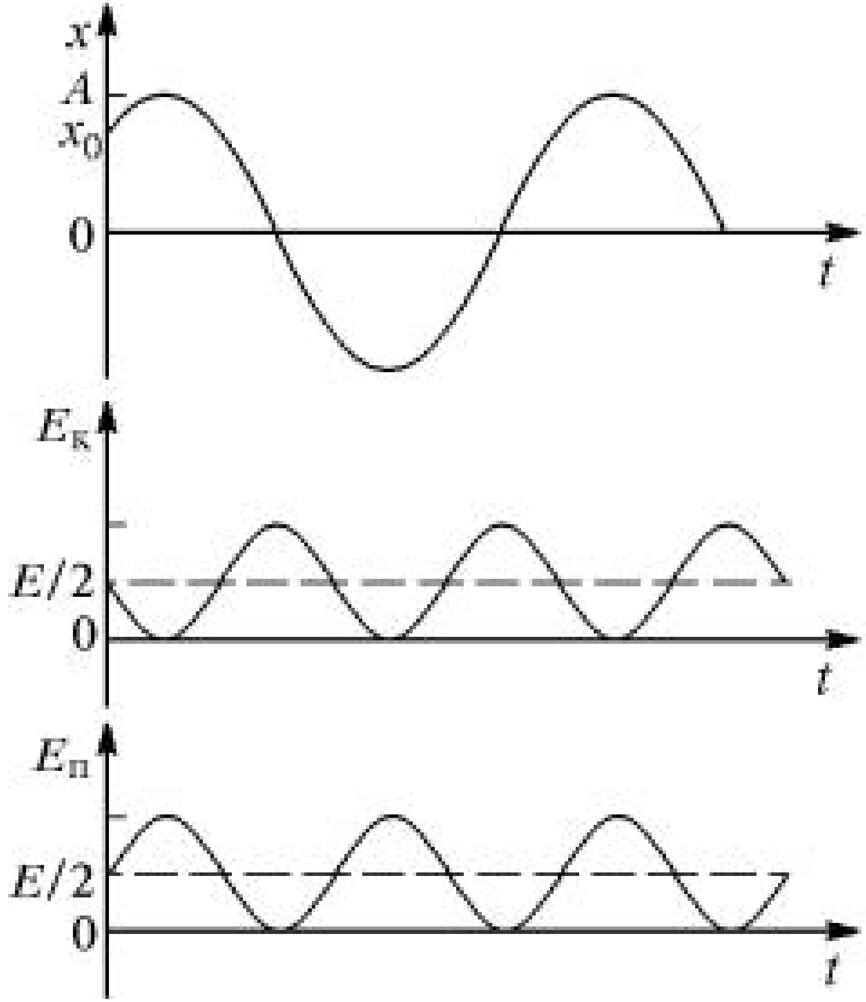


График изменения кинетической и потенциальной энергии при гармонических колебаниях.

Гармонический осциллятор.

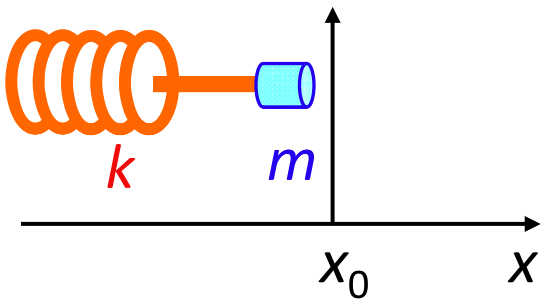
Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида :

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

Примерами гармонического осциллятора являются

пружинный, физический и математический маятники.

Гармонический осциллятор.
Пружинный маятник.



***Движение** происходит под **действием** **силы упругости пружины,** описываемой* **законом Гука $F = -k\Delta x$**

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{m}(x - x_0) \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 s + \frac{d^2 s}{dt^2} = 0}$$

$s = x - x_0$ - ***отклонение от*** **положения равновесия**

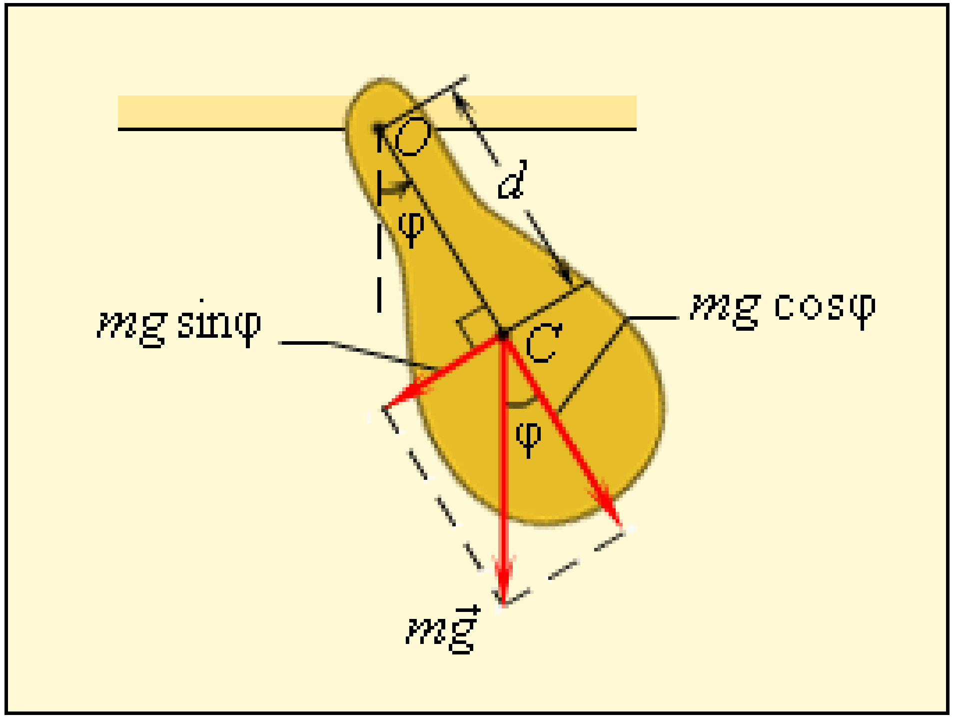
$\omega = \sqrt{k/m}$ **собственная частота *механической* системы**

