



Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова  
НИЦ Курчатовский институт



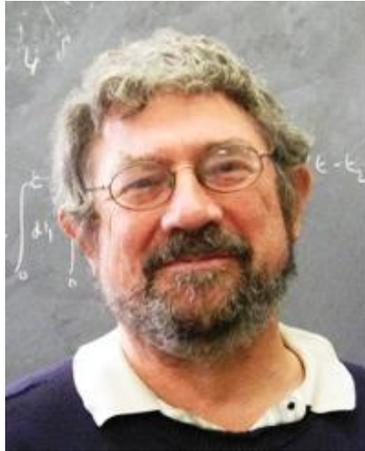
**Топологические фазовые переходы и  
топологические фазы вещества.  
Нобелевская премия по физике за 2016 год**

А.О. Сорокин

11.03.2017

# Топологические фазовые переходы и топологические фазы вещества

$\frac{1}{4}$



$+\frac{1}{2}$



$+\frac{1}{4}$



**Джон М. Костерлиц**



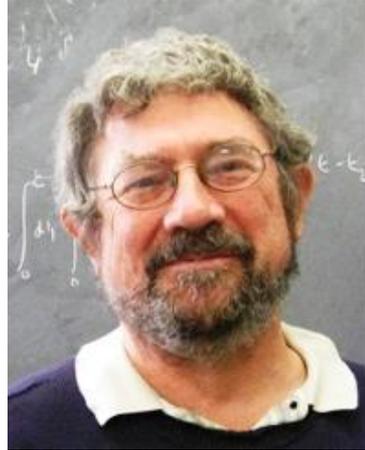
**Дэйвид Дж. Таулесс**



**Ф. Данкан М. Холдейн**



# Переход Березинского-Костерлица-Таулесса



**Джон М. Костерлиц      Дэйвид Дж. Таулесс**

Фазовый переход в двумерном XY ферромагнетике, индуцированный взаимодействием вихрей, и возникновение квазидальнего порядка при ненулевой температуре:

1. J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless, J. Phys. C: Solid State Phys. **6**, 1181 (1973); [Цит.: 9113]
2. J.M. Kosterlitz, J. Phys. C: Solid State Phys. **7**, 1046 (1974); [Цит.: 2921]
3. D.R. Nelson, J.M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977). [Цит.: 1067]

# Квантовый эффект Холла и топологические изоляторы

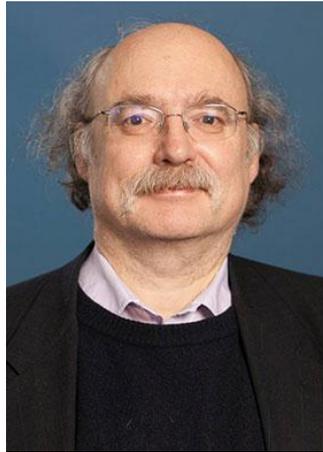


Дэйвид Дж. Таулесс

Топологическая природа квантового эффекта Холла (Таулесс):

1. D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, M. Den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982); [Цит.: 3008]
2. D.J. Thouless, Phys. Rev. B **27**, 6083 (1983). [Цит.: 771]
3. Q. Niu, D.J. Thouless, Y.-S. Wu, Phys. Rev. B **31**, 3372 (1985). [Цит.: 653]

# Одномерный квантовый антиферромагнетик



**Ф. Данкан М. Холдейн**

Топологические эффекты и спектр одномерного квантового антиферромагнетика:

1. F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **50**, 1153 (1983); [Цит.: 3102]
2. F.D.M. Haldane, Phys. Lett. A **93**, 464 (1983); [Цит.: 2434]

## Что общего в этих работах?

- Рассмотрены низкоразмерные системы (2D и 1+1D);
- Описываемые явления наблюдаются при низких температурах;
- Явления наблюдаются экспериментально и соответствующие эксперименты уже проводились;
- Главное: явления могут быть объяснены только с помощью **топологических** эффектов.

Топологические эффекты в этих работах различны и покрывают широкий спектр возможностей влияния топологии на состояние материи:

- Топологические дефекты (вихри, монополи, скирмионы и т.д.);
- Топологические слагаемые в гамильтониане, проявляющиеся в квантовой механике (теория Весса-Зумино,  $\theta$ -угол, 2D гравитация и т.д.)
- Фазы Берри (эффект Ааронова-Бома и т.д.)

# Что изучает топология?

Топология – раздел математики, изучающий категорию непрерывности.



