

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Томский политехнический университет»
Юргинский технологический институт

И.Ф. Боровиков, С.В. Щербинин, А.Б. Ефременков

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ
ГОРНОГО И МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО
ПРОИЗВОДСТВА**

Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области горного дела в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки "Горное дело" и специальности "Горные машины и оборудование" направления подготовки "Технологические машины и оборудование"

Издательство Томского политехнического университета
Томск 2007

ББК 22.151.3

УДК 515

Б 90

Б 90 Начертательная геометрия в примерах и задачах горного и машиностроительного производства: учебное пособие/ И.Ф. Боровиков, С.В. Щербинин, А.Б. Ефременков. – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2007. - 324с.

ISBN

В пособии изложены все значимые разделы дисциплины "Начертательная геометрия". Оно включает краткое изложение теоретических положений дисциплины, задачи для аудиторной и самостоятельной работ, индивидуальные графические задания и контрольные работы. Предназначено для студентов специальности "Горные машины и оборудование". Может быть использовано студентами других специальностей.

ББК 22.151.3

УДК 515

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор Московского авиационного
института

Ю.В. Денискин

Доктор технических наук, заведующий лабораторией импульсных технологий сварки и наплавки ИФПМ СО РАН

Ю.Н. Сараев

© Томский политехнический университет, 2007

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2007

© И.Ф. Боровиков, С.В. Щербинин, А.Б. Ефременков, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	7
Принятые обозначения	9
1. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЧЕРТЕЖЕЙ	10
1.1. Форматы (ГОСТ 2.301-68)	10
1.2. Масштабы (ГОСТ 2.302-68)	11
1.3. Линии (ГОСТ 2.303-68)	12
1.4. Шрифты чертежные (ГОСТ 2.304-81)	14
1.5. Оформление титульного листа	19
1.6. Контрольные вопросы.....	20
2. ЗАДАНИЕ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ НА ЭПЮРЕ МОНЖА	21
2.1. Краткие теоретические сведения	21
2.2. Задачи для аудиторных занятий	34
2.3. Задачи для самостоятельной работы	36
2.4. Задачи повышенной сложности	37
2.5. Контрольная работа №1	37
2.6. Контрольные вопросы	38
3. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ	40
3.1. Общие понятия	40
3.2. Прямоугольные изометрическая и диметрическая проекции.....	42
3.3. Задачи для аудиторных занятий	44
3.4. Задачи для самостоятельной работы	45
3.5. Контрольные вопросы	46
4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ	48
4.1. Краткие теоретические сведения	48
4.2. Задачи для аудиторных занятий	57
4.3. Задачи для самостоятельной работы	63
4.4. Задачи повышенной сложности	67
4.5. Контрольная работа №2	68
4.6. Содержание задания №1 "Первая позиционная задача"	69
4.7. Требования к оформлению задания	69
4.8. Порядок сдачи работы	69
4.9. Варианты индивидуальных заданий к работе №1	71
4.10. Контрольные вопросы	74
5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.....	76
5.1. Краткие теоретические сведения.....	76
5.2. Задачи для аудиторных занятий.....	83

5.3.	Задачи для самостоятельной работы.....	85
5.4.	Задачи повышенной сложности.....	88
5.5.	Содержание задания №2 "Метрические задачи".....	89
5.6.	Оформление задания №2	89
5.7.	Варианты индивидуальных заданий к работе№2	91
5.8.	Контрольные вопросы	96
6	СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА	97
6.1.	Краткие теоретические сведения	97
6.1.1.	Общие сведения	97
6.1.2.	Способ замены плоскостей проекций	97
6.1.3.	Способ плоскопараллельного движения	99
6.1.4.	Способ вращения вокруг проецирующей прямой ..	100
6.2.	Задачи для аудиторных занятий	101
6.2.1.	Способ замены плоскостей проекций	101
6.2.2.	Способ плоскопараллельного движения	103
6.2.3.	Способ вращения вокруг проецирующей прямой	104
6.3.	Задачи для самостоятельной работы	105
6.4.	Задачи повышенной сложности	107
6.5.	Контрольная работа №3	108
6.6.	Содержание задания №3 "Способы преобразования чер- тежа"	109
6.7.	Требования к оформлению задания	109
6.8.	Варианты индивидуальных заданий к работе №3 ...	111
6.9.	Контрольные вопросы к заданию №3	115
7	КРИВЫЕ ЛИНИИ И ОБВОДЫ	116
7.1.	Основные понятия и определения	116
7.2.	Дифференциальные характеристики кривых линий ...	117
7.3.	Точки плоской кривой	119
7.4.	Пространственные кривые	120
7.5.	Конические сечения	121
7.6.	Прямоугольная проекция окружности	126
7.7.	Обводы	133
7.7.1.	Радиусографический способ построения обводов	134
7.7.2.	Аналитический способ задания обводов сплайн- функциями	136
7.8.	Задачи для аудиторных занятий	139
7.9.	Задачи для самостоятельной работы	141
7.10.	Контрольные вопросы	142
8	ПОВЕРХНОСТИ	144
8.1.	Основные понятия и определения	144
8.2.	Поверхности вращения	147

8.3.	Способы задания поверхностей вращения	150
8.4.	Примеры поверхностей вращения	151
8.4.1.	Тор	151
8.4.2.	Сфера	151
8.4.3.	Эллипсоид вращения	153
8.4.4.	Параболоид вращения	154
8.4.5.	Гиперболоид вращения	154
8.4.6.	Линейчатые поверхности вращения	155
8.5.	Линейчатые поверхности	156
8.5.1.	Общие сведения о линейчатых поверхностях	156
8.5.2.	Конические и цилиндрические поверхности	157
8.5.3.	Торсовые поверхности	159
8.5.4.	Поверхности Каталана	159
8.5.5.	Инженерный способ задания линейчатых поверхностей	162
8.6.	Винтовые поверхности	163
8.7.	Циклические поверхности	167
8.8.	Линии на поверхности	168
8.9.	Задачи для аудиторных занятий	171
8.10.	Задачи для самостоятельной работы	174
8.11.	Задачи повышенной сложности	177
8.12.	Контрольные вопросы	178
9.	ОБОБЩЕННЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ	180
9.1.	Первая обобщенная позиционная задача	180
9.2.	Взаимное пересечение поверхностей	183
9.2.1.	Способ плоскостей уровня	184
9.2.2.	Способ концентрических сфер	187
9.2.3.	Способ вращающейся плоскости	190
9.2.4.	Способ проецирующих цилиндров	192
9.3.	Частные случаи пересечения поверхностей	194
9.4.	Построение очерковых образующих поверхности конуса...	197
9.5.	Задачи для аудиторных занятий	199
9.6.	Задачи для самостоятельной работы	201
9.7.	Задачи повышенной сложности	204
9.8.	Контрольная работа № 4	205
9.9.	Содержание задания № 4 "Обобщенные позиционные задачи"	221
9.10.	Оформление задания № 4	221
9.11.	Варианты индивидуальных заданий к работе № 4	223
9.12.	Контрольные вопросы	226
10.	ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	228
11.	ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕО- МЕТРИИ В ГОРНОМ ДЕЛЕ И КОНСТРУИРОВАНИИ ГОР- НОШАХТНОГО ОБОРУДОВАНИЯ	292

11.1. Некоторые специальные термины	293
11.2. Задание геометрических образов на комплексном чертеже ...	294
11.3. Позиционные задачи	297
11.4. Метрические задачи	301
12. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	310
12.1. Комплексные чертежи точек, прямых, плоскостей	311
12.2. Позиционные задачи	314
12.3. Метрические задачи	318
12.4. Способы преобразования чертежа	324
12.5. Поверхности	327
Список литературы	329
Предметный указатель	330

Предисловие

Начертательная геометрия является одной из учебных дисциплин, составляющих фундамент инженерной подготовки специалистов, и как никакая другая дисциплина способствует развитию у будущих специалистов пространственного представления. Развитие способностей мыслить - главное условие для созидательной творческой деятельности. Развитие мыслительного процесса является фундаментом классического образования и помогает всестороннему развитию человеческого интеллекта.

Качественный учебный процесс невозможен без хорошей учебной литературы. Учебная литература должна служить раскрытию образовательного стандарта в логике «образовательный стандарт – учебный план – программа – учебная литература». Современный учебник по начертательной геометрии, на наш взгляд, должен отвечать следующим требованиям:

- быть доступным пониманию студентов;
- обеспечивать обучение по нескольким уровням;
- отражать современное состояние научных исследований по геометрическому моделированию;

К сожалению, учебников, соответствующих этим требованиям, на данный момент практически нет. Переиздаваемая учебная литература устарела как по содержанию, так и по подходам в изложении материала.

Предлагаемое учебное пособие соответствует требованиям образовательного стандарта, с другой – учитывает условия конкретного образовательного учреждения. В первую очередь, оно рассчитано на студентов, обучающихся на машиностроительных специальностях, в том

числе по специальности «Горные машины и оборудование». Инженеры данной отрасли промышленности должны иметь хорошее пространственное представление, что особенно важно при быстром поиске правильных технических решений. Кроме того, они должны хорошо знать методы формообразования сложных изделий, основанные на способах конструирования кривых и поверхностей, а также графические методы решения геометрических задач. Методы начертательной геометрии являются основой для автоматизации воспроизведения сложных технических форм.

В пособии в краткой форме дается теоретический материал, задачи для аудиторной и самостоятельной работ, содержание индивидуальных графических заданий, образцы выполнения, контрольные вопросы. Аналитический способ задания исходных геометрических образов для индивидуальных графических заданий позволяет, во-первых, обеспечить межпредметную связь с курсом высшей математики, во-вторых, обеспечить возможность аналитического решения геометрических задач. Заключительная глава пособия содержит тесты по всем основным разделам курса. Авторы выражают благодарность старшему преподавателю Юргинского технологического института Томского политехнического университета Логвиновой Н.А. за помощь, оказанную в подготовке тестов и адаптации их к контролируемому устройству «Символ»

Безусловно, данное пособие не исчерпывает всего содержания начертательной геометрии. Авторы не пытались заменить пособием учебники. Напротив, только при их совместном использовании возможно хорошее усвоение учебного материала. Для многих студентов начертательная геометрия является сложной дисциплиной. Авторы будут рады, если данное пособие поможет студентам в ее изучении.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В настоящем учебном пособии используются общепринятые в математике обозначения и символы.

Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, D, \dots или арабскими цифрами: $1, 2, 3, \dots$.

Прямые и кривые линии обозначаются строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, \dots .

Поверхности обозначаются прописными буквами греческого алфавита: $\Delta, \Lambda, \Sigma, \dots$.

Углы обозначаются строчными буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \chi, \dots$.

В учебном пособии используются следующие символы:

\in – принадлежность точки геометрической фигуре, например, $A \in m$ – точка A принадлежит кривой m ;

\subset – принадлежность одной геометрической фигуры другой фигуре, например, $k \subset \Lambda$ – кривая k принадлежит поверхности Λ ;

\cap – пересечение геометрических фигур, например, $A = m \cap \Delta$ – точка A есть результат пересечения прямой m с плоскостью Δ ;

$=$ – совпадение, результат операции, присвоение, например, $A_1 = B_1$ – горизонтальные проекции точек A и B совпадают;

\parallel – параллельность, например, $m \parallel \Gamma$ – прямая m параллельна плоскости Γ ;

\perp – перпендикулярность, например, $p \perp \Pi_1$ – прямая p перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций Π_1 ;

\div – скрещивающиеся прямые, например, $f \div k$ – прямые f и k скрещиваются;

\Rightarrow – логическое следствие, например, $a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2$ – если прямые a и b параллельны, то будут параллельны и их проекции;

$\sphericalangle, \hat{}$ – обозначение углов, например, $\sphericalangle ABC$ – угол с вершиной в точке B , $\widehat{m\Delta}$ – угол между прямой m и плоскостью Δ ;

\emptyset – диаметр окружности или сферы, например, $\emptyset m$ – диаметр окружности m .

Перечеркнутые наклонной чертой символы означают отрицание, например, $A \notin \Theta$ – точка A не принадлежит поверхности Θ .

На чертеже перпендикулярные прямые обозначают следующим образом:



1. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЧЕРТЕЖЕЙ

1.1. Форматы (ГОСТ 2.301–68)

Основные форматы: А4 (210x297), А3 (297x420), А2 (420x594), А1(594x841), А0(841x1189). Каждый последующий больший формат получается удвоением короткой стороны предыдущего формата. Площадь формата А0 равна 1м². Допускается применение формата А5 (148x210).

Дополнительные форматы образуются увеличением коротких сторон основных форматов в целое число раз. Например, формат А4х5 имеет размеры 297x1050, А3х4 – 420x1188.

Внешняя рамка, определяющая размеры формата, выполняется тонкой сплошной линией. Рамка поля чертежа слева от внешней рамки отстоит на расстоянии 20 мм от всех остальных сторон – на 5мм и выполняется сплошной основной линией (рис.1.1). В правом нижнем углу помещается основная надпись, выполняемая по ГОСТ 2.104–68 (рис.1.2). **На формате А4 основную надпись располагают только вдоль короткой стороны.** На рис. 1.3 представлен пример заполнения граф основной надписи при оформлении учебных чертежей.

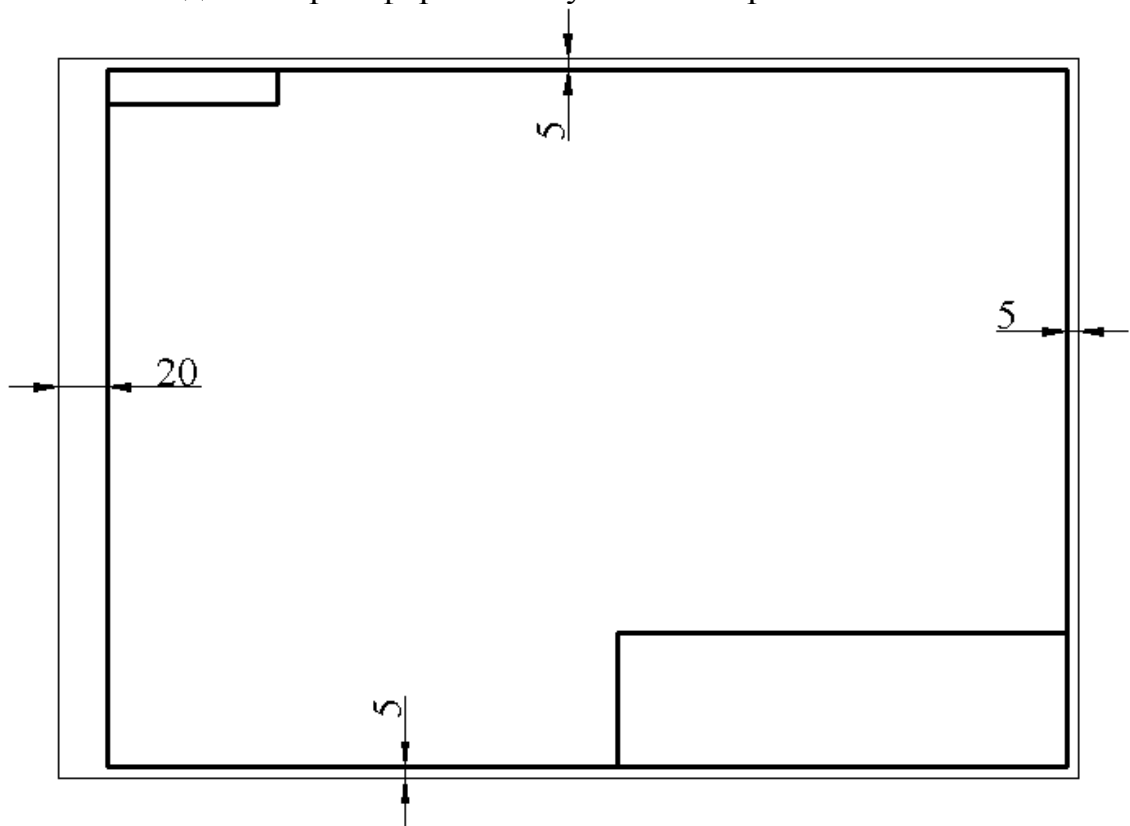


Рис.1.1

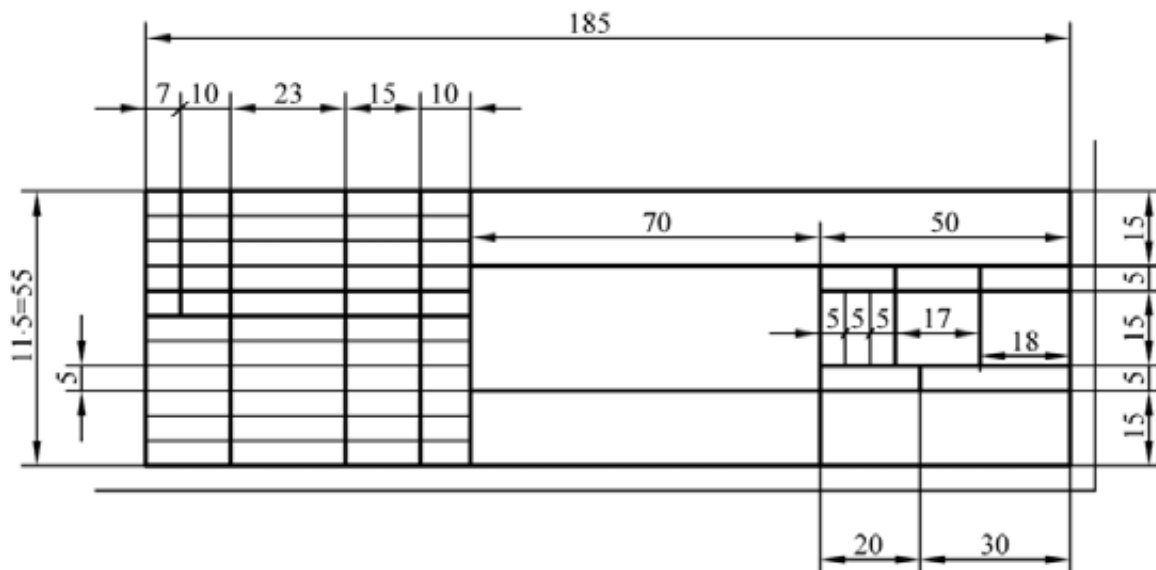


Рис.1.2

					ФЮРА 001.012.000		
				Первая позиционная задача	Лист	Масса	Масштаб
Изм	Лист	№ докум	Подпись		Дата	у	
Разраб		Иванов И.И.	<i>Иванов</i>	4.01.08	Лист	Листов 1	
Пров		Петров П.П.	<i>Петров</i>	7.01.08	ЮТИ ТПУ гр. 10800		

Рис.1.3

Кроме основной надписи на формате выполняют графу с обозначением чертежа, помещаемую в левом верхнем углу для формата А4 и форматов, больших А4, при расположении основной надписи вдоль длинной стороны листа (обозначение повернуто на 180°) или в правом верхнем углу при расположении основной надписи вдоль короткой стороны листа (обозначение повернуто на 90°).

1.2. Масштабы (ГОСТ 2.302–68)

Масштабом называется отношение линейных размеров изображения на чертеже к действительным размерам изделия.

Масштабы уменьшения: 1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10; 1:15; 1:20; 1:25; 1:40; 1:50; 1:75; 1:100; 1:200; 1:400; 1:500; 1:800; 1:1000.

Масштабы увеличения: 2:1; 2,5:1; 4:1; 5:1; 10:1; 20:1; 40:1; 50:1; 100:1.

Натуральная величина: 1:1.

Допускается применять масштабы увеличения $(100n):1$, где n – целое число.

Масштаб указывается в предназначенной для этого графе основной надписи по типу 1:1; 5:1 и т.д. Если какое-либо изображение выполнено в масштабе, отличном от указанного в основной надписи, то масштаб указывают непосредственно после надписи, относящейся к изображению. Например: А(2:1); Б–Б (1:2).

1.3. Линии (ГОСТ 2.303–68)




Линии чертежей должны выполняться в соответствии с ГОСТ 2.303–68 (табл.1.1).

Толщина s сплошной основной линии должна быть равна 0,5– 1,4 мм в зависимости от величины и сложности, а также от формата чертежа.

При выполнении чертежа необходимо помнить следующее:

- длина штрихов в штриховых и штрих–пунктирных линиях выбирается в зависимости от величины изображения;
- штрихи в линии должны быть приблизительно одинаковой длины;
- промежутки между штрихами в линии должны быть приблизительно одинаковой длины;
- штрих–пунктирные линии должны пересекаться и заканчиваться штрихами;
- штрих–пунктирные линии, применяемые в качестве центровых, следует заменять сплошными тонкими линиями, если диаметр окружности или размеры других геометрических фигур в изображении менее 12 мм.

Таблица 1.1

№№ п.п.	Наименование	Начертание	Толщина линии по отношению к толщине основной линии	Основное назначение
1.	Сплошная толстая основная		s	<p>Линии видимого контура.</p> <p>Линии перехода видимые.</p> <p>Линии контура сечения (вынесенного и входящего в состав разреза).</p>
2.	Сплошная тонкая		От $\frac{s}{3}$ до $\frac{s}{2}$	<p>Линии контура наложенного сечения.</p> <p>Линии размерные и выносные.</p> <p>Линии штриховки.</p> <p>Линии-выноски.</p>
3.	Сплошная волнистая			<p>Линии обрыва.</p> <p>Линии разграничения вида и разреза.</p>

Продолжение таблицы 1.1

№№ п.п.	Наименование	Начертание	Толщина линии по отношению к толщине основной линии	Основное назначение
4.	Штрих-пунктирная тонкая			<p>Линии осевые и центровые.</p> <p>Линии сечений, являющиеся осями симметрии для наложенных или вынесенных сечений.</p>
5.	Штриховая			<p>Линии невидимого контура.</p> <p>Линии перехода невидимые.</p>
6.	Разомкнутая		От s до $1\frac{1}{2}s$	Линии сечений.

