Минимальный критический объем цилиндрического гомогенного реактора

Будем искать такое соотношение между радиусом и высотой цилиндрического реактора ($R_{опт}$, $H_{опт}$), чтобы, с одной стороны, его **объем был минимальным**, а с другой, чтобы реактор находился **в критическом состоянии**.

При такой постановке задачи оптимальные радиус и высота связаны между собой.

То есть при изменении, например, высоты радиус также будет изменяться. Тогда $R = R(H)$ и условие минимальности объема реактора будет иметь вид

$$\frac{dV}{dH} = \frac{d(\pi R^2 H)}{dH} = 2\pi RH \frac{dR}{dH} + \pi R^2 = 0$$

от сюда

$$\frac{dR}{dH} = -\frac{R}{2H}$$

Минимальный критический объем цилиндрического гомогенного реактора

С другой стороны, при оптимальных размерах реактора геометрический параметр также **должен иметь экстремум**. Следовательно, необходимо потребовать, чтобы

$$\frac{dB^2}{dH}=\frac{d}{dH}\left[\left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]=-\cancel{\frac{1}{2}}\frac{\xi_0^2}{R^3}\frac{dR}{dH}+\left(-\cancel{\frac{1}{2}}\right)\frac{\pi^2}{H^3}=0$$

Подставляем сюда полученное ранее соотношение для dR/dH

$$-\frac{\xi_0}{R^3}\frac{R}{2H}+\frac{\pi^2}{H^3}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\xi_0^2}{R^2}=\frac{2\pi^2}{H^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{H_{\text{опт}}}{R_{\text{опт}}}=\frac{\pi}{\xi_0}\sqrt{2}\approx 1{,}847$$

Выразим $R_{\text{опт}}$ и $H_{\text{опт}}$ через геометрический параметр B

$$B^2=\frac{\xi_0^2}{R^2}+\frac{\pi^2}{H^2}=\frac{2\pi^2}{H^2}+\frac{\pi^2}{H^2}=3\frac{\pi^2}{H^2} \quad\Rightarrow H_{\text{опт}}=\frac{\pi}{B}\sqrt{3}$$

$$B^2=\frac{\xi_0^2}{R^2}+\frac{\pi^2}{H^2}=\frac{\xi_0^2}{R^2}+\frac{\xi_0^2}{2R^2}=\frac{3}{2}\frac{\pi^2}{R^2} \quad\Rightarrow R_{\text{опт}}=\frac{\xi_0}{B}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Минимальный критический объем реакторов различной формы

$$H_{опт} = \frac{\pi}{B}\sqrt{3} \qquad\qquad R_{опт} = \frac{\xi_0}{B}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Получим значение минимального объема цилиндрического реактора

$$V_{\min}^{цил} = \pi R_{опт}^2 H_{опт} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi^2 \xi_0^2 \frac{1}{B^3} \approx \frac{148}{B^3}$$

Для реакторов других форм минимальный объем:

бесконечная пластина: **не определяется**

прямоугольный параллелепипед: $V_{\min}^{парал} \approx \dfrac{161}{B^3}$

сфера: $V_{\min}^{сф} \approx \dfrac{130}{B^3}$

Минимальный критический объем цилиндрического гомогенного реактора

Вернемся к цилиндрическому реактору и его оптимальным размерам, которые связаны с геометрическим параметром

$$R_{опт} = \frac{\xi_0}{B}\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad\qquad H_{опт} = \frac{\pi}{B}\sqrt{3}$$

Вспомним, что в критическом реактора геометрический параметр равен материальном, и попробуем связать оптимальные размеры со свойствами среды.