- Связность объекта или наличие у него границ, разрезов, дырок и т.д.;

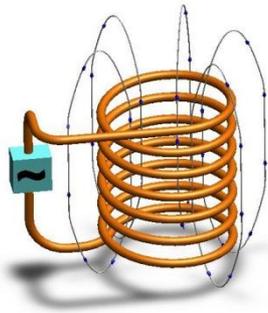
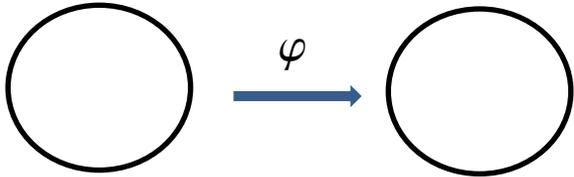


- Как корректно склеивать и резать;

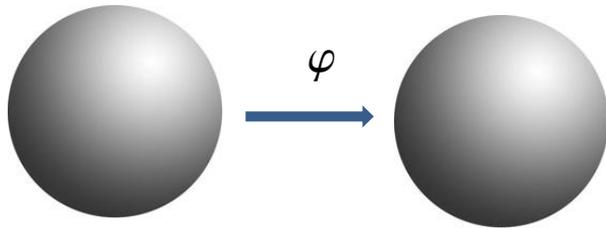


- Непрерывные отображения (гомеоморфизмы);
- Непрерывные преобразования объекта и топологическая эквивалентность;

## Факты из топологии, необходимые нам



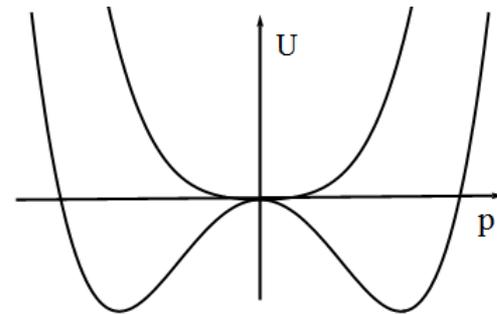
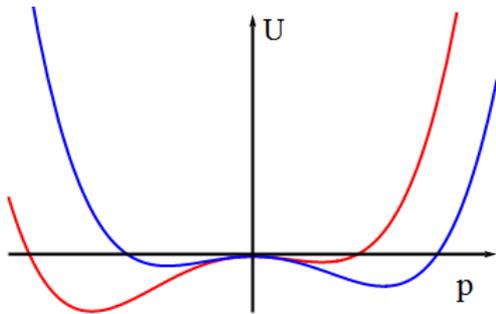
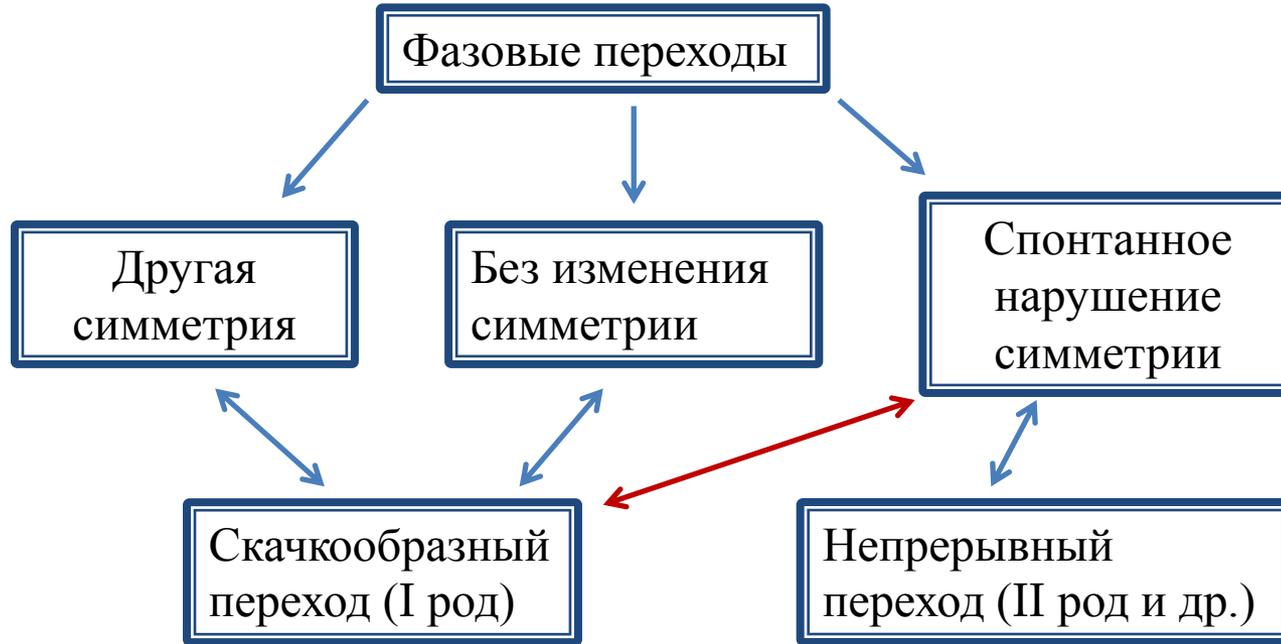
- Непрерывные отображения с окружности на окружность  $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$  разбиваются на классы, характеризующиеся целым числом (топологическое число, индекс отображения, число намотки и т.д.);



- Непрерывные отображения со сферы на сферу  $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$  разбиваются на классы, характеризующиеся целым числом;