1.4. Шрифты чертежные (ГОСТ 2.304–81)

ГОСТ 2.304–81 устанавливает чертежные шрифты для надписей, выполняемых на чертежах всех отраслей промышленности и строительства. Стандарт предусматривает следующие размеры шрифтов: (1,8); 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40. Размеры шрифтов определяются высотой h прописных букв в миллиметрах, измеряемой по направлению, перпендикулярному к основанию строки. Применение шрифта размером 1,8 не рекомендуется и допускается только для шрифтов типа Б. Высота s строчных букв определяется из отношения их высоты (без отрезков) к

размеру шрифта h (для шрифта типа А – $c=(10/14)h$, для шрифта типа Б – $c=(7/10)h$).

Устанавливаются следующие типы шрифта:

- тип А без наклона ($d=1/14 h$) с параметрами, приведенными в таблице 1.2;
- тип А с наклоном около 75^0 ($d=1/14 h$) с параметрами, приведенными в таблице 1.2;
- тип Б без наклона ($d=1/10 h$) с параметрами, приведенными в таблице 1.3;
- тип Б с наклоном около 75^0 ($d=1/10 h$) с параметрами, приведенными в таблице 1.3.

Таблица 1.2

Параметры шрифтов	Обозначение	Относительный размер		Размеры, мм					
				2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0
Размер шрифта – высота прописных букв	h	$(14/14)h$	$14d$						
Высота строчных букв	c	$(10/14)h$	$10d$	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0
Расстояние между буквами	a	$(2/14)h$	$2d$	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0
Минимальное расстояние между основаниями строк	b	$(22/14)h$	$22d$	4,0	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0
Минимальное расстояние между словами	e	$(6/14)h$	$6d$	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0
Толщина линий шрифта	d	$(1/14)h$		0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0

Таблица 1.3

Параметры шрифтов	Обозначение	Относительный размер	Размеры, мм						
			2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	
Размер шрифта – высота прописных букв	h	$(10/10)h$ $10d$							
Высота строчных букв	c	$(7/10)h$ $7d$	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	
Расстояние между буквами	a	$(2/10)h$ $2d$	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	
Минимальное расстояние между основаниями строк	b	$(17/10)h$ $17d$	4,3	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	
Минимальное расстояние между словами	e	$(6/10)h$ $6d$	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	
Толщина линий шрифта	d	$(1/10)h$	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	

Начертания букв русского алфавита приведены для прописных букв шрифта типа А с наклоном на рис.1.4, для строчных букв шрифта типа А с наклоном на рис.1.5; для прописных букв шрифта типа Б без наклона – на рис. 1.6, для строчных букв шрифта типа Б без наклона – на рис. 1.7, арабских цифр – на рис. 1.8, римских цифр – на рис. 1.9, знаков – на рис.1.10.



Рис. 1.4



Рис. 1.5



Рис. 1.6



Рис. 1.7

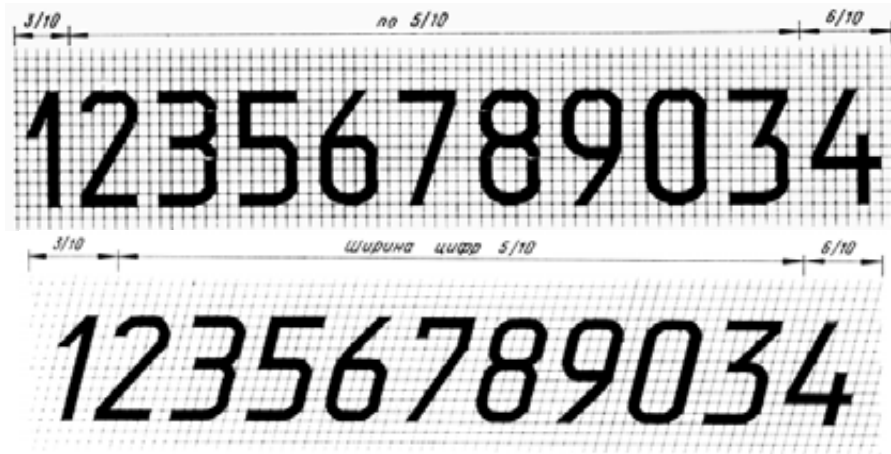


Рис. 1.8

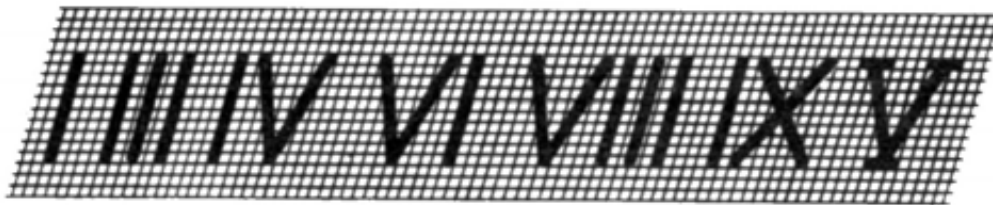


Рис. 1.9

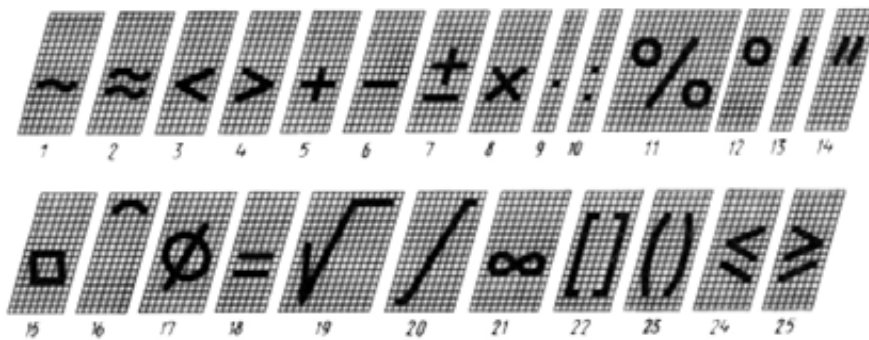


Рис. 1.10

1.5. Оформление титульного листа

Для приобретения навыков оформления конструкторских документов чертежным шрифтом, студенты выполняют домашнюю работу "Титульный лист" (формат А3). Образец выполнения данной работы представлен на рис. 1.11.



Рис.1.11

1.6. Контрольные вопросы

- 1.6.1. Перечислите основные форматы.
- 1.6.2. Как образуются дополнительные форматы?
- 1.6.3. Сколько форматов А4 содержится в формате А0?
- 1.6.4. Сколько форматов А4 содержится в формате А1х4?
- 1.6.5. Как проводится рамка поля чертежа?
- 1.6.6. В каком месте чертежа располагают основную надпись?
- 1.6.7. Допускается ли использование произвольных масштабов изображения?
- 1.6.8. Какие размеры проставляют на чертеже, выполняемом в масштабе, отличном от масштаба 1:1?
- 1.6.9. Перечислите основные типы линий, применяемых при выполнении технических чертежей.
- 1.6.10. Какой должна быть толщина сплошной основной линии?
- 1.6.11. Чем определяется размер шрифта?
- 1.6.12. Чем отличаются шрифты типов А и Б?

2. ЗАДАНИЕ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

2.1. Краткие теоретические сведения

Основным методом начертательной геометрии является метод проецирования. Широкое применение получили *центральное и параллельное проецирование*.

При центральном проецировании (рис. 2.1) задается центр проецирования S и плоскость проекций Π_i . Если некоторую точку пространства A соединить прямой с S и найти точку A_i пересечения проецирующей прямой SA с Π_i , то A_i будет являться центральной проекцией точки A .

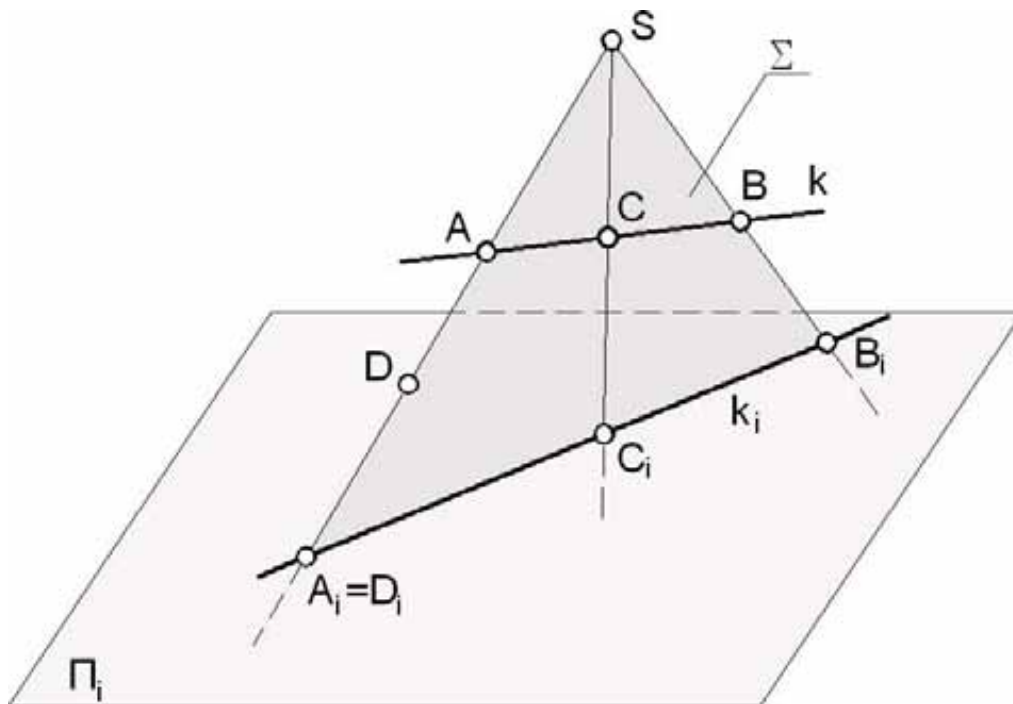


Рис.2.1

Основные свойства центрального проецирования:

- 1) точка проецируется в точку ($A \rightarrow A_i$);
- 2) прямая проецируется в прямую ($k \rightarrow k_i$);
- 3) сохраняется инцидентность (принадлежность), например, если $C \in k$, то $C_i \in k_i$.

Все точки проецирующей прямой имеют одну и ту же центральную проекцию. Например, точки A и D проецируются в одну и ту же точку плоскости проекций Π_i . Точки, принадлежащие одной и той же проецирующей прямой, называют **конкурирующими**.

Если центр проецирования S удалить в бесконечность, то получаем **параллельное проецирование**, при котором все проецирующие прямые параллельны заданному направлению \bar{s} (рис.2.2).

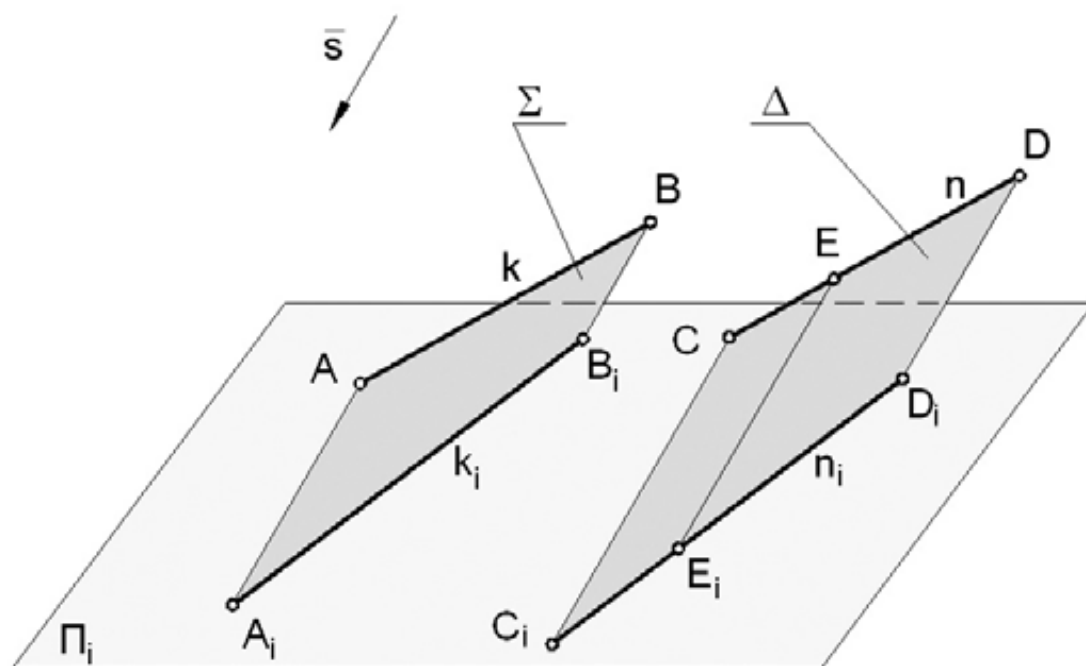


Рис. 2.2

Дополнительно к сформулированным свойствам центрального проецирования параллельное проецирование имеет еще два свойства:

4) сохраняется параллельность, то есть если $k \parallel n$, то $k_i \parallel n_i$;

5) сохраняется простое отношение трех точек, то есть

$$(CDE) = (C_i D_i E_i) \text{ или } \frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|C_i E_i|}{|E_i D_i|}.$$

Параллельное проецирование называется **прямоугольным** или **ортогональным**, если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций. Ортогональное проецирование лежит в основе построения машиностроительных чертежей.

Отнесем некоторую точку A к системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей Π_1, Π_2 , которые называют соответственно **горизонтальной и фронтальной плоскостями** проекций. Прямая Ox пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 называется осью проекций. Спроецировав

точку ортогонально на плоскости проекций, получаем **горизонтальную** A_1 и **фронтальную** A_2 проекции (рис.2.3). Совмещая плоскость Π_1 с плоскостью Π_2 , поворотом вокруг оси Ox (рис. 2.4), получаем двухкартинный эпюр Монжа (комплексный чертеж) (рис.2.5). Проекция A_2 и A_1 расположены на прямой, перпендикулярной оси Ox . Эту прямую называют линией связи. Аппликата z_A точки A называется высотой точки A , ордината y_A – глубиной.

Горизонтальная Π_1 и фронтальная Π_2 плоскости проекций делят все пространство на четыре части – квадранты (рис. 2.6).

Для решения некоторых задач начертательной геометрии и инженерной графики недостаточно двух плоскостей проекций. В таких случаях вводят третью плоскость проекций Π_3 – **профильную**, перпендикулярную горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций (рис.2.7). Проецируя точку A ортогонально на три плоскости проекций, получают **горизонтальную** A_1 , **фронтальную** A_2 и **профильную** A_3 проекции. Совмещая плоскости Π_1 , Π_3 с плоскостью Π_2 путем их поворота вокруг осей Ox , Oz соответственно, получаем трехкартинный эпюр Монжа (рис. 2.8).

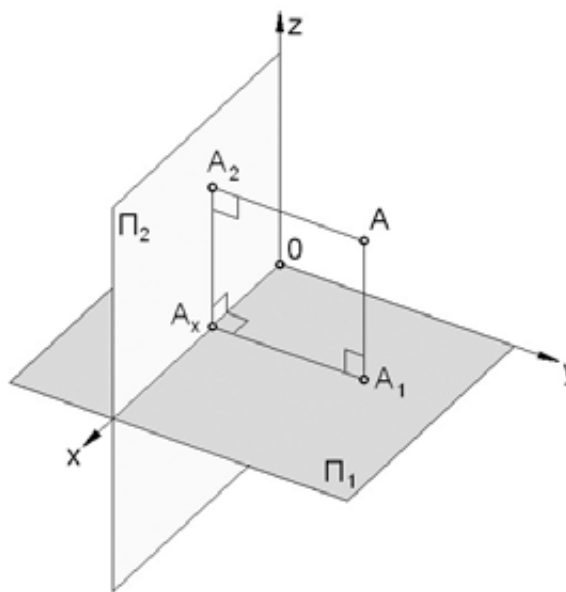


Рис. 2.3

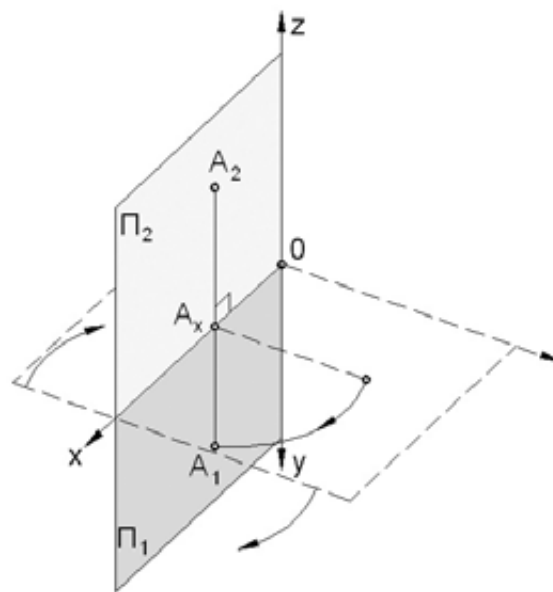


Рис. 2.4

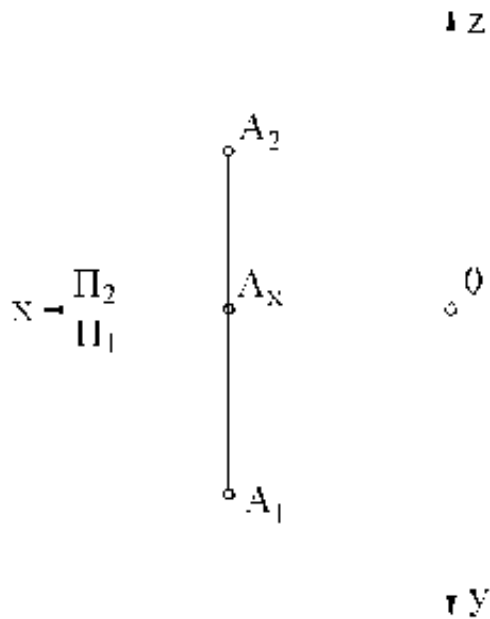


Рис. 2.5

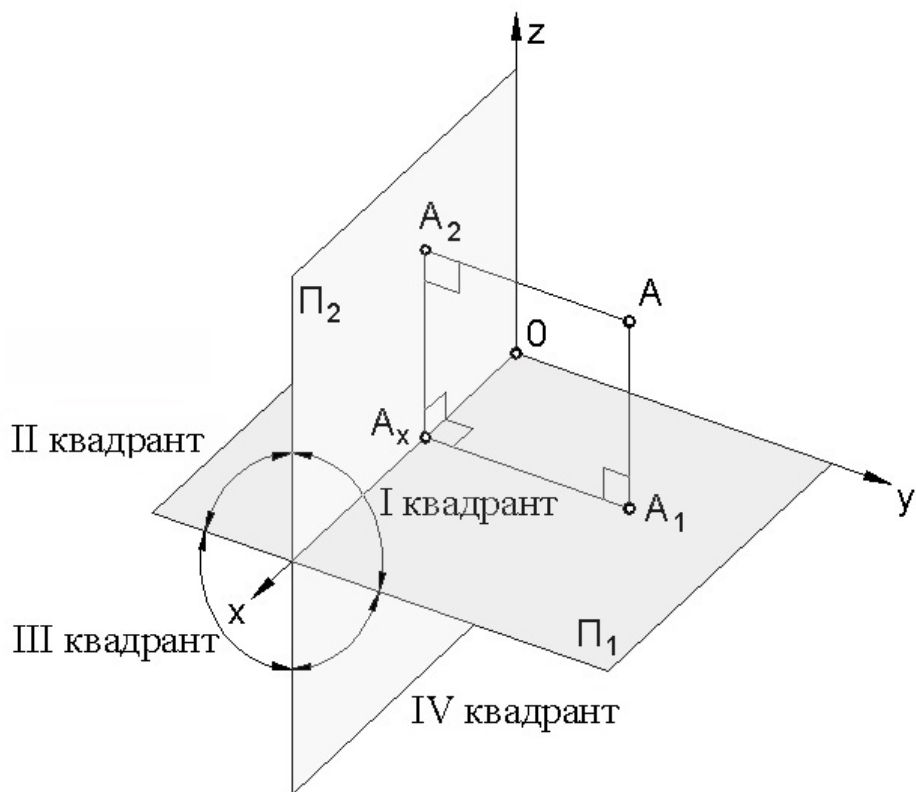


Рис. 2.6

Проекции A_2 и A_1 , A_1 и A_3 , A_2 и A_3 , расположены на прямых – линиях связи, перпендикулярных соответственно осям Ox , Oy , Oz .

Плоскости проекций Π_1, Π_2, Π_3 все пространство на 8 октантов (рис. 2.7).

