Многогрупповое уравнение

3) В третьем интеграле заменим порядок интегрирования и учтем, что среде нет нейтронов с энергией большей, чем энергия источника, что соответствует замене в нижнем пределе интегрирования $-\infty$ на 0.

$$I_3 = \int_{u_{i-1}}^{u_i} du \int_{-\infty}^{u} \Sigma_s(u')P(u' \to u)\Phi(r,u')du' = \int_0^u \Sigma_s(u')\Phi(r,u')du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} P(u' \to u)du$$

Разобьем интервал интегрирования $0 \div u$ на три составляющие: $0 \div u_{i-1}$; $u_{i-1} \div u_i$; $u_i \div u$.

Интервал $0 \div u_{i-1}$ характеризует рассеяние нейтронов с летаргиями, **меньшими, чем летаргия рассматриваемой *i*-ой группы**.

Интервал $u_{i-1} \div u_i$ описывает **рассеяние нейтронов самой *i*-ой группы**.

Интервал $u_i \div u$. характеризует рассеяние нейтронов с летаргиями, **большими, чем летаргия рассматриваемой группы**, причем все эти нейтроны должны при замедлении попасть в i-ую группу, что **противоречит физической сущности замедления**.

Многогрупповое уравнение

Интеграл $\int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} P(u' \to u)du$ есть суммарная вероятность для нейтрона с произвольной летаргией u' замедлится в i-ую группу, тогда

$$\int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} P(u' \to u)du = P(u' \to i)$$

Таким образом

$$I_3 = \int\limits_0^{u_{i-1}} \Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(u' \to i)du' + \int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(u' \to i)du'$$

Применим к интегралу I_3 метод групп, получим

$$I_3 = \sum_{k=1}^{i-1}\left[\int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(k \to i)du'\right] + \int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(i \to i)du'$$

Многогрупповое уравнение

$$I_3 = \sum_{k=1}^{i-1}\left[\int_{u_{k-1}}^{u_k}\Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(k \to i)du'\right] + \int_{u_{i-1}}^{u_i}\Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(u' \to i)du'$$

Всю сумму в первом слагаемом умножим и разделим на $\int_{u_{k-1}}^{u_k}\Phi(r,u')du'$

$$\sum_{k=1}^{i-1}\left[\frac{\int_{u_{k-1}}^{u_k}\Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(k \to i)du'}{\int_{u_{k-1}}^{u_k}\Phi(r,u')du'}\int_{u_{k-1}}^{u_k}\Phi(r,u')du'\right]$$

Отношение интегралов есть **средняя вероятность нейтрона *k*-ой группы замедлится в *i*-ую группу** $(\Sigma_{k,i}^{s})$

Второй множитель есть **интегральный по летаргии поток нейтронов в *k*-ой группе** $(\Phi_k(r))$

Многогрупповое уравнение

Второе слагаемое в соотношении для интеграла I_3

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(i\to i)du'$$

умножим и разделим на $\int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi(r,u')du'$

$$\frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i} \Sigma_s(u')\Phi(r,u')P(i\to i)du'}{\int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi(r,u')du'} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \Phi(r,u')du'$$

Отношение интегралов есть **средняя вероятность для нейтрона остаться в *i*-ой группе при рассеянии** $(\Sigma_{0,i}^s)$

Второй множитель есть **интегральный по летаргии поток нейтронов в *i*-ой группе**

Окончательно для интеграла I_3 получим

$$I_3 = \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_{k,i}^s \Phi_k(r) + \Sigma_{0,i}^s \Phi_i(r)$$

Многогрупповое уравнение

4) Последний интеграл I_4 характеризует источник.

Рассмотрим случай когда источником является реакция деления (в общем случае может быть рассмотрен и внешний источник).

Скорость реакции деления, инициируемой нейтроном с летаргией u' в точке r определится как

$$\Sigma^f(u')\Phi(r,u')$$

При каждом делении рождается ν^f новых нейтронов, причем это количество зависит от энергии нейтрона, вызвавшего деление $\nu^f = \nu^f(u)$

