

Решение многогруппового уравнения для эквивалентного реактора

Запишем многогрупповое уравнение в следующем виде

$$D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \Sigma_i^3 \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_3^{k \rightarrow i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i Q = 0$$

где $Q = \sum_{k=1}^m \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r)$

Рассмотрим **критический эквивалентный реактор**, для которого в каждой группе справедливо уравнение

$$\Delta \Phi_i(r) + B^2 \Phi_i(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \Phi_i(r) = -B^2 \Phi_i(r)$$

Подставим последнее выражение в многогрупповое уравнение и проинтегрируем его по всему объему реактора, то есть перейдем от дифференциального распределения потока нейтронов по координате к интегральным потокам: $\Phi_i(r) \rightarrow \Phi_i$

$$-D_i B^2 \Phi_i - \Sigma_i^a \Phi_i - \Sigma_i^3 \Phi_i + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_3^{k \rightarrow i} \Phi_k + \varepsilon_i Q = 0$$

Решение многогруппового уравнения для эквивалентного реактора

$$-D_i B^2 \Phi_i - \Sigma_i^a \Phi_i - \Sigma_i^3 \Phi_i + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_3^{k \rightarrow i} \Phi_k + \varepsilon_i Q = 0$$

Выразим отсюда Φ_i

$$\Phi_i = \frac{\varepsilon_i Q + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_3^{k \rightarrow i} \Phi_k}{D_i B^2 + \Sigma_i^a + \Sigma_i^3}$$

Вместо системы многогрупповых дифференциальных уравнений получили **систему алгебраических уравнений**, из которой может быть найден **интегральный по объему спектр нейтронов**.

Решение полученной системы может быть получено **итерационным методом**.

Решение многогруппового уравнения для эквивалентного реактора

1) Полагаем в первой итерации $Q^{(1)} = 1 \text{ н}\cdot\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$, найдем плотности потоков нейтронов для каждой группы

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1^{(1)} = \frac{\varepsilon_1 Q^{(1)}}{D_1 B^2 + \Sigma_1^{y\beta}} \\ \Phi_2^{(1)} = \frac{\varepsilon_2 Q^{(1)} + \Sigma_3^{1 \rightarrow 2} \Phi_1^{(1)}}{D_2 B^2 + \Sigma_2^{y\beta}} \\ \Phi_3^{(1)} = \frac{\varepsilon_3 Q^{(1)} + \Sigma_3^{1 \rightarrow 3} \Phi_1^{(1)} + \Sigma_3^{2 \rightarrow 3} \Phi_2^{(1)}}{D_3 B^2 + \Sigma_3^{y\beta}} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \Phi_m^{(1)} = \frac{\Sigma_3^{(m-1) \rightarrow m} \Phi_m^{(1)}}{D_m B^2 + \Sigma_m^{y\beta}} \end{array} \right.$$

2) Полученные потоки нейтронов $\Phi_i^{(1)}$ используем для вычисления полного числа нейтронов деления на новой итерации

$$Q^{(2)} = \sum_{i=1}^m \nu_i^f \Sigma_i^f \Phi_i^{(1)}$$

Решение многогруппового уравнения для эквивалентного реактора

3) Используем рассчитанное значение для источника нейтронов на новой итерации для определения новой последовательности

$$\Phi_1^{(2)}, \Phi_2^{(2)}, \Phi_3^{(2)}, \dots, \Phi_m^{(2)}$$

4) По полученному энергетическому распределению потоков нейтронов $\Phi_i^{(2)}$, вычисляем полное число нейтронов деления на следующей итерации $Q^{(3)}$

5) На каждой итерации рассчитываем отношение $\frac{Q^{(n+1)}}{Q^{(n)}}$

6) Очевидно, что итерационный процесс следует прекратить, когда отношение, рассчитанное в п.5 перестанет изменяться в рамках заданной точности.

Если рассматривать нейтроны деления полученное на $(n+1)$ -ой итерации, как новое поколение нейтронов, а нейтроны деления на n -ой итерации, как нейтроны предыдущего поколения, тогда отношение

$$\frac{Q^{(n+1)}}{Q^{(n)}} = k_{эфф}$$

Решение многогруппового уравнения для эквивалентного реактора

Полученная на последней итерации последовательность

$$\Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)}, \Phi_3^{(n)}, \dots, \Phi_m^{(n)}$$

является **искомым спектром интегральных потоков нейтронов.**

Найденный **эффективный коэффициент размножения** должен **соответствовать параметрам** рассчитываемого реактора.