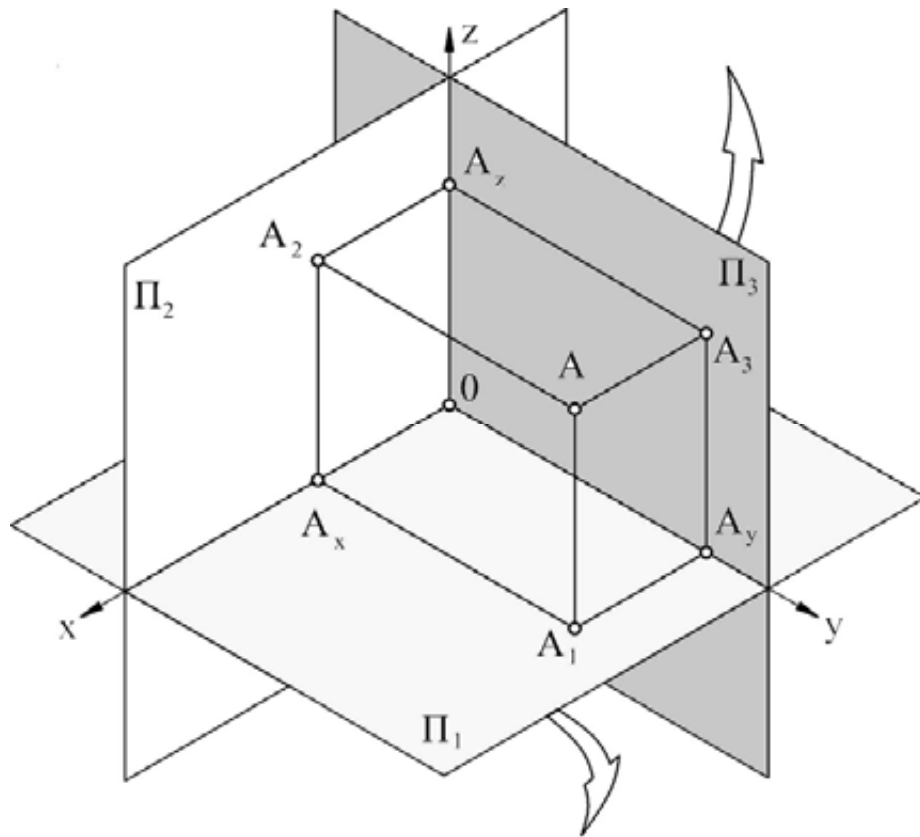


Рис. 2.7

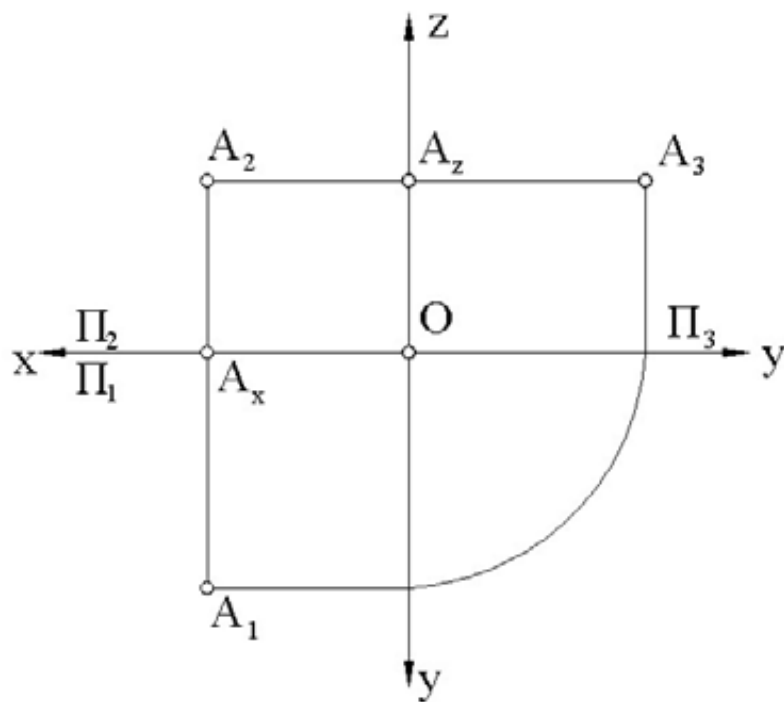


Рис. 2.8

Прямая a на эюре задается проекциями двух любых ее точек A и B (рис.2.9).

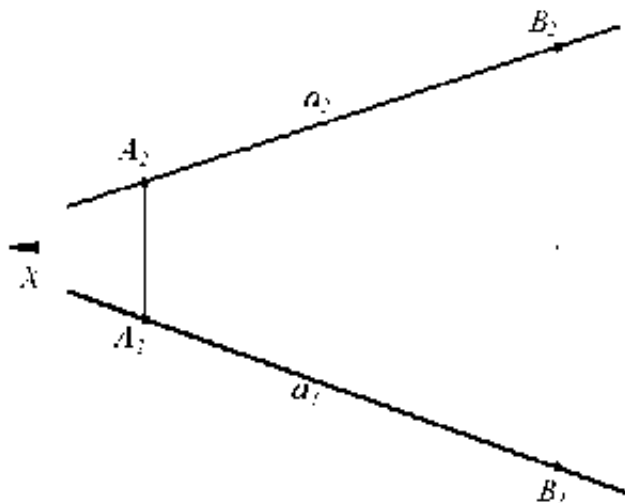


Рис. 2.9

Прямая является **прямой общего положения**, если она не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. В противном случае прямая является **прямой частного положения**. Прямая частного положения, параллельная какой-либо плоскости проекций, называется прямой уровня. Горизонтальная прямая уровня h , параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1 , называют **горизонталью** (рис.2.10, 2.11). Фронтальная прямая уровня f , параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 , называют **фронталью** (рис.2.12, 2.13).

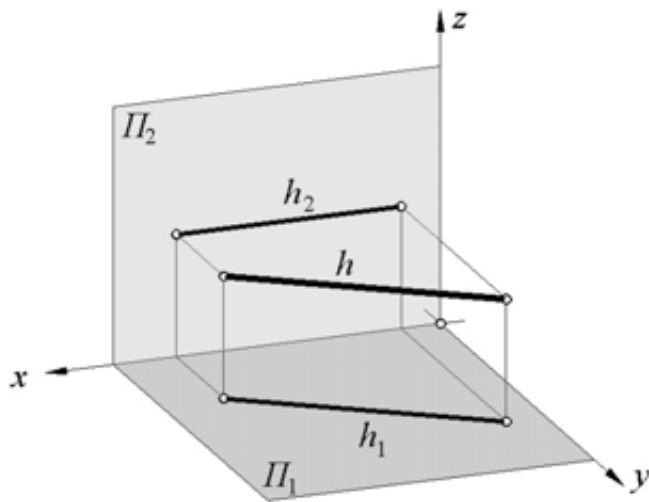


Рис. 2.10

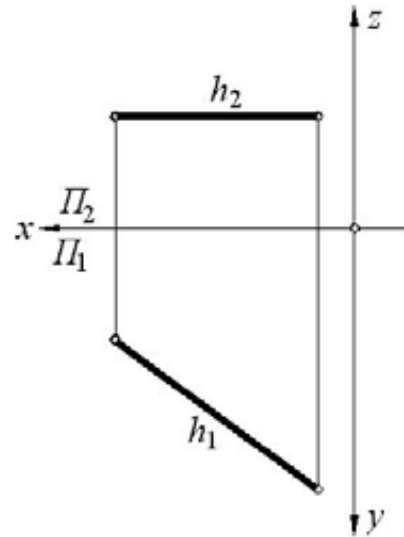


Рис. 2.11

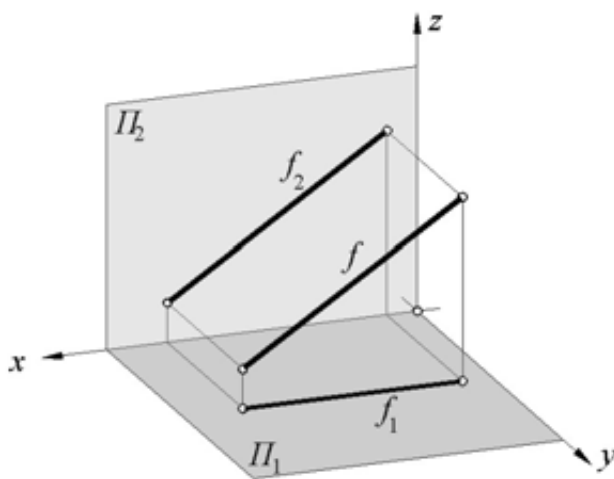


Рис.2.12

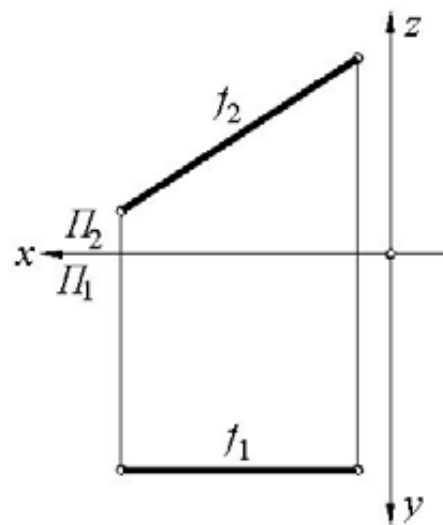


Рис. 2.13

Известно, что плоские геометрические фигуры, параллельные плоскостям проекций, проецируются на последние без искажения. Следовательно, горизонтальная проекция отрезка горизонтали является его натуральной величиной (рис. 2.14). Угол между горизонталью и фронтальной плоскостью проекций будет равен углу γ между горизонтальной проекцией h_1 горизонтали и осью Ox . Аналогично, фронтальная

проекция отрезка фронтали будет его натуральной величиной (рис.2.15), а угол β между фронталью и горизонтальной плоскостью проекций будет равен углу β между фронтальной проекцией f_2 и осью Ox .

Прямая p , параллельная профильной плоскости проекций Π_3 , называется профильной прямой уровня (рис.2.16). Причем для однозначного определения такой прямой необходимо указать две ее точки (рис.2.17). Трехпроекционный чертеж профильной прямой уровня приведен на рис. 2.18.

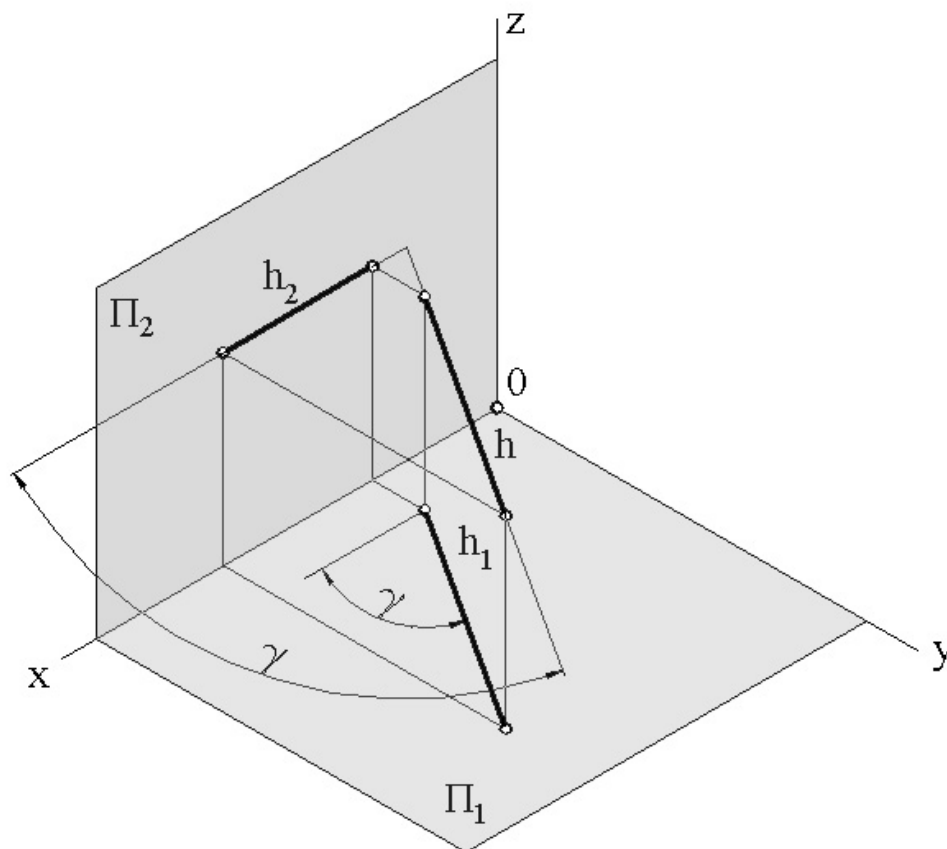


Рис. 2.14

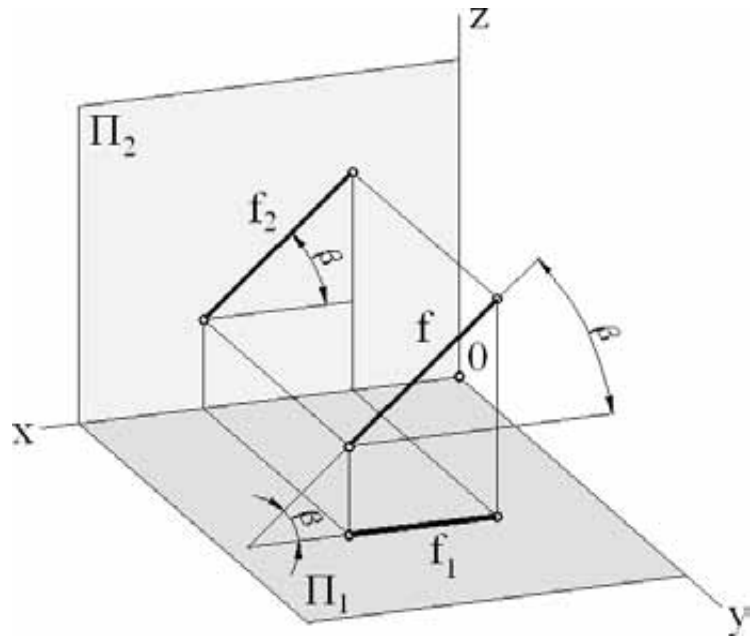


Рис. 2.15

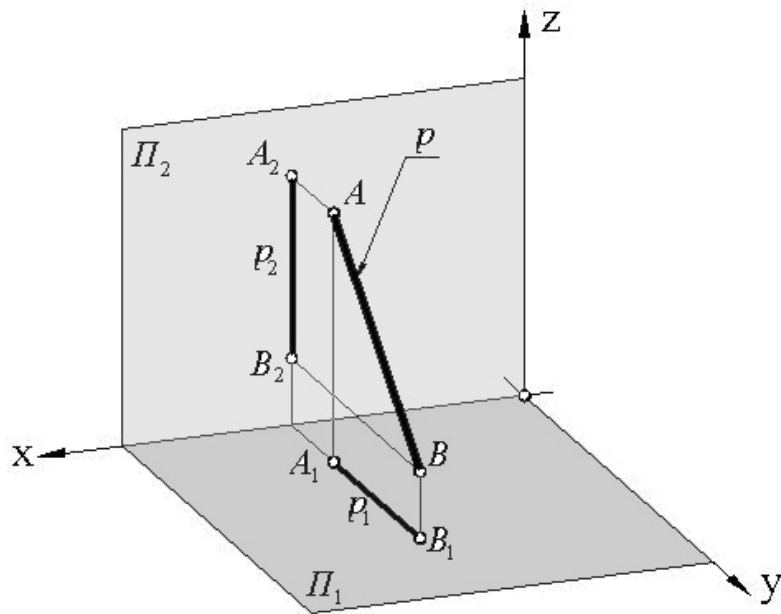


Рис. 2.16

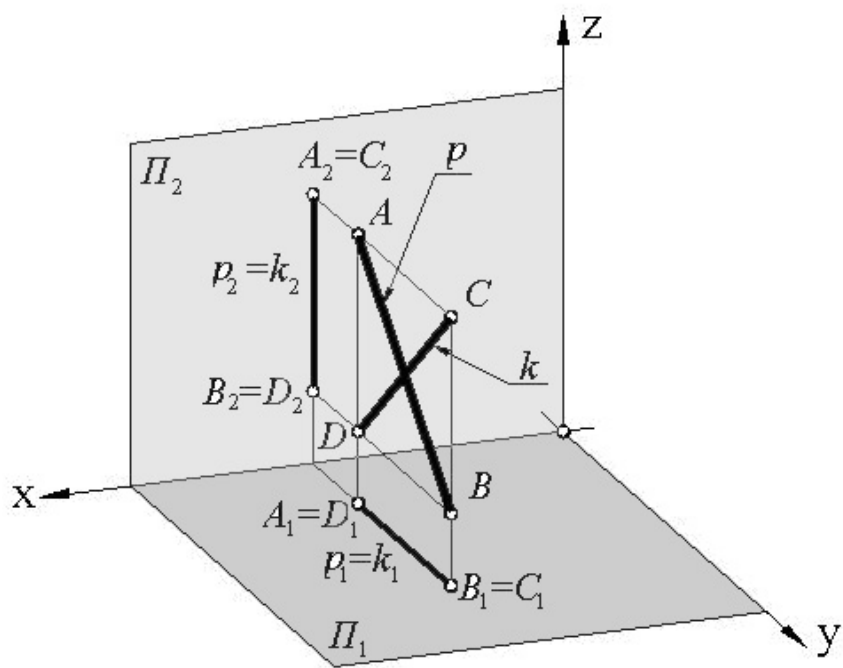


Рис. 2.17

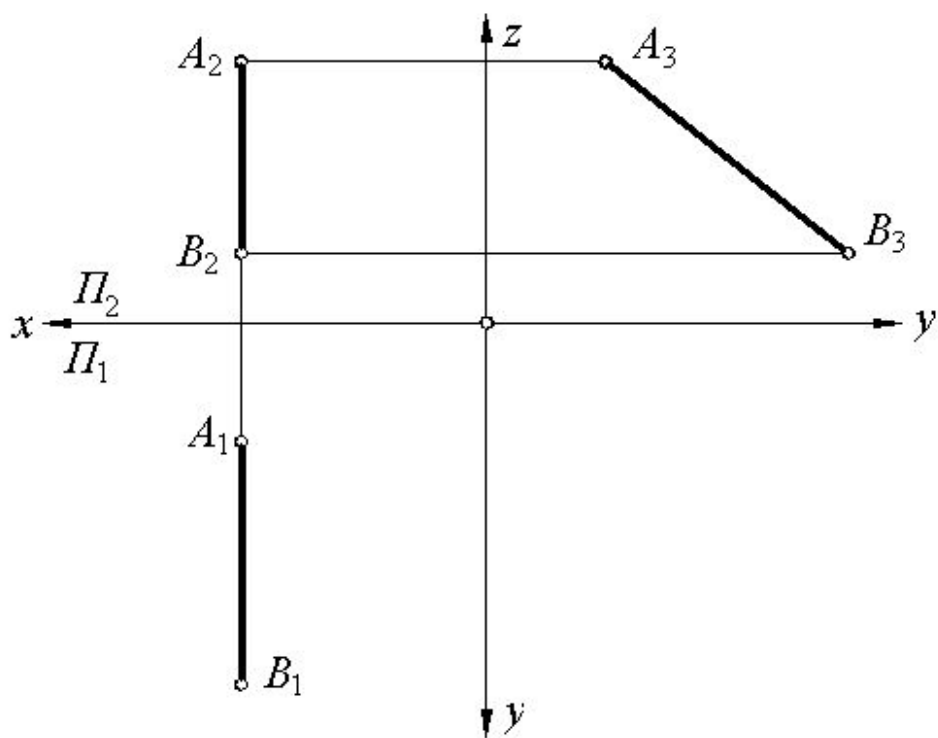


Рис. 2.18

Прямая, перпендикулярная плоскости проекций, называется проецирующей прямой. На ту плоскость проекций, которой данная прямая перпендикулярна, прямая проецируется в точку (рис.2.19, 2.20).

Плоскость на эюре задается проекциями элементов, ее определяющих (рис.2.21), а именно:

- трех точек;
- прямой и точки, не принадлежащей этой прямой;
- двух пересекающихся прямых, в том числе параллельных;
- любой плоской фигуры.

От одного способа задания можно перейти к любому другому.