Тогда количество нейтронов, образующихся в точке r при делении ядер нейтронами с летаргией u' определится как

$$\nu^f(u')\Sigma^f(u')\Phi(r,u')$$

Соответственно, для того, чтобы получит полное число новых нейтронов, образованных в реакции деления, необходимо проинтегрировать полученное соотношение по всему диапазону летаргий

$$\int_0^\infty \nu^f(u')\Sigma^f(u')\Phi(r,u')du'$$

Многогрупповое уравнение

Введем нейтронный спектр деления $f(u)$ в переменных летаргии, то есть долю нейтронов деления имеющих летаргию u, тогда функция источника примет вид

$$S(r,u) = f(u)\int_0^\infty \nu^f(u')\Sigma^f(u')\Phi(r,u')du'$$

а последний интеграл I_4 получим в виде

$$I_4 = \int_{u_{i-1}}^{u_i} f(u)du\int_0^\infty \nu^f(u')\Sigma^f(u')\Phi(r,u')du'$$

Далее используем много групповой подход

$$I_4 = \int_{u_{i-1}}^{u_i} f(u)du\sum_{k=1}^{m}\left[\int_{u_{k-1}}^{u_k} \nu^f(u')\Sigma^f(u')\Phi(r,u')du'\right]$$

Интеграл под суммой умножим и разделим на $\int_{u_{k-1}}^{u_k}\Phi(r,u')du'$

Многогрупповое уравнение

$$I_4 = \int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} f(u)du \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} \nu^f(u')\Sigma^f(u')\Phi(r,u')du'}{\int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi(r,u')du'} \int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} \Phi(r,u')du' \right]$$

Отношение интегралов есть среднее значение произведения $\nu^f \Sigma^f$ для k-ой группы.

Второй множитель есть интегральный по летаргии поток нейтронов в k-ой группе.

Обозначим $\varepsilon_i = \int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} f(u)du$ – вероятность (долю) нейтронов спектра деления попасть в i-ую группу.

Окончательно для интеграла I_4 получим

$$I_4 = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r)$$

Многогрупповое уравнение

Соберем все полученные результаты в стационарное уравнение диффузии для i-ой группы

$$D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \Sigma_{0,i}^s \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_{j,i}^s \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_{k,i}^s \Phi_k(r) + \Sigma_{0,i}^s \Phi_i(r) +$$

$$+ \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0$$

Введем более содержательные обозначения:

для макроскопического сечения рассеяния, приводящего к замедлению нейтрона из i-ой группы в j-ую

$$\Sigma_{j,i}^s \equiv \Sigma_з^{i \to j}$$

для макроскопического сечения рассеяния, приводящего к замедлению нейтрона из k-ой группы в i-ую

$$\Sigma_{k,i}^s \equiv \Sigma_з^{k \to i}$$

В новых обозначениях и после приведения подобных слагаемых получим

$$\boxed{D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i \to j} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k \to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0}$$

Многогрупповое уравнение

$$D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i \to j} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k \to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0$$

Определим физический смысл каждого слагаемого, входящего в полученное уравнение

$D_i \Delta \Phi_i(r)$ – **пространственная утечка нейтронов** i-ой группы вследствие диффузии в единицу времени из единицы объема вблизи точки r.

$-\Sigma_i^a \Phi_i(r)$ – **поглощение нейтронов** i-ой группы в единицу времени в единице объема вблизи точки r.

$-\sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i \to j} \Phi_i(r)$ – **уход нейтронов** i-ой группы **во все группы с меньшей энергией** (большим номером) в единицу времени в единице объема вблизи точки r в результате упругого и неупругого рассеяния

$$\Sigma_з^{i \to j} = \Sigma_{з,el}^{i \to j} + \Sigma_{з,in}^{i \to j}$$

Многогрупповое уравнение

$$\boxed{D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i \to j} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k \to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} v_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0}$$

Определим физический смысл каждого слагаемого, входящего в полученное уравнение

$\sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k \to i} \Phi_k(r)$ – **приход нейтронов** в i-ую группу **из всех других групп с большей энергией** (меньшим номером) в единицу времени в единице объема вблизи точки r в результате упругого и неупругого рассеяния

$$\Sigma_з^{k \to i} = \Sigma_{з,el}^{k \to i} + \Sigma_{з,in}^{k \to i}$$

$\varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} v_k^f \Sigma_k^f \Phi_i(r)$ – **вклад источника** (реакции деления) **нейтронов** в i-ую группу в единицу времени в единице объема вблизи точки r.

Многогрупповое уравнение

$$D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i \to j} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k \to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0$$

Система многогрупповых уравнений основана на уравнении диффузии, соответственно, **применима в условиях диффузионного приближения**: внутри пространственной области с изотропными свойствами вдали от источников, сильных поглотителей и т.д.

