Критическое уравнение для реактора конечных размеров

Расчеты, основанные на одногрупповом приближении, **не дают точных результатов** для реактора на тепловых нейтронах.

Такие расчеты **не учитывают потери** нейтронов **во время замедления**.

Улучшить результаты можно, если **замедлитель не является слишком легким** (водородные замедлители исключаются). Здесь **для уточнения** описания поведения нейтронов во время замедления **используется уравнение возраста**.

Основная идея заключается **в замене источника S** в уравнении диффузии **на плотность замедления** для энергии, соответствующей тепловой.

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

Число нейтронов деления в 1 см^3 в 1 сек, которые замедляются до какой-либо энергии, равно плотности замедления, соответствующей этой энергии.

Если бы во время замедления отсутствовало поглощение, то плотность замедления смогла бы сравняться с величиной q_{th} (плотность замедления, соответствующая тепловым нейтронам), которая в свою очередь могла бы быть найдена решением уравнения возраста.

В случае относительно слабого поглощения нейтронов плотность замедления можно определить произведением $\varphi q(\tau_{th})$, где φ – **вероятность избежать резонансного захвата** для нейтронов возраста τ_{th}

Это произведение можно подставить вместо источника в уравнение диффузии.

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

Таким образом мы полагаем, что **источником тепловых нейтронов** являются **не реакция деления**, как в одногрупповой модели, а **замедлившиеся до тепловой энергии нейтроны**.

Очевидно, что такая аппроксимация более соответствует физической системе. Хотя здесь **процесс замедления происходит мгновенно**, что является хорошим приближением, **так как время диффузии много больше, чем время замедления**.

Тогда для реактора, находящегося в критическом состоянии будем иметь стационарное уравнение следующего вида

$$D\Delta\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}) + \varphi q(\tau,\mathbf{r}) = 0$$

диффузия тепловых нейтронов

поглощение тепловых нейтронов

замедление нейтронов

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

При этом плотность замедления определяется уравнением возраста

$$\frac{\partial q(\tau,\mathbf{r})}{\partial \tau} = \Delta q(\tau,\mathbf{r})$$

с учетом налагаемых на реактор граничных условий.

Одно из таких условий получается при рассмотрении плотности замедления нейтронов деления, для которых возраст равен нулю, $q(0, \mathbf{r})$.

Для бесконечной размножающей среды, состоящей из замедлителя и делящегося материала, на каждый поглощенный нейтрон будет получатся $\mu\eta\Theta$ быстрых нейтронов следующего поколения, где

μ – коэффициент размножения на быстрых нейтронах;

η – среднее число нейтронов, образующихся при делении;

Θ – коэффициент использования тепловых нейтронов.

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

Тогда число образующихся быстрых нейтронов на каждый тепловой будет равно

$$\mu\eta\Theta\frac{\varphi}{\varphi}=\frac{\mu\eta\Theta\varphi}{\varphi}=\frac{k_\infty}{\varphi}$$

Общее число тепловых нейтронов, поглощенных 1 см^3 в 1 сек, равно $\Sigma_a\Phi$. Следовательно, полное число быстрых нейтронов, образующихся в единице объема за единицу времени, равное плотности замедления нейтронов деления, даст соотношение

$$q(0,\mathbf{r})=\frac{k_\infty}{\varphi}\Sigma_a\Phi(\mathbf{r})$$

Последнее является **условием связи между уравнением диффузии тепловых нейтронов и уравнением возраста.**

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

Плотность замедления, которая определяется уравнением возраста

$$\frac{\partial q(\tau,\mathbf{r})}{\partial \tau} = \Delta q(\tau,\mathbf{r})$$

есть функция переменных – возраста τ и пространственных координат $\mathbf{r}$.

Можно искать решение уравнения возраста путем разделения переменных, то есть положить

$$q(\tau,\mathbf{r}) = T(\tau)R(\mathbf{r})$$

где $T(\tau)$ – функция только возраста (или энергии), $R(\mathbf{r})$ – только координат

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$\frac{\Delta R(\mathbf{r})}{R(\mathbf{r})} = \frac{1}{T(\tau)} \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau}$$

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

Каждый член уравнения зависит только от одной независимой переменной. Поэтому можно приравнять каждый из них постоянной величине, например, равной $-\aleph^2$. Знак минус для того, чтобы функция $T(\tau)$ уменьшалась при увеличении τ.