$T = 2\pi\sqrt{m/k}$ **период колебания**

$E_П = \frac{kx^2}{2}$ **потенциальная энергия пружинного маятника**

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

Гармонический осциллятор.
Физический маятник



$$M = J\varepsilon = J\ddot{\varphi} = F_T d$$

$$F_T d = -mgd\sin\varphi \approx -mgd\varphi$$

J — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку О

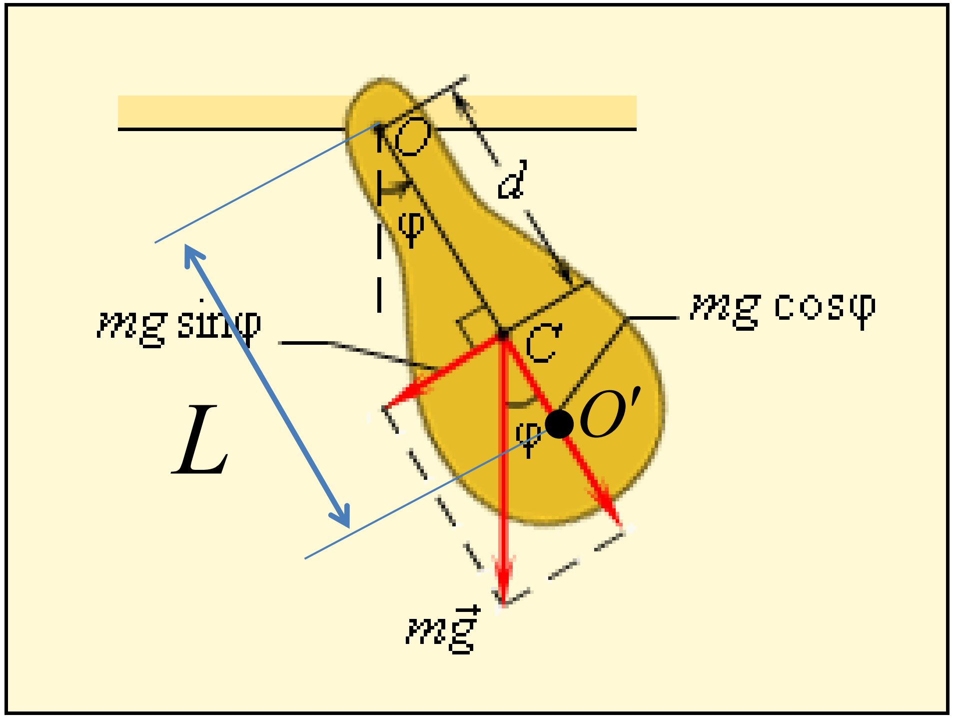
$$J\ddot{\varphi} + mgd\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd\varphi}{J} = 0$$

$$\omega^2$$

Гармонический осциллятор.

Физический маятник



$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd\varphi}{J} = 0$$

$$\omega_0^2$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

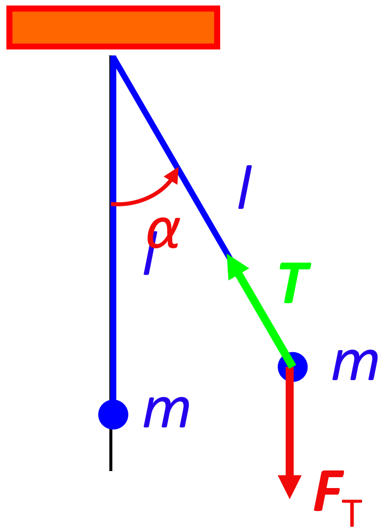
$$T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{J/(mgd)} = 2\pi\sqrt{L/g}$$

$\boxed{L = J/md}$ — приведенная длина физического маятника.

Гармонический осциллятор.
Математический маятник.

$$M_z = [\vec{l},(\vec{F}_T + \vec{T})]_z = [\vec{l},\vec{F}_T]_z + \cancel{[\vec{l},\vec{T}]_z}^{\,0} =$$

$$= [\vec{l},\vec{F}_T]_z = lmg\sin(\vec{l},\vec{F}_T) = -lmg\sin\alpha$$



$$M_z = J_z\varepsilon = ml^2\varepsilon$$

$$ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} + lmg\sin\alpha = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{g/l}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{l/g}}$$

Сложение колебаний. Биения

Многие колебательные системы могут одновременно участвовать в <u>нескольких колебательных</u> процессах.

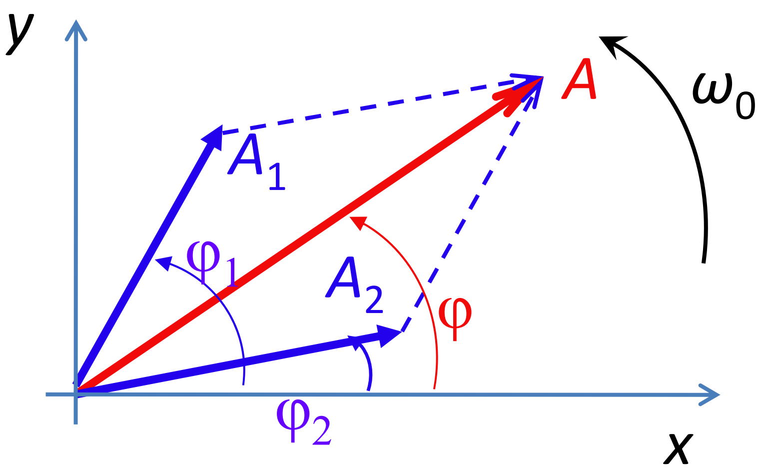
Под ***сложением*** колебаний понимают нахождение закона движения тела, участвующего одновременно в нескольких колебательных процессах.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Сложение колебаний. Биения

Сложение колебаний с помощью векторной диаграммы



$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

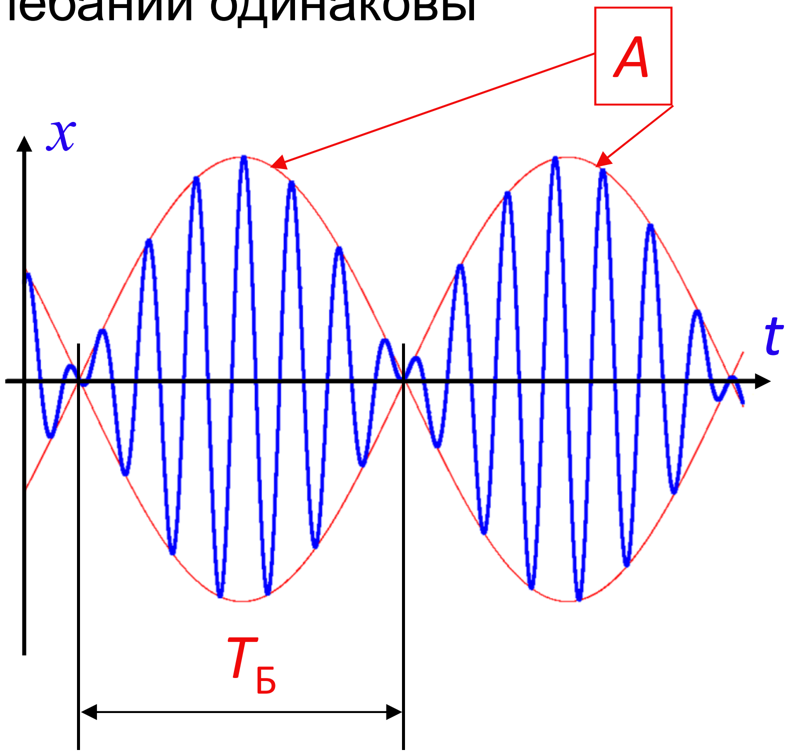
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Сложение колебаний. Биения

