Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

Одной из самых важных задач физики реакторов является **нахождение критических параметров**.

Под критическими параметрами будем понимать **совокупность материальных и геометрических характеристик** реактора, при обеспечении которых нейтронный поток **не меняется во времени**.

В общем случае нейтронный поток в гомогенном реакторе конечных размеров описывается нестационарным уравнение диффузии с источником нейтронов в виде плотности замедления для нейтронов тепловых энергий

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=D\Delta\Phi(\mathbf{r},t)-\Sigma_a\Phi(\mathbf{r},t)+k_\infty\Sigma_a\Phi(\mathbf{r},t)\exp(-\aleph^2\tau)$$

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r},t) + k_\infty\Sigma_a\Phi(\mathbf{r},t)\exp(-\aleph^2\tau)$$

Разделим данное уравнение на коэффициент диффузии D

$$\frac{1}{vD}\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \Delta\Phi(\mathbf{r},t) - \cancelto{1/L^2}{\frac{\Sigma_a}{D}}\Phi(\mathbf{r},t) + k_\infty \cancelto{1/L^2}{\frac{\Sigma_a}{D}}\Phi(\mathbf{r},t)\exp(-\aleph^2\tau)$$

Тогда

$$\frac{1}{vD}\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \Delta\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{k_\infty\exp(-\aleph^2\tau)-1}{L^2}\Phi(\mathbf{r},t)$$

Из критического уравнения имеем

$$\frac{k_\infty\exp(-\aleph^2\tau)}{1+L^2\aleph^2} = 1 \quad\Rightarrow\quad \aleph^2 = \frac{k_\infty\exp(-\aleph^2\tau)-1}{L^2}$$

Окончательно получим уравнение в виде

$$\frac{1}{vD}\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \Delta\Phi(\mathbf{r},t) + \aleph^2\Phi(\mathbf{r},t)$$

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

$$\frac{1}{vD}\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \Delta\Phi(\mathbf{r},t) + \aleph^2\Phi(\mathbf{r},t)$$

Реактор станет критическим, когда прекратится изменение потока нейтронов во времени. В этом случае данное уравнение станет стационарным

$$\Delta\Phi(\mathbf{r},t) + \aleph^2\Phi(\mathbf{r},t) = 0$$

Следовательно, если будут найдены условия такого перехода, то эти условия и будут являться условиями критичности реактора.

Таким образом, будем рассматривать полученное нестационарное уравнение в целях поиска условий, при которых функция потока перестанет изменятся во времени.

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

$$\frac{1}{vD}\frac{\partial \Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \Delta\Phi(\mathbf{r},t) + \aleph^2\Phi(\mathbf{r},t)$$

Предположим, что переменные в функции $\Phi(\mathbf{r},t)$ разделяются, тогда функцию потока можно представить в виде

$$\Phi(\mathbf{r},t) = T(t)\Psi(\mathbf{r})$$

Понятно, что функция $T(t)$ зависит только от координаты, а $\Psi(\mathbf{r})$ – только от времени.

Подставляем произведение функций в уравнение

$$\frac{1}{vD}\frac{\partial\left[T(t)\Psi(\mathbf{r})\right]}{\partial t} = \Delta\left[T(t)\Psi(\mathbf{r})\right] + \aleph^2 T(t)\Psi(\mathbf{r})$$

Так как Ψ не изменяется во времени, а T не зависит от координаты, то

$$\frac{\Psi(\mathbf{r})}{vD}\frac{\partial T(t)}{\partial t} = T(t)\Delta\Psi(\mathbf{r}) + \aleph^2 T(t)\Psi(\mathbf{r})$$

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

$$\frac{\Psi(\mathbf{r})}{vD}\frac{\partial T(t)}{\partial t} = T(t)\Delta\Psi(\mathbf{r}) + \aleph^2 T(t)\Psi(\mathbf{r})$$

Соберем функции зависящие от времени в левой части, а функции от координаты в правой

$$\frac{1}{vD}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{\Delta\Psi(\mathbf{r})}{\Psi(\mathbf{r})} + \aleph^2$$

Так как правая и левая части уравнения есть функции разных независимых переменных, то тождество возможно, если обе части будут равны какой-либо константе.

