Критические размеры реакторов различной формы

При рассмотрении гомогенного реактора в виде бесконечной пластины в диффузионном приближении

$$\Delta\Phi(x) + B^2\Phi(x) = 0$$

мы получили решение для одномерного нейтронного потока в виде суммы собственных функций

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{x_0}$$

где $x_0 = h/2 + 0{,}71\lambda_{tr}$ – координата экстраполированной границы, на которой поток обращается в ноль, а h – фактическая толщина пластины.

$$\frac{(2n-1)\pi}{x_0} = B_n$$

значения B_n, удовлетворяющие граничным условиям, являются собственными значениями для исходного уравнения.

Критические размеры реакторов различной формы

Из всех слагаемых бесконечного ряд мы ограничились основной собственной функцией и соответствующим ей собственным числом

$$\Phi(x) = C\cos\frac{\pi x}{x_0}, \qquad B = \frac{\pi}{x_0}$$

С другой стороны, исходно для параметра B мы имели связь с параметрами среды в виде

$$B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$$

Мы рассматривали критический реактор и, не смотря на то, что использовали самую упрошенную диффузионную модель, однако получили равенство между геометрическим параметром

$$\left(\frac{\pi}{x_0}\right)^2$$

и некоторым материальным параметром

$$\frac{k_\infty - 1}{L^2}$$

Критические размеры реакторов различной формы

Пусть в этом грубом приближении материальный параметр имел другой вид.

Пусть еще не имели выражение для геометрического параметра в диффузионо-возрастном приближении.

Но уже на том этапе из равенства $\frac{k_\infty - 1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{x_0} \right)^2$

мы отмечали, что для заданных ядерно-физических свойств среды **должен существовать фиксированный размер конечной среды, соответствующий критическому состоянию**, то есть **критический размер**.

Соответственно, теперь перед нами стоит задача **определения критических размеров**, с учетом все наших достижений к текущему моменту: диффузионно-возростного приближения; критического уравнения реактора; условия критичности.

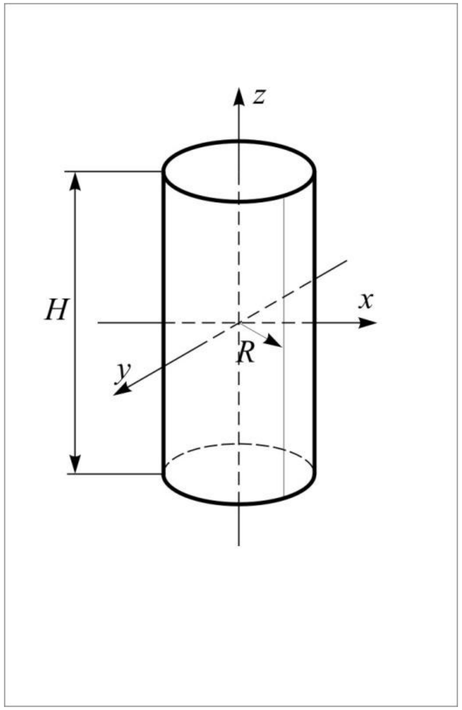
И сделаем мы это **для реакторов различной формы**.

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

Будем рассматривать **цилиндрический ядерный реактор**, как реактор наиболее типичной для энергетических реакторов формы.

Величину геометрического параметра B будем находить их решения уравнения для критического реактора

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) + B^2\Phi(\mathbf{r}) = 0$$



Пусть цилиндрический реактор имеет экстраполированные размеры: радиус R и высоту H.

Здесь удобно перейти к цилиндрическим координатам. Тогда для гомогенного реактора вместо функция потока нейтронов будет зависеть не от 3 координат (x,y,z), а от двух (r,z), так как относительно угловой координаты φ функция потока не меняется.

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

Тогда дифференциальный оператор Лапласа для выбранной цилиндрической системы координат будет иметь вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

А уравнение для критического цилиндрического гомогенного реактора получим в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi(r,z)}{\partial z^2} + B^2\Phi(r,z) = 0$$

Граничные условия: $\Phi(R,z) = 0;\quad \Phi\left(r,\pm\frac{H}{2}\right) = 0$

Здесь еще раз отметим, что R и H экстраполированные размеры.

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

$$\frac{\partial^2 \Phi(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi(r,z)}{\partial z^2} + B^2 \Phi(r,z) = 0$$

Так как $\Phi(r,z)$ функция двух переменных, то для полученного уравнения применим метод разделения переменных.

Пусть

$$\Phi(r,z) = f(r) \cdot g(z)$$

Подставляем $\Phi(r,z)$ в исходное уравнение

$$g(z)\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + g(z)\frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} + f(r)\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} + B^2 f(r) g(z) = 0$$

и разделим на $f(r)g(z)$

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{1}{g(z)}\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} + B^2 = 0$$

Соберем в левой части слагаемые, зависящие от r, а в правой – от z

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r} + B^2 = -\frac{1}{g(z)}\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2}$$

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r}+B^2=-\frac{1}{g(z)}\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2}=B_z^2$$

Так как правая и левая части есть функции независимых переменных, то можно их приравнять какой-либо константе.