Негармонические колебания, получающиеся в результате сложения одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$, называются ***биениями.***

Рассмотрим простой случай - пусть амплитуды складываемых колебаний одинаковы



$$|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1$$
$$|\omega_1 - \omega_2| << \omega_2$$

критерий наблюдения биений

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega t \\ x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t$$

Сложение колебаний. Биения

амплитуда биений

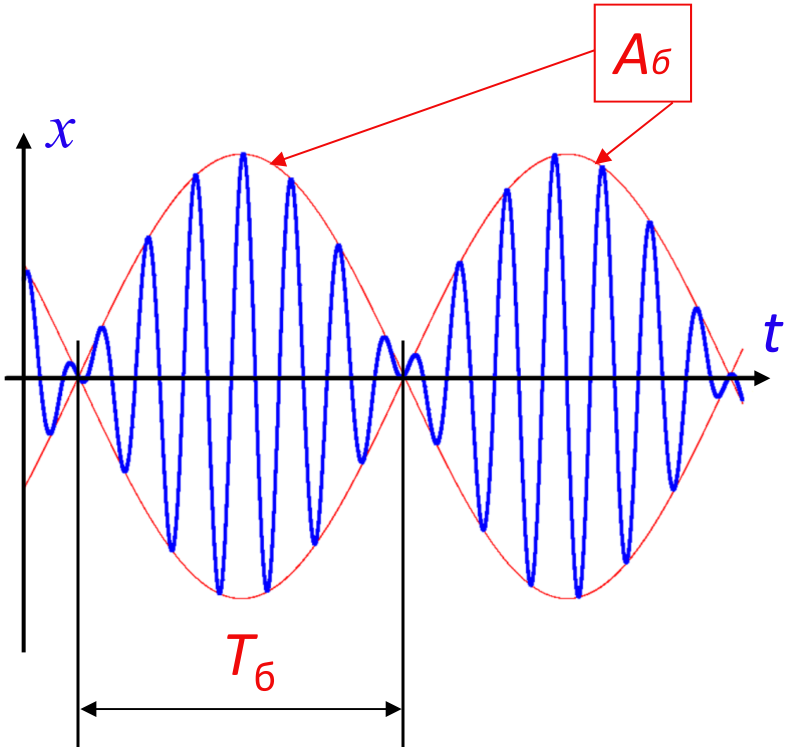
$$A_б = \left| 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right|$$

частота биений

$$\Delta\omega_б = \omega_2 - \omega_1$$

период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$



Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний постепенно уменьшается.

сила трения

$$\boxed{\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{\upsilon}}$$

где r – коэффициент сопротивления,

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения

Свободные затухающие механические колебания

Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси x

$$\boxed{ma_x = -kx - r\upsilon_x}$$

где kx – возвращающая упругая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения

$$\frac{r}{2m} = \beta \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

где

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad (\omega \neq \omega_0)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ; \qquad \beta = \frac{r}{2m}\ ; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},}$$

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период Т.

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\beta t}}$$

$$\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \qquad \boxed{\chi = \beta T}$$

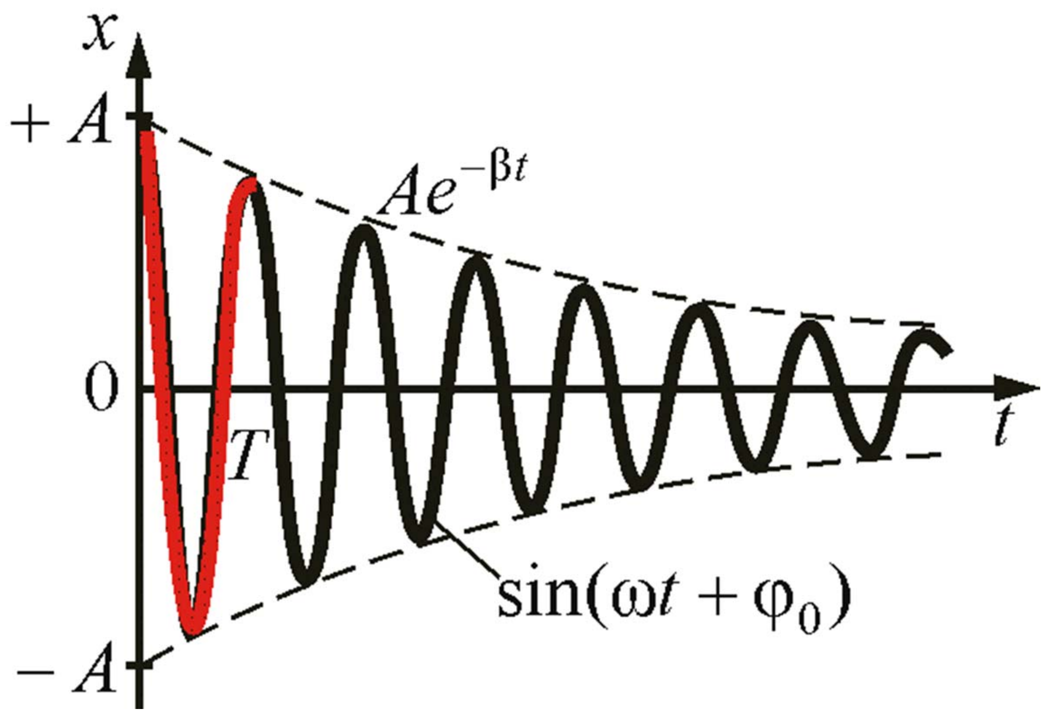
$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^{1}, \quad \text{при} \quad \beta\tau = 1 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, **коэффициент затухания β** – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз, τ называется временем релаксации.