Так как нам нужны больше качественные характеристики, не же ли количественные, то несколько «загрубим» соотношение для материального параметра.

$$\aleph^2 = \frac{k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau) - 1}{L^2}$$

Минимальный критический объем цилиндрического гомогенного реактора

$$\aleph^2 = \frac{k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau) - 1}{L^2}$$

Если наш реактор достаточно большой, так чтобы его геометрические размеры были много больше, чем пробеги нейтронов. Тогда экспоненту можно разложить в ряд, в котором ограничится только первым не постоянным членом

$$\exp(-\aleph^2 \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\aleph^2 \tau)^n}{n!} \approx 1 - \aleph^2 \tau$$

Тогда

$$\aleph^2 \approx \frac{k_\infty - k_\infty \aleph^2 \tau - 1}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \aleph^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + k_\infty \tau}$$

При k_∞, близком к 1, полученное выражение еще более упрощается

$$\Rightarrow \quad \aleph^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + \tau} = \frac{k_\infty - 1}{M^2}$$

где M^2 – площадь миграции нейтронов в процессе замедления и диффузии

Минимальный критический объем цилиндрического гомогенного реактора

Тогда для оптимальных размеров

$$R_{опт} = \frac{\xi_0}{B}\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad H_{опт} = \frac{\pi}{B}\sqrt{3}$$

получим

$$R_{опт} = \frac{\xi_0 M}{\sqrt{k_\infty - 1}}\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad H_{опт} = \frac{\pi M}{\sqrt{k_\infty - 1}}\sqrt{3}$$

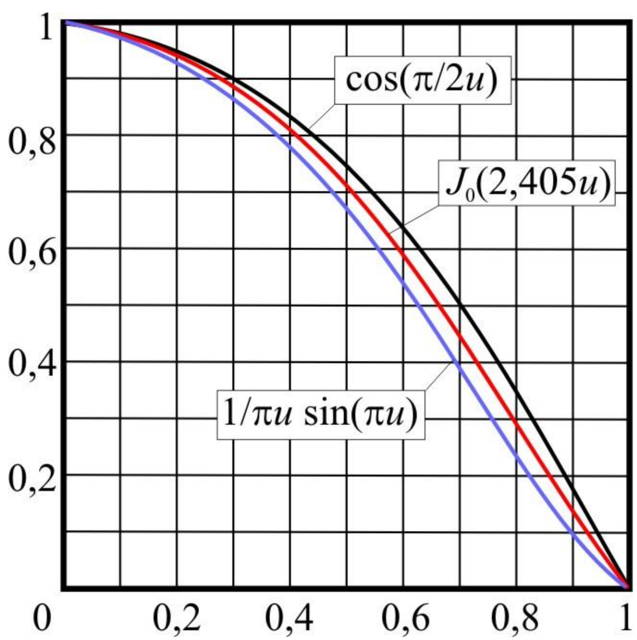
Соответственно, **критические размеры зависит от** двух характеристик размножающей среды: **коэффициента размножения и длины миграции**.

Например, в реакторе с легководным замедлителем (H_2O) $M^2 = 34{,}7$ см^2, а в реакторе с тяжеловодным замедлителем (D_2O) $M^2 = 11\,570$ см^2.

Следовательно, при одном и том же k_∞ **легководный реактор будет иметь меньшие критические размеры, чем тяжеловодный**.

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для реактора конечных размеров

Для гомогенного реактора без отражателя любой формы распределение нейтронов имеет приблизительно одинаковый профиль.



Максимальное значение потока всегда в центре реактора.

Поток нейтронов снижается к периферии, что является проявлением **утечки нейтронов**

Поток нейтронов становится нулевым на **экстраполированной границе**.

Соответственно, распределение потока нейтронов (профиль энерговыделения) в реакторе конечных размеров **существенно неравномерное.**

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для реактора конечных размеров

Неравномерность потока нейтронов является одной из важнейших характеристик, которая определяет **распределение энерговыделения, выгорания топлива, теплосъема и др.** по объему реактора.

Количественно неравномерность потока нейтронов характеризуется **коэффициентом неравномерности** по объему (k_v).

Очевидно, что в реакторе, где поток нейтронов равномерен $k_v = 1$

Чем больше k_v, тем более неравномерно распределение потока нейтронов.

По определению коэффициент неравномерности – это **отношение максимального потока нейтронов (в центре реактора) к среднему по объему потоку нейтронов**

$$k_v = \frac{\Phi_0}{\overline{\Phi}}$$

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для реактора конечных размеров

По аналогии с коэффициентом неравномерности по объему вводятся **коэффициенты неравномерности по отдельным геометрическим направлениям** (составляющим).

