Двухгрупповое диффузионное приближение

Ранее мы договорились о процедуре расчета реактора, которая заключается в двух последовательных этапах:

Первый этап – решение многогрупповой системы уравнений с целью **определения групповых констант, интегральных потоков и ценностей нейтронов**, распределенных по энергии (летаргии).

Второй этап – свертка многогрупповых параметров в магогрупповую систему уравнений, из решения которой определяют **пространственное распределений нейтронных потоков и условие критичности**.

Наиболее часто для расчетов энергетических реакторов используют **двухгрупповое приближение**, в котором энергетический спектр нейтронов в реакторе представляют в виде двух энергетических интервалов, **быстрых и тепловых нейтронов соответственно**.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Прежде чем перейти к рассмотрений двухгрупповых диффузионных уравнений еще раз уточним свертку многогрупповых параметров.

Снова посмотрим на систему многогрупповых уравнений

$$D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{k=i+1}^{m} \Sigma_з^{i \to k} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k \to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0$$

Выпишем отдельно последнее уравнение для тепловой группы

$$D_m \Delta \Phi_m(r) - \Sigma_m^a \Phi_m(r) + \sum_{k=1}^{m-1} \Sigma_з^{k \to m} \Phi_k(r) = 0$$

Для параметров этого уравнения выполнение свертки не требуется, так как тепловые группы в многогрупповом и двухгрупповом приближении совпадают.

В уравнении для тепловой группы отсутствуют слагаемые, связанные с замедлением нейтронов в нижние группы и появлением тепловых нейтронов непосредственно в реакции деления.

Сразу отметим, что для быстрых нейтронов вероятность образования в реакции деления равна единице ($\varepsilon_Б = 1$)

Двухгрупповое диффузионное приближение

При обсуждении свертки констант мы договорились усреднять параметры смежных групп по статистическому весу нейтронов, который определяется произведением интегральных по объему реактора групповых потоков и ценностей нейтронов

$$W_i = \Phi_i \Phi_i^+$$

В оставшихся после выделения тепловой группы уравнениях все слагаемые кроме последнего описывают закономерности нейтронов внутри быстрой группы.

В последнюю сумму, описывающую источник нейтронов в виде реакции деления, включен вклад нейтронов тепловой группы.

Выделим его отдельно

$$D_i \Delta\Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{k=i+1}^{m} \Sigma_з^{i\to k} \Phi_k(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k\to i} \Phi_i(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m-1} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) +$$

$$+ \varepsilon_i \nu_m^f \Sigma_m^f \Phi_m(r) = 0$$

и рассмотрим усреднение многогрупповых параметров во всех остальных слагаемых.

Двухгрупповое диффузионное приближение

В первом слагаемом ($D_i \Delta\Phi_i(r)$), описывающем диффузионную утечку нейтронов необходимо свернуть коэффициенты диффузии

$$D_Б = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} D_i \Phi_i \Phi_i^+}{\sum_{i=1}^{m-1} \Phi_i \Phi_i^+}$$

В последнем слагаемом $\sum_{k=1}^{m-1} \nu_k^f \Sigma_k^k \Phi_k(r)$ сворачиваем групповые

произведения числа нейтронов, образующихся в реакции деления, и сечения деления

$$(\nu^f \Sigma^f)_Б = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \nu_i^f \Sigma_i^f \Phi_i \Phi_i^+}{\sum_{i=1}^{m-1} \Phi_i \Phi_i^+}$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

Оставшаяся часть уравнения

$$-\Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{k=i+1}^{m} \Sigma_з^{i\to k} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k\to i} \Phi_k(r)$$

при описании нейтронов быстрой группы, характеризует полную потерю (увод) нейтронов:

за счет поглощения нейтронов всех энергий – $\Sigma_i^a \Phi_i(r)$

за счет замедления нейтронов в тепловую группу – $\Sigma_з^{i\to m} \Phi_i(r)$

с учетом изменения энергии нейтронов внутри быстрой группы при замедлении

$$-\sum_{k=i+1}^{m-1} \Sigma_з^{i\to k} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k\to i} \Phi_k(r)$$

Тогда свертка сечения увода для нейтронов быстрой группы должна проводится по следующему соотношению

$$\Sigma_Б^{ув} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \left[\left(\Sigma_i^a + \Sigma_i^з \right) \Phi_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k\to i} \Phi_k \right] \Phi_i^+}{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \Phi_i \Phi_i^+}$$, здесь $\Sigma_i^з = \sum\limits_{k=i+1}^{m-1} \Sigma_з^{i\to k}$