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

где β – коэффициент затухания



Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме упругой силы $(-kx)$ и сил сопротивления $(-r\upsilon)$ действует добавочная *периодическая сила* F – *вынуждающая сила*. Для колебаний вдоль оси x уравнение движения имеет вид:

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*, при вынужденных колебаниях

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = F_0 \cos\omega t.$$

Вынужденные механические колебания

Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

где

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

Вынужденные механические колебания

Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

где

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$\beta = 0$ (затухания нет).
С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$) амплитуда растет,

$\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \to \infty$) – *резонанс*.

$\omega > \omega_0$, амплитуда опять уменьшается.

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$\beta \neq 0.$ При $\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = 0$ экстремум.

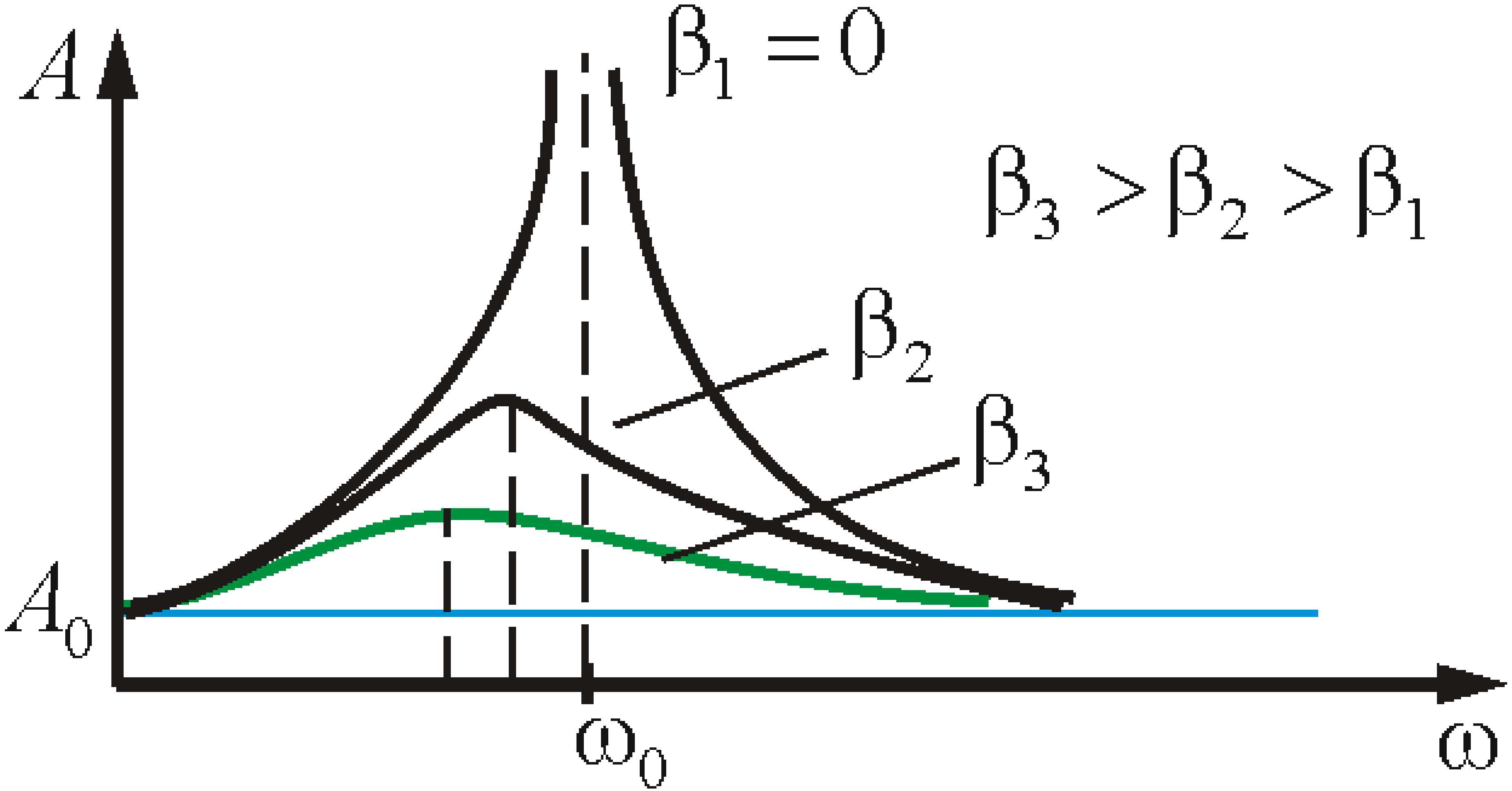
$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

где $\omega_{\text{рез}}$ – резонансная частота.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{\text{рез}}$ *называется* *резонансом*.

С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при

$$\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$


A
$\beta_1 = 0$
$\beta_3 > \beta_2 > \beta_1$
β_2
β_3
A_0
ω_0
ω

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Свободные электромагнитныне колебания в контуре без активного сопротивления

2. Свободные затухающие электромагнитные колебания

3. Вынужденные электромагнитные колебания

4. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Электромагнитными колебаниями называются периодические изменения силы тока и связанных с нею величин, происходящие в системе, называемой *колебательным контуром*.

Колеблющиеся величины:

$$i(t); \quad q(t); \quad u(t); \quad E(t); \quad H(t); \quad W_{м}(t); \quad W_{Эл}(t)$$

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Периодически повторяющиеся значения силы тока, сопровождающиеся периодическими превращениями энергии электрического поля в энергию магнитного поля (и наоборот), происходящие при однократном сообщении колебательному контуру энергии от внешнего источника, называются свободными электромагнитными колебаниями.

Механические колебания

Колебания называются ***свободными*** (или ***собственными***), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

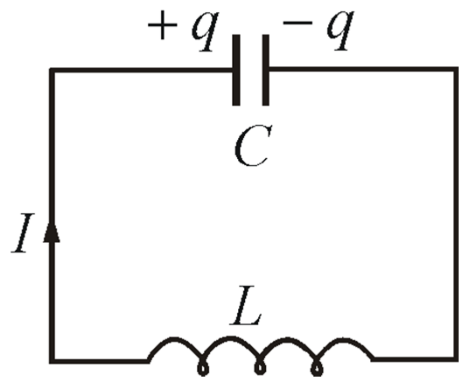
Колебания называются ***периодическими***, если значения физических величин, характеризующих колебательную систему, повторяются через равные промежутки времени.

Наименьший промежуток времени ***T***, удовлетворяющий этому условию, называется **периодом колебаний**.

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Контур, содержащий только индуктивность *L* и ёмкость *C* называется ***идеальным колебательным контуром.*** В таком контуре возникают *свободные* (*незатухающие*) электромагнитные колебания.



Колебания в контуре можно возбудить либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток (например, включив магнитное поле). В случае идеального контура его активное сопротивление $R = 0$, поэтому полная энергия контура сохраняется ($W = W_C + W_L = const$).