Например, **коэффициентом неравномерности по радиусу** (k_r), **коэффициентом неравномерности по высоте** (k_h),

Очевидно, что в этом случае общий коэффициент неравномерности по объему определится как **произведение составляющих по отдельным направлениям**, например

$$k_v = k_r k_h$$

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для цилиндрического реактора

По сложившейся традиции рассмотрим цилиндрический реактор, как наиболее типичную форму энергетического реактора, а затем представим конечные результаты для других форм реактора, которые можно получит по аналогии **самостоятельно**.

Максимальный поток нейтронов имеет место в центре реактора и будем считать, что он равен Φ_0.

Средний поток нейтронов будем находить по теореме о среднем

$$\overline{\Phi} = \frac{\int\limits_V \Phi(V)dV}{V}$$

Соответственно, необходимо вычислить интеграл по объему от ранее полученного распределения потока нейтронов в цилиндрическом реакторе

$$\Phi(r,z) = \Phi_0 J_0\left(\frac{\xi_0}{R} r\right)\cos\left(\frac{\pi}{H} z\right)$$

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для цилиндрического реактора

$$\Phi(r,z)=\Phi_0 J_0\left(\frac{\xi_0}{R}r\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)$$

Здесь необходимо помнить, что мы работаем в цилиндрической системе координат, в которой элементарный объем имеет следующее представление

$$dV=rdrd\varphi dz$$

Тогда

$$\int_V \Phi(V)dV=\int_V \Phi_0 J_0\left(\frac{\xi_0}{R}r\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)rdrd\varphi dz$$

Вспомним, что функцию $\Phi(V)=\Phi(r,z)$ мы получали методом разделения переменных, а от угла φ она вообще не зависит.

Следовательно, наш интеграл будет являться произведение трех независимых интегралов

$$\int_V \Phi(V)dV=\Phi_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-H/2}^{H/2}\cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)dz\int_0^R rJ_0\left(\frac{\xi_0}{R}r\right)dr$$

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для цилиндрического реактора

$$\int_V \Phi(V)dV = \Phi_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} \cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)dz \int_0^R rJ_0\left(\frac{\xi_0}{R}r\right)dr$$

Первых интеграл совсем простой

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

Второй также не очень сложный

$$\int_{-H/2}^{H/2} \cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)dz = \frac{H}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{H}\right)\Bigg|_{-H/2}^{H/2} = \frac{H}{\pi}\left[\overset{1}{\sin\left(\frac{\pi}{H}\frac{H}{2}\right)} - \overset{-1}{\sin\left(-\frac{\pi}{H}\frac{H}{2}\right)}\right] = 2\frac{H}{\pi}$$

Третий может смущать только наличием функции Бесселя

$$\int_0^R rJ_0\left(\frac{\xi_0}{R}r\right)dr = \left| \begin{array}{c} y = \dfrac{\xi_0}{R}r, B_r = \dfrac{\xi_0}{R}, y = B_r r \\ dr = \dfrac{dy}{B_r}, r = \dfrac{y}{B_r} \\ y(0) = 0, y(R) = \xi_0 \end{array} \right| = \frac{1}{B_r^2}\int_0^{\xi_0} yJ_0(y)dy$$

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для цилиндрического реактора

$$= \frac{1}{B_r^2} \int_0^{\xi_0} y J_0(y) dy$$

Известно (если не известно, то можно воспользоваться справочником или другими доступными источниками информации), что

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x)$$

Найдем производную от функции $x^n J_n(x)$

$$\frac{d[x^n J_n(x)]}{dx} = n x^{n-1} J_n(x) + x^n \frac{dJ_n(x)}{dx}$$

и подставим сюда производную от функции Бесселя

$$n x^{n-1} J_n(x) + x^n \left[-\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) \right] = \cancel{n x^{n-1} J_n(x)} - \cancel{n x^{n-1} J_n(x)} + x^n J_{n-1}(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для цилиндрического реактора

Таким образом,

$$\frac{d[x^n J_n(x)]}{dx} = x^n J_{n-1}(x)$$

Перенесем dx в правую часть и проинтегрируем

$$\int d[x^n J_n(x)] = \int x^n J_{n-1}(x)dx$$

или

$$x^n J_n(x) = \int x^n J_{n-1}(x)dx$$

Поменяв правую и левую часть местами, получим формулу для одного из частных случаев интегрирования функции, содержащую функцию Бесселя