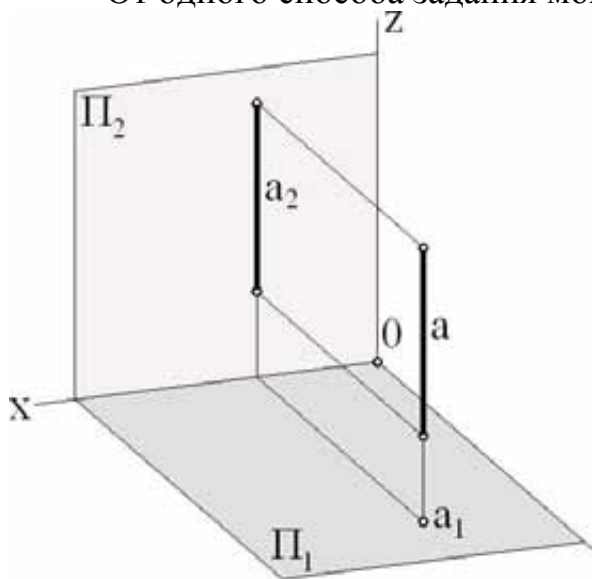


Рис. 2.19

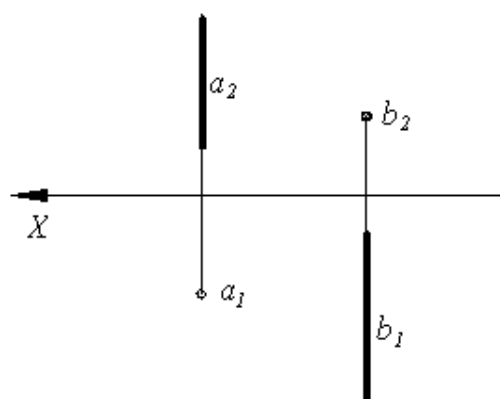


Рис. 2.20

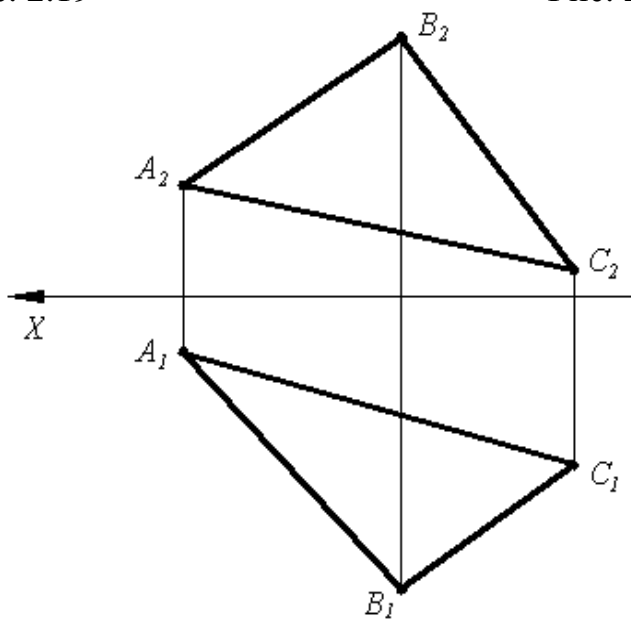


Рис. 2.21

Плоскость является *плоскостью общего положения*, если она не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. В противном случае плоскость является *плоскостью частного положения*.

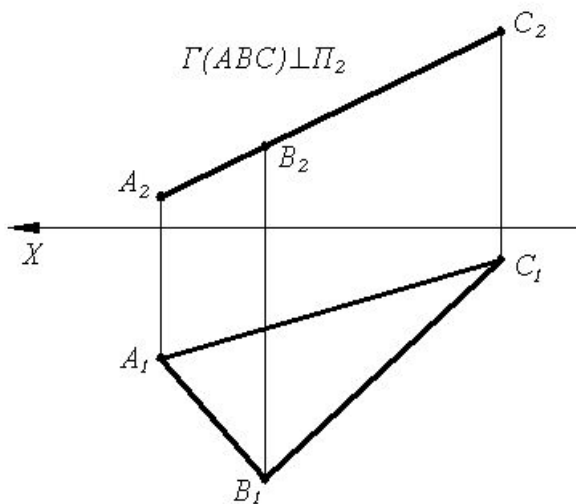


Рис. 2.22

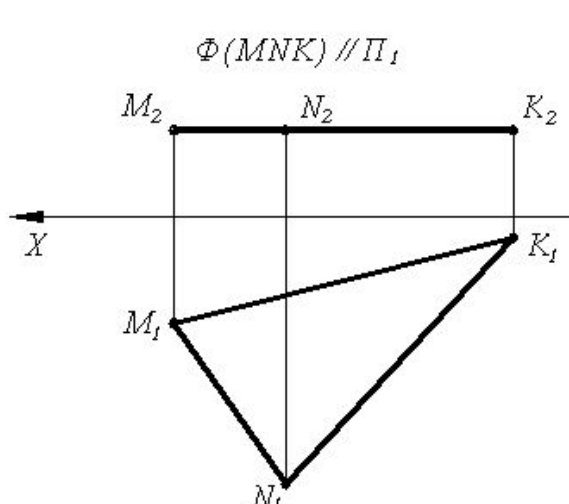


Рис. 2.23

Плоскость, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций, называется проецирующей плоскостью. На ту плоскость проекций, которой данная плоскость перпендикулярна, плоскость проецируется в прямую (рис.2.22). Плоскость, параллельная какой-либо плоскости проекций, называется плоскостью уровня (рис.2.23).

Характерными линиями плоскости являются фронталь и горизонталь (рис. 2.24)

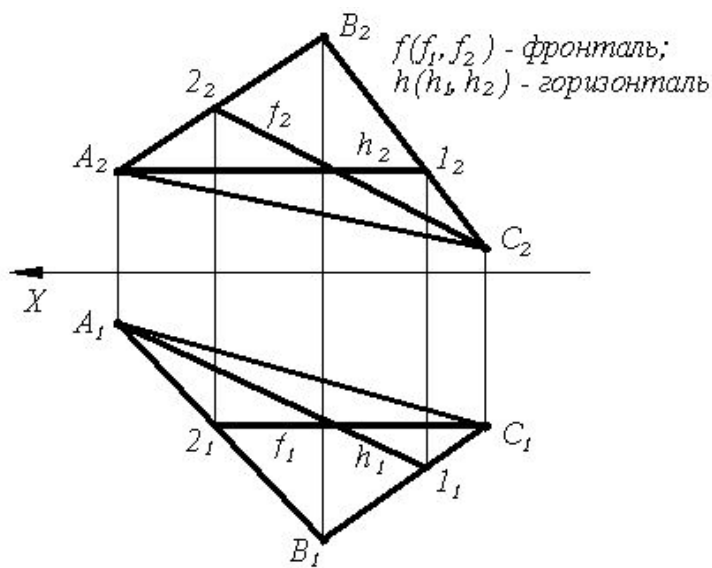


Рис. 2.24

Многогранные поверхности являются геометрическими фигурами пространства, состоящими из конечного числа плоских многоугольников (*граней*).

Общая сторона двух смежных граней называется ребром, а общая точка двух или более граней – *вершиной*. Совокупность всех вершин и ребер многогранной поверхности называется *сеткой*.

Если каждое ребро многогранной поверхности принадлежит двум ее граням, то она называется замкнутой. Тела, ограниченные замкнутыми многогранными поверхностями называются многогранниками. Если вершины и ребра многогранника находятся по одну сторону плоскости любой из его граней, то многогранник называют выпуклым. Его гранями являются выпуклые многоугольники.

Наиболее распространенными видами многогранников являются призмы, пирамиды и правильные выпуклые многогранники – тела Платона (тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр и т.д.).

Многогранник, одна грань (основание) которого есть произвольный многоугольник, а остальные грани являются треугольниками с общей вершиной, называют пирамидой (рис.2.25). Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника, то пирамиду называют правильной. Часть пирамиды, заключенная между основанием и плоскостью, пересекающей боковые ребра и параллельной основанию, называется усеченной пирамидой.

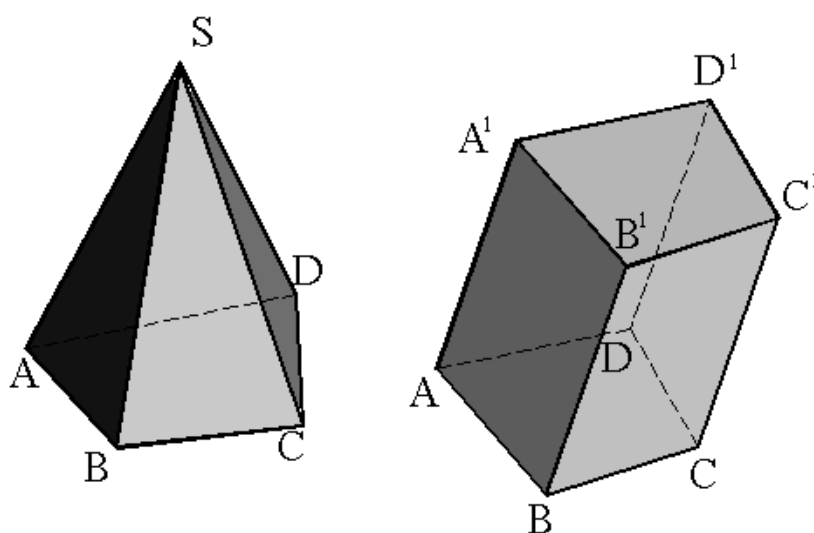


Рис.2.25

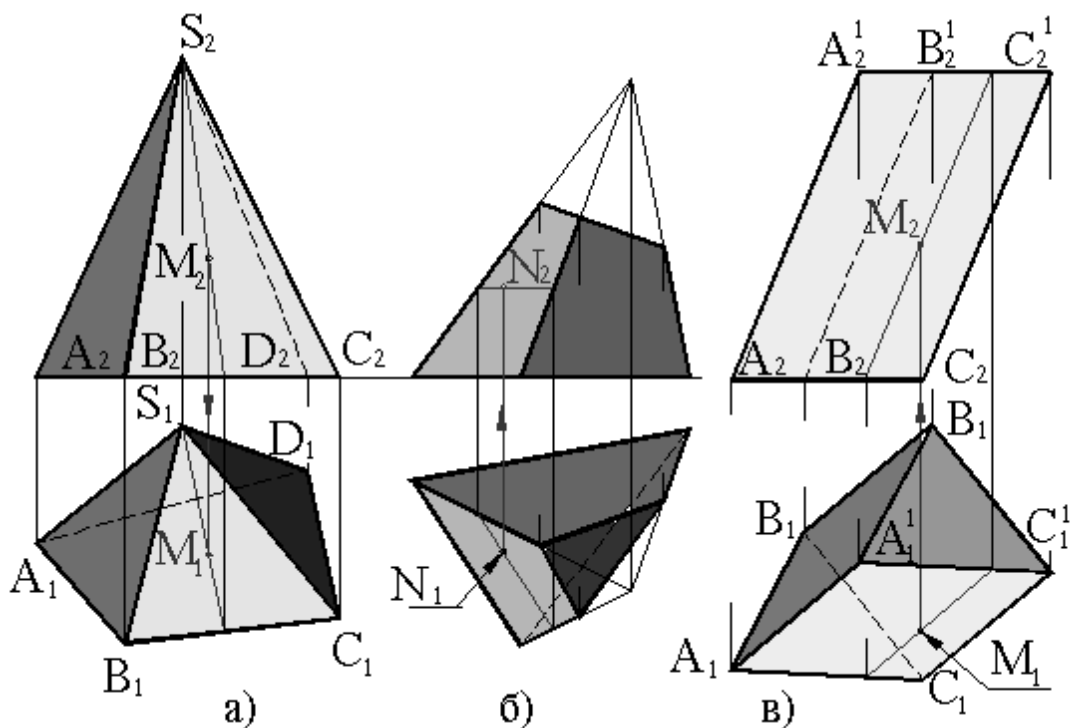


Рис. 2.26

Многогранник, две грани (основания) которого представляют собой равные n -угольники, расположенные в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммы, называют n -угольной призмой.

Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные между собой, называют боковыми ребрами.

На чертеже многогранники изображаются проекциями своих сеток, т.е. проекциями вершин и ребер (рис.2.26). На рисунке 2.26 показано построение проекций точек, принадлежащих поверхностям данных многогранников.

2.2. Задачи для аудиторных занятий

2.2.1. На трехкартинном чертеже Монжа построить проекции точки A , удаленной от фронтальной плоскости проекций на расстояние 20 мм, горизонтальной – 50 мм, профильной – 30 мм.

2.2.2. Постройте три проекции точек $A(40, 70, 10)$, $B(50, 0, 60)$, $C(0, 30, 20)$, $D(20, 50, 0)$, $E(0, 0, 70)$.

2.2.3. По двум заданным проекциям точек A, B, C постройте третьи проекции точек (рис.2.25).

2.2.4. Определить, какая из заданных точек расположена ближе к фронтальной плоскости проекций (рис.2.26).

2.2.5. На трехкартинном чертеже Монжа задать проекции прямой a , проходящей через точки $A(20, 70, 10)$, $B(50, 20, 60)$.

2.2.6. Построить три проекции отрезка AB прямой l , если точка A расположена в горизонтальной плоскости проекций, а точка B относительно точки A находится левее и имеет большие глубину и высоту.

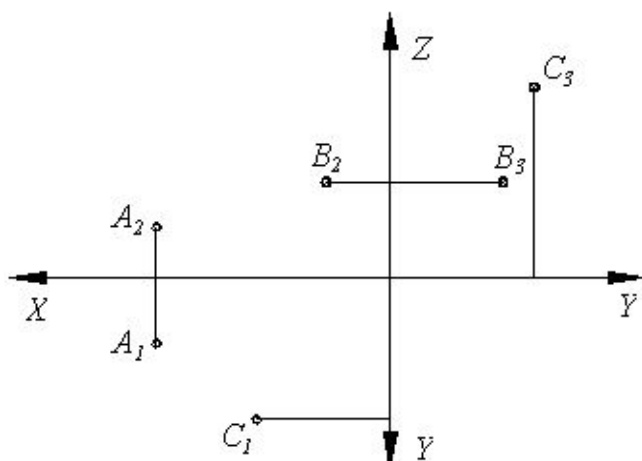


Рис. 2.25

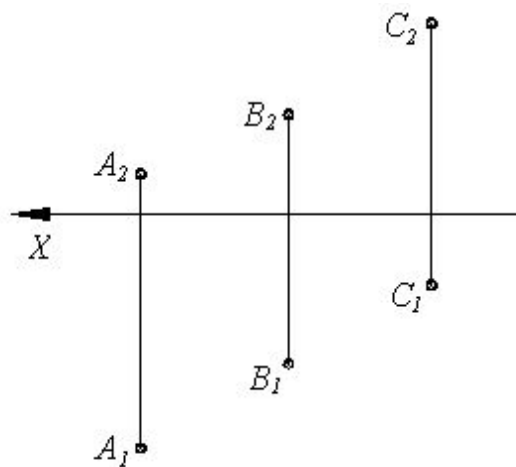


Рис. 2.26

2.2.7. Найти недостающую проекцию точки K , принадлежащей отрезку AB (рис.2.27).

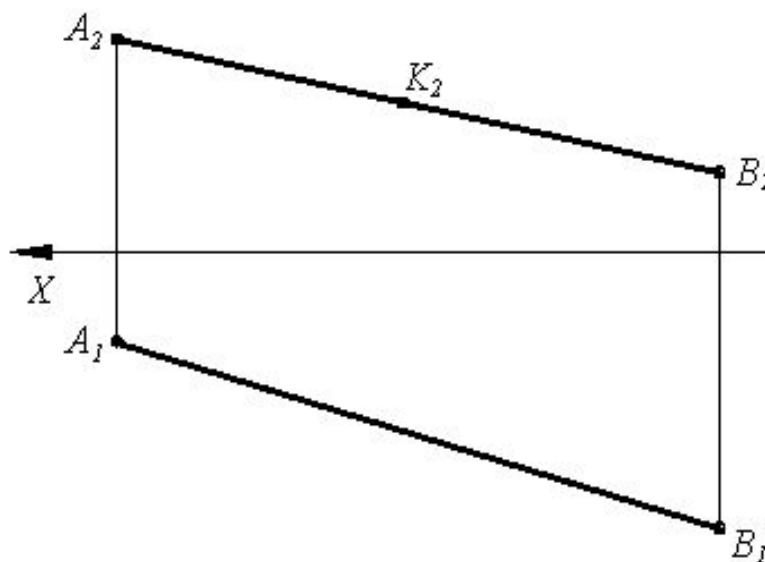


Рис. 2.27

2.2.8. Построить проекции прямой l , инцидентной точкам $A(50, 10, 60)$, $B(30, 30, ?)$, $C(10, ?, 10)$, а также недостающие проекции этих точек.

2.2.9. Построить проекции горизонтали, инцидентной точке $A(50, 20, 30)$, составляющей с Π_2 угол 30° и фронтали, инцидентной той же точке и составляющей с Π_1 угол 45° .

2.2.10. Через точку $A(60, 20, 40)$ провести горизонтально проецирующую прямую a , фронтально проецирующую прямую b и профильно проецирующую прямую c . На этих прямых построить точки, отстоящие от заданной точки на расстоянии 30 мм.

2.2.11. Задать на двухкартинном чертеже горизонтально проецирующую плоскость, составляющую с Π_2 угол 45° и фронтально проецирующую плоскость Δ , составляющую с Π_1 угол 30° .

2.2.12. В плоскости $\Gamma(ABC)$ задать горизонталь, отстоящую от Π_1 на расстояние 20 мм, и фронталь, отстоящую от Π_2 на расстоянии 30 мм. Координаты точек A, B, C заданы: $A(10, 20, 80)$, $B(50, 70, 10)$, $C(80, 15, 40)$.

2.3. Задачи для самостоятельной работы

2.3.1. На трехкартинном чертеже Монжа построить проекции точки A , удаленной от фронтальной плоскости проекций на расстояние 40 мм, горизонтальной – 10 мм, профильной – 60 мм.

2.3.2. Постройте три проекции точек $A(60, 20, 50)$, $B(0, 0, 70)$.

2.3.3. Определить, какая из заданных точек расположена ближе к горизонтальной плоскости проекций (рис.2.28).

2.3.4. На трехкартинном чертеже Монжа задать проекции прямой a , проходящей через точки $A(40, 20, 50)$, $B(20, 60, 10)$.

2.3.5. Найти недостающую проекцию точки K , принадлежащей отрезку AB (рис.2.29).

2.3.6. Построить проекции горизонтали, инцидентной точке $A(40, 30, 50)$, составляющей с Π_2 угол 60° и фронтали, инцидентной той же точке и составляющей с Π_1 угол 45° .

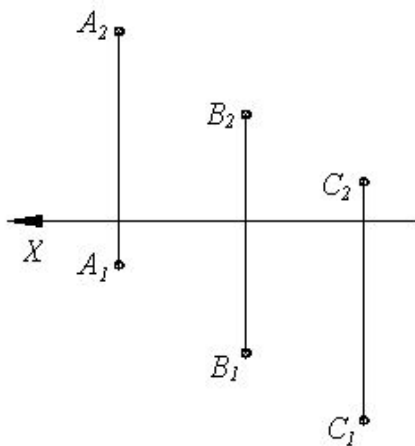


Рис. 2.28

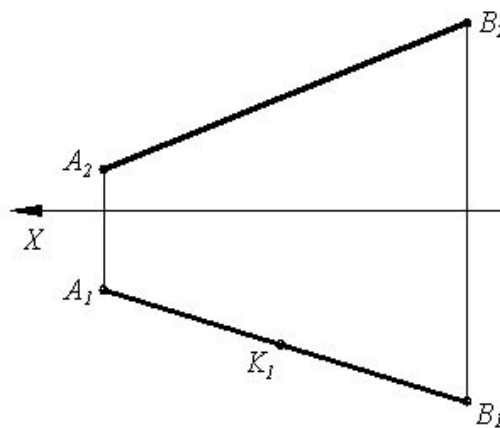


Рис. 2.29

2.3.7. Через точку $A(40, 40, 10)$ провести фронтально проецирующую прямую a . На этой прямой построить точку, отстоящую от заданной точки на расстоянии 40 мм.

2.3.8. Задать на двухкартинном чертеже фронтально проецирующую плоскость Δ , составляющую с Π_1 угол 60° .

2.3.9. В плоскости $\Gamma(ABC)$ задать фронталь, отстоящую от Π_2 на расстояние 20 мм. Координаты точек A, B, C заданы: $A(10, 20, 80)$, $B(50, 70, 10)$, $C(80, 15, 40)$.

2.4. Задачи повышенной сложности

2.4.1. Построить три проекции точек $A(-30, 70, 10)$, $B(50, -40, 50)$, $C(20, 30, -40)$, $D(20, -50, -30)$, $E(-40, -20, -70)$. Определить, в каких октантах расположены точки.

2.4.2. Определить положение точек $A(50, -60, -60)$; $B(20, 40, -40)$ относительно плоскостей проекций.

2.4.3. Определить, какие октанты пересекает прямая l , инцидентная точкам $A(10, 40, 30)$, $B(60, 10, 70)$.

2.4.4. Определить положение прямой a , инцидентной точкам $A(10, -50, 50)$, $B(50, -10, 10)$ относительно плоскостей проекций.

2.5. Контрольная работа №1

2.5.1. Построить три проекции точек $A(20, 40, 50)$, $B(50, 10, 30)$. Какая из точек дальше удалена от фронтальной плоскости проекций?

2.5.2. По двум заданным проекциям точек A, B, C построить недостающие проекции и определить координаты точек (рис.2.30).

2.5.3. Построить проекции точки A , отстоящей от плоскости Π_1 на расстояние 30 мм, от Π_2 – на расстояние 40 мм, от Π_3 – 60 мм.

2.5.4. Построить три проекции прямой m , проходящей через точки $A(20, 60, 20)$, $B(60, 10, 50)$.

2.5.5 На двухкартинном чертеже построить проекции горизонтальной прямой уровня h , инцидентной точке $A(40, 30, 60)$ и составляющей с Π_2 угол 45° .

2.5.6. На трехкартинном чертеже задать фронтально проецирующую прямую, удаленную от Π_1 на расстояние 30 мм.

2.5.7. Найти горизонтальную проекцию точки P , принадлежащей отрезку ST профильной прямой уровня (рис.2.31).

2.5.8. Достроить фронтальную и профильную проекции точки B , инцидентной фронтальной прямой уровня f , проходящей через точку $A(50,20,40)$, если известно, что длина отрезка AB равна 25 мм. Определить углы наклона прямой f к плоскостям проекций.

2.5.9. Задать на двухкартинном чертеже горизонтально проецирующую плоскость Δ , составляющую с Π_2 угол 45° .