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

В соответствии с законом сохранения энергии

$$W_{эл} + W_{м} = const, \quad (1) \qquad \boxed{\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = const,} \quad (2)$$

Дифференцируя выражение (2) по времени, получим

$$\boxed{\frac{1}{2C} 2q \frac{dq}{dt} + \frac{L}{2} 2i \frac{di}{dt} = 0.} \quad (3)$$

Учтем, что

$$i = \frac{dq}{dt}, \qquad \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Уравнение (3) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}+L\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2}=0.}\quad \text{или}\quad \boxed{\frac{dq}{dt}\left(\frac{q}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}\right)=0.}\qquad (4)$$

Если $$\frac{dq}{dt}\neq 0,$$

то нулю равно выражение в скобках , т.е.

$$\boxed{\left(\frac{q}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}\right)=0.}\quad \text{или}\quad \boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0.}\qquad (5)$$

Введем замену: $$\frac{1}{LC}=\omega_0^2$$

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Тогда (5) запишется в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \tag{6}$$

Это - уравнение гармонических колебаний заряда на обкладках конденсатора. Решение такого уравнения известно и оно имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{7}$$

Здесь $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - *собственная частота колебательного контура.*

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой ω_0 – *собственной частотой контура.* Эта частота определяется исключительно параметрами контура: его ёмкостью *C* и индуктивностью *L*. Так как

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{то} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (8)$$

Формула (8) – это период собственных колебаний в колебательном контуре без активного сопротивления *R* – *формула ТОМПСОНА*.

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

1) Напряжение на конденсаторе

$$u = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

2) Сила тока, в катушке индуктивности

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m s\,\text{in}(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

где $\omega_0 q_m = I_m.$

Таким образом сила тока в идеальном контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе на π/2.

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Соотношение между амплитудными значениями силы тока в катушке и напряжения на конденсаторе:

$$U_m = \frac{q_m}{C}$$

$$\omega_0 q_m = I_m.$$

$$U_m C = \frac{I_m}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \frac{1}{C\omega_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

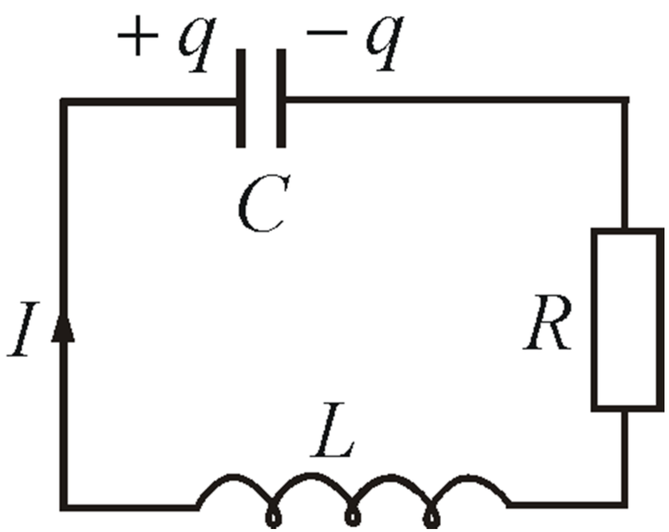
Последнее выражение представляет собой закон Ома для идеального колебательного контура.

$\sqrt{\frac{L}{C}}$ называется волновым сопротивлением контура.

Свободные затухающие электромагнитные колебания

Свободные затухающие электромагнитные колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Поэтому энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на его нагрев, вследствие чего колебания затухают.



Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний постепенно уменьшается.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\frac{r}{2m} = \beta \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0}$$

Свободные затухающие электромагнитные колебания

При наличии в контуре активного сопротивления закон Ома для мгновенного значения силы тока в контуре записывается в виде

$$iR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{si},$$

где

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = -U = -\frac{q}{C}$$

Полное падение напряжения (*iR+U*) должно равняться ЭДС, действующей в контуре. Однако в контуре действует только ЭДС самоиндукции ε_{si}

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{di}{dt}$$

С учетом этих замечаний

$$iR + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

Свободные затухающие электромагнитные колебания

Или

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0,$$

откуда
$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0.$$

Введем обозначения:

$\frac{R}{L}=2\beta,$ где *β*- коэффициент затухания;

$\frac{1}{LC}=\omega_0^2,$ - квадрат собственной циклической частоты контура.

Свободные затухающие электромагнитные колебания

С учетом этих обозначений уравнение примет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2=0.$$

Это уравнение свободных затухающих колебаний

Его решение:

$$q=q_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi).$$

где

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

Или с учетом введенных обозначений для β и ω_0

Свободные затухающие электромагнитные колебания

получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{1}{\omega} = {1}\Big/{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

1) Напряжение на конденсаторе

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

$$u = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Свободные затухающие электромагнитные колебания

или $u = U_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$ где $U_0 = \dfrac{q_0}{C}.$

2) Дифференцируя по времени $q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi).$

и введя обозначения

$$\cos\psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \quad \text{и} \quad \sin\psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}},$$

можно найти силу тока в контуре

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$i = \omega_0 q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi + \psi).$$

Так как $\cos\psi < 0$, а $\sin\psi > 0$, то значение ψ

Заключено в пределах от π/2 до π, т.е.