Тогда $\dfrac{\Delta R}{R} = -\aleph^2$ и $\dfrac{1}{T}\dfrac{\partial T}{\partial \tau} = -\aleph^2$

Из первого следует уравнение

$$\Delta R(\mathbf{r}) + \aleph^2 R(\mathbf{r}) = 0$$

из второго –

$$\frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + \aleph^2 T(\tau) = 0$$

Для функции $T(\tau)$ получим

$$T(\tau) = A\exp(-\aleph^2\tau)$$

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

Постоянный параметр $\aleph^2$ должен быть **вещественной положительной величиной**, чтобы удовлетворять физическому требованию – **плотность замедления не может возрастать с увеличением возраста нейтронов**.

При $\tau = 0$ функция $T(0) = A$, тогда из исходного представления плотности замедления, следует

$$q(\tau,\mathbf{r}) = q(0,\mathbf{r}) = T(0)R(\mathbf{r}) = AR(\mathbf{r})$$

Тогда с учетом связи между уравнениями диффузии и возраста

$$AR(\mathbf{r}) = \frac{k_\infty}{\varphi}\Sigma_a \Phi(\mathbf{r})$$

Окончательно из уравнения возраста для плотности замедления нейтронов получим

$$\boxed{q(\tau,\mathbf{r}) = \frac{k_\infty}{\varphi}\Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) \exp(-\aleph^2 \tau)}$$

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

Уравнение диффузии для критического гомогенного реактора теперь можно записать в виде

$$D\Delta\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}) + k_\infty\Sigma_a\Phi(\mathbf{r})\exp(-\aleph^2\tau_{th}) = 0$$

Ранее мы получили, что нейтронный поток $\Phi(\mathbf{r})$ пропорционален функции $R(\mathbf{r})$. Следовательно, функция $\Phi(\mathbf{r})$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению для $R(\mathbf{r})$, тогда

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) + \aleph^2\Phi(\mathbf{r}) = 0$$

Выразим от сюда $\Delta\Phi$(r) и подставим в уравнение диффузии

$$-D\aleph^2\Phi - \Sigma_a\Phi + k_\infty\Sigma_a\Phi\exp(-\aleph^2\tau_{th}) = 0$$

Разделим на $\Sigma_a\Phi$ и с учетом $L^2 = D/\Sigma_a$ получим

$$-\frac{D\aleph^2}{\Sigma_a} - 1 + k_\infty\exp(-\aleph^2\tau_{th}) = 0$$

и окончательно

$$\frac{k_\infty\exp(-\aleph^2\tau_{th})}{1 + L^2\aleph^2} = 1$$

Критическое уравнение для реактора конечных размеров

$$\boxed{\frac{k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau_{th})}{1+L^2\aleph^2}=1}$$

Это трансцендентное уравнение по отношению к $\aleph$ уравнение называется **критическим уравнением**.

Уравнение справедливо **для гомогенного реактора без отражателя**, применимо к **тепловым нейтронам** с пространственным **распределением плотности, определяемым возрастом нейтронов**.

Параметр $\aleph^2$ в американской технической литературе называют «buckling», чем хотят обозначить кривизну или изгиб распределения нейтронного потока.

В английских источниках для $\aleph^2$ можно встретить называние «лапласиан».

В русскоязычной среде $\aleph^2$ принято называть – **материальный параметр**, что подчеркивает его зависимость только от свойств гомогенной среды.

Баланс нейтронов в реакторе конечного размера

Как уже неоднократно отмечалось, различие между реактором бесконечных размеров и реактором конечных размеров заключается в **потере нейтронов в результате утечки через границы**.

Для бесконечного реактора критическое условие сводится к **равенству коэффициента размножения в бесконечной среде единице**

$$\boxed{k_\infty = 1}$$

Рассмотрение гомогенного реактора в диффузионо-возрастном приближении привело к появлению двух множителей

$$\exp(-\aleph^2\tau) \qquad \frac{1}{1+L^2\aleph^2}$$

которые учитывают конечность размеров, а соответственно, возможность утечки.

Баланс нейтронов в реакторе конечного размера

Число тепловых нейтронов, поглощенных в 1 см^3 в 1 сек равно

$$\Sigma_a \Phi(\mathbf{r})$$

Коэффициент размножения в бесконечной среде (k_∞) по определению равен **среднему числу тепловых нейтронов, генерируемых в одном поколении нейтронов на каждый поглощенный нейтрон в бесконечной среде**.