Пусть это будет константа – B_z^2

Тогда будем иметь два уравнения следующего вида

для функции $g(z)$ $$\frac{1}{g(z)}\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2}=-B_z^2$$

для функции $f(r)$ $$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r}=B_z^2-B^2$$

Если ввести константу B_r^2 следующим образом: $B^2 = B_r^2 + B_z^2$, то

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r}=-B_r^2$$

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

Рассмотрим первое уравнение для функции $g(z)$

$$\frac{1}{g(z)}\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} = -B_z^2$$

Полученное уравнение сходно по виду с задачей Штурма-Лиувилля

$$\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} + B_z^2 g(z) = 0$$

Мы уже рассматривали ее решение.

Для функции $g(z)$ будем иметь решения в виде разложения в ряд по собственным функциям

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(B_{zn} z)$$

где собственные значения B_{zn} определятся как

$$B_{zn} = \frac{(2n+1)\pi}{H}$$

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

Повторим еще раз, как быль получено решение уравнения

$$\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} + B_z^2 g(z) = 0$$

Общее решение будет иметь вид

$$g(z) = A\cos(B_z z) + C\sin(B_z z)$$

Из условия симметрии распределения нейтронного потока вдоль вертикальной оси цилиндрического реактора (в центре поток нейтронов будет иметь максимальное значение) следует

$$\left.\frac{\partial g(z)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

Так как из общего решения

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = -AB_z \sin(B_z z) + CB_z \cos(B_z z)$$

то в центре реактора

$$\left.\frac{\partial g(z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -AB_z \cancelto{0}{\sin(B_z 0)} + CB_z \cancelto{1}{\cos(B_z 0)} = CB_z = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

В оставшуюся часть общего решения

$$g(z) = A\cos(B_z z)$$

подставляем граничные условия: $g\left(\pm\frac{H}{2}\right) = 0$

Так как $\cos(x)$ – функция четная, как для нижней, так и для верхней границы, получим

$$g\left(\pm\frac{H}{2}\right) = A\cos\left(B_z\frac{H}{2}\right) = 0$$

тогда

$$B_z\frac{H}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad B_{zn} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{где } n = 0,1,2...$$

Так как значений константы B_z (собственных значений) получилось бесконечное количество, то и решение для функции $g(z)$ будет иметь вид бесконечного сходящегося ряда

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(B_{zn} z)$$

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

Для критического реактора можно ограничится основным собственным значением $n = 0$ (индекс «0» сразу опустим)

$$B_z = \frac{\pi}{H}$$

тогда от всего бесконечного ряда останется только первое слагаемое

$$g(z) = A\cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)$$

которое и есть **решение для аксиальной составляющей потока нейтронов в цилиндрическом гомогенном реакторе**.

Переходим теперь к решению уравнения для радиальной составляющей – функции $f(r)$

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r} = -B_r^2$$

Или в другом виде

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r} + B_r^2 = 0$$

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r}+B_r^2=0$$

Помножим все слагаемые уравнения на $r^2 f(r)$

$$r^2\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+r\frac{\partial f(r)}{\partial r}+(rB_r)^2 f(r)=0$$

Далее в первом слагаемом числитель и знаменатель помножим на B_r^2, а во втором – на B_r

$$r^2\frac{B_r^2}{B_r^2}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+r\frac{B_r}{B_r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}+(rB_r)^2 f(r)=0$$

Тогда

$$(rB_r)^2\frac{\partial^2 f(r)}{\partial (rB_r)^2}+(rB_r)\frac{\partial f(r)}{\partial (rB_r)}+(rB_r)^2 f(r)=0$$

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

$$(rB_r)^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial (rB_r)^2} + (rB_r)\frac{\partial f(r)}{\partial (rB_r)} + (rB_r)^2 f(r) = 0$$

Полученное уравнение является уравнением следующего типа

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

которое представляет собой **уравнение Бесселя**.

То есть наше уравнения для радиальной составляющей потока нейтронов $f(r)$ является уравнением Бесселя относительно аргумента rB_r (действительный аргумент) при $n = 0$

Соответственно общее решение будем иметь в виде

$$f(r) = C_1 J_0(rB_r) + C_2 Y_0(rB_r)$$

где $J_0(rB_r)$ – функция Бесселя первого рода 0-го порядка; $Y_0(rB_r)$ – функция Бесселя второго рода 0-го порядка; C_1 и C_2 – произвольные константы.

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

$$f(r) = C_1 J_0(rB_r) + C_2 Y_0(rB_r)$$

О свойствах функций Бесселя, в частности, известно, что при $x \to 0$ функция $Y_0(x)$ (второго рода 0-го порядка) **возрастает до бесконечности**.