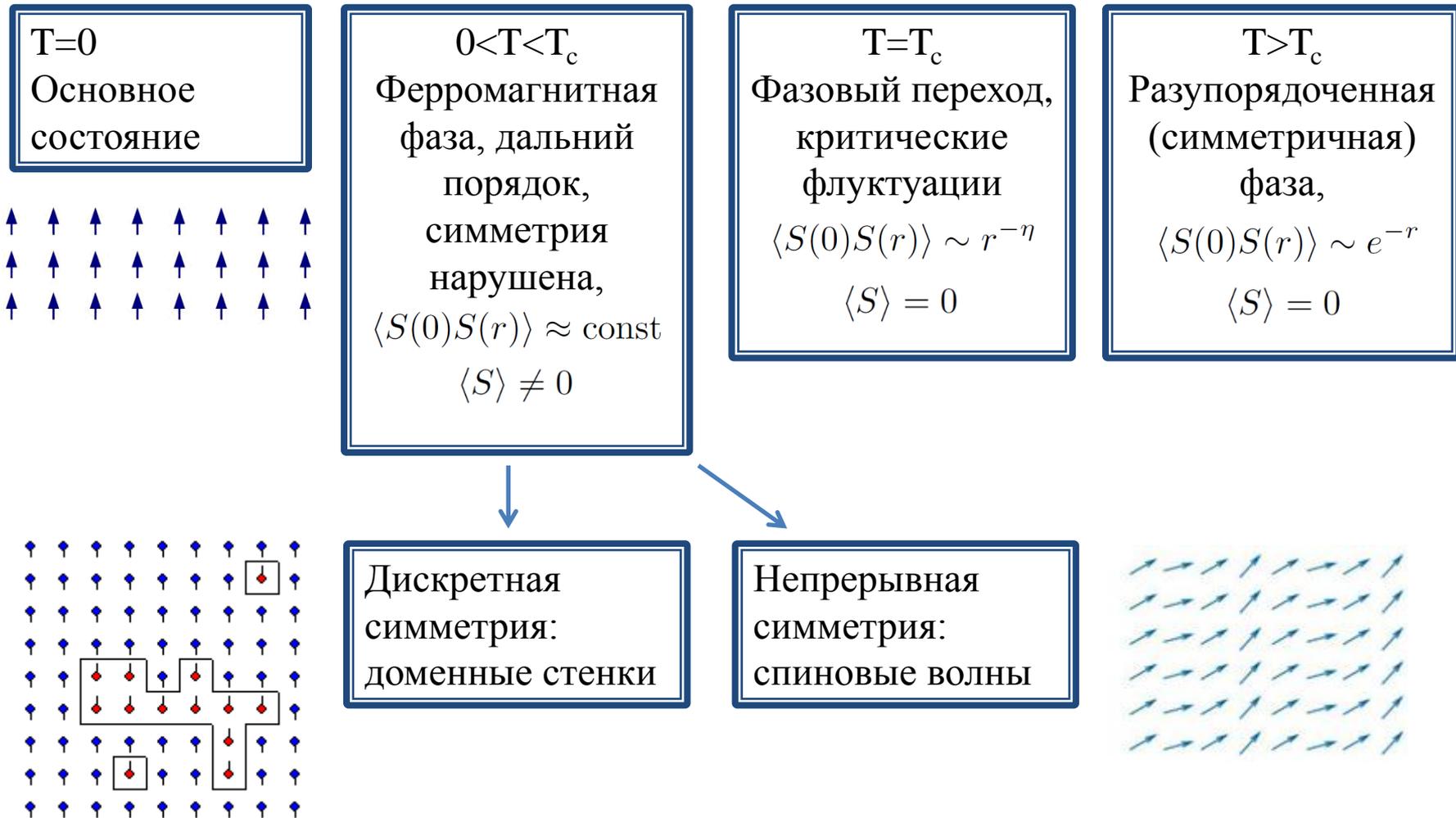
# Фазы и фазовые переходы (без топологии)

Теория Ландау фазовых переходов (Ландау, 1937): переходы и симметрия



# Симметрия vs. порядок

Рассмотрим непрерывный переход на примере ферромагнетика:  $H = -J \sum_{\mathbf{x}, \mu} \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_{\mu}}$



# Симметрия и свойства спиновых волн (магнонов)

Примеры спектра без «щели»:  $k \rightarrow 0$

$$\epsilon(k) \approx k, \quad \epsilon(k) \approx k^2$$

Примеры спектра со «щелью»:

$$\epsilon(k) \approx k + \Delta, \quad \epsilon(k) \approx k^2 + \Delta$$

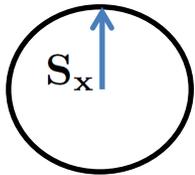
Теорема Голдстоуна (1961): при спонтанном нарушении непрерывной симметрии в спектре должны появиться возбуждения со спектром без «щели».