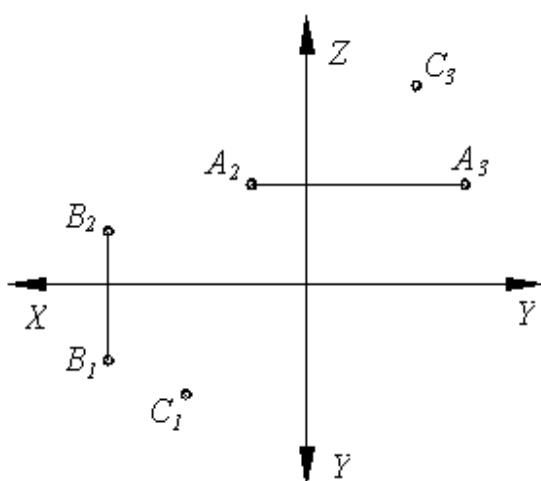


Рис. 2.30

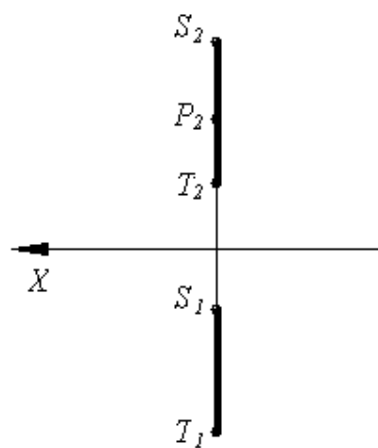


Рис. 2.31

2.5.10. В плоскости $\Gamma(ABC)$ задать горизонталь, отстоящую от Π_1 на расстояние 30 мм. Координаты точек A, B, C заданы: $A(10,20,80)$, $B(50,70,10)$, $C(80,15,40)$.

2.6. Контрольные вопросы

2.6.1. Что называют высотой точки?

2.6.2. Какие прямые называют горизонталями?

2.6.3. Как расположена фронталь относительно фронтальной плоскости проекций?

2.6.4. Какие прямые называют профильными прямыми уровня?

2.6.5. Как выглядит горизонтальная проекция горизонтально проецирующей плоскости?

2.6.6. В какие геометрические фигуры проецируется горизонтально проецирующая прямая на: горизонтальную плоскость проекций, фронтальную плоскость проекций?

2.6.7. Как выглядит комплексный чертеж фронтальной плоскости уровня?

2.6.8. Что называется многогранной поверхностью?

2.6.9. Что называется вершиной многогранной поверхности? ребром?

2.6.10. Что называется сеткой многогранной поверхности?

2.6.11. Что называется многогранником?

2.6.12. Какой многогранник называется правильным?

2.6.13. Как задается многогранная поверхность на чертеже?

3. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

3.1. Общие понятия

Комплексный чертеж, получаемый по методу Монжа, отличается достаточной простотой и точностью. Однако он не обладает наглядностью. Для обеспечения наглядности используется аксонометрия, являющаяся одним из типов обратимых чертежей.

Пусть задана некоторая точка P . Отнесем ее к прямоугольной системе координат $Oxyz$ с помощью трех звеньев координатной ломаной PP_1P_xO . Координаты точки P определяются соотношениями:

$$x_P = \frac{|OP_x|}{|m|}; y_P = \frac{|P_xP_1|}{|n|}; z_P = \frac{|P_1P|}{|k|},$$

где m, n, k – натуральные единичные отрезки.

Проецируем точку P , систему координат и координатную ломаную на плоскость аксонометрических проекций Π' в направлении s (рис.3.1). Проекция P' называется аксонометрической проекцией, проекция P'_1 – вторичной аксонометрической проекцией, $O'x'y'z'$ – аксонометрической системой координат, $P'P'_1P'_xO'$ – аксонометрической координатной ломаной, m', n', k' – аксонометрическими единичными отрезками.

Так как при параллельном проецировании сохраняется простое отношение трех точек, то справедливо:

$$x_P = \frac{|OP_x|}{|m|} = \frac{|O'P'_x|}{|m'|} = x'_P; y_P = \frac{|P_xP_1|}{|n|} = \frac{|P'_xP'_1|}{|n'|} = y'_P; z_P = \frac{|P_1P|}{|k|} = \frac{|P'_1P'|}{|k'|} = z'_P.$$

Этим подтверждается обратимость аксонометрического изображения. Величины

$$u = \frac{m'}{m}, v = \frac{n'}{n}, w = \frac{k'}{k}$$

называются показателями искажения. Если $u = v = w$, то аксонометрическое изображение называется изометрией, если $u \neq v \neq w$ – триметрией, если $u = w \neq v$ – диметрией.

3.2. Прямоугольные изометрическая и диметрическая проекции

ГОСТ 2.317-69 рекомендует к применению прямоугольные изометрическую и диметрическую проекции, а также три вида косоугольных аксонометрических проекций: фронтальную и горизонтальную изометрические и фронтальную диметрическую проекции. В машиностроении в основном применяют прямоугольные (ортогональные) изометрическую и диметрическую проекции.

Прямоугольная изометрическая проекция. Показатели искажения $u = v = w \approx 0,82$. На практике для удобства пользуются приведенными показателями $u = v = w = 1$. При этом изображение будет увеличено в $\frac{1}{0,82} = 1,22$ раза. Положение аксонометрических осей показано на рис. 3.2. Окружности на аксонометрической проекции изображаются эллипсами. Большая ось эллипса перпендикулярна той аксонометрической оси, которая в плоскости эллипса отсутствует. При использовании приведенных показателей искажения большие оси эллипсов равны $1,22d$, а малые – $0,71d$ (d – диаметры изображаемой окружности).

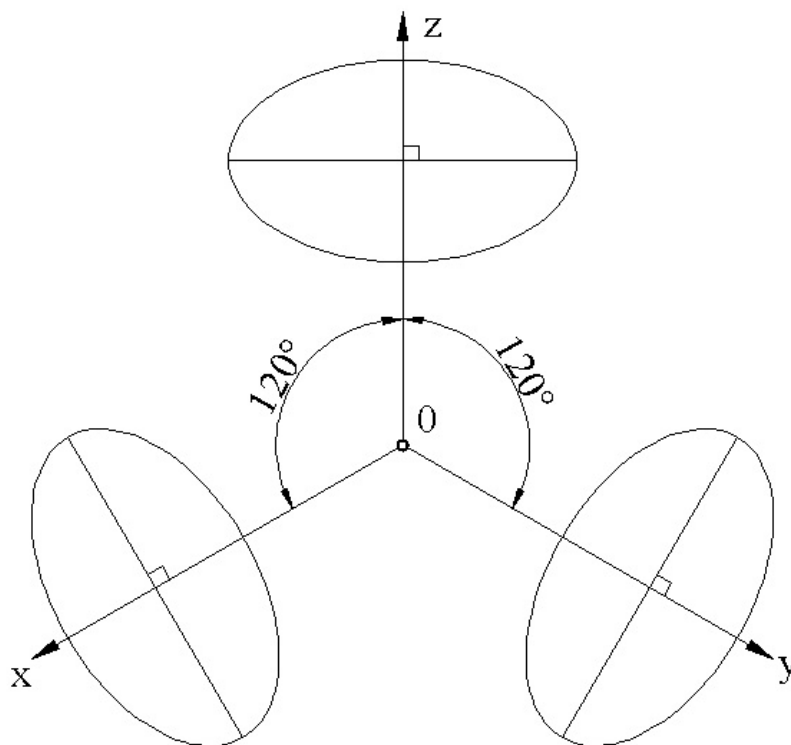


Рис. 3.2

Прямоугольная диметрическая проекция. Положение диметрических осей показано на рис.3.3. Показатели искажения

$u = w \approx 0,94, v = 0,47$. Приведенные показатели искажения $u = w = 1, v = 0,5$.

При использовании приведенных показателей искажения изображение получается увеличенным в $\frac{1}{0,94} = 1,06$ раза. Большие оси эллипсов равны $1,06d$, малые оси эллипсов, расположенных в плоскостях $O'x'y', O'y'z'$, равны $0,35d$, в плоскости $O'x'z'$ – $0,95d$ (рис.3.3).

Практический способ построения осей прямоугольной диметрической проекции показан на рис. 3.4.

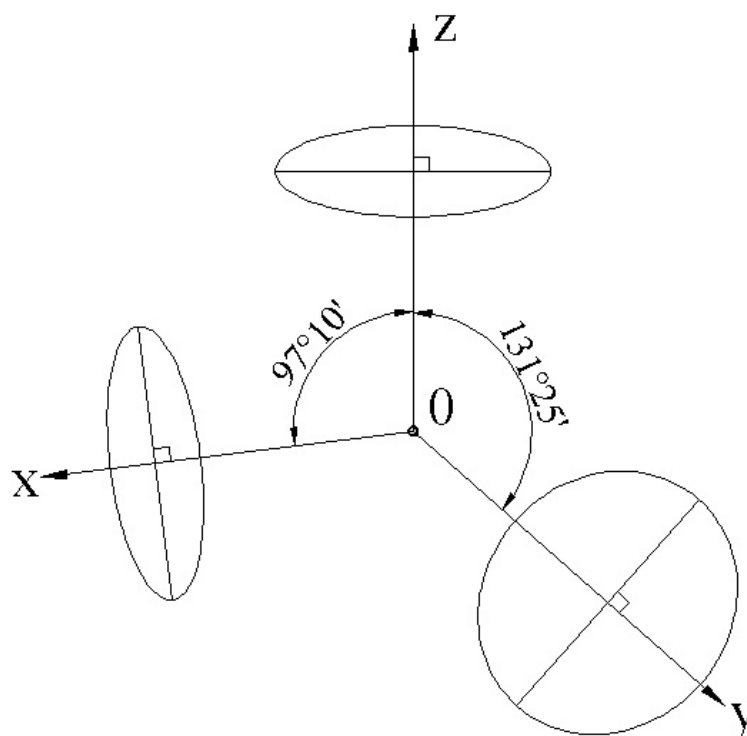


Рис. 3.3

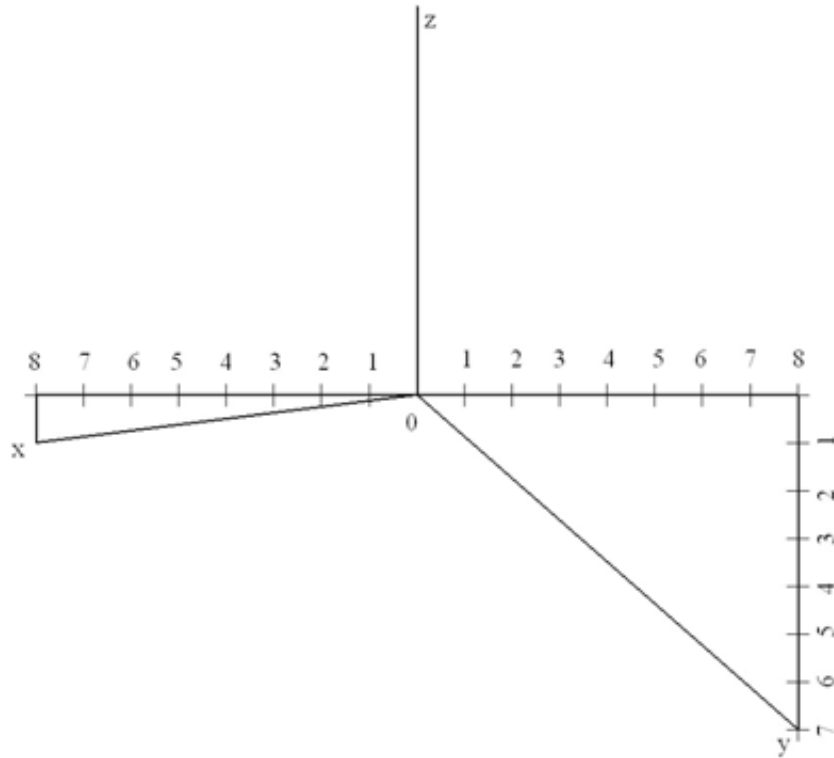


Рис. 3.4

3.3. Задачи для аудиторных занятий

3.3.1. Построить прямоугольные изометрию и диметрию точки $A(50,70,80)$.

3.3.2. По заданной прямоугольной изометрической проекции точки B (рис. 3.5) определить координаты точки B и задать ее на трехпроекционном чертеже.

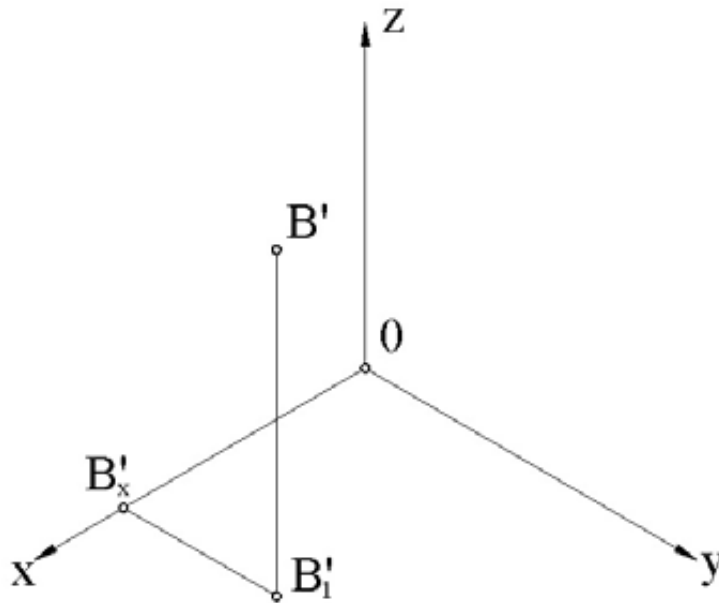


Рис. 3.5

3.3.3. В прямоугольной изометрии построить плоский многоугольник, расположенный в координатных плоскостях Oxy , Oxz , Oyz (рис. 3.6).

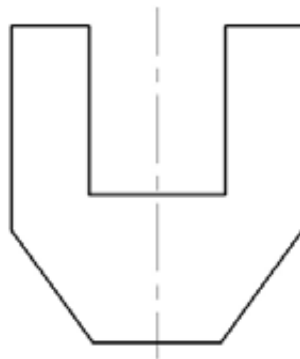


Рис. 3.6

3.3.4. В прямоугольной изометрии построить окружность $R=30$ мм, расположенную в координатной плоскости Oxz .

3.3.5. В прямоугольной диметрии построить окружность $R=30$ мм, расположенную в координатной плоскости Oxy .

3.4 Задачи для самостоятельной работы

3.4.1. Построить прямоугольные изометрию и диметрию точки $A(70,40,80)$.

3.4.2. По заданной прямоугольной диметрической проекции точки B (рис. 3.7), определить координаты точки B и задать ее на трехкартинном чертеже.

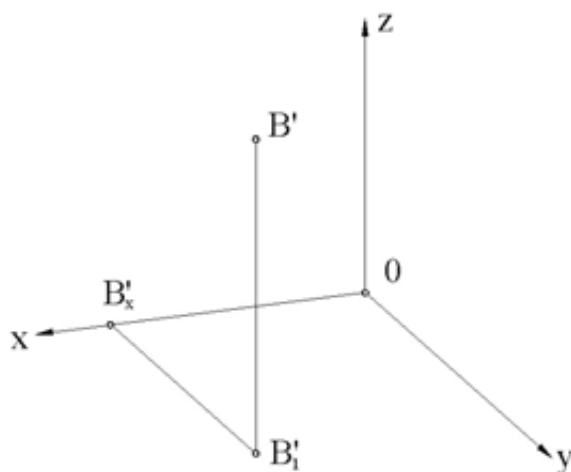


Рис. 3.7

3.4.3. В прямоугольной диметрии построить плоский многоугольник (рис. 3.8), расположенный в координатных плоскостях Oxy , Oxz , Oyz .

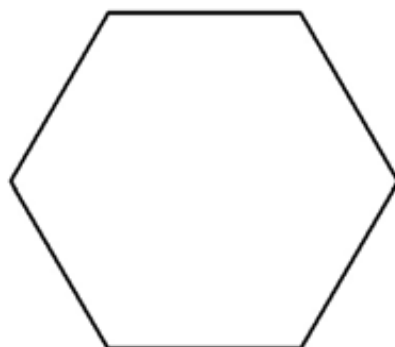


Рис. 3.8

3.4.4. В прямоугольных изометрии и диметрии построить куб, ребро которого равно 50 мм. В видимые грани куба вписать окружности.

3.5. Контрольные вопросы

- 3.5.1. С какой целью выполняют аксонометрические чертежи?
- 3.5.2. Чем отличается изометрия от диметрии?
- 3.5.3. Какую аксонометрическую проекцию называют прямоугольной?

3.5.4. Какие виды аксонометрии наиболее часто применяют в машиностроении?

3.5.5. Как искажаются прямоугольные изометрия и диметрия при использовании приведенных показателей искажения?

3.5.6. Какими кривыми в прямоугольных аксонометрических проекциях изображаются окружности, расположенные в плоскостях, параллельных координатным плоскостям?

4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. Краткие теоретические сведения

Позиционными задачами называются такие задачи начертательной геометрии, в которых определяется либо положение геометрических фигур относительно плоскостей проекций, либо взаимное положение фигур (принадлежность, пересечение или отсутствие пересечения).

Задачи на принадлежность.

Точка принадлежит прямой, если ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой прямой (рис. 4.1)

Прямая принадлежит плоскости, если имеет с ней две общие точки (рис. 4.2).

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой этой плоскости (рис. 4.3).

Взаимное положение прямых.

Две прямые в пространстве могут быть пересекающимися, параллельными или скрещивающимися.

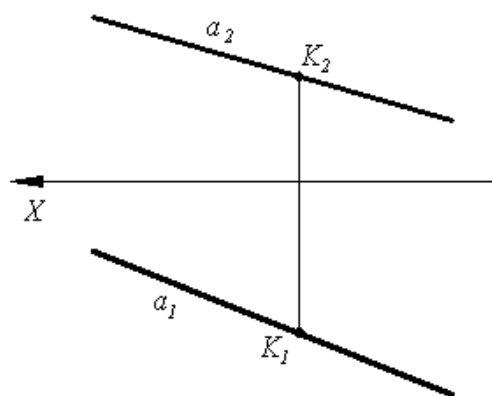


Рис. 4.1

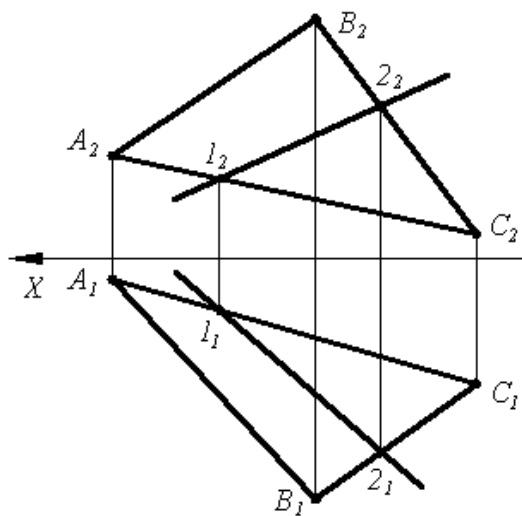


Рис. 4.2

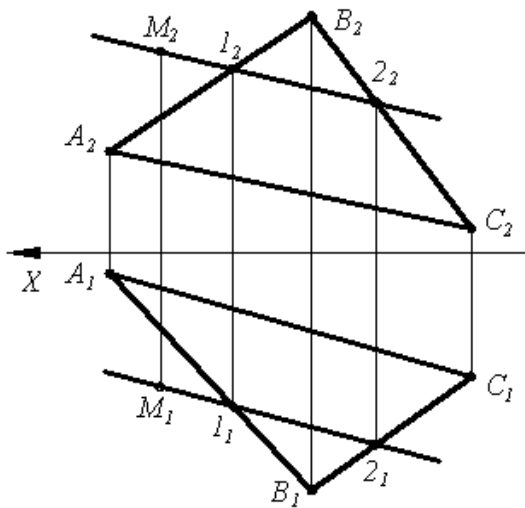


Рис. 4.3

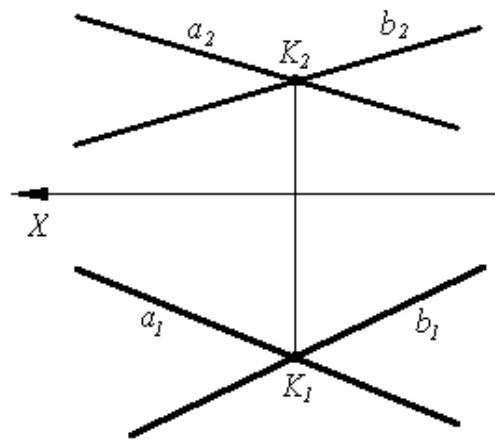


Рис. 4.4

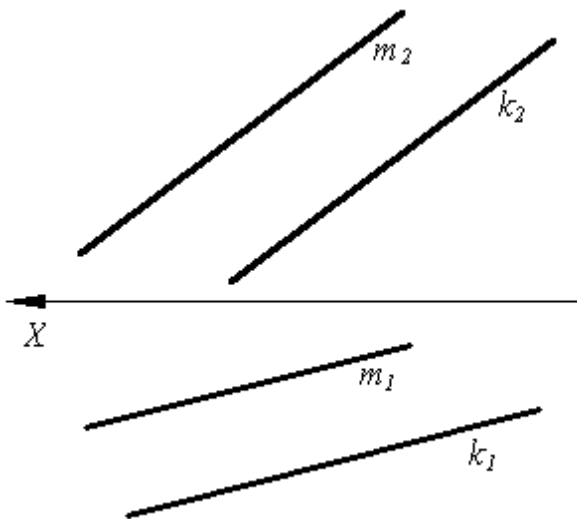


Рис. 4.5

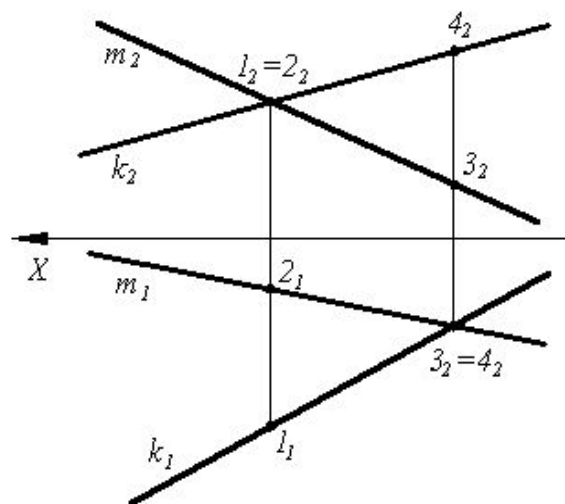


Рис. 4.6

Для пересекающихся прямых точки пересечения одноименных проекций лежат на одной линии связи и являются проекциями точки пересечения прямых (рис. 4.4).