При наличии границ раздела сред необходимо записывать **граничные условия для каждого уравнения**.

По-прежнему граничные условия должны обеспечивать **непрерывность потоков нейтронов и диффузионных токов** на геометрической границе.

Например, если имеется граница раздели сред, обозначенных индексами «1» и «2», по поверхности F, то граничные условия будем записывать в виде

$$\left|\Phi_{i,1}\right|_F = \left|\Phi_{i,2}\right|_F, \quad \left|D_{i,1} \nabla \Phi_{i,1}\right|_F = \left|D_{i,2} \nabla \Phi_{i,2}\right|_F$$

Многогрупповое уравнение

$$D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i\to j} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k\to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0$$

Запишем диффузионные уравнения для крайних случаев: для нейтронов с самыми большими энергиями (1 группа) и для тепловых нейтронов (m-ая группа)

В 1-ую группу нет прихода нейтронов из других групп за счет рассеяния, тогда

$$D_1 \Delta \Phi_1(r) - \Sigma_1^a \Phi_1(r) - \sum_{j=2}^{m} \Sigma_з^{1\to j} \Phi_1(r) + \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_i(r) = 0$$

Для последней (тепловой) m-ой группы отсутствует замедление нейтронов в другие группы, кроме того, в спектре деления нет тепловых нейтронов, следовательно

$$D_m \Delta \Phi_m(r) - \Sigma_m^a \Phi_m(r) + \sum_{k=1}^{m-1} \Sigma_з^{k\to m} \Phi_k(r) = 0$$

Многогрупповое уравнение

$$\boxed{D_i \Delta\Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i\to j} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k\to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0}$$

Уравнения для крайних групп еще более упрощаются если групп всего две: быстрые нейтроны (индекс 1) и тепловые (индекс 2)

для быстрых нейтронов (нейтроны рождаются только быстрыми ε_1=1)

$$D_1 \Delta\Phi_1(r) - \Sigma_1^a \Phi_1(r) - \Sigma_з^{1\to 2} \Phi_1(r) + \nu_1^f \Sigma_1^f \Phi_1(r) + \nu_2^f \Sigma_2^f \Phi_2(r) = 0$$

для тепловых нейтронов

$$D_2 \Delta\Phi_2(r) - \Sigma_2^a \Phi_2(r) + \Sigma_з^{1\to 2} \Phi_1(r) = 0$$

Многогрупповое уравнение

$$\boxed{D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i\to j} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k\to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0}$$

И еще о замедлении нейтронов.

Нейтроны в группах $i > 1$ кроме образования в источниках появляются в результате упругого и неупругого рассеяния.

Упругое рассеяние, как правило, переводит нейтроны в i-ую группу из $(i–1)$-ой. То есть скорость генерации нейтронов при замедлении в результате упругих процессов определится как

$$S_{el,i} = \Sigma_з^{(i-1)\to i} \Phi_{i-1} = \Sigma_з^{i-1} \Phi_{i-1}$$ – кроме водорода и дейтерия

Исключение составляют легкие замедлители (водород и дейтерий). Здесь нейтрон в результате упругого рассеяния может потерять энергию большую, чем ширина нескольких энергетических интервалов. Тогда по-прежнему скорость генерации определяется как

$$S_{el,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_{el}^{k\to i} \Phi_k$$ – для водорода и дейтерия

Многогрупповое уравнение

$$D_i \Delta \Phi_i(r) - \Sigma_i^a \Phi_i(r) - \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_з^{i\to j} \Phi_i(r) + \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_з^{k\to i} \Phi_k(r) + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k^f \Sigma_k^f \Phi_k(r) = 0$$

И еще о замедлении нейтронов.

Скорость перехода нейтронов в i-ую группу в результате неупругого рассеяния из предыдущих ($k<i$)-ых групп определяются сечениями неупругого рассеяния

$$S_{in,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \Sigma_{in}^{k\to i} \Phi_k$$

Убыль нейтронов из i-ой группы обусловлена кроме утечки за счет диффузии еще и нейтронными реакциями вследствие поглощения, упругого и неупругого рассеяния.

Совокупность нейтронных процессов, приводящих с потере нейтронов из i-ой группы, часто объединяют терминов «увода», вводя соответствующее сечение увода

$$\Sigma_i^{ув} = \Sigma_i^a + \sum_{j=i+1}^{m} \Sigma_{in}^{i\to j} + \Sigma_{el}^{i\to(i+1)}$$