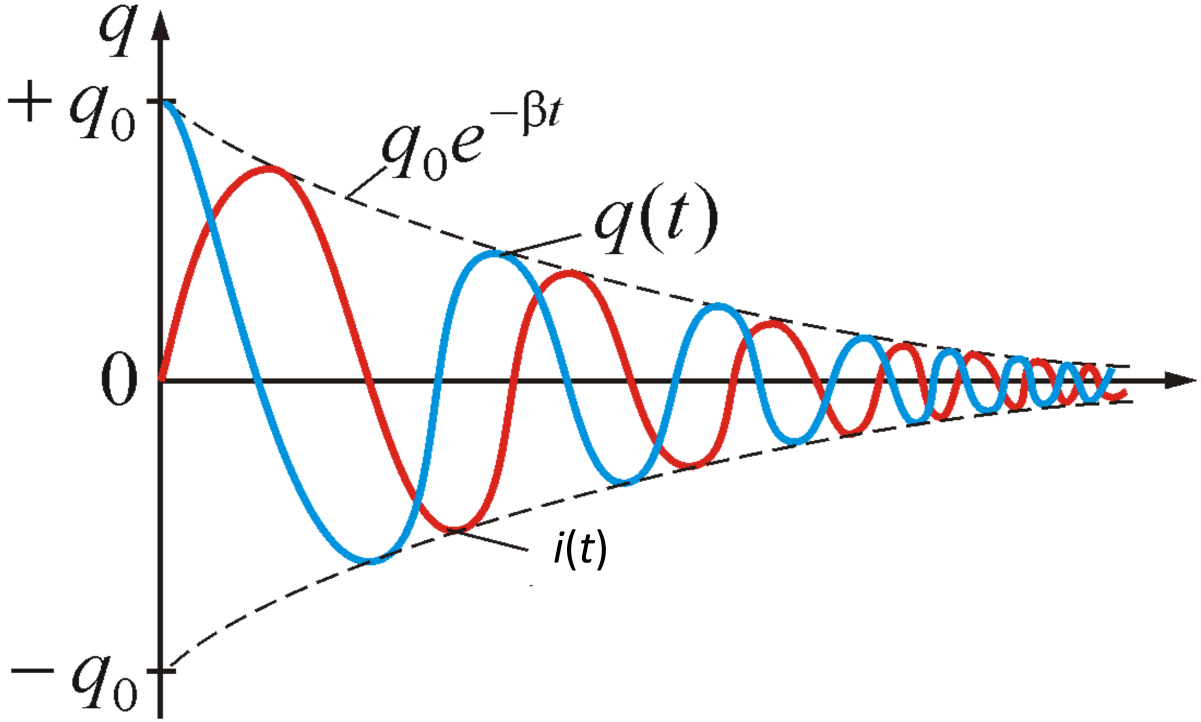
Свободные затухающие электромагнитные колебания

$$\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$$

Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления сила тока опережает по фазе заряд и напряжение на конденсаторе более чем на π/2 (при R=0 опережение составляет π/2).

На рисунке, показан вид затухающих колебаний заряда *q* и силы тока *i*.
Колебаниям *q* соответствует *x* – смещение маятника из положения равновесия, силе тока *i* – скорость υ.

Свободные затухающие электромагнитные колебания



Затухание принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период Т.

Коэффициент затухания (механические колебания) и логарифмический декремент затухания

Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T.

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\beta t}}$$

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \qquad \boxed{\chi = \beta T}$$

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^{1}, \quad \text{при} \quad \beta\tau = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, **коэффициент затухания β** – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз, τ называется временем релаксации.

Свободные затухающие электромагнитные колебания

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\frac{R}{L} = 2\beta,$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

$$\lambda = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}$$

R, *L*, *ω* **–** определяются параметрами контура, следовательно, и *λ* является характеристикой контура. Если затухание невелико

$$\beta^2 << \omega_0^2$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\boxed{\lambda = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Добротность колебательного контура Q **-** отношение энергии, запасённой в колебательной системе, к энергии, теряемой системой за один период колебания.

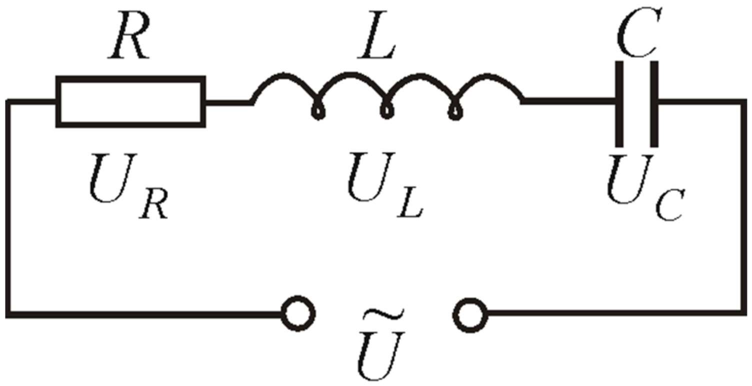
$$\boxed{Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}}$$

W – энергия контура в данный момент, Δ*W* – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

Вынужденные электрические колебания

Вынужденные электрические колебания

К контуру, изображенному на рисунке, подадим переменное напряжение $u(t)$



$$u(t) = U_m \cos \omega t$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

В этом случае уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t$$

Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме упругой силы $(-kx)$ и сил сопротивления $(-r\upsilon)$ действует добавочная *периодическая сила* F – *вынуждающая сила*. Для колебаний вдоль оси x уравнение движения имеет вид:

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*, при вынужденных колебаниях

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Вынужденные электрические колебания

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением механических колебаний. Его решение при больших *t*

$$\boxed{q = q_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

где 1).

$$q_m = U_m / \omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = U_m / \omega\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

2). $i = i_m \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$

$$i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Вынужденные электрические колебания

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

называется *полным сопротивлением цепи,* (***импеданс***)

а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

называется реактивным сопротивлением

R – активное сопротивление отвечает за потерю мощности в цепи.

X – реактивное сопротивление, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω.

Вынужденные электрические колебания

Между током в контуре и внешней Э.Д.С. есть сдвиг фаз $\Delta\varphi$

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний дает значение сдвига фаз $\Delta\varphi$

$$tg\Delta\varphi = tg(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\Downarrow$$

•если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то $\Delta\varphi > 0$

и ток отстает по фазе от внешней ЭДС

Вынужденные электрические колебания

- если $\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$, то $\Delta\varphi < 0$

и ток опережает по фазе внешнюю ЭДС

Вынужденные электрические колебания

$$iR + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = U_m \cos\omega t$$

$$\Downarrow$$

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos\omega t$$

Сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени внешней э.д.с.

Вынужденные электрические колебания

Можно показать, что

1). $U_R = Ri_m \cos(\omega t + \Delta\varphi)$

2). $U_C = U_{Cm} \cos(\omega t + \Delta\varphi - \frac{\pi}{2})$

3). $U_L = U_{Lm} \cos(\omega t + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2})$

$$i = i_m \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

Вынужденные электрические колебания

То есть

1). $U_R = Ri_m \cos(\omega t + \Delta\varphi)$

меняется в фазе с током

2). $U_C = U_{Cm} \cos(\omega t + \Delta\varphi - \frac{\pi}{2})$

Отстает от тока на $\pi/2$

3). $U_L = U_{Lm} \cos(\omega t + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2})$

Опережает ток на $\pi/2$

$$i = i_m \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

Вынужденные электрические колебания

$$tg\Delta\varphi = tg(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

•если $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, то $\Delta\varphi = 0$