Двухгрупповое диффузионное приближение

Будем обозначать параметры (в том числе потоки нейтронов) относящиеся к быстрым нейтронам индексом «$Б$», к тепловым нейтронам индексом «T»

Тогда для нейтронов быстрой группы получим уравнение

$$D_Б \Delta \Phi_Б(r) - \Sigma_Б^{ув} \Phi_Б(r) + (\nu^f \Sigma^f)_Б \Phi_Б(r) + (\nu^f \Sigma^f)_T \Phi_T(r) = 0$$

И последнее преобразование – соберем все взаимодействие быстрых нейтронов со средой в одно сечение

$$\Sigma_Б = \Sigma_Б^{ув} - (\nu^f \Sigma^f)_Б$$

Тогда окончательно опуская индекс «T» у параметров источника для быстрых нейтронов получим

$$D_Б \Delta \Phi_Б(r) - \Sigma_Б \Phi_Б(r) + \nu^f \Sigma^f \Phi_T(r) = 0$$

Будем полагать, что взаимодействие быстрых нейтронов со средой приводит к образованию тепловых нейтронов, при этом поглощение быстрых нейтронов будем учитывать вероятностью избежать резонансного захвата (φ).

Двухгрупповое диффузионное приближение

Окончательно получаем систему двух групповых диффузионных уравнений в виде:

$$\boxed{\begin{aligned} D_Б \Delta \Phi_Б(r) - \Sigma_Б \Phi_Б(r) + \nu^f \Sigma^f \Phi_T(r) = 0 \\ D_T \Delta \Phi_T(r) - \Sigma_T^a \Phi_T(r) + \varphi \Sigma_Б \Phi_Б(r) = 0 \end{aligned}}$$

Рассмотрим гомогенный реактор конечных размеров без отражателя в двухгрупповом приближении.

Ранее мы рассматривали такой реактор в диффузионно-возрастном приближении и показали, что плотность замедления не зависит от энергии нейтронов.

Логичным является предположение о том, что пространственное распределение потоков нейтронов имеет один и тот же вид для нейтронов всех энергий.

Это же предположение обусловлено также те тем, что в рамках одной группы нейтронов справедливым является односкоростное приближение. Соответственно, решение диффузионных уравнений в каждой группе имеют одинаковый вид.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Тогда полагаем, что

$$\Phi_Б(r) \equiv \Phi_Б F(r) \quad \text{и} \quad \Phi_T(r) \equiv \Phi_T F(r)$$

где $\Phi_Б$ и Φ_T – интегральные потоки быстрых и тепловых нейтронов соответственно, а функция $F(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta F(r) + B^2 F(r) = 0$$

Как обычно, потребуем, чтобы потоки быстрых и тепловых нейтронов обращаются в ноль на экстраполированных поверхностях реактора.

Подставляя полученные соотношения в двухгрупповую систему уравнений, получим

$$D_Б B^2 \Phi_Б + \Sigma_Б \Phi_Б = \nu^f \Sigma^f \Phi_T$$

$$D_T B^2 \Phi_T + \Sigma_T^a \Phi_T = \varphi \Sigma_Б \Phi_Б$$

Возьмем отношение этих уравнений и по сокращению интегральных потоков будем иметь

$$\frac{\nu^f \Sigma^f}{D_Б B^2 + \Sigma_Б} = \frac{D_T B^2 + \Sigma_T^a}{\varphi \Sigma_Б}$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

$$\frac{\nu^f \Sigma^f}{D_Б B^2 + \Sigma_Б} = \frac{D_T B^2 + \Sigma_T^a}{\varphi \Sigma_Б}$$

Введем квадраты длин диффузии нейтронов: $L_Б^2 \equiv \dfrac{D_Б}{\Sigma_Б}$ и $L_T^2 \equiv \dfrac{D_T}{\Sigma_T^a}$

Тогда полученное соотношение можно переписать в виде

$$\frac{\nu^f \Sigma^f \varphi}{\Sigma_T^a} \frac{1}{(1 + L_Б^2 B^2)(1 + L_T^2 B^2)} = 1$$

Посмотрим на первое отношение. Здесь Σ^f / Σ_T^a – **коэффициент использования тепловых нейтронов**.