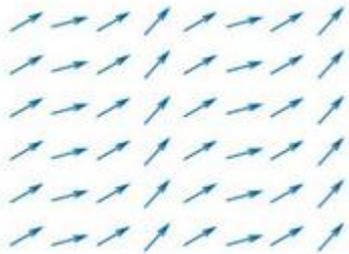
# Фазовые переходы в низких размерностях (1D и 2D)

- Решение одномерных моделей ферромагнетика (Ising, 1925; Bethe, 1931);
- Аргументы против фазовых переходов в 1D и 2D (Peierls, 1937; Ландау, 1937);
- Переходы в 2D моделях с дискретным параметром порядка (Kramers, Wannier, 1941; Onsager, 1944);
- Теорема о невозможности спонтанного нарушения симметрии при конечной температуре в 2D в моделях с локальным взаимодействием (Mermin, Wagner, 1966);
- Возможное исключение из теоремы: обнаружение степенного поведения корреляционной функции при низких температурах в XY ферромагнетике (Stanley, Kaplan, 1966; Stanley, 1967; Wegner, 1967);  
$$\langle S(0)S(r) \rangle \sim r^{-\eta}$$
- Выявление роли вихрей в особенностях низкотемпературного поведения XY ферромагнетика (Березинский, 1970; Kosterlitz, Thouless, 1973; Kosterlitz, 1974);

# Переход Березинского-Костерлица-Таулесса

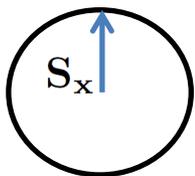


Рассмотрим модель классического двумерного XY ферромагнетика.  
Интересуемся пределом низких температур и на больших расстояниях.

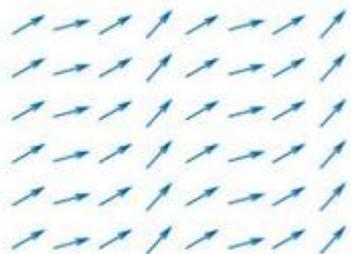


Модель = магноны + взаимодействие  
магнонов

# Переход Березинского-Костерлица-Таулесса



Рассмотрим модель классического двумерного XY ферромагнетика.  
Интересуемся пределом низких температур и на больших расстояниях.

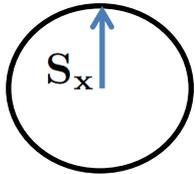


Модель = магноны +

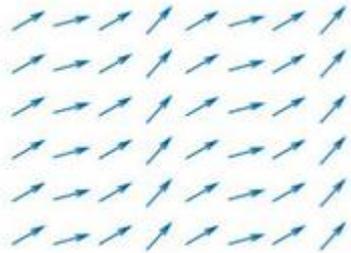
~~взаимодействие  
магнонов~~



# Переход Березинского-Костерлица-Таулесса

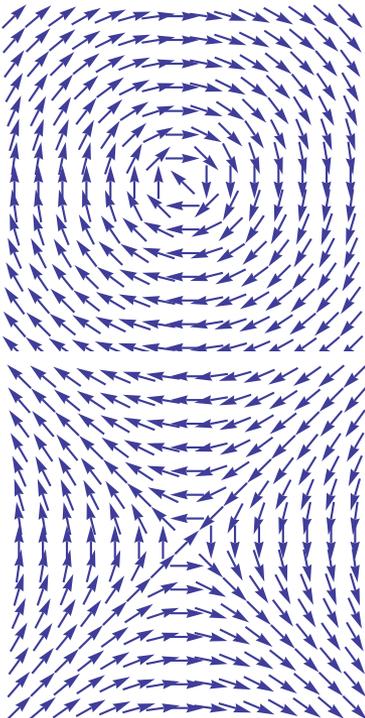


Рассмотрим модель классического двумерного XY ферромагнетика.  
Интересуемся пределом низких температур и на больших расстояниях.

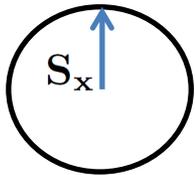


Модель = магноны + вихри + взаимодействие вихрей + взаимодействие вихрей и магнонов

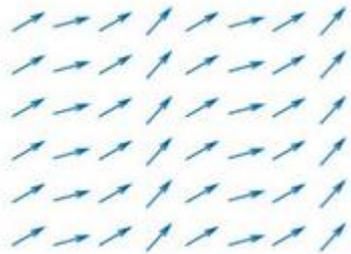
Даже в рассматриваемом пределе требуется учитывать вихревые конфигурации.



# Переход Березинского-Костерлица-Таулесса

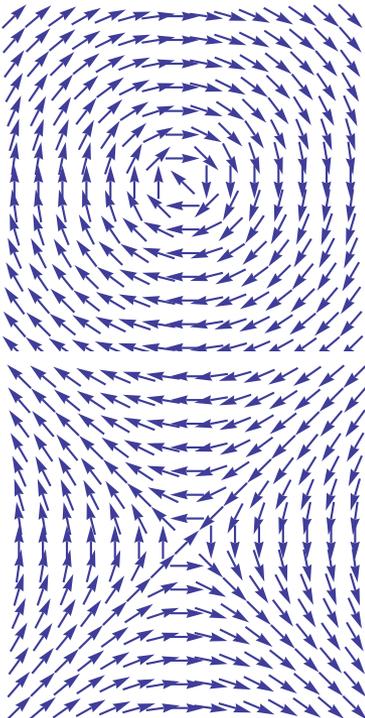


Рассмотрим модель классического двумерного XY ферромагнетика.  
Интересуемся пределом низких температур и на больших расстояниях.

