Реактор с отражателем в виде бесконечной пластины

Пусть реактор в виде бесконечной пластины без отражателя имел критический размер H_0 (включая длину экстраполяции)

При добавлении к такому реактору отражателя критический размер активной зоны изменился и стал ранен H.

Очевидно, что H_0 больше, чем H.

Величину

$$\delta = \frac{H_0}{2} - \frac{H}{2}$$

будем называть **эффективной добавкой за счет отражателя**.

Реактор с отражателем в виде бесконечной пластины

В критическом реакторе без отражателя материальный параметр равен геометрическому, тогда

$$\aleph_1 = B = \frac{\pi}{H_0} \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{\pi}{\aleph_1}$$

Из определения эффективной добавки за счет отражателя найдем критический размер активной зоны в реакторе с отражателем

$$\frac{H}{2} = \frac{H_0}{2} - \delta = \frac{\pi}{2\aleph_1} - \delta$$

Поставим полученный размер активной зоны в условие критичности для реактора с отражателем

$$D_1 \aleph_1 \operatorname{tg}\left[\aleph_1\left(\frac{\pi}{2\aleph_1} - \delta\right)\right] = D_2 \aleph_2 \operatorname{cth}(\aleph_2 T)$$

В аргументе тангенса, стоящего в левой части, сделаем преобразования

$$\operatorname{tg}\left[\aleph_1\left(\frac{\pi}{2\aleph_1} - \delta\right)\right] = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \aleph_1 \delta\right) = \operatorname{ctg}(\aleph_1 \delta)$$

Реактор с отражателем в виде бесконечной пластины

Тогда условие критичности для реактора с отражателем будет иметь вид

$$\mathrm{ctg}(\aleph_1\delta) = \frac{D_2\aleph_2}{D_1\aleph_1}\mathrm{cth}(\aleph_2 T)$$

или

$$\mathrm{tg}(\aleph_1\delta) = \frac{D_1\aleph_1}{D_2\aleph_2}\mathrm{th}(\aleph_2 T)$$

То сюда для эффективной добавки за счет отражателя получим

$$\delta = \frac{1}{\aleph_1}\mathrm{arctg}\left[\frac{D_1\aleph_1}{D_2\aleph_2}\mathrm{th}(\aleph_2 T)\right]$$

Если реактор достаточно большой ($H >> \delta$) то в предыдущем выражении аргумент тангенса мал, а сам тангенс можно разложить в ряд, сохраняя только первый член разложения

$$\mathrm{tg}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots \approx x$$

Реактор с отражателем в виде бесконечной пластины

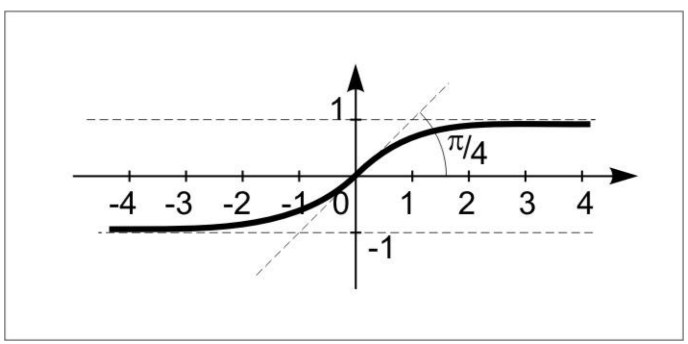
Тогда

$$\mathrm{tg}(\aleph_1\delta) \approx \aleph_1\delta \approx \frac{D_1\aleph_1}{D_2\aleph_2}\,\mathrm{th}(\aleph_2 T)$$

Учитывая, что $\aleph_2 = 1/M_2$ получим

$$\delta \approx \frac{D_1}{D_2} M_2\,\mathrm{th}\left(\frac{T}{M_2}\right)$$

Посмотрим на функцию тангенс гиперболический



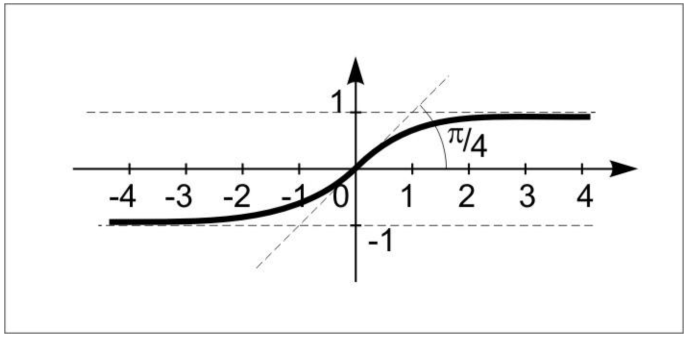
1. Если отражатель тонкий ($M_2 >> T$), то аргумент гиперболического тангенса мал, тогда

$$\mathrm{th}\left(\frac{T}{M_2}\right) \approx \frac{T}{M_2}$$

Следовательно $\delta \approx \dfrac{D_1}{D_2} T$

Для тонкого отражателя **эффективная добавка определяется его толщиной**.