Вспомним, что коэффициент $\varepsilon = 1$, тогда отношение $\dfrac{\nu^f \Sigma^f \varphi}{\Sigma_T^a} = k_\infty$

Следовательно, окончательно получаем

$$\frac{k_\infty}{(1 + L_Б^2 B^2)(1 + L_T^2 B^2)} = 1$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

$$\frac{k_\infty}{(1+L_Б^2 B^2)(1+L_T^2 B^2)} = 1$$

Сравним с тем, что мы имели для гомогенного реактора без отражателя в диффузионно-возрастном приближении

$$\frac{k_\infty \exp(-\tau_T B^2)}{(1+L_T^2 B^2)} = 1$$

Выводы:

1. Полученное соотношение является **критическим уравнении для гомогенного реактора без отражателя в двухгрупповом диффузионном приближении**.

2. Множитель $(1+L_Б^2 B^2)^{-1} \equiv \exp(-\tau_T B^2)$ определяет **вероятность избежать утечки для быстрых нейтронов**.

Двухгрупповое диффузионное приближение

$$\frac{k_\infty}{(1+L_Б^2 B^2)(1+L_T^2 B^2)} = 1$$

Сравним с тем, что мы имели для гомогенного реактора без отражателя в диффузионно-возрастном приближении

$$\frac{k_\infty \exp(-\tau_T B^2)}{(1+L_T^2 B^2)} = 1$$

Выводы:

3. Для большого реактора экспоненту в критическом уравнении для диффузионно-возрастного приближения можно разложить в ряд

$$(1+L_Б^2 B^2)^{-1} \equiv \exp(-\tau_T B^2) \approx 1 + \frac{1}{\tau_T B^2} = (1+\tau_T B^2)^{-1}$$

Следовательно, $L_Б^2 \approx \tau_T, \quad \Sigma_Б \approx \dfrac{D_Б}{\tau_T}$

4. Мы получили хорошую сходимость результатов для гомогенного реактора без отражателя в диффузионно-возрастном и двухгрупповом диффузионном приближении.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Рассмотрим гомогенный реактор с отражателем.

Здесь мы будем иметь две системы двухгрупповых уравнений:

для активной зоны

$$D_{Б}^{аз}\Delta\Phi_{Б}(r)-\Sigma_{Б}^{аз}\Phi_{Б}(r)+\nu^{f}\Sigma^{f}\Phi_{T}(r)=0$$

$$D_{T}^{аз}\Delta\Phi_{T}(r)-\Sigma_{T}^{аз}\Phi_{T}(r)+\varphi^{аз}\Sigma_{Б}^{аз}\Phi_{Б}(r)=0$$

для отражателя

$$D_{Б}^{отр}\Delta\Phi_{Б}(r)-\Sigma_{Б}^{отр}\Phi_{Б}(r)=0$$

$$D_{T}^{отр}\Delta\Phi_{T}(r)-\Sigma_{T}^{отр}\Phi_{T}(r)+\varphi^{отр}\Sigma_{Б}^{отр}\Phi_{Б}(r)=0$$

Очевидно, что коэффициенты уравнений (коэффициенты диффузии, групповые сечения, вероятность избежать резонансного захвата) различны для различных сред в активной зоне и в отражателе.

В уравнении для быстрой группы в отражателе отсутствует слагаемое, связанное с источником быстрых нейтронов за счет реакции деления.

Здесь мы не разделяем потоки быстрых и тепловых нейтронов в активной зоне и в отражателе на уровне обозначений, так как функции и их производные непрерывны по координате.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Начнем с дифференциальных уравнений для активной зоны.

$$D_Б^{аз} \Delta \Phi_Б(r) - \Sigma_Б^{аз} \Phi_Б(r) + \nu^f \Sigma^f \Phi_T(r) = 0$$

$$D_T^{аз} \Delta \Phi_T(r) - \Sigma_T^{аз} \Phi_T(r) + \varphi^{аз} \Sigma_Б^{аз} \Phi_Б(r) = 0$$

Имея опыт решения подобных уравнений для гомогенного реактора в одногрупповом приближении, следует предположить, что **общие решения** для записанных уравнений **представляют собой линейную комбинацию двух известных функции**.

Пока мы не задаемся геометрической формой реактора, соответственно **не определяем конкретный вид этих функций**, но очевидно, что **коэффициенты для этих функций должны быть подобраны** так, чтобы **общее решение удовлетворяло исходным уравнениям, граничным условиям и условию симметрии**.