Тогда **для бесконечной среды** (при отсутствии утечки) **плотность источников тепловых нейтронов** равняется

$$\frac{k_\infty}{\varphi} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r})$$

Для среды конечных размеров ту же **плотность источников тепловых нейтронов** мы определили как плотность замедления умноженную на вероятность избежать резонансного захвата – $\varphi q(\mathbf{r}, \tau)$ или с учетом решения уравнения возраста

$$k_\infty \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) \exp(-\aleph^2 \tau)$$

Баланс нейтронов в реакторе конечного размера

Если плотность источников тепловых нейтронов:

$\frac{k_\infty}{\varphi}\Sigma_a\Phi(\mathbf{r})$ – для бесконечной среды;

$k_\infty\Sigma_a\Phi(\mathbf{r})\exp(-\aleph^2\tau)$ – для среды конечных размеров,

то тогда $\exp(-\aleph^2\tau)$ по физическому смыслу это – **вероятность того, что нейтрон <u>избежит утечки из реактора</u> (останется в реакторе) конечных размеров в процессе замедления.**

Приращение числа нейтронов в 1 см^3 за 1 сек вследствие диффузии в элементе объема с центром в точке $\mathbf{r}$ равно

$$D\Delta\Phi(\mathbf{r})$$

Тогда на оборот, утечка нейтронов в 1 см^3 за 1 сек вследствие диффузии из элемента объема с центром в точке $\mathbf{r}$ равна

$$-D\Delta\Phi(\mathbf{r})$$

Баланс нейтронов в реакторе конечного размера

Так как $-D\Delta\Phi(\mathbf{r}) = D\aleph^2\Phi(\mathbf{r}),$

то число тепловых нейтронов, покидающих единицу объема за единицу времени, равно $D\aleph^2\Phi(\mathbf{r})$

Следовательно, отношение утечки тепловых нейтронов к поглощению тепловых нейтронов

$$\frac{\text{утечка тепловых нейтронов}}{\text{поглощение тепловых нейтронов}} = \frac{D\aleph^2}{\Sigma_a} = L^2\aleph^2$$

не зависит от координаты, то есть одинаково в любой точке, а соответственно, и в реакторе в целом.

Отсюда получается **доля нейтронов, замедленных до тепловой энергии и поглощенных в топливе**

$$\frac{\text{поглощение тепловых нейтронов}}{\text{поглощение тепловых нейтронов} + \text{утечка тепловых нейтронов}} = \frac{1}{1+L^2\aleph^2}$$

Баланс нейтронов в реакторе конечного размера

Соответственно, по физическому смыслу величина $\frac{1}{1+L^2\aleph^2}$ это – **вероятность того, что тепловой нейтрон <u>избежит утечки при диффузии</u> (останется) в реакторе.**

Применимы более короткие названия для введенных вероятностей:

$\exp(-\aleph^2\tau)$ – коэффициент утечки быстрых нейтронов

$\frac{1}{1+L^2\aleph^2}$ – коэффициент утечки тепловых нейтронов

Таким образом произведение этих двух коэффициентов является **полной вероятностью (P) того, что нейтроны избегут утечки в реакторе конечных размеров за их полный жизненный цикл – от появления как нейтронов деления до захвата в области тепловых энергий.**

Баланс нейтронов в реакторе конечного размера

С учетом полученных вероятностей для реактора конечных размеров **условие критичности является более жестким**, чем для бесконечной среды.

Коэффициент размножения для бесконечной среды, описывающий изменения количества нейтронов в одном поколении за чет взаимодействия с ядрами среды (в т.ч. деления), **необходимо умножить на вероятность избежать утечки** за полный жизненный цикл

$$k_\infty P = 1$$

и **потребовать равенства 1** уже для этой произведения в целях обеспечения критичности конечного реактора.

Тогда, если

$$P = \frac{\exp(-\aleph^2 \tau)}{1 + L^2 \aleph^2},$$

то

$$k_\infty P = \frac{k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau)}{1 + L^2 \aleph^2},$$

Баланс нейтронов в реакторе конечного размера

$$k_\infty P = \frac{k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau)}{1 + L^2 \aleph^2} = k_{эфф}$$