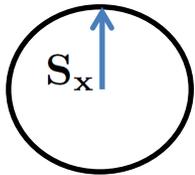


Модель = магноны + вихри + взаимодействие вихрей + ~~взаимодействие вихрей и магнонов~~

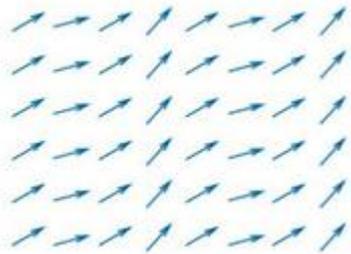
Даже в рассматриваемом пределе требуется учитывать вихревые конфигурации.



# Переход Березинского-Костерлица-Таулесса



Рассмотрим модель классического двумерного XY ферромагнетика. Интересуемся пределом низких температур и на больших расстояниях.

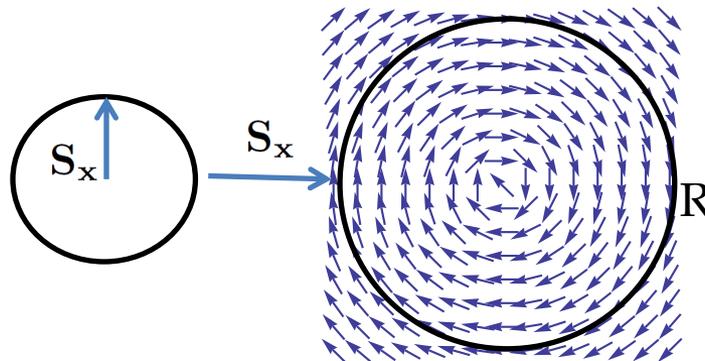
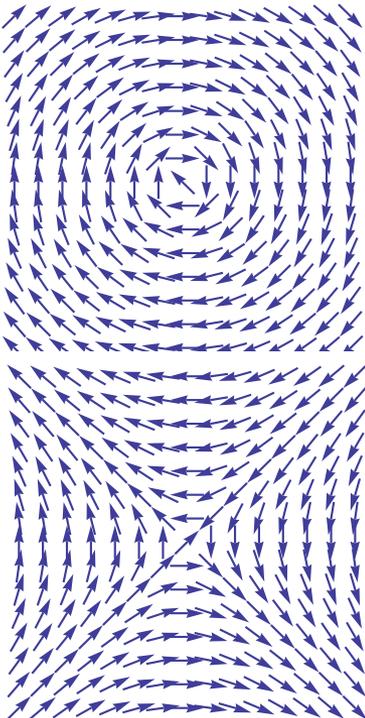


Модель = вихри + взаимодействие вихрей

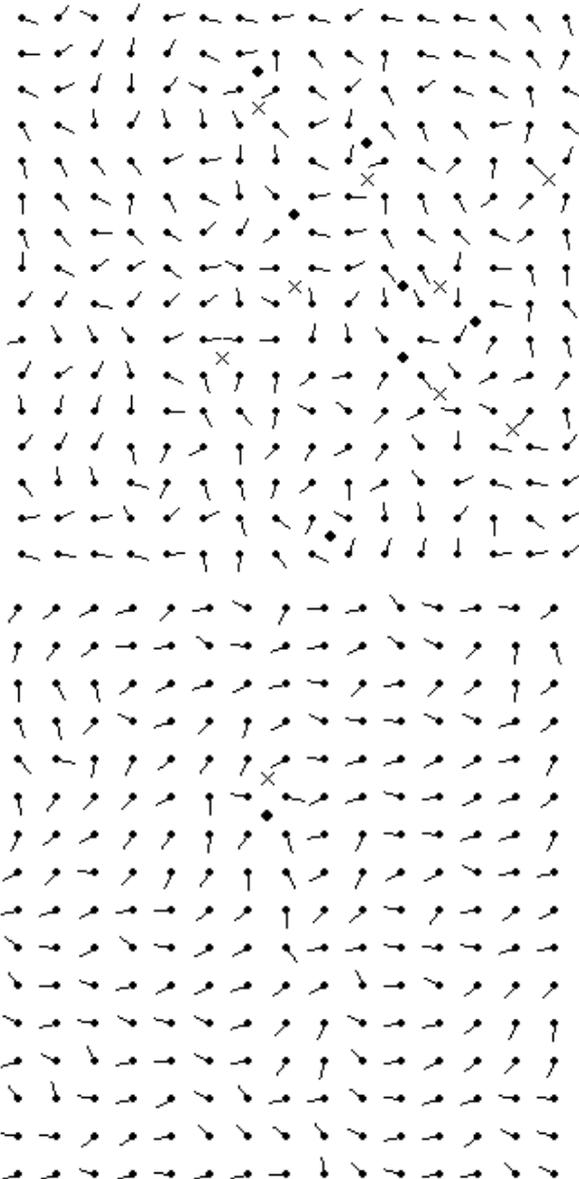
Даже в рассматриваемом пределе требуется учитывать вихревые конфигурации.

Получаем:

- Спиновые волны в этом приближении выпадают;
- Вихри взаимодействуют по закону Кулона;
- «Зарядом» является топологическое число, являющееся индексом отображения с окружности на окружность.