С другой стороны, физическое свойство потока нейтронов – **конечность в любой точке** ядерного реактора.

В целях обеспечения этого физического условия необходимо приравнять константы C_2 к нулю. Тогда

$$f(r) = CJ_0(rB_r)$$

Для определения параметра B_r воспользуемся граничными условиями $f(R) = 0$, то есть

$$f(R) = CJ_0(RB_r) = 0$$

Функция Бесселя первого рода 0-го порядка представляет собой периодическую затухающую функцию.

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

Соответственно, теоретически существует бесконечное количество точек, которых функция $J_0(x)$ равна нулю. Эти точки будем называть **корнями функции Бесселя** (ξ_n, где $n = 1,2,3\ \ldots$)

Таким образом, мы снова получили решение в виде бесконечного разложения в ряд по собственным функциям, соответствующим собственным значениям исходного уравнения

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(rB_{rn})$$

где собственные значения B_{rn} определяются как: $B_{rn} = \dfrac{\xi_n}{R}$

По традиции для критического реактора ограничимся только основными собственным значением и собственной функцией

$$f(r) = CJ_0\left(\frac{\xi_0}{R} r\right), \qquad B_r = \frac{\xi_0}{R} \approx \frac{2{,}405}{R}$$

и получим **решение для радиальной составляющей потока нейтронов в цилиндрическом гомогенном реакторе**.

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

Окончательно для **пространственного распределения потока нейтронов $\boldsymbol{\Phi(r, z)}$ в гомогенном цилиндрическом реакторе** будем иметь

$$\Phi(r,z) = CJ_0\left(\frac{2{,}405}{R}r\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)$$

Здесь, как и ранее, мы получили, что в критическом состоянии нейтронный поток, а, соответственно, и **мощность ядерного реактора может быть любой** (зависит от произвольной константы C).

Так как константа C определяет максимальное значение нейтронного потока в центре реактора, введем вместо нее константу Φ_0

$$\boxed{\Phi(r,z) = \Phi_0 J_0\left(\frac{2{,}405}{R}r\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)}$$

Критические размеры для цилиндрического гомогенного реактора

$$\boxed{\Phi(r,z) = \Phi_0 J_0\left(\frac{2{,}405}{R} r\right)\cos\left(\frac{\pi}{H} z\right)}$$

Кроме того, мы получили выражение для геометрического параметра, как сумму радиального и аксиального геометрических параметра

$$\boxed{B^2 = \left(\frac{2{,}405}{r}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2}$$

который из условия критичности (равенства материального и геометрического параметров**) определяет критические размеры** для цилиндрического гомогенного реактора без отражателя.

Гомогенные реакторы различной формы

По той же методике, которую мы использовали для цилиндрического реактора, можно получить функции **пространственного распределения потока нейтронов** и **геометрические параметры** для **реакторов других форм**:

1. Форма – бесконечная пластина

Геометрия: **одномерная**

Экстраполированные размеры: ширина – H

Распределение потока нейтронов: $\Phi(x) = \Phi_0 \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right)$

Геометрический параметр: $B^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$

Гомогенные реакторы различной формы

По той же методике, которую мы использовали для цилиндрического реактора, можно получить функции **пространственного распределения потока нейтронов** и **геометрические параметры** для **реакторов других форм**:

2. Форма – прямоугольный параллелепипед

Геометрия: **трехмерная** (декартова система координат)

Экстраполированные размеры: ширина – a; длина – b; высота – c

Распределение потока нейтронов: $\Phi(x,y,z) = \Phi_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{\pi}{c}z\right)$

Геометрический параметр: $B^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$

Гомогенные реакторы различной формы

По той же методике, которую мы использовали для цилиндрического реактора, можно получить функции **пространственного распределения потока нейтронов** и **геометрические параметры** для **реакторов других форм**:

3. Форма – цилиндр

Геометрия: **двухмерная** (цилиндрическая система координат)

Экстраполированные размеры: радиус – R; высота – H

Распределение потока нейтронов: $\Phi(r,z) = \Phi_0 J_0\left(\frac{2{,}405}{R}r\right)\cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)$

Геометрический параметр: $B^2 = \left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$

Гомогенные реакторы различной формы

По той же методике, которую мы использовали для цилиндрического реактора, можно получить функции **пространственного распределения потока нейтронов** и **геометрические параметры** для **реакторов других форм**:

4. Форма – сфера

Геометрия: **одномерная** (сферическая система координат)

Экстраполированные размеры: радиус – R

Распределение потока нейтронов: $\Phi(r) = \Phi_0 \dfrac{R}{\pi r} \sin\left(\dfrac{\pi}{R} r \right)$

Геометрический параметр: $B^2 = \left(\dfrac{\pi}{R} \right)^2$