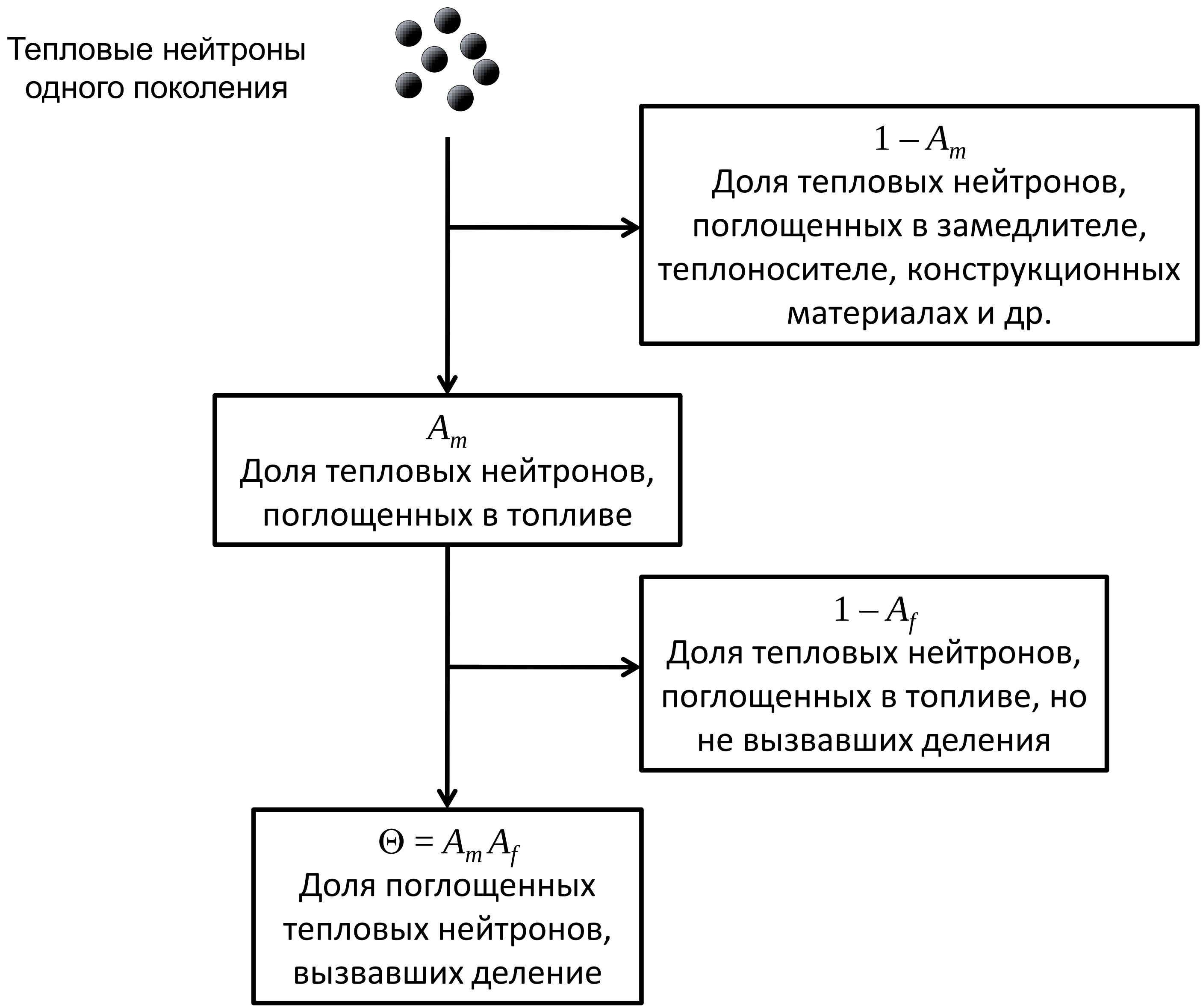
имеет смысл, как **коэффициент размножения для среды конечных размеров (*$k_{эфф}$*)**

Тогда для обеспечения критичности системы:

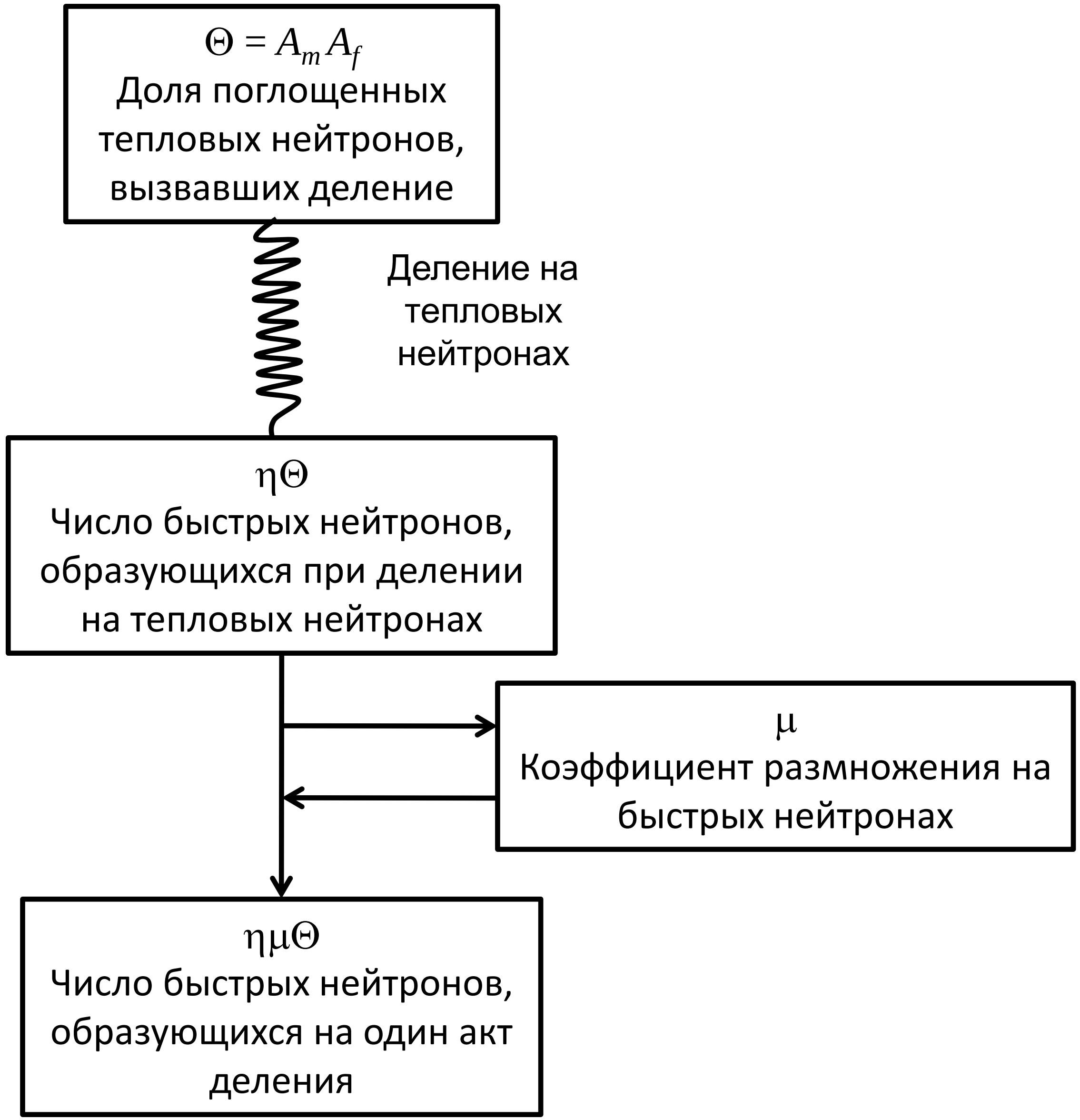
в бесконечной среде: $k_\infty = 1$; $P = 1$

в среде конечных размеров: $k_\infty > 1$; $P < 1$; $k_{эфф} = 1$

Цикл производства нейтронов



Цикл производства нейтронов



Цикл производства нейтронов

$\eta\mu\Theta$

Число быстрых нейтронов, образующихся на один акт деления

$\eta\mu\Theta(1-\varphi)$

Доля нейтронов, поглощенных в результате резонансного захвата

Замедление быстрых нейтронов

$\eta\mu\Theta\varphi[1-\exp(-\aleph^2\tau)]$

Доля нейтронов, утекающих через границы в процессе замедления

$k_\infty \exp(-\aleph^2\tau)$

Доля быстрых нейтронов, замедлившихся до тепловой энергии

Цикл производства нейтронов

$k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau)$

Доля быстрых нейтронов, замедлившихся до тепловой энергии

Диффузия тепловых нейтронов

$$k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau)\frac{L^2\aleph^2}{1+L^2\aleph^2}$$

Доля тепловых нейтронов, утекающих через границы в процессе диффузии

Условие критичности

$$\frac{k_\infty \exp(-\aleph^2 \tau)}{1+L^2\aleph^2}=1$$

Тепловые нейтрон, поглощаемые в реакторе

Тепловые нейтроны следующего поколения