Реактор с отражателем в виде бесконечной пластины



1. Если отражатель толстый ($M_2 << T$), то аргумент гиперболического тангенса большой, тогда

$$\mathrm{th}\left(\frac{T}{M_2}\right) \approx 1$$

Следовательно $\delta \approx \dfrac{D_1}{D_2} M_2$

Для толстого отражателя **эффективная добавка определяется ядерно-физическими свойствами его материала**.

Таким образом, при введении отражателя первоначально **эффективная добавка растет с ростом толщины отражателя**, а критические **размеры активной зоны уменьшаются**.

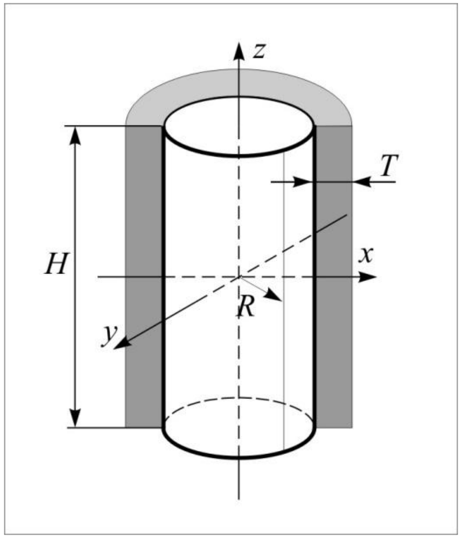
Достигнув определенной толщины, **рост эффективной добавки прекращается независимо от роста толщины отражателя**, при этом **критические размеры активной зоны становятся постоянными**.

Гомогенный реактор с отражателем в одногрупповом приближении

Пролонгируя полученный опыт на решение задач для гомогенного реактора различных форм можно предложить следующий алгоритм:

1. Постановка задачи – выбор геометрии, запись исходных уравнений, постановка граничных условий.
2. Определение функций распределения потоков нейтронов в активной зоне и отражателе.
3. Установление условия критичности.
4. Введение эффективной добавки за счет отражателя, ее расчет из условия критичности.
5. Анализ эффективности использования отражателя (влияние толщины на эффективную добавку).

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении



Рассмотрим цилиндрический реактор с высотой H (экстраполированный размер) и радиусом R, окруженный боковым отражателем с толщиной T.

Так как на торцах реактора отражатель отсутствует, то аксиальная составляющая потока нейтронов будет точно такой же, как в реакторе без отражателя, тогда

$$\Phi_1(r,z) = f_1(r)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right), \quad \Phi_2(r,z) = f_2(r)\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению радиальный составляющих – функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$, для которых

$$\Delta f_1(r) + \aleph_r^2 f_1(r) = 0$$

$$\Delta f_2(r) + \nu^2 f_2(r) = 0$$

здесь $\aleph_r$ – радиальная составляющая материального параметра в активной зоне; ν - радиальная составляющая материального параметра в отражателе.

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

Решение для радиальной составляющей нейтронного потока в активной зоне мы получили ранее, когда рассматривали цилиндрический реактор без отражателя

$$f_1(r) = AJ_0(\aleph_r r)$$

Рассмотрим решение уравнения для отражателя

$$\Delta f_2(r) - \nu^2 f_2(r) = 0$$

В цилиндрических координатах будем иметь

$$\frac{d^2 f_2(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_2(r)}{dr} - \nu^2 f_2(r) = 0$$

Помножим все уравнение на r^2, затем первое слагаемое умножим и разделим на ν^2, второе слагаемое на ν

$$(r\nu)^2 \frac{d^2 f_2(r)}{d(r\nu)^2} + (r\nu)\frac{df_2(r)}{d(r\nu)} - (r\nu)^2 f_2(r) = 0$$

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

$$(r\nu)^2 \frac{d^2 f_2(r)}{d(r\nu)^2} + (r\nu)\frac{df_2(r)}{d(r\nu)} - (r\nu)^2 f_2(r) = 0$$

Полученное уравнение также является уравнением Бесселя, как и для радиальной составляющей потока нейтронов в реакторе без отражателя, однако здесь аргумент $r\nu$ является мнимым.

В этом случае общее решение будем иметь в виде суммы модифицированных функций Бесселя первого и второго рода нулевого порядка

$$f_2(r) = C_1 I_0(r\nu) + C_2 K_0(r\nu)$$

где $I_0(r\nu)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента первого рода; $K_0(r\nu)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента второго рода (функция Макдональда).