Для параллельных прямых одноименные проекции прямых параллельны (рис. 4.5).

У скрещивающихся прямых нет общих точек. Поэтому точки пересечения одноименных проекций не лежат на одной линии связи (рис. 4.6). Точки 1 и 2 являются конкурирующими точками относительно Π_2 . Видимой относительно Π_2 будет точка 1, так как она находится ближе к наблюдателю (ее горизонтальная проекция 1_1 дальше удалена от оси Ox). Точки 3 и 4 – конкурирующие точки относительно Π_1 . Видимой будет точка 4.

Взаимное положение прямой и плоскости.

Прямая может быть параллельна плоскости или пересекаться с ней.

Если прямая параллельна какой-либо любой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости (рис. 4.7).

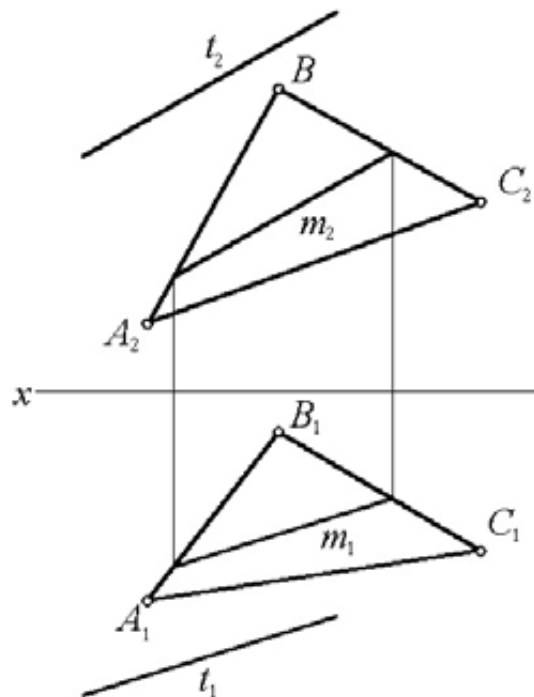


Рис. 4.7

Задача на нахождение точки пересечения прямой и плоскости называется основной первой позиционной задачей. В начале рассмотрим решение данной задачи при частном положении одной из заданных геометрических фигур.

Задача 1. Найдем точку пересечения M , прямой общего положения k с горизонтально-проецирующей плоскостью Σ (рис. 4.8). Определим видимость участков проекций прямой k . На рисунке 4.9 представлен комплексный чертеж с исходными условиями задачи.

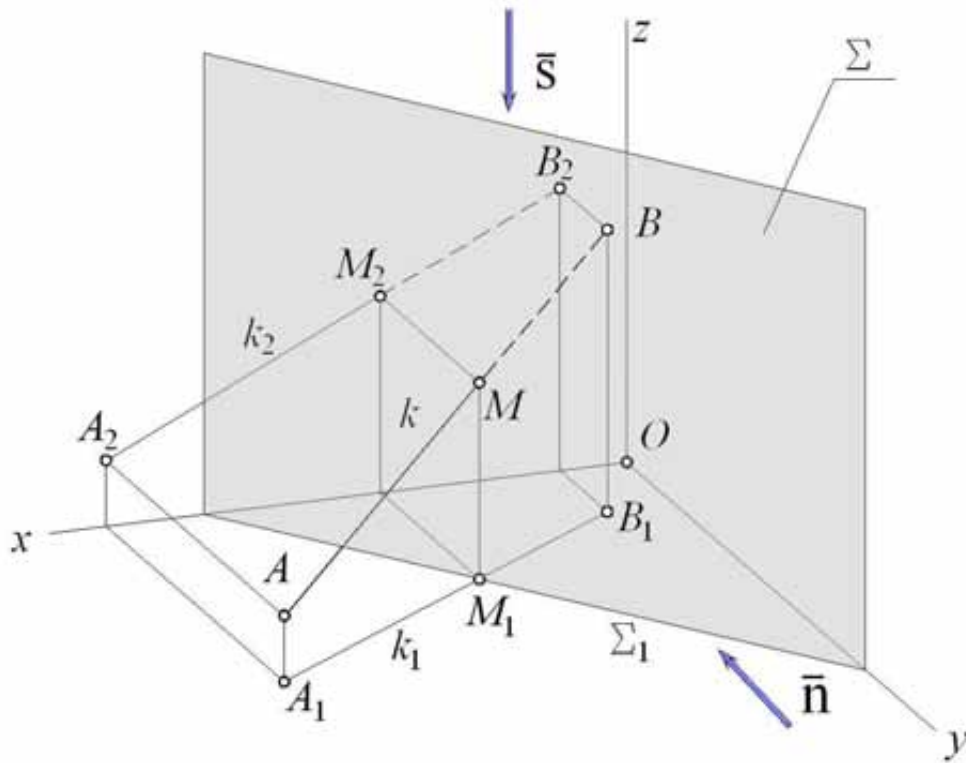


Рис. 4.8

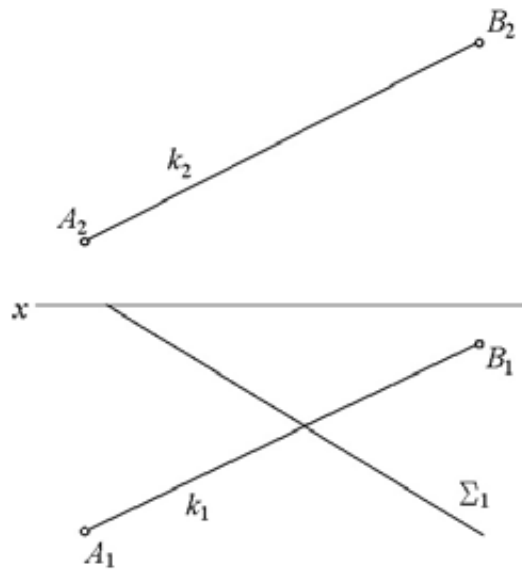


Рис. 4.9

Очевидно, что горизонтальная проекция M_1 точки M пересечения прямой k с горизонтально-проецирующей плоскостью Σ будет совпадать с точкой пересечения горизонтальных проекций k_1 и Σ_1 прямой k и плоскости Σ (рис. 4.10).

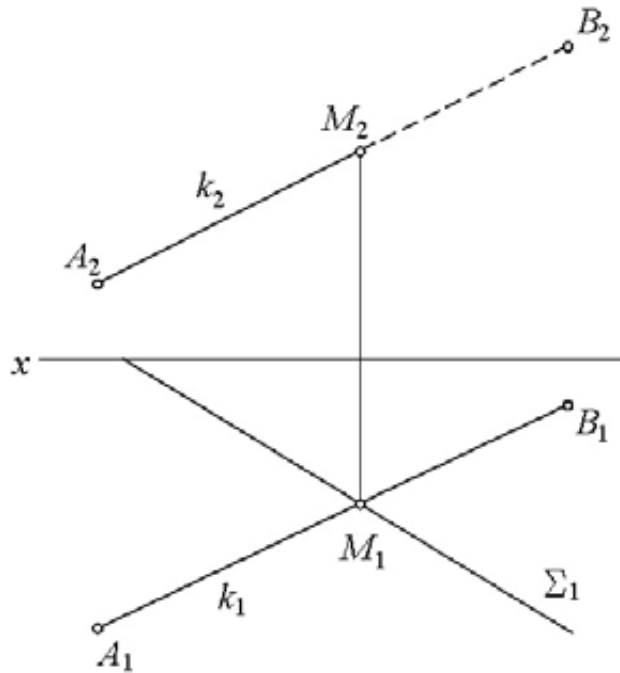


Рис. 4.10

Фронтальную M_2 , проекцию точки M найдем как результат пересечения линии связи с фронтальной проекцией k_2 прямой k .

Горизонтальная проекция k_1 прямой k будет вся видимой. Это ясно из рисунка 4.9, если смотреть в направлении стрелки \vec{s} . Участок M_2B_2 фронтальной проекции k_2 прямой k невидим, так как соответствующий участок прямой закрыт плоскостью Σ при направлении взгляда \vec{n} .

Задача 2. Определим проекции (N_1, N_2) точки N , пересечения горизонтально-проецирующей прямой t с плоскостью общего положения $\Delta(A, B, C)$ (рис. 4.11).

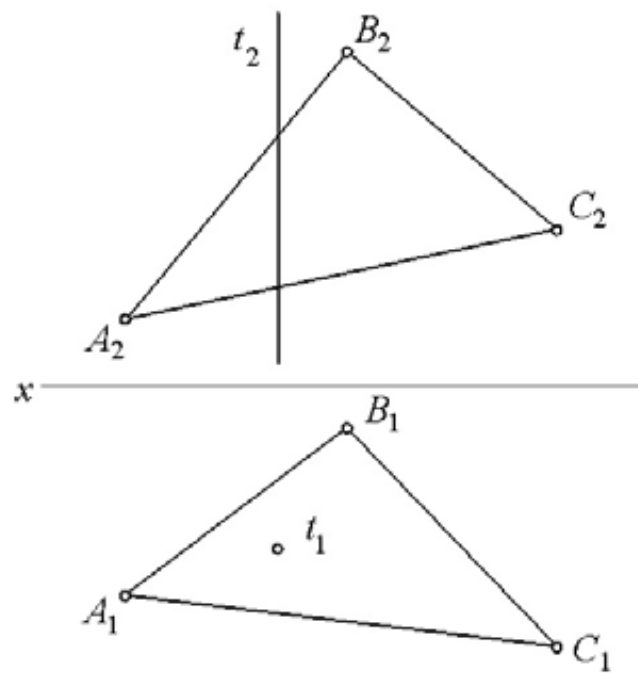


Рис. 4.11

Горизонтальная проекция K_1 точки пересечения K прямой t с плоскостью общего положения $\Delta(A, B, C)$ будет совпадать с горизонтальной проекцией t_1 прямой t (рис. 4.12). Фронтальную проекцию K_2 точки K найдем с помощью прямой p , проходящей через точку K и принадлежащей плоскости Δ .

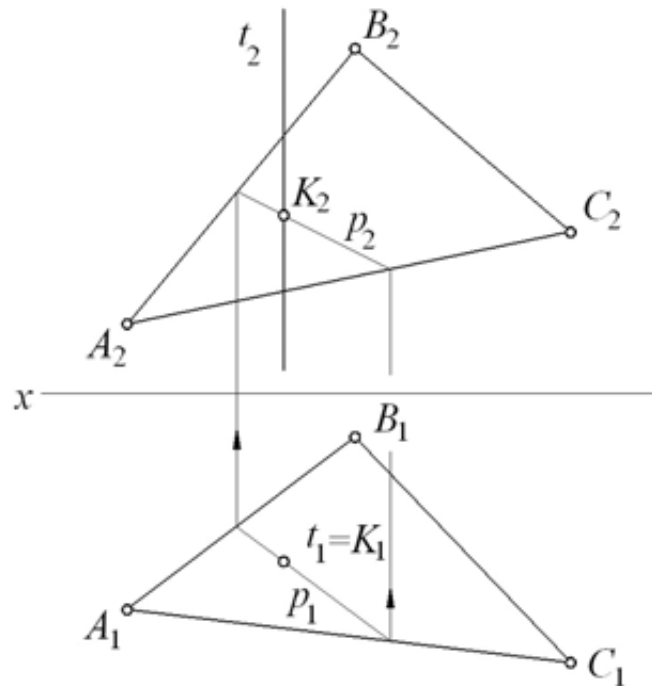


Рис. 4.12

Для определения видимости участков фронтальной проекции t_2 прямой t воспользуемся конкурирующими точками 1 и 2 (рис. 4.13). По горизонтальным проекциям 1_1 и 2_1 видно, что точка 2 находится дальше относительно фронтальной плоскости проекций Π_2 . Следовательно, точка 2 будет видимой, а поскольку она принадлежит прямой t , то прямая t_2 на участке $1_2 K_2$ будет видима. Ниже точки K_2 прямая t_2 будет невидима.

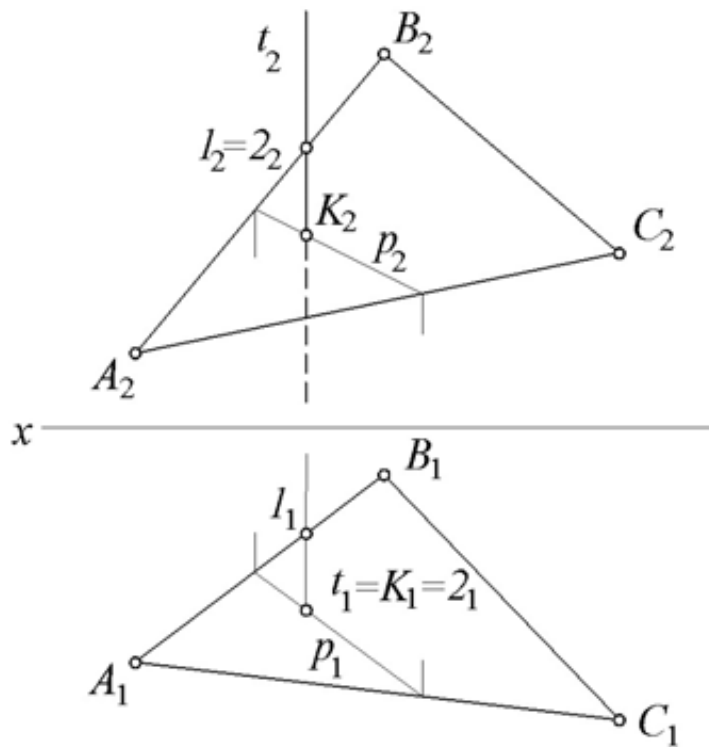


Рис. 4.13

Задача 3. Построим проекции t_1 и t_2 прямой t , по которой пересекаются между собой фронтально проецирующая плоскость $\Delta(\Delta_2)$ и плоскость общего положения $\Phi(A, B, C)$ (рис. 4.14).

Фронтальная проекция t_2 прямой t будет совпадать с фронтальной проекцией Δ_2 плоскости Δ . Горизонтальную проекцию t_1 найдем по точкам 1 и 2.

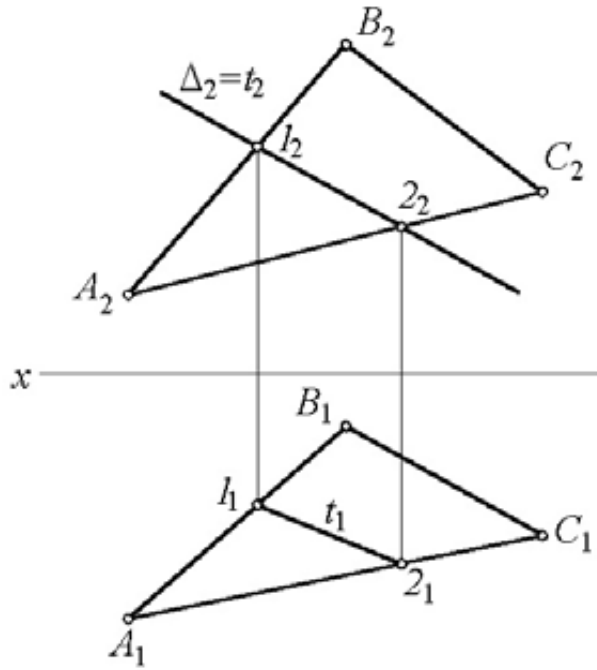


Рис. 4.14

Решение первой позиционной задачи в общем виде, когда плоскость $\Sigma(A, B, C)$ и прямая $k(D, E)$ занимают общее положение относительно плоскостей проекций, осуществляется в следующей последовательности:

- заданная прямая k заключается во вспомогательную проецирующую плоскость Δ ;
- находится линия t пересечения плоскости Δ с плоскостью Σ ;
- находится точка N пересечения прямой t с прямой k , которая и будет являться искомой точкой пересечения прямой k с плоскостью Σ .

Рассмотрим конкретный случай решения основной первой позиционной задачи (рис. 4.15). Прямую k заключаем во фронтально проецирующую плоскость Δ ($k_2 = \Delta_2$). Тогда фронтальная проекция t_2 прямой t пересечения плоскостей Σ и Δ совпадает с k_2 . Горизонтальная проекция t_1 найдена из условия принадлежности t плоскости Γ .

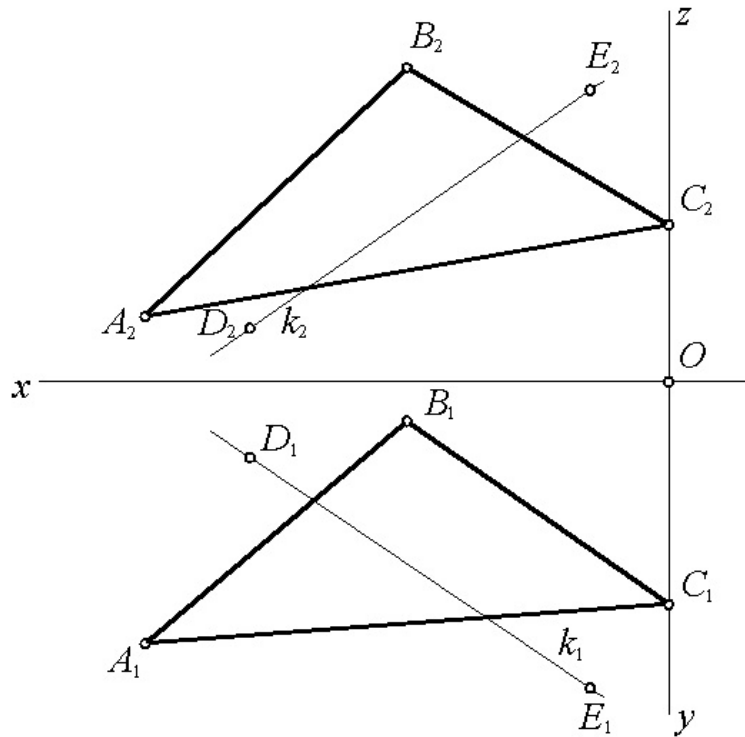


Рис. 4.15

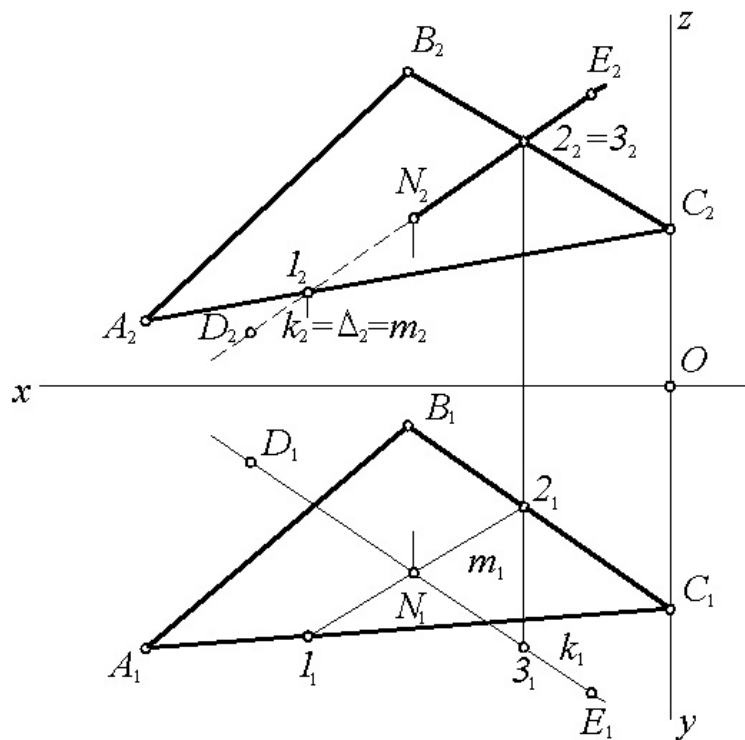


Рис. 4.16

Видимость на Π_2 определена по конкурирующим точкам $2 \in BC$ и $3 \in l$. Так как горизонтальная проекция 3_1 точки 3 от оси Ox удалена

дальше, чем горизонтальная проекция 2_1 точки 2, то точка 3 относительно фронтальной плоскости проекций будет видимой, а 2 – невидимой. Поэтому на Π_2 проекция k_2 прямой k от точки N_2 в сторону точки l_2 будет невидимой. Видимость на Π_1 определяем по конкурирующим точкам $4 \in BC$ и $5 \in l$. Относительно Π_1 точка 5 закрывает собой точку 4, так как фронтальная проекция 5_2 точки 5 дальше удалена от оси Ox , чем фронтальная проекция 4_2 точки 4. Поэтому на Π_1 проекция k_1 от точки N_1 в направлении точки 5_1 будет видимой.