Пусть $Z(r)$ и $W(r)$ – такие функции, что их следующие линейные комбинации характеризуют потоки быстрых и тепловых нейтронов

$$\Phi_Б(r) = A_1 Z(r) + C_1 W(r)$$

$$\Phi_T(r) = A_2 Z(r) + C_2 W(r)$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

Понятно, что функции $Z(r)$ и $W(r)$ – мы должны определить, как решения следующих уравнений

$$\Delta Z(r) + B_1^2 Z(r) = 0; \;\; \Delta W(r) + B_2^2 W(r) = 0$$

И здесь параметры B_1 и B_2 должны быть подобраны так, чтобы выражения для функций $\Phi_Б(r)$ и $\Phi_T(r)$ были решениями исходных двухгрупповых уравнений.

Учитывая все сделанные замечания и определения, вместо исходных дифференциальных уравнений получим

$$Z(r)\left(-A_1 D_Б^{аз} B_1^2 - A_1 \Sigma_Б^{аз} + A_2 \nu^f \Sigma^f\right) + W(r)\left(-C_1 D_Б^{аз} B_2^2 - C_1 \Sigma_Б^{аз} + C_2 \nu^f \Sigma^f\right) = 0$$

$$Z(r)\left(-A_2 D_T^{аз} B_1^2 - A_2 \Sigma_T^{аз} + A_1 \varphi^{аз} \Sigma_Б^{аз}\right) + W(r)\left(-C_2 D_E^{аз} B_2^2 - C_2 \Sigma_T^{аз} + C_1 \varphi^{аз} \Sigma_Б^{аз}\right) = 0$$

Так как $Z(r)$ и $W(r)$ – независимые функции и в общем случае $B_1 \neq B_2$, то последние уравнения могут быть удовлетворены только в случае, когда **каждый коэффициент тождественно равен нулю**.

Двухгрупповое диффузионное приближение

$$Z(r)\left(-A_1 D_Б^{аз} B_1^2 - A_1\Sigma_Б^{аз} + A_2\nu^f\Sigma^f\right) + W(r)\left(-C_1 D_Б^{аз} B_2^2 - C_1\Sigma_Б^{аз} + C_2\nu^f\Sigma^f\right) = 0$$

$$Z(r)\left(-A_2 D_T^{аз} B_1^2 - A_2\Sigma_T^{аз} + A_1\varphi^{аз}\Sigma_Б^{аз}\right) + W(r)\left(-C_2 D_E^{аз} B_2^2 - C_2\Sigma_T^{аз} + C_1\varphi^{аз}\Sigma_Б^{аз}\right) = 0$$

Выполнение такого требования приводит к следующим соотношениям

$$A_1 = A_2\frac{\nu^f\Sigma^f}{D_Б^{аз}B_1^2 + \Sigma_Б^{аз}} = A_2\frac{D_T^{аз}B_1^2 + \Sigma_T^{аз}}{\varphi^{аз}\Sigma_Б^{аз}}$$

$$C_2 = C_1\frac{D_Б^{аз}B_2^2 + \Sigma_Б^{аз}}{\nu^f\Sigma^f} = C_1\frac{\varphi^{аз}\Sigma_Б^{аз}}{D_T^{аз}B_2^2 + \Sigma_T^{аз}}$$

После сокращения констант можем записать

$$\left(D_Б^{аз}B_1^2 + \Sigma_Б^{аз}\right)\left(D_T^{аз}B_1^2 + \Sigma_T^{аз}\right) = \nu^f\varphi^{аз}\Sigma^f\Sigma_Б^{аз}$$

$$\left(D_Б^{аз}B_2^2 + \Sigma_Б^{аз}\right)\left(D_T^{аз}B_2^2 + \Sigma_T^{аз}\right) = \nu^f\varphi^{аз}\Sigma^f\Sigma_Б^{аз}$$

Таким образом, коэффициенты B_1 и B_2 есть **корни одного квадратного уравнения**.

Двухгрупповое диффузионное приближение

$$\left(D_Б^{аз}B_1^2+\Sigma_Б^{аз}\right)\left(D_T^{аз}B_1^2+\Sigma_T^{аз}\right)=\nu^f\varphi^{аз}\Sigma^f\Sigma_Б^{аз}$$

$$\left(D_Б^{аз}B_2^2+\Sigma_Б^{аз}\right)\left(D_T^{аз}B_2^2+\Sigma_T^{аз}\right)=\nu^f\varphi^{аз}\Sigma^f\Sigma_Б^{аз}$$

Запишем это квадратное уравнение, введя обозначения

$$k_1^2\equiv\frac{\Sigma_Б^{аз}}{D_Б^{аз}}=\frac{1}{\tau_T}=\frac{1}{L_Б^2};\quad k_2^2\equiv\frac{\Sigma_T^{аз}}{D_T^{аз}}=\frac{1}{L_T^2}$$