# Свойства перехода Березинского-Костерлица-Таулесса



При высокой температуре (разупорядоченная фаза):  $T > T_c$

- Экспоненциальное спадание коррелятора

$$\langle S(0)S(r) \rangle \sim e^{-r}$$

- Вихри химически активны; пары вихрей свободно рождаются (плазма из вихрей).

При низкой температуре (квазидальний порядок):  $T < T_c$

- Степенное спадание коррелятора  $\langle S(0)S(r) \rangle \sim r^{-\eta}$
- Параметр порядка (намагниченность) остается нулевым, и симметрия не нарушена;
- Химическая активность вихрей зануляется (вихри образуют диполи)

Переход Березинского-Костерлица-Таулесса:  $T = T_c$

- Универсальное значение индекса  $\eta=0.25$ ,
- Модуль жесткости испытывает скачок до нуля с универсальным значением;
- Отсутствуют особенности свободной энергии в производных свободной энергии по температуре и полю (переход бесконечного рода)

# История антиферромагнитной цепочки

Холдейн рассматривал квантовую антиферромагнитную цепочку:  $H = J \sum_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}}^i \sigma_{\mathbf{x}+1}^i$



Несмотря на кажущуюся простоту модели результаты были весьма противоречивы:

- Все началось с ферромагнетика со спином  $s = \hbar/2$  (Bethe, 1931);
- Применение метода Бете к антиферромагнетику (des Cloizeaux, Pearson, 1962; Yang, Yang, 1966; Takahashi, 1971);
- Антиферромагнетик и метод обратного рассеяния (Кулиш, Склянин, 1979; Фаддеев, Тахтаджан, 1979);
- Отсутствие щели в спектре (Овчинников, 1969; Fazekas, Sütö, 1976; Фаддеев, Тахтаджан, 1981; Тахтаджан, 1982);

$$\epsilon(k) = \frac{\pi}{2} \sin k, \quad 0 \leq k \leq \pi \quad \text{т.е.} \quad k \rightarrow 0 \quad \epsilon(k) \approx k$$

С другой стороны, АФ и Ф имеют одну и ту же симметрию:

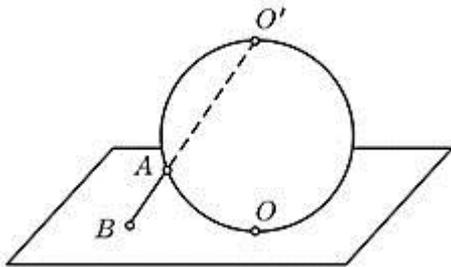
- Другой подход – квантовая  $O(3)$   $\sigma$ -модель (Поляков, 1975), где есть щель.

# Идея Холдейна

Холдейн использовал квазиклассическое квантование для 1D модели, т.е. предел большого значения спина  $s \gg \hbar$ , и получил:

$$\text{Действие модели} = \text{магноны} + \text{взаимодействие магнонов} + 2\pi i s \text{ топологическое число}$$

Данное топологическое число  $N$  является индексом отображения со сферы на сферу: одна сфера – множество ориентаций спина, вторая – пространство-время + бесконечно удаленная точка  $O'$ .



В квантовой механике мы должны суммировать по всем конфигурациям:

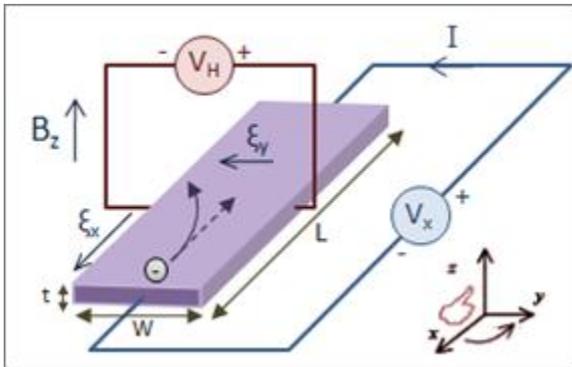
$$\sum_{\text{config}} e^{-S[\text{config}]/\hbar} e^{2\pi i s N/\hbar}$$

Если спин целочисленный (в единицах  $\hbar$ ), то топологический множитель равен 1, и воспроизводится результат для ферромагнетика (Поляков, 1975), где в спектре есть щель.

Если спин полуцелый, то возмущения с разным топологическим числом будут компенсировать друг друга, и щели не возникнет. Это согласуется со случаем  $s = \hbar/2$ .