У нас нет специальных ограничений на функции $T(t)$ и $\Psi(\mathbf{r})$, поэтому пусть это будут просто константа ω, тогда из левой части будем иметь

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = \omega$$

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = \omega$$

Решение этого уравнения будем иметь в виде

$$T(t) = A\exp(\omega t)$$

Тогда для функции $\Phi(\mathbf{r},t)$ получим

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Psi(\mathbf{r})A\exp(\omega t)$$

И снова ее подставим в нестационарное уравнение

$$\frac{1}{vD}\omega\Psi(\mathbf{r})\cancel{A\exp(\omega t)} = \cancel{A\exp(\omega t)}\Delta\Psi(\mathbf{r}) + \aleph^2\Psi(\mathbf{r})\cancel{A\exp(\omega t)}$$

Очевидно, что константа A и $\exp(\omega t)$ сократятся и вместо нестационарного уравнения получим

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + \Psi(\mathbf{r})\left(\aleph^2 - \frac{\omega}{vD}\right) = 0$$

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + \Psi(\mathbf{r})\left(\aleph^2 - \frac{\omega}{vD}\right) = 0$$

Выражение в скобках обозначим B^2, тогда

$$B^2 = \aleph^2 - \frac{\omega}{vD} \quad \Rightarrow \quad \omega = (\aleph^2 - B^2)vD$$

Следовательно,

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + B^2\Psi(\mathbf{r}) = 0$$

Полученное уравнение относится к дифференциальным уравнениям специального типа, который называется **задача Штурма-Лиувилля**

Общее решение для уравнений данного типа представляется в виде разложения искомой функции в ряд

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Psi_n(\mathbf{r})$$

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Psi_n(\mathbf{r})$$

Функции $\Psi_n(\mathbf{r})$ называются **собственными функциями** уравнения.

Каждой собственной функции $\Psi_n(\mathbf{r})$ соответствует свое число B_n, которые называется **собственное число**

Очевидно, что для каждой собственной функции справедливо уравнение

$$\Delta\Psi_n(\mathbf{r}) + B_n^2 \Psi_n(\mathbf{r}) = 0$$

При этом собственные числа удовлетворяют следующему условию

$$0 \le B_0^2 \le B_1^2 \le B_2^2 \le \ldots \le B_n^2 \le \ldots$$

Понятно, что B_0^2 – наименьшее собственное число.

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

Таким образом, окончательно решение нестационарного уравнения для функции $\Phi(\mathbf{r},t)$ будем иметь в виде

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\Psi_n(\mathbf{r})\exp(\omega_n t)$$

где

$$\omega_n=(\aleph^2-B_n^2)vD$$

Проведем анализ полученного решения для различных соотношений между $\aleph^2$ и B^2 при $t\to\infty$

1. Пусть $\aleph^2=B_0^2$. Тогда в пределе $t\to\infty$ функция $\Phi(\mathbf{r},t)$ примет вид

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\lim_{t\to\infty}A_0\Psi_0(\mathbf{r})\overbrace{\exp\left[\overbrace{(B_0^2-B_0^2)vDt}^{0}\right]}^{1}+\lim_{t\to\infty}A_1\Psi_1(\mathbf{r})\exp\left[(B_0^2-B_1^2)vDt\right]+\ldots$$

В первом слагаемом показатель экспоненты равен нулю, сама экспонента равна 1, а все первое слагаемое равно $A_0\Psi_0(\mathbf{r})$.