Тогда

$$\left(B^2+k_1^2\right)\left(B^2+k_2^2\right)=\frac{\nu^f\varphi^{аз}\Sigma^f\Sigma_Б^{аз}}{D_Б^{аз}D_T^{аз}}=\frac{\nu^f\varphi^{аз}\Sigma^f}{\Sigma_T^{аз}}\frac{\Sigma_Б^{аз}}{D_Б^{аз}}\frac{\Sigma_T^{аз}}{D_T^{аз}}$$

Мы уже обсуждали первое отношение в правой части $\dfrac{\nu^f\varphi^{аз}\Sigma^f}{\Sigma_T^{аз}}=k_\infty$

Два последующих отношения равны введенным коэффициентам.

Тогда для полученного квадратного уравнения имеем

$$\left(B^2\right)^2+\left(k_1^2+k_2^2\right)B^2+k_1^2k_2^2=k_\infty k_1^2k_2^2$$

или

$$\left(B^2\right)^2+\left(k_1^2+k_2^2\right)B^2-k_1^2k_2^2\left(k_\infty-1\right)=0$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

$$\left(B^2\right)^2+\left(k_1^2+k_2^2\right)B^2-k_1^2k_2^2\left(k_\infty-1\right)=0$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения имеет вид

$$\mathfrak{D}=\left(k_1^2+k_2^2\right)^2+4k_1^2k_2^2\left(k_\infty-1\right)$$

Так как $k_\infty>1$, то $\mathfrak{D}>1$, следовательно имеем два действительных корня

$$B_{1,2}^2=\frac{k_1^2+k_2^2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(k_1^2+k_2^2\right)^2+4k_1^2k_2^2\left(k_\infty-1\right)}$$

Очевидно, что

$$\frac{\sqrt{\left(k_1^2+k_2^2\right)^2+4k_1^2k_2^2\left(k_\infty-1\right)}}{k_1^2+k_2^2}>1$$

Тогда первый корень

$$B_1^2=\frac{k_1^2+k_2^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(k_1^2+k_2^2\right)^2+4k_1^2k_2^2\left(k_\infty-1\right)}\equiv\eta^2$$ – положительны величина

второй корень

$$B_2^2=\frac{k_1^2+k_2^2}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(k_1^2+k_2^2\right)^2+4k_1^2k_2^2\left(k_\infty-1\right)}\equiv-\lambda^2$$ – отрицательная величина

Двухгрупповое диффузионное приближение

С учетом введенных обозначений (η^2 и λ^2 действительные положительные величины) уравнения для функций $Z(r)$ и $W(r)$ принимают вид

$$\Delta Z(r)+\eta^2 Z(r)=0;\quad \Delta W(r)-\lambda^2 W(r)=0$$

Тогда в зависимости от геометрии реактора решение для функции $Z(r)$ будем получать в виде тригонометрических функций (плоских и сферический реактор) или в виде функций Бесселя первого рода (цилиндрический реактор).

Для функции $W(r)$ будем иметь гиперболические функции или функции Бесселя второго рода.

Введем еще обозначения

$$s_1=\frac{D_Б^{аз}\eta^2+\Sigma_Б^{аз}}{\nu^f\Sigma^f}=\frac{\varphi^{аз}\Sigma_Б^{аз}}{D_T^{аз}\eta^2+\Sigma_T^{аз}}$$

$$s_2=\frac{-D_Б^{аз}\lambda^2+\Sigma_Б^{аз}}{\nu^f\Sigma^f}=\frac{\varphi^{аз}\Sigma_Б^{аз}}{-D_T^{аз}\lambda^2+\Sigma_T^{аз}}$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

Тогда для потоков быстрых и тепловых нейтронов в активной зоне реактора с отражателем получим

$$\Phi_Б(r) = AZ(r) + CW(r)$$

$$\Phi_T(r) = s_1 AZ(r) + s_2 CW(r)$$

Перейдем к рассмотрению решения двухгрупповых уравнений в отражателе

$$D_Б^{отр}\Delta\Phi_Б(r) - \Sigma_Б^{отр}\Phi_Б(r) = 0$$

$$D_T^{отр}\Delta\Phi_T(r) - \Sigma_T^{отр}\Phi_T(r) + \varphi^{отр}\Sigma_Б^{отр}\Phi_Б(r) = 0$$