Если последнее условие не выполняется, то **конструкция реактора должна быть изменена и вычисления выполнены заново.**

По найденному спектру нейтронов может **быть получено пространственное распределение потоков нейтронов.**

Очевидно, что пространственное распределение в эквивалентном реакторе **зависит от его геометрической формы** и определяется условиями **равенства нулю потоков нейтронов всех групп на внешней экстраполированной границе.**

Решение многогруппового уравнения для эквивалентного реактора

Длина экстраполяции зависит от транспортной длины пробега нейтронов, которая в свою очередь зависит от энергии.

Следовательно, **для каждой группы нейтронов свое значение экстраполированного размера.**

Например, для радиальных составляющих нейтронного потока в цилиндрическом эквивалентном реакторе будем иметь

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(r) = A\Phi_1 J_0\left(\frac{\xi_0}{R_{\text{э}1}} r\right) \\ \Phi_2(r) = A\Phi_2 J_0\left(\frac{\xi_0}{R_{\text{э}2}} r\right) \\ \Phi_3(r) = A\Phi_3 J_0\left(\frac{\xi_0}{R_{\text{э}3}} r\right) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Phi_m(r) = A\Phi_m J_0\left(\frac{\xi_0}{R_{\text{э}m}} r\right) \end{array} \right.$$

здесь $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \dots \Phi_m$ – спектр нейтронов, полученный в итерационном расчете;
 ξ_0 – первый корень функции Бесселя первого рода нулевого порядка.

Решение многогруппового уравнения для эквивалентного реактора

Аналогичного для распределения потоков нейтронов в (r,z) -геометрии для цилиндрического реактора

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(r, z) = A\Phi_1 J_0 \left(\frac{\xi_0}{R_{\text{э}1}} r \right) \cos \left(\frac{\pi}{H_{\text{э}1}} z \right) \\ \Phi_2(r, z) = A\Phi_2 J_0 \left(\frac{\xi_0}{R_{\text{э}2}} r \right) \cos \left(\frac{\pi}{H_{\text{э}2}} z \right) \\ \Phi_3(r, z) = A\Phi_3 J_0 \left(\frac{\xi_0}{R_{\text{э}3}} r \right) \cos \left(\frac{\pi}{H_{\text{э}3}} z \right) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Phi_m(r, z) = A\Phi_m J_0 \left(\frac{\xi_0}{R_{\text{э}m}} r \right) \cos \left(\frac{\pi}{H_{\text{э}m}} z \right) \end{array} \right.$$

Константа A введена для перевода плотностей потоков в абсолютные единицы путем нормировки на удельную мощность реактора

Решение многогруппового уравнения для эквивалентного реактора

Константа A введена для перевода плотностей потоков в абсолютные единицы путем нормировки на удельную мощность реактора

$$\frac{W_T}{V_{az}} = \sum_{i=1}^m \overline{\Phi}_i \Sigma_i^f E_f$$

где W_T – тепловая мощность реактора; $E_f = 3,2 \cdot 10^{-11}$ Дж/дел – энергия, выделяющаяся в одном акте деления.

Среднее значение потока нейтронов для каждой группы определяются по теореме о среднем

$$\overline{\Phi}_i = \frac{A \Phi_i \int_0^{R_{\partial i}} J_0\left(\frac{\xi_0}{R_{\partial i}} r\right) r dr \int_{-H_{\partial i}/2}^{H_{\partial i}/2} \cos\left(\frac{\pi}{H_{\partial i}} z\right) dz}{\int_0^{R_{\partial i}} r dr \int_{-H_{\partial i}/2}^{H_{\partial i}/2} dz}$$

Выбор числа групп

Выбор числа групп определяется многими факторами, главными из которых является **вид спектра нейтронов** и **требуемая точность вычислений**.

Очевидно, что **при малом количестве групп**, а соответственно, при большой энергетической ширине каждой из них, проблеме составляет **потеря точности при усреднении параметров внутри группы**.

Существует определенность в самой нижней по энергии (большой по номеру) **тепловой группе**. Здесь **распределение плотности числа нейтронов по энергии соответствует максвелловскому** и усреднение параметров не представляет большой сложности.

В **нескольких самых верхних** по энергии (начальных по номеру) **группах** предполагается, что энергетическое **распределение нейтронов соответствует спектру деления** (спектр Уатта), что также вносит какую-то определенность для усреднения.