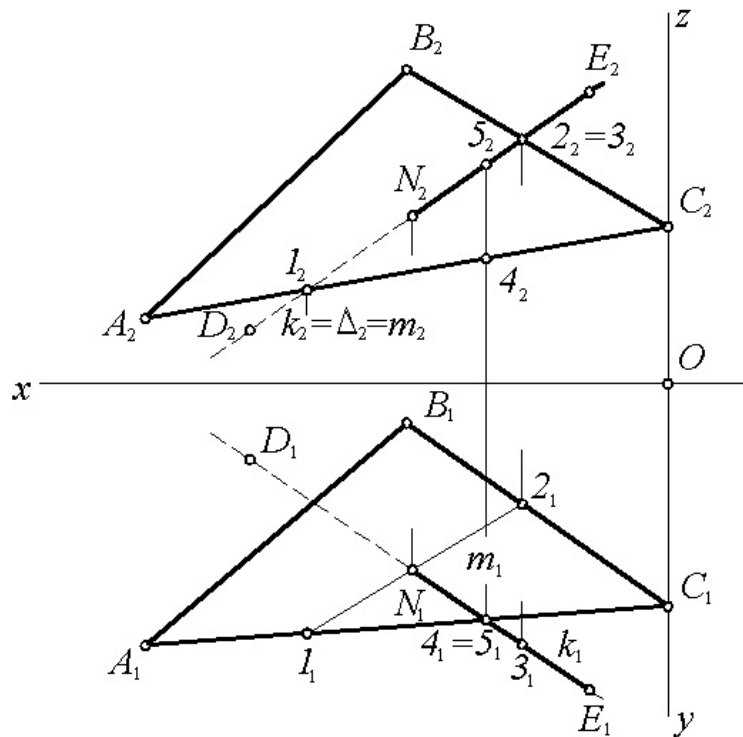


Рис. 4.17

Построение прямой пересечения двух плоскостей (вторая основная позиционная задача) сводится к двукратному решению основной первой позиционной задачи. С подробным решением второй основной позиционной задачи можно ознакомиться в главе «Избранные задачи начертательной геометрии».

4.2. Задачи для аудиторных занятий

4.2.1. Определить положение точек A, B, C, D, E относительно прямой m (рис. 4.18).

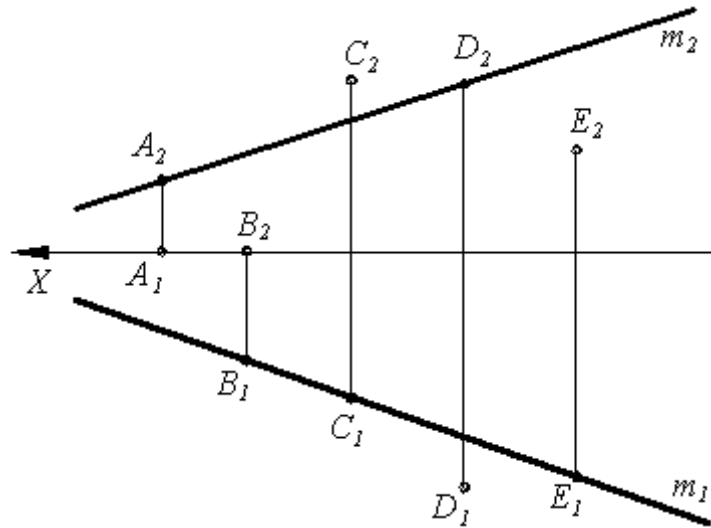


Рис. 4.18

4.2.2. Построить треугольник ABC , две вершины A и B , которого принадлежат прямой l , а вершина C – оси проекций Ox (рис. 4.19).

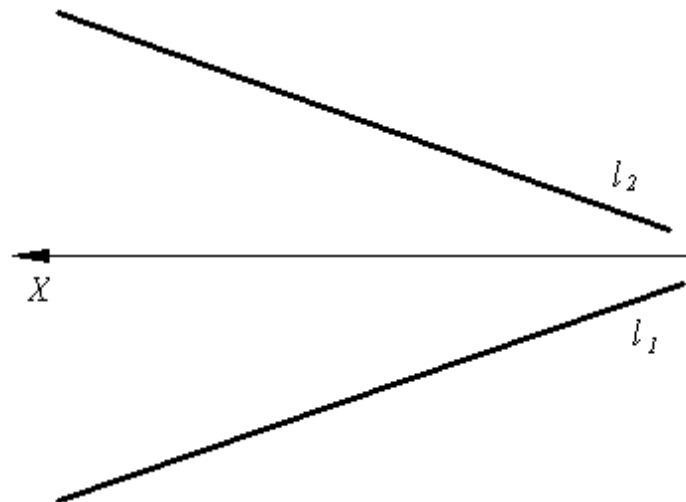


Рис. 4.19

4.2.3. Построить недостающую проекцию точки C , принадлежащей прямой AB , если $A(10,10,40)$, $B(10,50,10)$, $C(10,30,?)$.

4.2.4. Построить горизонтальную прямую уровня, пересекающую данную прямую t в точке K (рис. 4.20).

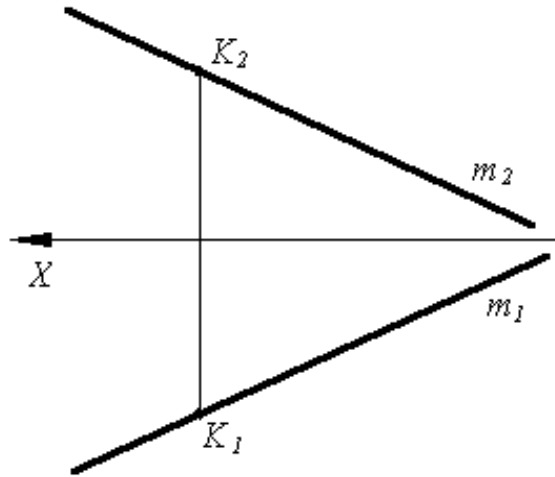


Рис. 4.20

4.2.5. Определить взаимное положение прямых m и k (рис. 4.21).

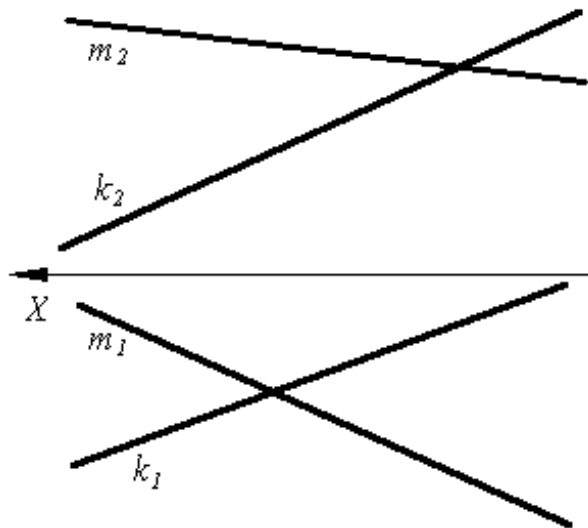


Рис. 4.21

4.2.6. Через точку A провести прямую a , параллельную прямой b (рис. 4.22).

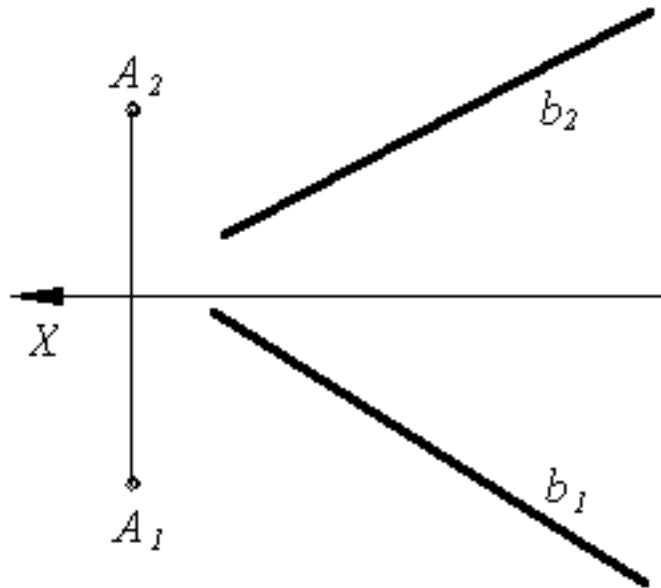


Рис. 4.22

4.2.7. Достроить горизонтальную проекцию прямой l , принадлежащей плоскости треугольника ABC (рис. 4.23).

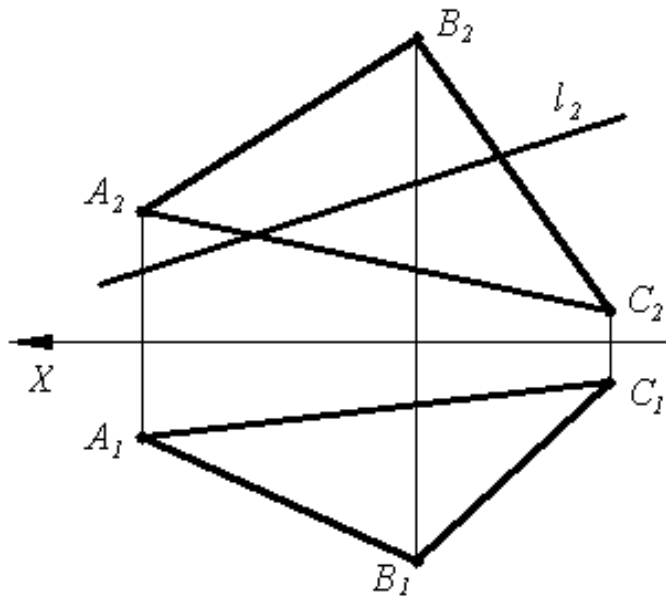


Рис. 4.23

4.2.8. Построить горизонтальную прямую h , параллельную плоскости $\Gamma(m//k)$ и проходящую через точку A (рис. 4.24).

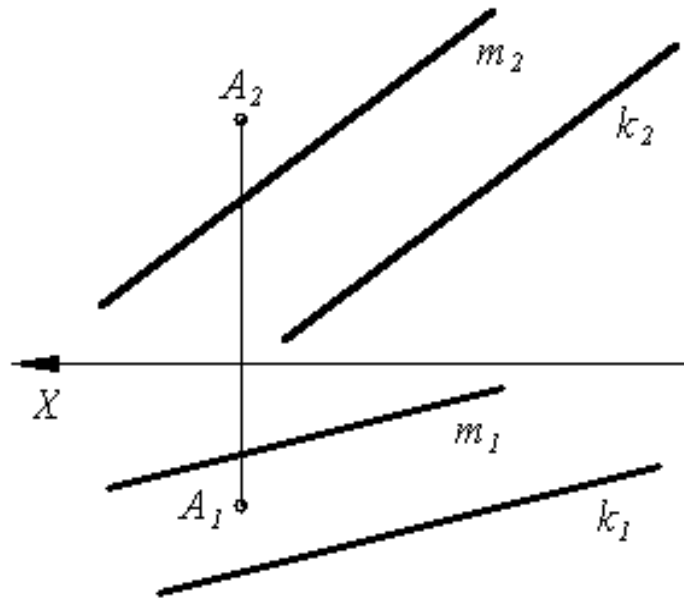


Рис. 4.24

4.2.9. Достроить горизонтальную проекцию плоского пятиугольника $ABCDE$ (рис. 4.25).

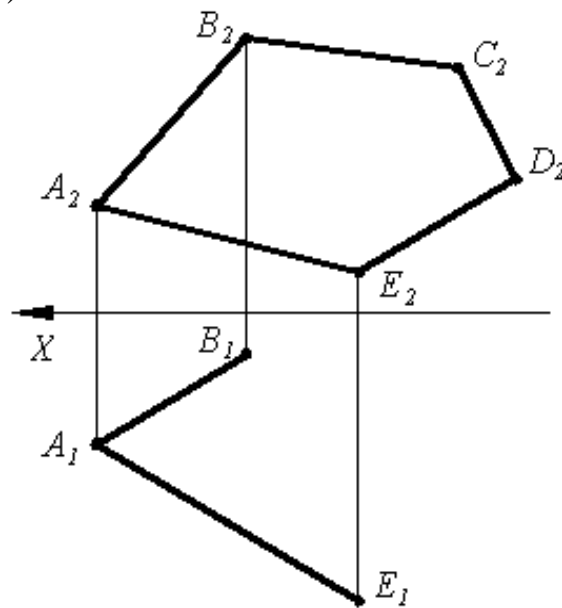


Рис. 4.25

4.2.10. Построить горизонтальную проекцию треугольника ABC , принадлежащего плоскости $\Gamma(m//k)$ (рис. 4.26).

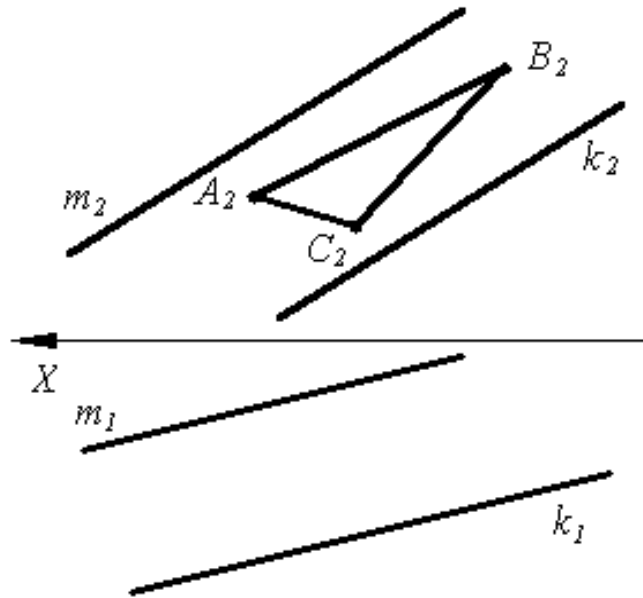


Рис. 4.26

4.2.11. Достроить горизонтальную проекцию отрезка прямой MK , параллельного плоскости $\Gamma(ABC)$ (рис. 4.27).

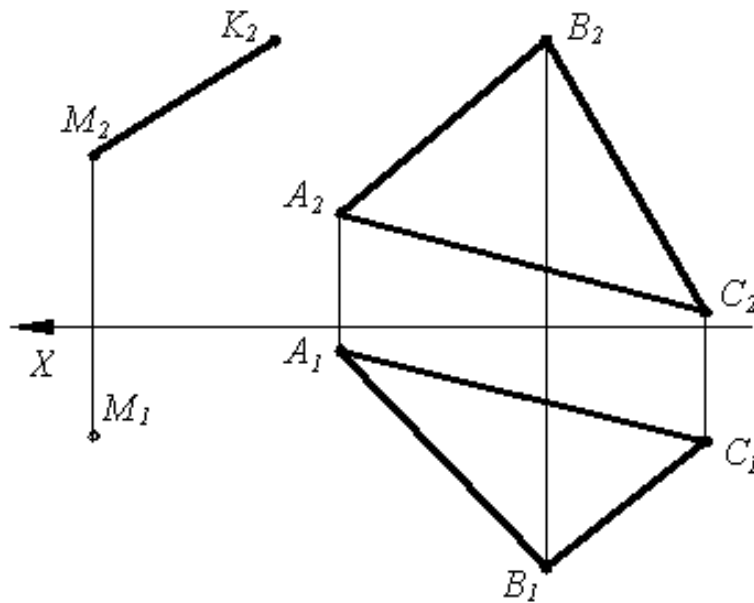


Рис. 4.27

4.2.12. Через точку A провести плоскость, параллельную прямым m и k (рис. 4.28).

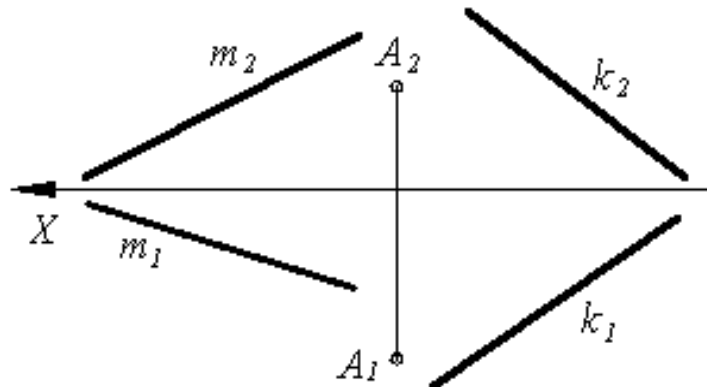


Рис. 4.28

4.2.13. Через точку A провести плоскость, параллельную плоскости $\Gamma(m//k)$ (рис. 4.29).

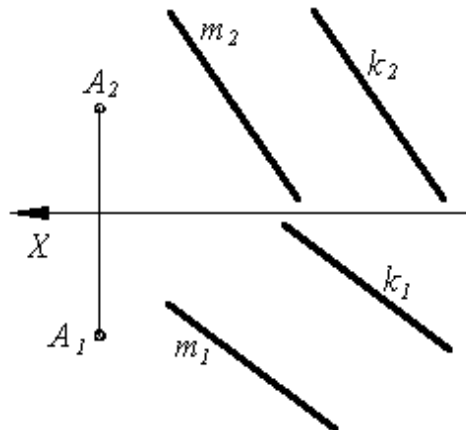


Рис. 4.29

4.2.14. Найти точку пересечения прямой l , заданной уравнением $\frac{x-25}{17} = \frac{y-30}{22} = \frac{z-110}{-21}$, с плоскостью $\Gamma(ABC)$, если $A(125, 90, 35)$, $B(15, 45, 55)$, $C(55, 130, 105)$. Определить видимость прямой.

4.2.15. Построить линию пересечения плоскостей $\Gamma(ABC)$ и $\Phi(EDK)$, $A(120, 90, 10)$, $B(50, 25, 80)$, $C(0, 85, 50)$, $D(70, 110, 85)$, $E(135, 20, 35)$, $K(15, 50, 0)$.

4.3. Задачи для самостоятельной работы

4.2.1. На прямой m найти точку A , удаленную от Π_2 на расстоянии 10 мм и точку B , удаленную от Π_1 на расстоянии 20 мм (рис. 4.30).

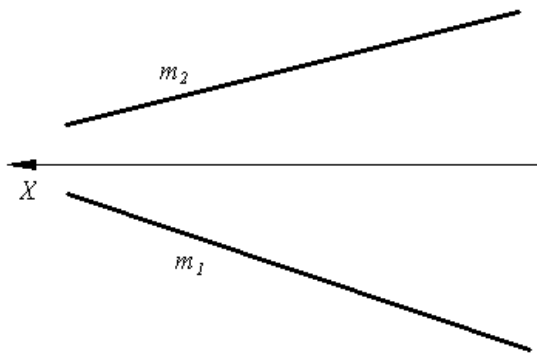


Рис. 4.30

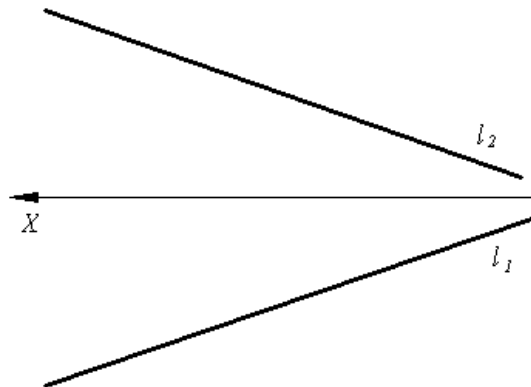


Рис. 4.31

4.2.2. Построить треугольник ABC , вершина A , которого принадлежит прямой l , а вершины B и C – оси проекций Ox (рис. 4.31).