По аналогии с процедурами, проведенными при решении уравнений в активной зоне, введем обозначения

$$k_3^2 \equiv \frac{\Sigma_Б^{отр}}{D_Б^{отр}}; \quad k_4^2 \equiv \frac{\Sigma_T^{отр}}{D_T^{отр}}$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

Тогда система двухгрупповых уравнений может быть записана в виде

$$\Delta\Phi_{Б}(r) - k_3^2\Phi_{Б}(r) = 0$$

$$\Delta\Phi_{T}(r) - k_4^2\Phi_{T}(r) = -\frac{\varphi^{отр}\Sigma_{Б}^{отр}}{D_T^{отр}}\Phi_{Б}(r)$$

Будем искать общие решения для потоков быстрых и тепловых нейтронов в виде линейных комбинаций функций $U(r)$ и $V(r)$.

Однако здесь в отличии от уравнений в активной зоне для быстрых нейтронов имеем однородное уравнение. Тогда для это группы решение будет такое же как в односкоростном приближении в виде одной функции

$$\Phi_{Б}(r) = S_1 U(r)$$

$$\Phi_{T}(r) = S_2 U(r) + T_2 V(r)$$

Функций $U(r)$ и $V(r)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta U(r) + k_3^2 U(r) = 0; \quad \Delta V(r) - k_4^2 V(r) = 0$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

Подставляем записанные общие решения в уравнение для тепловых нейтронов

$$-k_3^2 T_1 U(r) + \cancel{k_4^2 T_2 V(r)} - k_4^2 T_1 U(r) - \cancel{k_4^2 T_2 V(r)} = -\frac{\varphi^{отр} \Sigma_Б^{отр}}{D_T^{отр}} S_1 U(r)$$

После приведения подобных слагаемых выражаем константу T_1 через S_1

$$T_1 = s_3 S_1, \quad \text{где } s_3 = \frac{\varphi^{отр} \Sigma_Б^{отр}}{D_T^{отр} (k_3^2 + k_4^2)}$$

Окончательно для потоков быстрых и тепловых нейтронов в отражателе получим

$$\Phi_Б(r) = SU(r)$$

$$\Phi_T(r) = s_3 SU(r) + TV(r)$$

Эти решения должны удовлетворять граничным условиям, то есть функции потоков должны быть равны нулю на экстраполированной границе.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Соберем все полученные результаты:

в активной зоне потоки быстрых и тепловых нейтронов определяются функциями

$$\Phi_Б(r) = AZ(r) + CW(r)$$

$$\Phi_T(r) = s_1 AZ(r) + s_2 CW(r)$$

в отражателе

$$\Phi_Б(r) = SU(r)$$

$$\Phi_T(r) = s_3 SU(r) + TV(r)$$

где

$$s_1 = \frac{D_Б^{аз}\eta^2 + \Sigma_Б^{аз}}{\nu^f \Sigma^f}; \quad s_2 = \frac{-D_Б^{аз}\lambda^2 + \Sigma_Б^{аз}}{\nu^f \Sigma^f}; \quad s_3 = \frac{\varphi^{отр}\Sigma_Б^{отр}}{D_T^{отр}(k_3^2 + k_4^2)}$$

$$\eta^2 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2 + 4k_1^2 k_2^2 (k_\infty - 1)}$$

$$k_1^2 \equiv \frac{\Sigma_Б^{аз}}{D_Б^{аз}} = \frac{1}{\tau_T}; \quad k_2^2 \equiv \frac{\Sigma_T^{аз}}{D_T^{аз}} = \frac{1}{L_T^2}$$

$$\lambda^2 = -\frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2 + 4k_1^2 k_2^2 (k_\infty - 1)}$$

$$k_3^2 \equiv \frac{\Sigma_Б^{отр}}{D_Б^{отр}}; \quad k_4^2 \equiv \frac{\Sigma_T^{отр}}{D_T^{отр}}$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

Полученные решения должны удовлетворять условиям на границе «активная зона – отражатель» ($r = R$, где R – размер активной зоны), которые обеспечиваются равенством

потоков нейтронов в обоих группах

$$\Phi_{Б}^{аз}(R) = \Phi_{Б}^{отр}(R)$$

$$\Phi_{T}^{аз}(R) = \Phi_{T}^{отр}(R)$$

и диффузионных токов нейтронов в обоих группах

$$D_{Б}^{аз} \nabla \Phi_{Б}^{аз}(r)\Big|_{r=R} = D_{Б}^{отр} \nabla \Phi_{Б}^{отр}(r)\Big|_{r=R}$$

$$D_{T}^{аз} \nabla \Phi_{T}^{аз}(r)\Big|_{r=R} = D_{T}^{отр} \nabla \Phi_{T}^{отр}(r)\Big|_{r=R}$$