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

Далее используя условия на внешней границе отражателя

$$f_2(r)\Big|_{r=R_2} = C_1 I_0(\nu R_2) + C_2 K_0(\nu R_2) = 0$$

выражаем константу C_1 через C_2

$$C_1 = -C_2 \frac{K_0(\nu R_2)}{I_0(\nu R_2)}$$

Окончательно для радиальных составляющих потоков нейтронов в активной зоне и в отражателе получим

$$f_1(r) = A J_0(\aleph_r r)$$

$$f_2(r) = -C_2 \left[\frac{K_0(\nu R_2)}{I_0(\nu R_2)} I_0(r\nu) - K_0(r\nu) \right]$$

Полученные уравнения необходимо «сшить» на границе «активная зона – отражатель»

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

для нейтронных потоков получим

$$AJ_0(\aleph_r R) = -C_2\left[\frac{K_0(\nu R_2)I_0(\nu R) - K_0(\nu R)I_0(\nu R_2)}{I_0(\nu R_2)}\right]$$

для диффузионных токов

$$D_1 A\aleph_r J_1(\aleph_r R) = -D_2 C_2 \nu\left[\frac{K_0(\nu R_2)I_1(\nu R) + K_1(\nu R)I_0(\nu R_2)}{I_0(\nu R_2)}\right]$$

Разделим второе уравнение на первое

$$\aleph_r \frac{J_1(\aleph_r R)}{J_0(\aleph_r R)} = \nu \frac{D_2}{D_1}\left[\frac{K_0(\nu R_2)I_1(\nu R) + K_1(\nu R)I_0(\nu R_2)}{K_0(\nu R_2)I_0(\nu R) - K_0(\nu R)I_0(\nu R_2)}\right]$$

Логично предположить, что мы получили **условие критичности для цилиндрического реактора с боковым отражателем**.

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

$$\aleph_r \frac{J_1(\aleph_r R)}{J_0(\aleph_r R)} = \nu \frac{D_2}{D_1}\left[\frac{K_0(\nu R_2)I_1(\nu R) + K_1(\nu R)I_0(\nu R_2)}{K_0(\nu R_2)I_0(\nu R) - K_0(\nu R)I_0(\nu R_2)}\right]$$

Для того, чтобы убедится в том, что получили условие критичности будем уменьшать отражатель ($T \to 0$).

Толщина отражателя входит в экстраполированный размер реактора $R_2 = R+T$ и при $T \to 0$ получим $R_2 = R$, тогда

$$\frac{K_0(\nu R)I_1(\nu R) + K_1(\nu R)I_0(\nu R)}{K_0(\nu R)I_0(\nu R) - K_0(\nu R)I_0(\nu R)} \to \infty$$

Следовательно

$$\frac{J_1(\aleph_r R)}{J_0(\aleph_r R)} \to \infty$$

Функция $J_1(\aleph_r R)$ ограничена при всех x, тогда последнее условие будет выполняться если $J_0(\aleph_r R) = 0$, то есть $\aleph_r R \approx 2{,}405$

или $\aleph_r = \dfrac{2{,}405}{R}$, что является **условием критичности для реактора без отражателя**

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

По аналогии с плоским реактором введем понятие эффективной добавки за счет отражателя

$$\delta = R_0 - R$$

где R_0 – критический радиус цилиндрического реактора без отражателя.

Выразим от сюда R и подставим в левую часть условия критичности

$$\aleph_r \frac{J_1(\aleph_r R)}{J_0(\aleph_r R)} = \aleph_r \frac{J_1(\aleph_r R_0 - \aleph_r \delta)}{J_0(\aleph_r R_0 - \aleph_r \delta)}$$

Пусть реактор имеет большие размеры, то есть радиус велик по сравнению с величиной эффективной добавки ($\delta << R$).

Тогда раскладывая полученную функцию в ряд Тейлора по малому параметру $\aleph_r\delta$, ограничившись первым членом разложения, можно легко получить

$$\aleph_r \frac{J_1(\aleph_r R_0 - \aleph_r \delta)}{J_0(\aleph_r R_0 - \aleph_r \delta)} \approx \aleph_r \frac{1}{\aleph_r \delta} = \frac{1}{\delta}$$

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

С другой стороны, в большом реакторе радиус много больше длины миграции, в том числе и для отражателя ($R >> M_2$), следовательно

$$\nu R = \frac{R}{M_2} >> 1$$

Тогда для правой части воспользуемся асимптотическим разложением модифицированных функций Бесселя

$$I_n(x) = \frac{\exp(-x)}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\exp(x)$$