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x)$$

При $n = 1$

$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x)$$

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для цилиндрического реактора

$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x)$$

Возвращаемся к нашему интегралу

$$= \frac{1}{B_r^2}\int_0^{\xi_0} yJ_0(y)dy = \frac{1}{B_r^2}\left[yJ_1(y)\right]_0^{\xi_0} = \frac{1}{B_r^2}\left[\xi_0 J_1(\xi_0) - 0J_1(0)\right] = \frac{\xi_0 J_1(\xi_0)}{B_r^2}$$

Окончательно, собирая все промежуточные результаты, получим для величины среднего потока в цилиндрическом реакторе

$$\overline{\Phi} = \frac{\int_V \Phi(V)dV}{V} = \frac{\Phi_0}{V}\, 2\pi\ \ 2\frac{H}{\pi}\ \frac{\xi_0 J_1(\xi_0)}{B_r^2} = \frac{4\Phi_0}{\pi R^2 H}\frac{HR^2}{\xi_0} J_1(\xi_0) = \frac{4\Phi_0}{\pi\xi_0} J_1(\xi_0)$$

Тогда для коэффициента неравномерности по объему реактора получим

$$k_v = \frac{\Phi_0}{\overline{\Phi}} = \frac{\Phi_0 \xi_0 \pi}{4\Phi_0 J_0(\xi_0)} = \frac{2{,}405\pi}{4J_0(2{,}405)} \approx 3{,}63$$

Коэффициент неравномерности потока нейтронов для реакторов различной формы

Бесконечная пластина: $k_x = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

Прямоугольный параллелепипед: $k_v = \frac{\pi^3}{8} \approx 3{,}87$

Цилиндр: $k_v = \frac{\xi_0 \pi}{4 J_0(\xi_0)} \approx 3{,}63$

Сфера: $k_v = \frac{\pi^2}{3} \approx 3{,}29$

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Мы рассмотрели физические **свойства среды, размножающей нейтроны, конечных размеров**.

В самом начале мы предположили, что такая среда обладаем следующими параметрами:

1. Среда является **гомогенной и изотропной**.
2. Все нейтронные **источники и стоки распределены** по системе **равномерно**.
3. Все нейтроны в системе, включая **нейтроны источников имеют одинаковую скорость** (одногрупповое приближение)

Достаточно условно мы называли такую среду **реактором**.

Или более точно – **гомогенным реактором в одногрупповом диффузионном приближении**.

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Для такого реактора мы нашли уравнение, которое описывает **изменение** пространственного распределения **потока нейтронов во времени**

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r},t) = D\Delta\Phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r},t) + S(\mathbf{r},t)$$

изменение потока нейтронов во времени

диффузия тепловых нейтронов

поглощение тепловых нейтронов

источник нейтронов

Для стационарного случая мы имели уравнение вида

$$D\Delta\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}) = 0$$

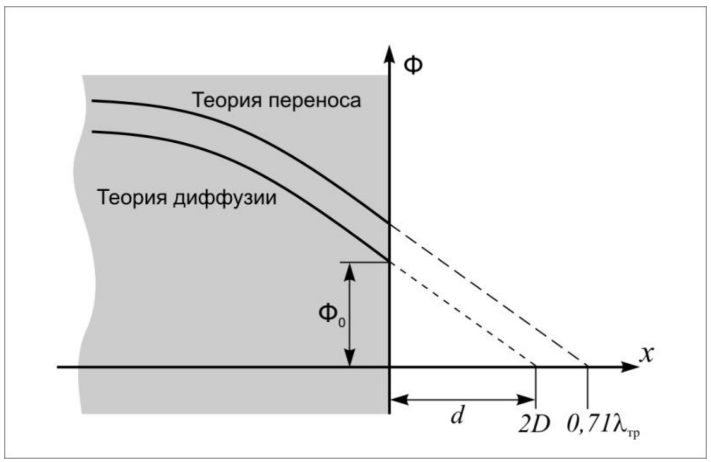
Здесь важно то, что на этом этапе мы полагали, что **источником** нейтронов **является реакция деления**.