Подставляем полученные решения в записанные условия

$$\begin{cases} A(Z) & + C(W) & + S(-U) & & = 0 \\ A(s_1 Z) & + C(s_2 W) & + S(-s_3 U) & + T(-V) & = 0 \\ A(D_{Б}^{аз} Z') & + C(D_{Б}^{аз} W') & + S(-D_{Б}^{отр} U') & & = 0 \\ A(s_1 D_{T}^{аз} Z') & + C(s_2 D_{T}^{аз} W') & + S(-s_3 D_{T}^{отр} U') & + T(-D_{T}^{отр} V') & = 0 \end{cases}$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

$$\begin{cases} A(Z) & +C(W) & +S(-U) & & =0 \\ A(s_1 Z) & +C(s_2 W) & +S(-s_3 U) & +T(-V) & =0 \\ A\left(D_Б^{аз} Z'\right) & +C\left(D_Б^{аз} W'\right) & +S\left(-D_Б^{отр} U'\right) & & =0 \\ A\left(s_1 D_T^{аз} Z'\right) & +C\left(s_2 D_T^{аз} W'\right) & +S\left(-s_3 D_T^{отр} U'\right) & +T\left(-D_T^{отр} V'\right) & =0 \end{cases}$$

Полученная система состоит из четырех совместных алгебраических уравнений для четырех неизвестных констант A, C, S, T.

Так как уравнения однородные, то невозможно получить точное выражение для всех неизвестных величин.

Будет оставаться одна неопределенная константа, которая характеризует уровень мощности реактора.

Таким образом, три из неизвестных константу могут быть выражены через четвертую.

Нетривиальное решение системы может быть получено, если **определитель коэффициентов системы равен нулю**.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Тогда необходимым является тождество

$$\begin{vmatrix} Z & W & -U & 0 \\ s_1 Z & s_2 W & -s_3 U & -V \\ D_Б^{аз} Z' & D_Б^{аз} W' & -D_Б^{отр} U' & 0 \\ s_1 D_T^{аз} Z' & s_2 D_T^{аз} W' & -s_3 D_T^{отр} U' & -D_T^{отр} V' \end{vmatrix} = 0$$

Настоящее условие является **условием критичности для реактора с отражателем в двухгрупповом диффузионном приближении**.

Полученное условие содержит как групповые параметры, характеризующие свойства среды, так и зависит от геометрических параметров, в том числе от формы реактора и его размеров.

Очевидно, что условие критичности реактора позволяет найти критические размеры при заданном материальном составе обоих зон реактора.
Для этого необходимо варьировать размеры до тех пор пока определитель не станет равным нулю.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Можно попытаться и решить обратную задачу при заданных размерах подобрать материальный состав таким образом чтобы опять определитель обратился в ноль.

Однако с точки зрения построения реактора, которые мог бы работать продолжительное время, интерес представляет **создание надкритической системы,** обладающей некоторым запасом реактивности.

Очевидно бессмысленным является построение реактора, размеры которого равны критическому для заданного материального состава активной зоны.

Такой реактор перестанет работать сразу после некоторого разогрева, вследствие температурного изменения нейтронных сечений (отрицательный эффект реактивности).

Такой реактор перейдет подкритическое состояние даже при небольшом выгорании топлива.

Для управления ядерным реактором всегда **необходим запас реактивности**, который компенсируется поглощающими стержнями.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Принимая во внимание изложенное выше, постановка задачи на определение критического состояния может быть изменена.

Предположим, что все размеры и ядерные константы фиксированы, при этом необходимо найти такое значение k_∞, при котором определитель обратится в ноль.

Значение k_∞, (обозначим его k'_∞) входит в выражения для определения η^2 и λ^2.

Алгоритм поиска решения достаточно прост. Необходимо варьировать значение k'_∞ до тех пор пока определитель не станет равным нулю с учетом заданной погрешности.

Хотя для данной задачи расчеты достаточно громоздки, но метод дихотомии (деления отрезка пополам) дает гарантированную сходимость при правильном задании интервала поиска решения.