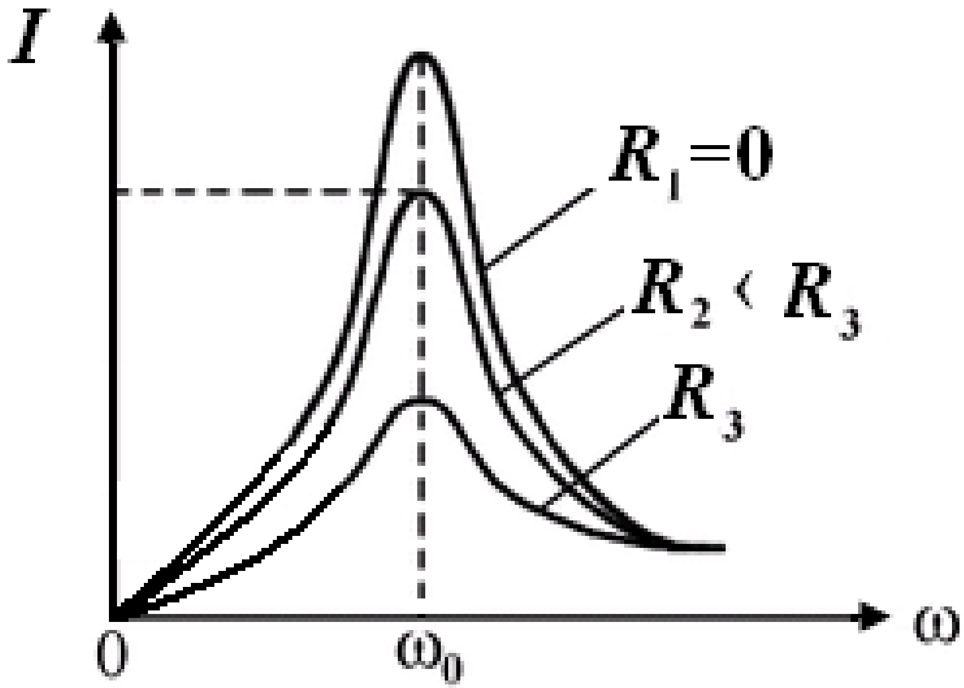
$$i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$ – наблюдается *резонанс.*

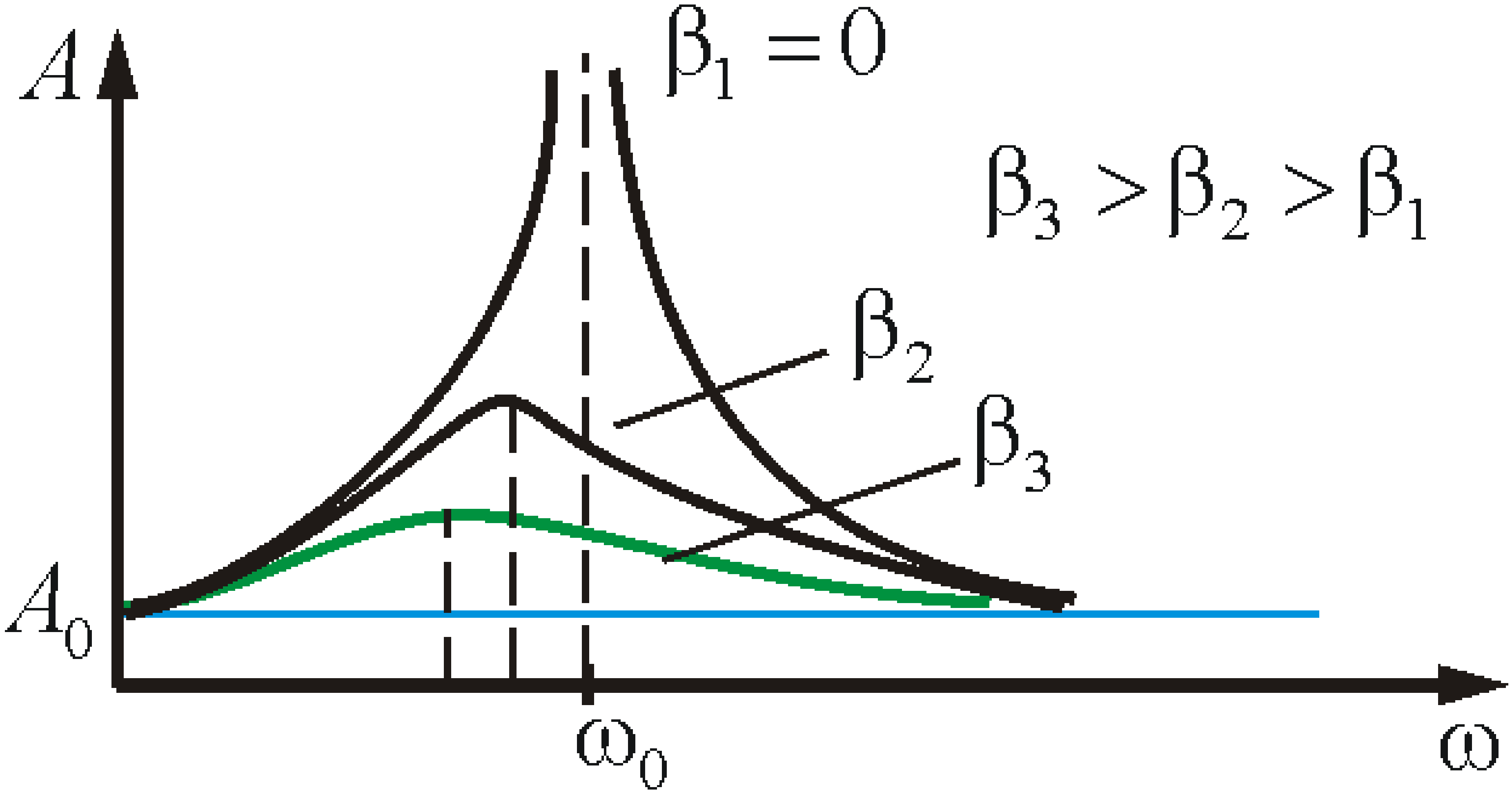
$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$ и $$Z = R$$

Ток и внешнее напряжение меняются синфазно

Резонанс для тока



Резонансные кривые для тока сходятся в 0, т.к. при постоянном напряжении (ω= 0) ток в цепи, содержащей конденсатор, не течет.