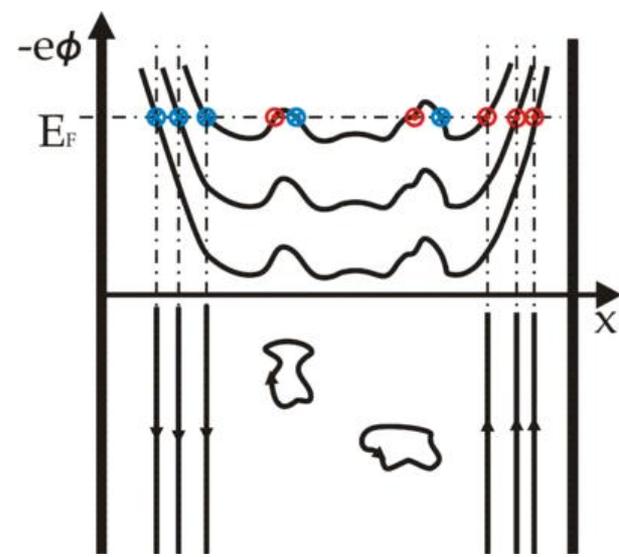
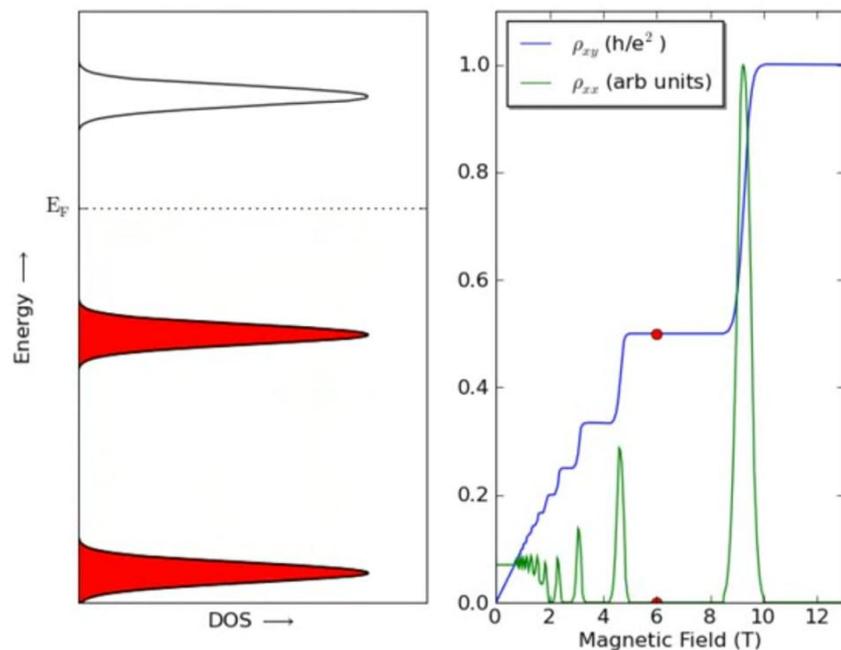
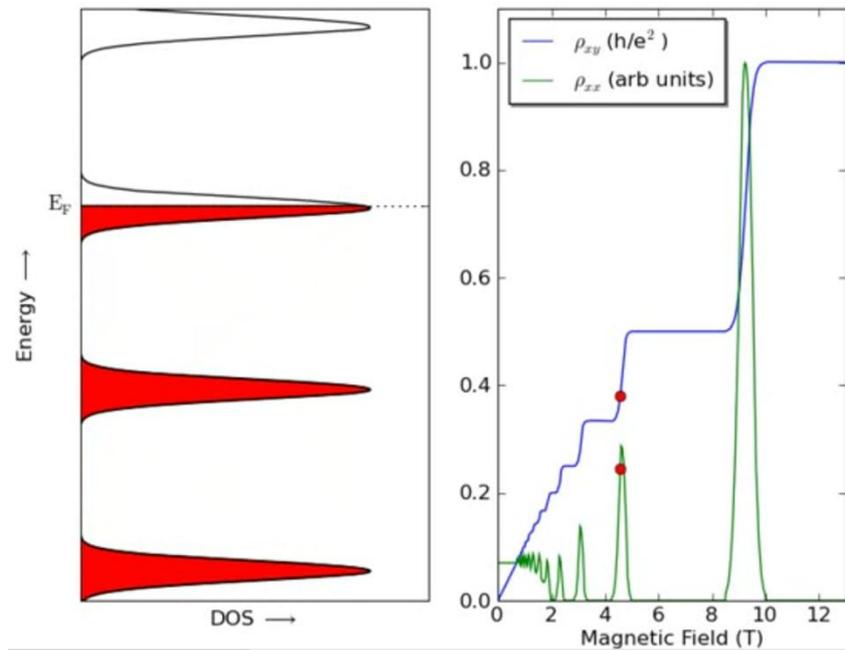
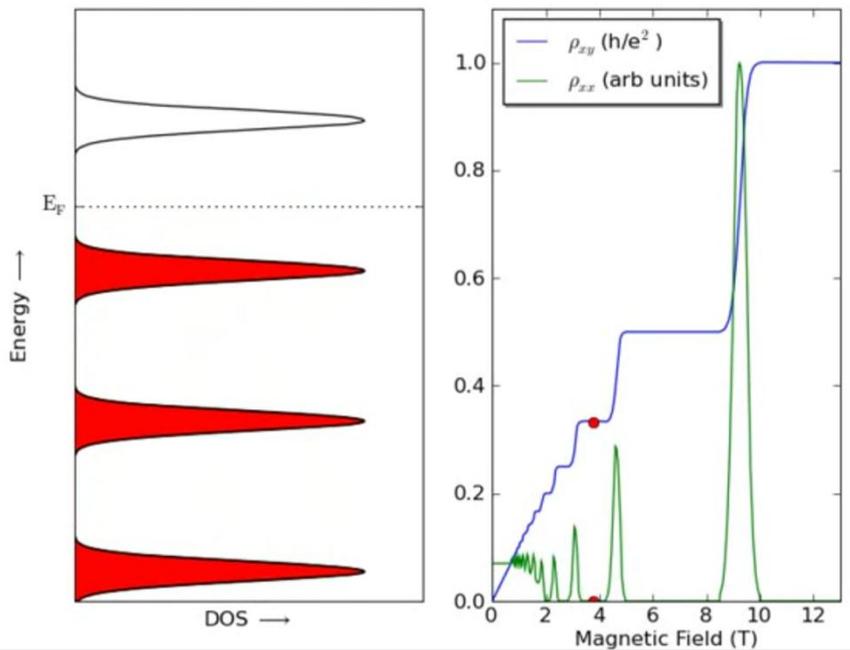
# Квантовый эффект Холла и топология: история