Двухгрупповое диффузионное приближение

Найденное значение k'_∞ входит позволяет определить эффективный коэффициент размножения $k_{эфф}$ в для такого (с заданными размерами и материальным составом) некритического реактора

$$k_{эфф} = \frac{k_\infty}{k'_\infty}$$

Очевидно, что для реактора, который по проекту должен все таки работать, полученный эффективный коэффициент размножения должен быть больше единицы.

Компенсация избыточной реактивности реактора является следующей задачей, заключающейся расчете системы управления, то есть выбора конструкции, материалов и размещения поглощающих стержней.

Двухгрупповое диффузионное приближение

В завершении рассмотрения расчета реактора в двухгрупповом диффузионном приближении выпишем расчетные соотношения для распределений потоков быстрых и тепловых нейтронов в цилиндрическом реакторе с боковым отражателем.

Для этого необходимо в ранее записанных соотношениях заменить функции $Z(r)$, $W(r)$, $U(r)$ и $T(r)$ на соответствующие функции Бесселя. А для определения констант неизвестных констант A, C, S, T записать критическое уравнение.

В активной зоне для радиальных составляющих будем иметь

$$\Phi_{Б}(r) = AJ_0(\mu r) + CI_0(\nu r); \quad \Phi_T(r) = s_1 AJ_0(\mu r) + s_2 CI_0(\nu r)$$

в отражателе

$$\Phi_{Б}(r) = S\left[I_0(\alpha r) - \frac{I_0(\alpha R_2)}{K_0(\alpha R_2)} K_0(\alpha r)\right]$$

$$\Phi_T(r) = S\left[I_0(\alpha r) - \frac{I_0(\alpha R_2)}{K_0(\alpha R_2)} K_0(\alpha r)\right] + T\left[I_0(\beta r) - \frac{I_0(\beta R_2)}{K_0(\beta R_2)} K_0(\beta r)\right]$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

В активной зоне для радиальных составляющих будем иметь

$$\Phi_Б(r) = AJ_0(\mu r) + CI_0(\nu r);\quad \Phi_T(r) = s_1 AJ_0(\mu r) + s_2 CI_0(\nu r)$$

в отражателе

$$\Phi_Б(r) = S\left[I_0(\alpha r) - \frac{I_0(\alpha R_2)}{K_0(\alpha R_2)}K_0(\alpha r)\right]$$

$$\Phi_T(r) = S\left[I_0(\alpha r) - \frac{I_0(\alpha R_2)}{K_0(\alpha R_2)}K_0(\alpha r)\right] + T\left[I_0(\beta r) - \frac{I_0(\beta R_2)}{K_0(\beta R_2)}K_0(\beta r)\right]$$

где

$$\mu = \sqrt{k_1^2 - \left(\frac{\pi}{H}\right)^2};\quad \nu = \sqrt{k_2^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2};\quad \alpha = \sqrt{k_3^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2};\quad \beta = \sqrt{k_4^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2}$$

H – высота реактора; $R_2 = R^{аз} + T$ – ‘экстраполированный размер реактора; $R^{аз}$ – радиус активной зоны; T – толщина отражателя.

Для аксиальных составляющих потоков будем иметь

$$\Phi_{Б,T}^{аз,отр}(z) = \cos\left(\frac{\pi}{H}z\right)$$

Двухгрупповое диффузионное приближение

Для записи критического уравнения введем функцию

$$\Re(ar) = I_0(ar) - \frac{I_0(aR_2)}{K_0(aR_2)} K_0(ar)$$

и ее производную

$$\Re'(ar) = a\left[I_1(ar) + \frac{I_0(aR_2)}{K_0(aR_2)} K_1(ar) \right]$$

Тогда критическое уравнение для цилиндрического реактора с боковым отражателем будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} J_0(\mu R^{аз}) & I_0(\nu R^{аз}) & -\Re(\alpha R^{аз}) & 0 \\ s_1 J_0(\mu R^{аз}) & s_2 I_0(\nu R^{аз}) & -s_3 \Re(\alpha R^{аз}) & -\Re(\beta R^{аз}) \\ -D_Б^{аз} \mu J_1(\mu R^{аз}) & D_Б^{аз} \nu I_0(\nu R^{аз}) & -D_Б^{отр} \Re'(\alpha R^{аз}) & 0 \\ -s_1 D_T^{аз} \mu J_1(\mu R^{аз}) & s_2 D_T^{аз} \nu I_0(\nu R^{аз}) & -s_3 D_T^{отр} \Re'(\alpha R^{аз}) & -D_T^{отр} \Re'(\beta R^{аз}) \end{vmatrix} = 0$$