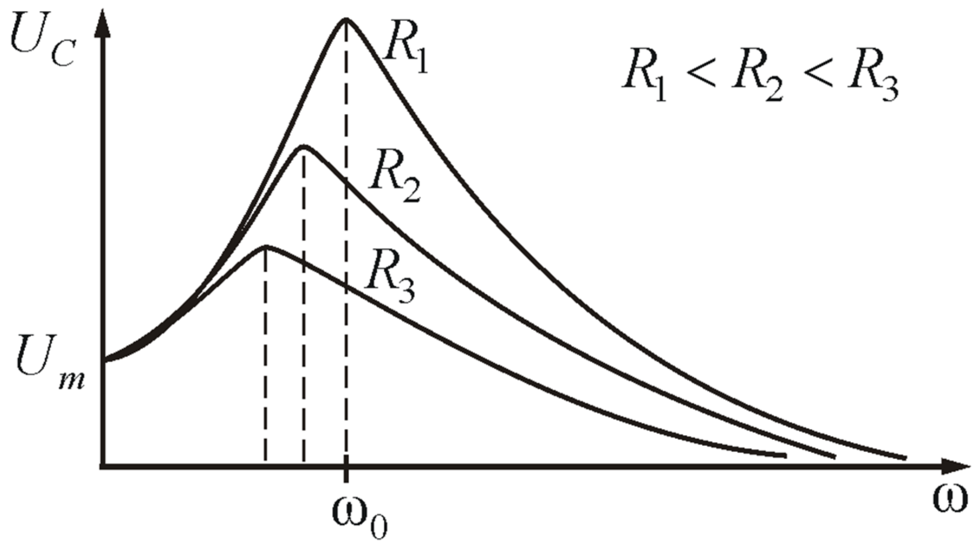


A
$\beta_1 = 0$
$\beta_3 > \beta_2 > \beta_1$
β_2
β_3
A_0
ω_0
ω

Резонанс напряжений

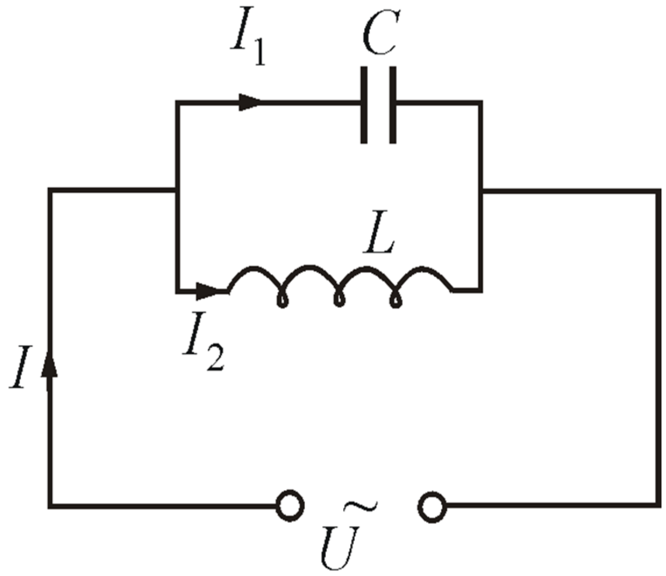
$$i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Ток в цепи определяется активным сопротивлением *R* и принимает максимально возможное при данном *Um* значении. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи *UR* = *U*, а падение напряжения на конденсаторе *UC* и катушке индуктивности *UL* одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется ***резонансом напряжений* или *последовательным резонансом***.

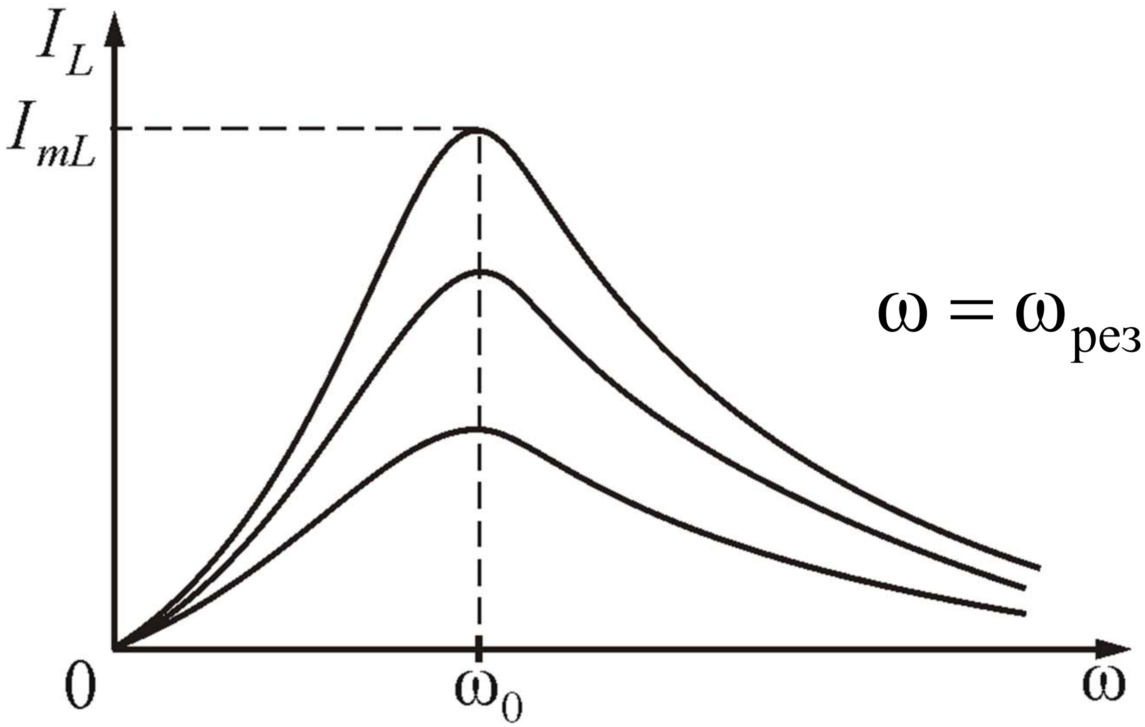


Таким образом, при последовательном резонансе на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой намного большей U_m, что широко используется в различных электронно-усилительных устройствах.

В цепях переменного тока содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность наблюдается другой тип резонанса. Он называется резонансом токов.



Резонансные кривые при таком включении реактивных элементов имеют вид, представленный на рисунке.



$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Явление резкого увеличения амплитуды тока во внешней цепи, при приближении частоты приложенного напряжения ω к $\omega_{\text{рез}}$ называется ***резонансом токов,*** *или параллельным резонансом*. (Используется в резонансных усилителях, приемниках).

Соответствие между механическими и электрическими величинами.

Механические величины		Электрические величины.	
Координата	X	*Заряд*	q
Скорость	V	*Сила тока*	i
Масса	m	*Индуктивность*	L
Жесткость пружины	k	*Величина обратная емкости*	$1/C$
Потенциальная энергия	$E_П = \frac{kx^2}{2}$	*Энергия электрич. поля*	$W_Э = \frac{g^2}{2C}$
Кинетическая энергия	$E_К = \frac{mv^2}{2}$	*Энергия магнитного поля*	$W_М = \frac{Li^2}{2}$