В этом случае для правой части условия критичности получим

$$\nu \frac{D_2}{D_1}\left[\frac{K_0(\nu R_2)I_1(\nu R) + K_1(\nu R)I_0(\nu R_2)}{K_0(\nu R_2)I_0(\nu R) - K_0(\nu R)I_0(\nu R_2)}\right] =$$

$$= \nu \frac{D_2}{D_1}\left\{\frac{\cancel{1/2x}\left[\exp(\cancel{\nu R} + \nu T)\,\cancel{\exp(-\nu R)} + \cancel{\exp(\nu R)}\exp(\cancel{-\nu R} - \nu T)\right]}{\cancel{1/2x}\left[\exp(\cancel{\nu R} + \nu T)\,\cancel{\exp(-\nu R)} - \cancel{\exp(\nu R)}\exp(\cancel{-\nu R} - \nu T)\right]}\right\}$$

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

После сокращения имеем

$$=\nu\frac{D_2}{D_1}\left\{\frac{\exp(\nu T)+\exp(-\nu T)}{\exp(\nu T)-\exp(-\nu T)}\right\}=\nu\frac{D_2}{D_1}\frac{\mathrm{ch}(\nu T)}{\mathrm{sh}(\nu T)}=\nu\frac{D_2}{D_1}\mathrm{cth}(\nu T)=\frac{1}{M_2}\frac{D_2}{D_1}\mathrm{cth}(\nu T)$$

Собираем выражения для правой и левой частей, полученные после преобразований

$$\frac{1}{\delta}\approx\frac{1}{M_2}\frac{D_2}{D_1}\mathrm{cth}(\nu T)$$

или

$$\delta\approx M_2\frac{D_1}{D_2}\mathrm{th}(\nu T)$$

Таким образом, **эффективная добавка за счет отражателя для цилиндрического реактора больших размеров совпадает по значению с таковой для плоского реактора**.

Цилиндрический гомогенный реактор с боковым отражателем в одногрупповом приближении

В равенстве эффективных добавок за счет отражателя для большого цилиндрического и плоского реакторов **существует** интуитивная **логика**.

При **увеличении радиуса** цилиндра **кривизна** его боковой **поверхности уменьшается**.

При очень большом радиусе поверхность цилиндра мало отличается от плоскости.

С другой стороны, необходимо помнить, что при **уменьшении радиуса** полученное **равенство** эффективных добавок за счет отражателя **будет нарушаться**.

Здесь уже нельзя оставлять только первые члены разложений функций в ряды. Такое приближение является слишком грубым для цилиндрического реактора малых размеров.

Эффективные размеры активной зоны для реактора с отражателем. Эквивалентный реактор.

Будем называть **размеры активной зоны** реактора, **увеличенные на** величину **эффективной добавки** за счет отражателя, **эффективным размером** активной зоны.

Например, для реактора в форме бесконечной пластины эффективный размер определится как

$$H_{эфф} = H + 2\delta$$

Для цилиндрического реактора, окруженного со всех сторон отражателем

$$H_{эфф} = H + 2\delta; \quad R = R + \delta$$

При размерах активной зоны, **равных эффективному размеру**, такой гипотетический **реактор будет находится в критическом состоянии**.

Тогда при проведении **анализа на критичность** можно воспользоваться **моделью – эквивалентным реактором**.

Эффективные размеры активной зоны для реактора с отражателем. Эквивалентный реактор.

Будем называть **эквивалентным реактором** – реактор, имеющий эффективные размеры.

Эквивалентный реактор – это реактор **без отражателя**, в котором **влияние отражателя** на поток нейтронов **заменено увеличенным размером**.

Соответственно, для эквивалентного реактора будет **выполняться условие критичности для реактора без отражателя**, то материальный параметр будет равен геометрическому.

Например, для цилиндрического реактора

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{H_{эфф}}\right)^2 + \left(\frac{2{,}405}{R_{эфф}}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{H+2\delta}\right)^2 + \left(\frac{2{,}405}{R+\delta}\right)^2$$

Эффективные размеры активной зоны для реактора с отражателем. Эквивалентный реактор.

Очевидно, что в этом случае эффективный коэффициент размножения определится соотношением

$$k_{эфф} = \frac{k_{\infty} \exp(-B^2 \tau)}{1 + B^2 L^2}$$

Таким образом, **использование модели эквивалентного реактора** позволяет для реактора с отражателем применить более простые соотношения, что существенно **упрощает проведение оценочных расчетов**.

Так как эквивалентный реактор – это реактор без отражателя, то потоки нейтронов на его границе обращаются в ноль.

Тогда становится понятен физический смысл эффективной добавки за счет отражателя.

Эффективная добавка за счет отражателя – это **расстояние, отсчитываемое от границы активной зоны, на котором асимптотическое распределение потока нейтронов обращается в ноль.**