При этом в рамках одногрупповой модели (нейтроны имеют одинаковую энергию и скорость) **нейтроны сразу рождаются тепловыми**.

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Далее мы рассмотрели граничные условия для записанного диффузионного уравнения.

Здесь мы снова использовали **модельное описание некоторой условной границы**, на которой **поток нейтронов обращается в ноль**.



Мы полагали, что **на фактической границе** поток нейтронов должен иметь какое-то **ненулевое значение**.

При этом мы **продлили функцию потока за пределы реактора** (экстраполяция) при сохранении изменения функции (производной по координате, градиента, угла касательной).

Полученную точку, где поток равен нуля, мы назвали **экстраполированной границей**.

Для **длины экстраполяции** теория диффузии дает значение $2D=2/3\lambda_{тр}$, но мы приняли уточнение, данное теорией переноса, – $0,71\lambda_{тр}$

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

За тем не удовлетворившись описанием источника нейтронов, данным в одногрупповом диффузионном приближении, мы более детально рассмотрели **закономерности замедления нейтронов** в рамках **возрастного приближения**.

Мы **ввели дополнительные приближения** для описания гомогенной среды конечных размеров, в частности, положили, что:

1. Макроскопические сечения поглощения среды много меньше макроскопических сечений рассеяния.
2. Размеры системы много больше характерных нейтронных длин, например длины диффузии и длины замедления.
3. Рассеяние нейтронов изотропно в системе центра масс.
4. Массовая доля замедлителя существенно больше массовой доли топлива.
5. Нейтроны замедляются непрерывно.

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Далее мы ввели функцию **плотности замедления $q(E)$**, как число нейтронов в 1 см^3 за 1 сек величина энергии которых при замедлении проходит через значение энергии E.

И установили взаимосвязь между плотностью замедления $q(E)$ и функцией потока нейтронов $\Phi(E)$

$$\Phi(E) = \frac{q}{\xi \Sigma_s E}$$

Это нам позволило после введения переменной

$$d\tau = -\frac{\lambda_s D}{\xi E} dE \qquad \tau(E) = -\int_E^{E_0} \frac{\lambda_s D}{\xi E} dE = D\left[\frac{\lambda_s}{\xi} \ln \frac{E_0}{E}\right]$$

которая называется **возрастом нейтронов**, получить уравнение для описания функции плотности замедления – **уравнение возраста**

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \Delta q$$

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Решение уравнения возраста для гомогенного реактора конечных размеров позволило получить **уточненное описание источника тепловых нейтронов** через функции плотности замедления

$$q(\tau,\mathbf{r}) = \frac{k_\infty}{\varphi}\Sigma_a \Phi(\mathbf{r})\exp(-\aleph^2\tau)$$

И мы получили стационарное уравнение для критического гомогенного реактора уже в более точном диффузионо-возрастном приближении

$$D\Delta\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}) + k_\infty\Sigma_a\Phi(\mathbf{r})\exp(-\aleph^2\tau_{th}) = 0$$

Очевидно, что и для нестационарного случая уравнение будет иметь аналогичный вид

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r},t) = D\Delta\Phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r},t) + k_\infty\Sigma_a\Phi(\mathbf{r},t)\exp(-\aleph^2\tau_{th})$$

Таким образом, мы получили **объект для изучения физических свойств гомогенного реактора конечных размеров**.

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Далее в рамках задачи изучения свойств гомогенного реактора конечных размеров мы рассмотрели **критическое уравнение**

$$\frac{k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau_{th})}{1 + L^2 \aleph^2} = 1$$

Это уравнение справедливо для гомогенного реактора **без отражателя** и применимо к **тепловым нейтронам** с пространственным **распределением плотности, определяемым возрастом нейтронов**.

Уравнение является **трансцендентным** относительно **параметра** $\aleph^2$., который мы назвали материальным параметром, подчеркивая его **зависимость только от физических свойств среды**: коэффициента размножения нейтронов для бесконечной среды; возраста нейтронов, длинны диффузии тепловых нейтронов.