Выбор числа групп

Наиболее **проблематична область промежуточных энергий** при описании замедляющихся нейтронов.

Логично предположить, что **здесь нейтроны распределены по спектру Ферми**, но **усреднение в широком энергетическом интервале значительно искажает закономерности резонансного взаимодействия нейтронов**.

При усреднении **резонансы полностью сглаживаются**. А **влияние узких резонансов вообще пропадает**.

В усредненных по широкому энергетическому интервалу параметра **пропадает влияние эффекта Доплера** (расширение резонансного пика при увеличении температуры среды)

Логичным при такой ситуации является уменьшение ширины энергетических групп (увеличение числа групп) для повышение точности при усреднении параметров внутри группы.

Однако, при **чрезмерном уменьшении ширины энергетических интервалов** наблюдается **обратный эффект – рост погрешности**.

Выбор числа групп

Причина заключается в следующем.

В системе групповых уравнений сечение увода ($\Sigma_{yb} = \Sigma_a + \Sigma_s$) выполняет ту же роль, что и сечение поглощения в уравнении диффузии.

При большом числе «узких» групп их ширины Δu_i малы и соизмеримы со средними логарифмическими потерями энергии в процессе рассеяния ($\Delta u_i \sim \xi$).

Это означает, что практически **любое столкновение нейтрона приводит к его уводу из группы** либо за счет замедления, либо за счет поглощения.

Таким образом, при уменьшении ширины группы резко возрастает количество центров потерь (увода) нейтронов.

Известно, что диффузионное приближение плохо применимо вблизи сильных поглотителей.

Для диффузионных уравнений **необходимо увеличивать диапазон летаргии относительно средних логарифмических потерь.**

Выбор числа групп

Таким образом, возникает противоречие: **увеличение числа групп улучшает качество усредненных групповых параметров, но ухудшает точность диффузионного описания переноса нейтронов.**

И наоборот: **уменьшение числа групп положительно влияет на применимость диффузионного приближения, но существенно ухудшает точность групповых параметров, получаемых при их усреднении внутри широкого энергетического интервала.**

В связи с этим применяют следующий подход:

На первом этапе рассматривают многогрупповую систему уравнений (26, 64, 128 и т.д. групп). Определяют необходимые групповые константы.

Затем сворачивают некоторое число смежных групп в одну более широкую, получая «малогрупповую» систему уравнений, из которых находят пространственное распределение нейтронных потоков и условие критичности.

Выбор числа групп

Выбор числа групп, к которым переходят при свертке констант, опять определяется спектром нейтронов.

Если в ядерном реакторе спектр изменяется слабо или известен закон его изменения, то можно использовать малое число групп.

Например, для расчетов реакторов на тепловых нейтронах наиболее часто многогрупповые константы сворачивают в две группы.

Хотя для водо-водяных реакторов (ВВЭР) более корректным является 4-х групповое приближение.

Для реакторов на быстрых и промежуточных нейтронах требуется рассматривать большее число групп для детализации нейтронных потоков в области резонансных энергий.

Функция ценности нейтронов

Введен некоторое количество нейтронов с летаргией u в точку r критического реактора.

Так как реактор критический, то каждый новый нейтрон, введенный в систему, **будет воспроизводиться в каждом новом поколении бесконечное количество раз.**

Следовательно, **поток нейтронов возрастет на некоторую величину**, причем не только в точке r , а по всему реактору.

Если проинтегрировать возникшее изменение потока нейтронов по объему реактора, то полученное значение будет равно **числу введенных нейтронов, умноженную на вероятность избежать утечки.**

Так же очевидно, что нейтроны, введенные **вблизи внешней границы**, вызовут **меньшее увеличение потока нейтронов**, чем нейтроны, введенные вблизи центра реактора.

На величину **изменения потока нейтронов** будет также **влиять энергия введенных нейтронов.**

Функция ценности нейтронов

Таким образом, с точки зрения внесенного в реактор возмущения **нейтроны имеют различную ценность**, которая зависит от энергии и координаты.

Определим **функцию ценности нейтронов**, как величину, пропорциональную величине потока (распределенного по энергии и пространству), возникающего при введении в реактор одного нейтрона.

Введем понятие **статистического веса нейтрона**, как произведение потока и ценности нейтронов.

Статистический вес будет нужен нас для более корректной свертки смежных групп в одну широкую группу.