- Открытие эффекта Холла (Hall, 1879);
- Открытие квантового эффекта Холла (v. Klitzing, Dorda, Pepper, 1980);
- Обобщение эффекта Ааронова-Бома (Berry, 1980; Simon, 1983; Berry, 1984);
- Открытие дробного квантового эффекта Холла (Tsui, Störmer, Gossard, 1982);
- Квантовый эффект Холла и топология (Thouless, Kohmoto, Nightingale, Den Nijs, 1982; Thouless, 1983; Avron, Seiler, Simon, 1983);
- Попытка объяснить дробный эффект Холла (Laughlin, 1983);
- Квантовый эффект Холла и фаза Берри (Niu, Thouless, Wu, 1985; Kohmoto, 1985);
- Серия Нобелевских премий (v. Klitzing, 1985; Laughlin, Tsui, Störmer, 1998; Thouless, 2016).



Вместо классического линейного роста холловского сопротивления экспериментально наблюдается: четкие участки с постоянным сопротивлением + отсутствие продольного сопротивления (без всякой сверхпроводимости!).

$$\langle J_k \rangle_{xy} = \sigma_{xy} \epsilon_{kl} E_l \quad \rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{xy}} \quad \sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} n$$



Что требуется объяснить:

- справедливость квантования в отсутствие трансляционной инвариантности, при наличии дефектов и границы;
- почему эффект не зависит от размера образца, типа материала, температуры и силы измерительного тока;
- возможен ли дробный квантовый эффект Холла с частичным заполнением уровней Ландау (эту задачу мы не решим);
- потрясающую точность наблюдаемых эффектов;
- почему нет перенормировки от флуктуаций, хотя у других величин есть.

Условия:

- процесс адиабатический: внешние поля меняются слабо и медленно;
- нет частично заполненных уровней Ландау.

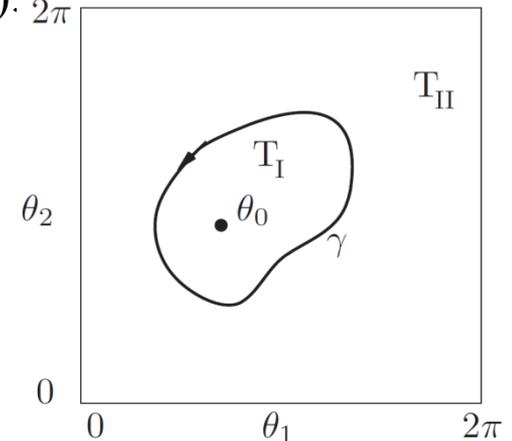
В этом случае собственное состояние гамильтониана остается собственным.

Можно показать, что в этом случае холловская проводимость – топологический инвариант (не зависимо от деталей модели электронного газа).

$$\langle (\sigma_{xy})_{\alpha} \rangle = \frac{e^2}{\hbar} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} (\partial_1 \mathcal{A}_2 - \partial_2 \mathcal{A}_1)$$

$$\mathcal{A}_k^{(\alpha)} \equiv i \left\langle \Psi_{\vec{\theta}}^{(\alpha)} \left| \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right| \Psi_{\vec{\theta}}^{(\alpha)} \right\rangle$$

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} n$$



# И за что же Премия?

Открыты новые фазы и состояния вещества и фазовые переходы нового типа, свойства которых не объясняются стандартными аргументами без привлечения топологических свойств систем:

1. Взаимодействие топологических дефектов (вихрей) в 2D XY ферромагнетике приводят к появлению при конечной температуре квазидальнего (степенного) порядка через БКТ-переход особого типа;
2. Учет топологического вклада приводит к различному спектру возбуждений в 1D квантовой антиферромагнитной цепочке в зависимости от того, является ли спин целым или полуцелым; в последнем случае наблюдаются бесщелевые моды без привлечения теоремы Голдстоуна;
3. Возникновение топологической фазы Берри в 2D квантовом эффекте Холла приводит к строгому квантованию поперечной проводимости и возникновению краевых состояний с нулевым продольным сопротивлением.