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Затем мы определили физический смысл составляющих, входящих в критическое уравнение:

$\exp(-\aleph^2\tau)$ – вероятность того, что нейтрон избежит утечки из реактора конечных размеров в процессе замедления (коэффициент утечки быстрых нейтронов).

$\dfrac{1}{1+L^2\aleph^2}$ – вероятность того, что тепловой нейтрон избежит утечки при диффузии в реакторе конечных размеров (коэффициент утечки тепловых нейтронов.

Определив **полной вероятностью** того, что нейтроны избегут утечки в реакторе конечных размеров за их полный жизненный цикл как **произведение** этих **коэффициентов**

$$P = \frac{\exp(-\aleph^2\tau)}{1+L^2\aleph^2},$$

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Определив **полной вероятностью** того, что нейтроны избегут утечки в реакторе конечных размеров за их полный жизненный цикл как **произведение** этих **коэффициентов**

$$P = \frac{\exp(-\aleph^2 \tau)}{1 + L^2 \aleph^2},$$

мы ввели понятие – **коэффициент размножения для среды конечных размеров ($k_{эфф}$)**

$$k_{эфф} = k_\infty P = \frac{k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau)}{1 + L^2 \aleph^2}$$

и **потребовали равенства 1** уже эффективного коэффициента размножения в качестве **необходимого условия для критичности реактора конечных размеров**.

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Тогда для обеспечения критичности:

в бесконечной среде: $k_\infty = 1$; $P = 1$

в среде конечных размеров: $k_\infty > 1$; $P < 1$; $k_{эфф} = 1$

Далее мы попытались найти решение нестационарного уравнения для гомогенного реактора

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r},t) + k_\infty \Sigma_a \Phi(\mathbf{r},t)\exp(-\aleph^2 \tau)$$

которое получили в виде разложения функции потока нейтронов в бесконечный ряд по собственным функциям $\Psi_n(\mathbf{r})$ относительно собственных значений B_n

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Psi_n(\mathbf{r})\exp(\omega_n t)$$

где

$$\omega_n = (\aleph^2 - B_n^2)vD$$

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Анализ полученного решения для различных соотношений между параметрами $\aleph^2$ и B^2 при $t \to \infty$ позволил нам получить условие критичности для гомогенного реактора в виде **равенства параметров** $\aleph^2$ и B^2

Мы получили, что:

если $\aleph^2 < B_0^2$, то реактор находится в **подкритическом состоянии;**

если $\aleph^2 > B_0^2$, то реактор находится в **надкритическом состоянии;**

если $\aleph^2 = B_0^2$, то реактор находится в **критическом состоянии.**

Параметр B мы назвали называть его **геометрическим параметром** (далее мы убедились, что он завит только от геометрических размеров реактора).

И сформулировали условие критичности:

В гомогенном ядерном реакторе без отражателя в диффузионо-возрастном приближении материальный параметр равен геометрическому:

$$\aleph^2 = B^2$$

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

В завершении мы рассмотрели **гомогенные реакторы различной формы**: бесконечную пластину, прямоугольный параллелепипед, цилиндр, сферу.

Для каждого из них определили: функцию распределения потока нейтронов; геометрических параметр; оптимальные размеры, определяющие минимальный объем реактора в критическом состоянии; коэффициент неравномерности нейтронного потока по объему.

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Форма	Нейтронный поток	Геометрический параметр	$V_{\min}$	k_v
Пластина	$\Phi_0 \cos\left(\frac{\pi}{H}x\right)$	$\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$	нет	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$
Параллелепипед	$\Phi_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{\pi}{c}z\right)$	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$	$\frac{161}{B^3}$	$\frac{\pi^3}{8} \approx 3{,}87$
Цилиндр	$\Phi_0 J_0\left(\frac{2{,}405}{R}r\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)$	$\left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$	$\frac{148}{B^3}$	$\frac{\xi_0\pi}{4J_0(\xi_0)} \approx 3{,}63$
Сфера	$\Phi_0 \frac{R}{\pi r}\sin\left(\frac{\pi}{R}r\right)$	$\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$	$\frac{130}{B^3}$	$\frac{\pi^2}{3} \approx 3{,}29$