Очевидно, что если мы учтем ценность нейтронов различных энергетических групп в интегральном результате, мы получим более качественные параметры для мало групповой системы уравнений.

Функция ценности нейтронов

Однако сначала необходимо найти уравнения, решение которых определило бы функции ценностей нейтронов для каждой группы. Здесь нам не избежать элементов достаточно специфичной математики.

Пусть $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ – функции одних и тех же переменных, обозначенных общим символом ξ .

Скалярное произведение этих функций определяется в виде

$$(\varphi, \psi) \equiv \int \varphi(\xi)\psi(\xi)d\xi$$

где интегрирование проводится по всему интервалу изменения переменных.

Если функции φ и ψ непрерывны и удовлетворяют определенным граничным условиям, то для **самосопряженного** оператора \mathbf{M} должно выполняться равенство скалярных произведений

$$(\psi, \mathbf{M}\varphi) = (\varphi, \mathbf{M}\psi)$$

Собственные функции самосопряженного оператора ортогональны, а собственные значения всегда действительны.

Функция ценности нейтронов

Например, в квантовой механике операторы, представляющие физические величины, являются самосопряженными. Операторы и волновые функции квантовой механики – комплексные величины и при определении их скалярных произведений используют комплексно сопряженные функции.

В теории переноса нейтронов операторы и функции, на которые они действуют (например, оператор Лапласа и поток нейтронов) являются действительными и комплексно сопряженные величины обычно не требуются.

При этом однако оператор, связанный с уравнением переноса, **не является самосопряженным.**

Если оператор L несамосопряженный, то сопряженный ему оператор L^+ , действующий на функцию φ^+ можно определить из условия

$$(\varphi^+, L\varphi) = (\varphi, L^+\varphi^+)$$

Функцию φ^+ называют **сопряженной функцией.**

Функция ценности нейтронов

Для задач переноса нейтронов, в частности в физике реакторов, сопряженные операторы и сопряженные функции используются в теории возмущений, которая не рассматривается в рамках нашего курса.

Однако оказывается, что **сопряженная функция для функции потока нейтронов есть функция ценности нейтронов**, которую далее будем обозначать Φ^+ .

Тогда согласно свойству сопряженных операторов и функций

$$\int_V d\mathbf{r} \int_u \Phi^+(\mathbf{r}, u) \mathbf{L} \Phi(\mathbf{r}, u) du = \int_V d\mathbf{r} \int_u \Phi(\mathbf{r}, u) \mathbf{L}^+ \Phi^+(\mathbf{r}, u) du$$

Например, для стационарного реактора в однокрупном приближении без отражателя мы записывали диффузионное уравнение в виде

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a\Phi + \nu\Sigma_f\Phi = 0$$

Функция ценности нейтронов

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a\Phi + \nu\Sigma_f\Phi = 0$$

Это уравнение в операторном виде запишется очень компактно

$$\mathbf{L}\Phi = 0$$

с учетом то, что введенный оператор будет иметь вид

$$\mathbf{L} = D\Delta - \Sigma_a + \nu\Sigma_f$$

Под комплексным числом, сопряженным к числу $a = \alpha + i\beta$, понимают комплексное число, которое отличается от a знаком мнимой части $\bar{a} = \alpha - i\beta$

Если a – действительное число, то оно совпадает со своим сопряженным числом

В точке \mathbf{r} оператор Лапласа после воздействия на функцию потока дает действительное число.

Все остальные слагаемые оператора \mathbf{L} также действительные числа.

Тогда **сопряженный** оператор \mathbf{L}^+ **совпадает** с оператором \mathbf{L} .

Функция ценности нейтронов

Следовательно, для функций ценностей нейтронов получим уравнение вида

$$D\Delta\Phi^+ - \Sigma_a\Phi^+ + \nu\Sigma_f\Phi^+ = 0$$

Это уравнение ни чем не отличается от уравнения для потоков нейтронов, следовательно **функции потоков и ценностей нейтронов** в реакторе без отражателя в одногрупповом приближении **в точности совпадают**

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^+(\mathbf{r})$$

Соответственно, статистический вес нейтронов в таком реакторе

$$W(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})\Phi^+(\mathbf{r}) = \Phi^2(\mathbf{r})$$

То есть максимальную ценность имеют нейтроны в центре реактора.

На экстраполированной границе ценность нейтронов равна нулю, так как нейтроны, вылетевшие из реактора, обратно не возвращаются.