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \lim_{t\to\infty} A_0\Psi_0(\mathbf{r})\overbrace{\exp\left[\overbrace{(B_0^2 - B_0^2)}^{0}vDt\right]}^{1} + \overbrace{\lim_{t\to\infty} A_1\Psi_1(\mathbf{r})\exp\left[\overbrace{(B_0^2 - B_1^2)}^{<0}vDt\right]}^{0} + \ldots$$

Во втором и последующих слагаемых показатель экспоненты является отрицательным, соответственно, в пределе они стремятся к нулю.

Таким образом, в случае $\aleph^2 = B_0^2$ при $t\to\infty$ решение исходного нестационарного уравнения принимает вид

$$\Phi(\mathbf{r},t) \approx A_0\Psi_0(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$$

то есть функция потока нейтронов перестает зависеть от времени, наше нестационарное уравнение становится стационарным, и **реактор переходит в критическое состояние**.

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

2. Пусть $\aleph^2 = B_l^2 \, (l > 0)$. Тогда в пределе $t \to \infty$ функция $\Phi(\mathbf{r},t)$ примет вид

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \lim_{t\to\infty}\overbrace{\left\{\sum_{n=0}^{l-1} A_n \Psi_n(\mathbf{r}) \exp\left[\overbrace{(B_l^2 - B_n^2)}^{>0} vDt\right]\right\}}^{\infty} + A_l \Psi_l(\mathbf{r}) + \lim_{t\to\infty}\overbrace{\left\{\sum_{n=l+1}^{\infty} A_n \Psi_n(\mathbf{r}) \exp\left[\overbrace{(B_l^2 - B_n^2)}^{<0} vDt\right]\right\}}^{0}$$

Все слагаемые бесконечного ряда можно разделить на группы:

первая группа – все слагаемые с номерами до $l-1$ включительно.
Здесь показатель экспоненты всегда больше нуля, тогда
при $t \to \infty$ все эти слагаемые будут неограниченно возрастать.

вторая группа – слагаемое с номером l. Оно при всех t равно $A_l \Psi_l(\mathbf{r})$.

третья группа – все слагаемые с номерами, большими, чем l.
Здесь показатель экспоненты всегда меньше нуля, тогда
при $t \to \infty$ все эти слагаемые будут стремиться к нулю.

Таким образом, при $\aleph^2 = B_l^2 \, (l > 0)$ и $t \to \infty$ функция $\Phi(\mathbf{r},t) \to \infty$,
а реактор становится **надкритическим**.

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

3. Пусть $0 \le \aleph^2 < B_0^2$. Тогда в пределе $t \to \infty$ функция $\Phi(\mathbf{r},t)$ примет вид

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \lim_{t\to\infty}\overbrace{\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \Psi_n(\mathbf{r}) \exp\left[\overbrace{-(B_n^2 - \aleph^2) vDt}^{<0}\right]\right\}}^{0}$$

Здесь показатель экспоненты всегда меньше нуля, тогда при $t \to \infty$ все эти слагаемые будут стремиться к нулю.

Соответственно, при $0 \le \aleph^2 < B_0^2$ и $t \to \infty$ функция $\Phi(\mathbf{r},t) \to 0$, а реактор становится **подкритическим**.

Условие критичности для гомогенного реактора конечных размеров

Таким образом, в результате проведенного анализа окончательно получаем:

если $\aleph^2 < B_0^2$, то реактор находится в **подкритическом состоянии;**

если $\aleph^2 > B_0^2$, то реактор находится в **надкритическом состоянии;**

если $\aleph^2 = B_0^2$, то реактор находится в **критическом состоянии.**

В обозначении параметра B опустим индекс «0» и будем называть его **геометрическим параметром** (ниже мы убедимся, что этот параметр завит только от геометрических размеров реактора).

И сформулируем условие критичности:

В гомогенном ядерном реакторе без отражателя в диффузионо-возрастном приближении материальный параметр равен геометрическому:

$$\boxed{\aleph^2 = B^2}$$