4.2.3. Построить недостающую проекцию точки C , принадлежащей прямой AB , если $A(20,20,40)$, $B(20,50,10)$, $C(20,30,?)$

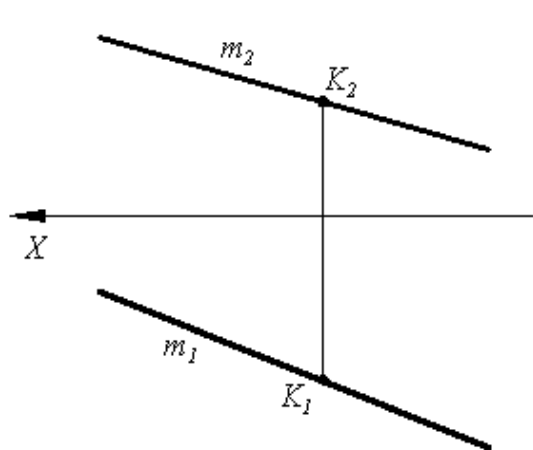


Рис. 4.32

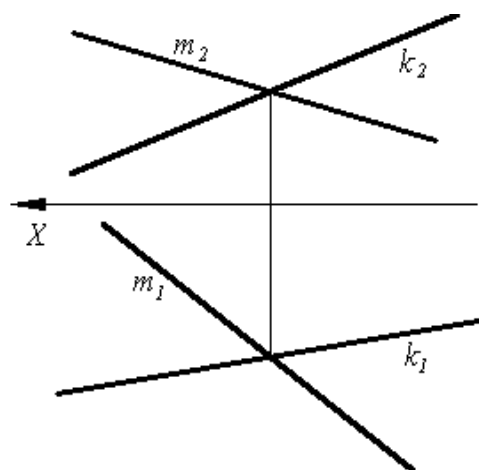


Рис. 4.33

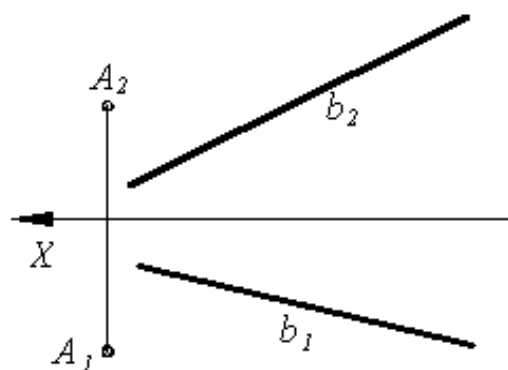


Рис. 4.34

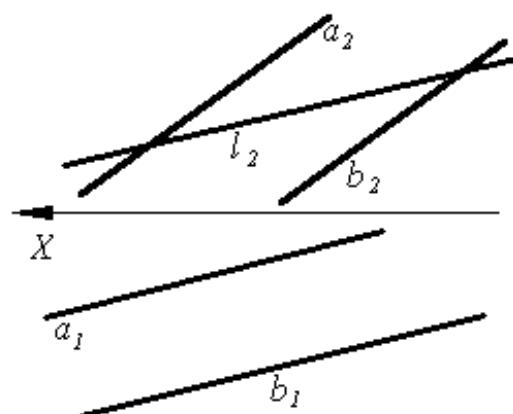


Рис. 4.35

4.2.4. Построить фронтальную прямую уровня, пересекающую данную прямую t в точке K (рис. 4.32).

4.2.5. Определить взаимное положение прямых m и k (рис. 4.33).

4.2.6. Через точку A провести прямую a , параллельную прямой b (рис. 4.34).

4.2.7. Достроить горизонтальную проекцию прямой l , принадлежащей плоскости $\Gamma(a//b)$ (рис. 4.35).

4.2.8. Построить фронтальную прямую f , параллельную плоскости $\Gamma(m//k)$ и проходящую через точку A (рис. 4.36).

4.2.9. Достроить фронтальную проекцию плоского пятиугольника $ABCDE$ (рис. 4.37).

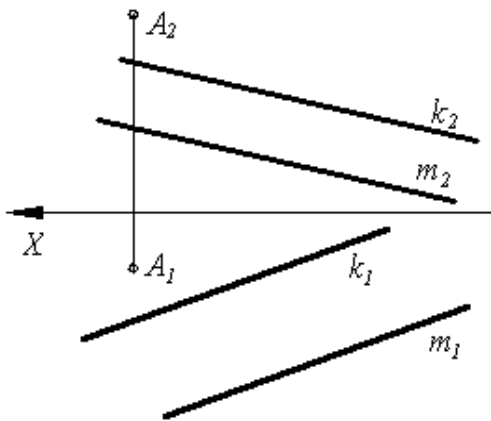


Рис. 4.36

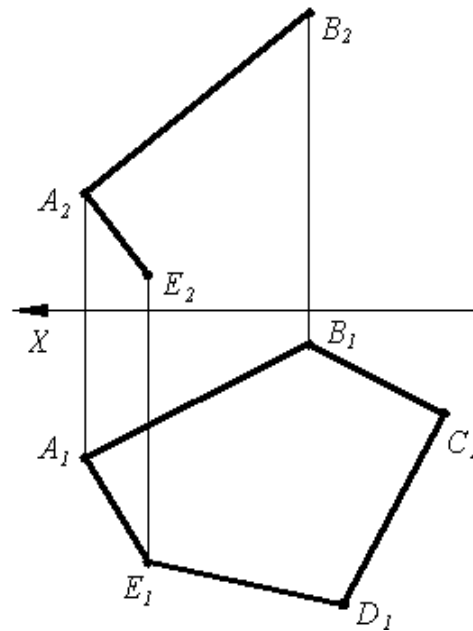


Рис. 4.37

4.2.10. Построить горизонтальную проекцию треугольника ABC , принадлежащего плоскости $\Gamma(MNK)$ (рис. 4.38).

4.2.11. Достроить фронтальную проекцию отрезка прямой MK , параллельного плоскости $\Gamma(m//k)$ (рис. 4.39).

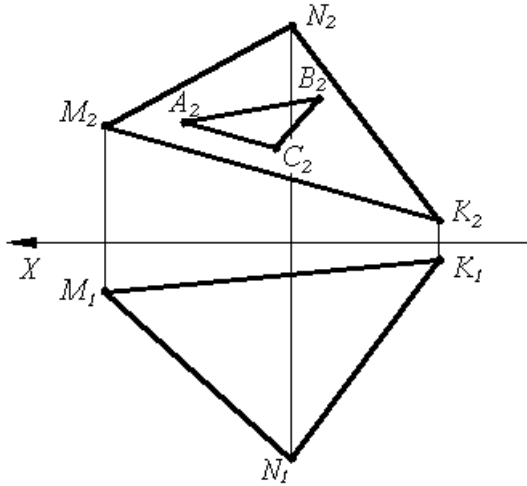


Рис. 4.38

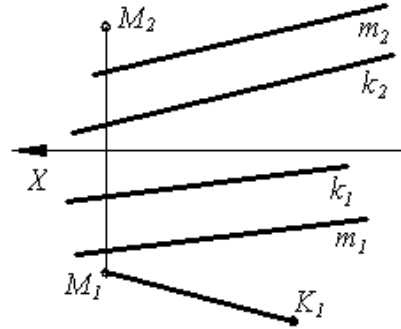


Рис. 4.39

4.2.12. Через точку M провести плоскость, параллельную прямым m и k (рис. 4.40).

4.2.13. Через точку A провести плоскость, параллельную плоскости $\Gamma(m//k)$ (рис. 4.41).

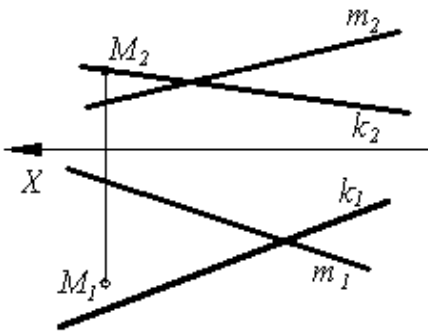


Рис. 4.40

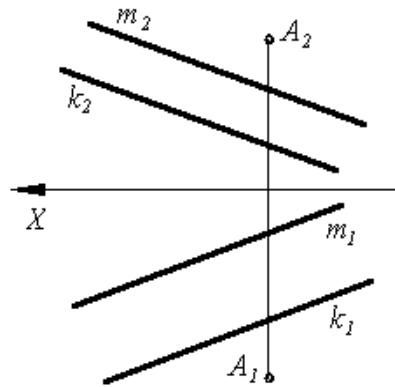


Рис. 4.41

4.2.14. Найти точку пересечения прямой l , заданной уравнением $\frac{x-65}{2} = \frac{y-125}{-4} = \frac{z-20}{3}$, с плоскостью $\Gamma(m//n)$, если уравнения прямых m и k имеют вид $\frac{x-60}{12} = \frac{y-55}{0} = \frac{z-95}{-5}$, $\frac{x-60}{12} = \frac{y-95}{0} = \frac{z-60}{-5}$. Определить видимость прямой.

4.2.15. Построить линию пересечения плоскостей $\Gamma(ABC)$ и $\Phi(EDK)$, если $A(120,10,90)$, $B(48,82,20)$, $C(0,52,82)$, $D(65,80,110)$, $E(130,38,20)$, $K(15,0,52)$.

4.4. Задачи повышенной сложности

4.4.1. Построить прямую k , пересекающую три прямые m , n и l (рис.4.42).

4.4.2. Найти геометрическое место точек, принадлежащих плоскости $\Gamma(A, B, C)$ и равноудаленных от Π_1 и Π_2 (рис. 4.43).

4.4.3. Построить прямую k , проходящую через точку M и пересекающую прямые a и b (рис. 4.44).

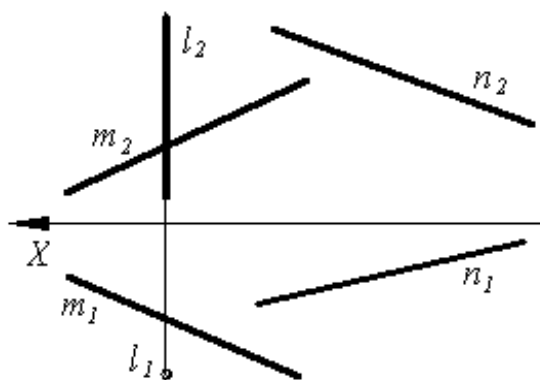


Рис. 4.42

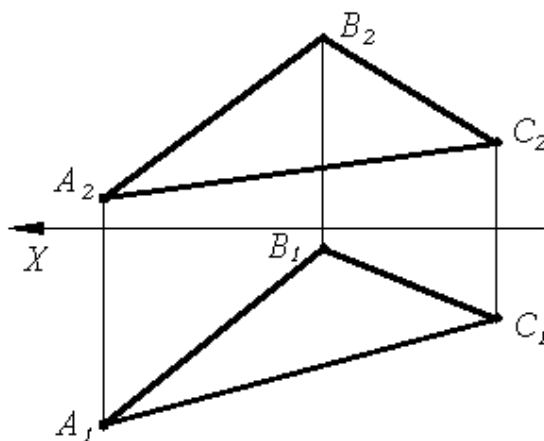


Рис. 4.43

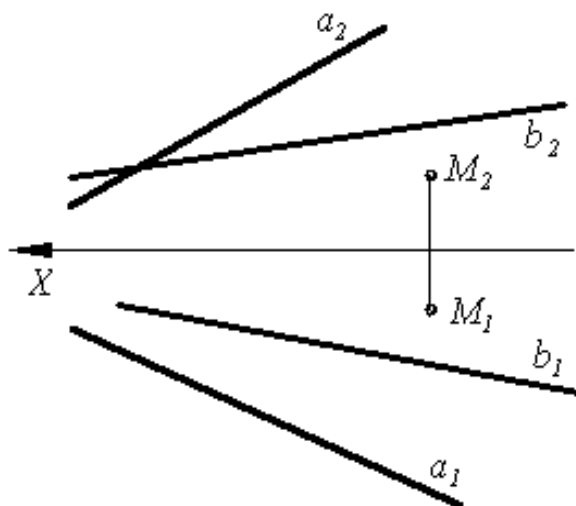


Рис. 4.44

4.5. Контрольная работа №2

4.5.1. Определить, принадлежит ли точка A заданной прямой BC (рис.4.45).

4.5.2. На заданных прямых m и n найти точки, удаленные от плоскости Π_1 на расстояние 10 мм. Определить взаимное положение прямых (рис.4.46).

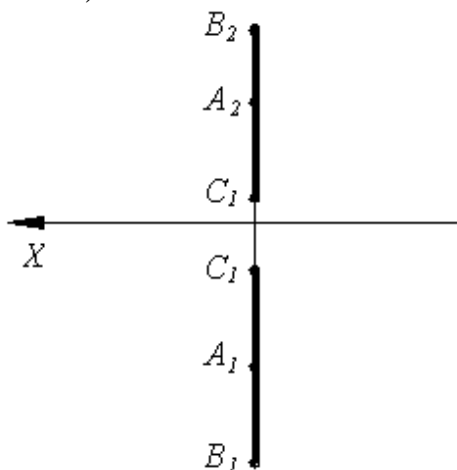


Рис. 4.45

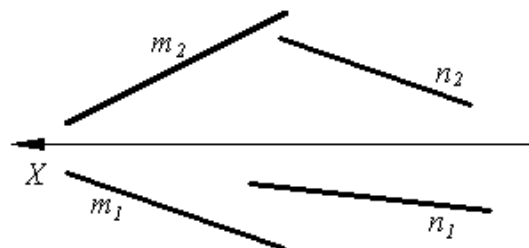


Рис. 4.46

4.5.3. В плоскости $\Gamma(m//n)$ построить треугольник с вершиной в точке M (рис.4.47).

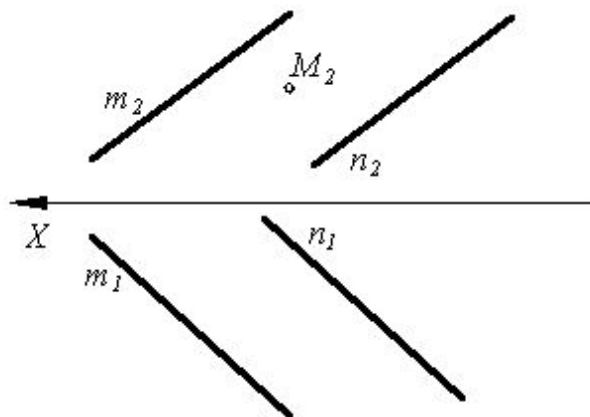


Рис. 4.47

4.5.4. Найти точку пересечения прямой l заданной уравнением $\frac{x-35}{19} = \frac{y-25}{19} = \frac{z-30}{11}$, с плоскостью $\Gamma(ABC)$, если $A(150, 105, 20)$, $B(110, 25, 95)$, $C(20, 105, 95)$. Определить видимость прямой.

4.5.5. Построить линию пересечения плоскостей $\Gamma(ABC)$ и $\Phi(E, D, K)$, если $A(18, 75, 40)$, $B(83, 6, 107)$, $C(135, 38, 47)$, $D(67, 0, 20)$, $E(0, 48, 111)$, $K(121, 86, 78)$. Определить видимость треугольников.

4.6. Содержание графического задания №1 «Первая позиционная задача»

4.1. По заданному варианту на комплексном чертеже Монжа изобразить плоскость G и прямую l .

4.2. Найти точку пересечения прямой l с плоскостью G .

4.3. Определить видимость прямой l .

4.7. Требования к оформлению задания

4.7.1. Каждый студент получает свой вариант задания.

4.7.2. Задание оформляется на листах чертежной бумаги форматов А3 или А4 карандашом. Образец выполнения задания приведен на рис.4.48

4.7.3. Для обводки используются карандаши ТМ, Т, 2Т. Линии, относящиеся к результату решения задачи по ГОСТ 2.303-68 должны иметь толщину $s=0,5-1,4$ мм. Линии вспомогательных построений, которые сохраняются на чертеже для проверки правильности решения задачи, выполняются толщиной $s/3 - s/4$.

4.7.4. Основная надпись оформляется по ГОСТ 2.104-68.

4.7.5. Текстовое условие задачи выполняется чертежным шрифтом.

4.8. Порядок сдачи работы

4.8.1. Выполненное задание сдается преподавателю, ведущему занятия в группе, в установленные сроки. Вариант на следующее задание выдается только после сдачи предыдущего задания.

4.8.2. Для того, чтобы работа была зачтена, необходимо:

- правильно решить задачу;
- решение задачи грамотно оформить графически в соответствии со стандартами ЕСКД;
- обосновать рациональность выбранного способа решения;
- правильно изложить последовательность решения;
- ответить на контрольные вопросы.

4.8.3. Работа, подписанная преподавателем, сохраняется студентом до экзамена. В случае ее утери, работа должна быть выполнена заново.

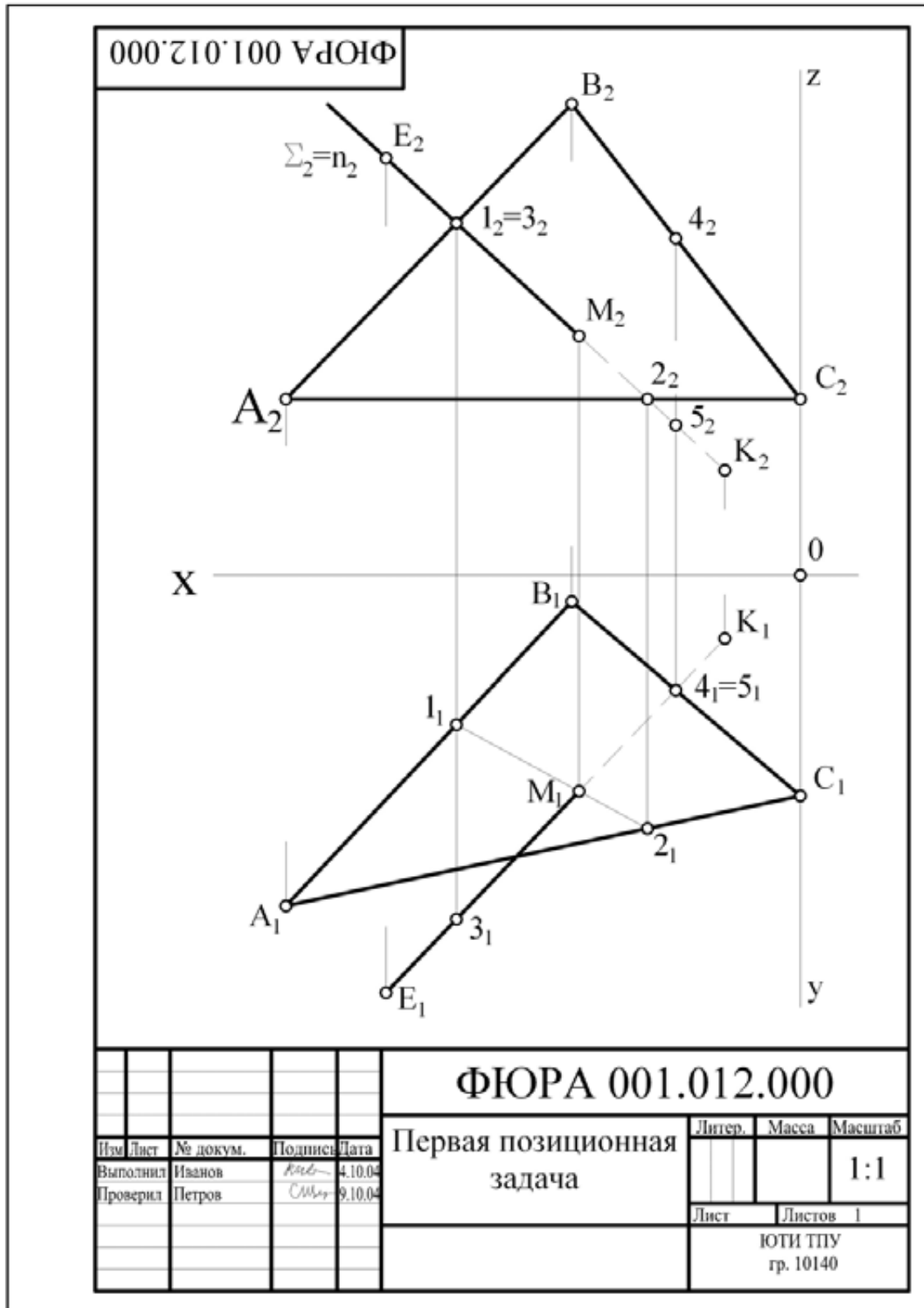


Рис. 4.48

4.9. Варианты индивидуальных заданий к работе №1

Номер варианта	Прямая l	Плоскость Γ
1	$\frac{x-30}{70} = \frac{y-55}{60} = \frac{z-35}{80}$.	$\Gamma(m//n)$, $m: \frac{x-30}{100} = \frac{y-75}{-50} = \frac{z-95}{0}$, $n: \frac{x-30}{100} = \frac{y-125}{-50} = \frac{z-55}{0}$.
2	$\frac{x-30}{17} = \frac{y-40}{9} = \frac{z-65}{0}$.	$\Gamma(A, B, C)$, $A(70, 15, 90), B(115, 115, 20), C(10, 60, 90)$.
3	$\frac{x-75}{7} = \frac{y-120}{-21} = \frac{z-20}{14}$.	$\Gamma(m \cap n)$, $m: \frac{x-60}{13} = \frac{y-35}{19} = \frac{z-80}{0}$, $n: \frac{x-60}{11} = \frac{y-35}{0} = \frac{z-80}{-14}$.
4	$\frac{x-25}{17} = \frac{y-30}{22} = \frac{z-110}{-21}$.	$\Gamma(A, B, C)$, $A(125, 90, 35), B(15, 45, 55), C(55, 130, 105)$.
5	$\frac{x-50}{6} = \frac{y-65}{0} = \frac{z-80}{5}$.	$\Gamma(m//n)$, $m: \frac{x-50}{12} = \frac{y-75}{12} = \frac{z-75}{5}$, $n: \frac{x-50}{12} = \frac{y-10}{12} = \frac{z-30}{5}$.
6	$\frac{x-45}{14} = \frac{y-115}{-18} = \frac{z-110}{-17}$.	$\Gamma(A, B, C)$, $A(145, 65, 35), B(70, 30, 100), C(18, 100, 65)$.
7	$\frac{x-50}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-75}{0}$.	$\Gamma(m \cap n)$, $m: \frac{x-85}{4} = \frac{y-35}{2} = \frac{z-100}{7}$, $n: \frac{x-85}{7} = \frac{y-35}{-5} = \frac{z-100}{0}$.
8	$\frac{x-15}{9} = \frac{y-50}{4} = \frac{z-20}{6}$.	$\Gamma(A, B, C)$, $A(135, 70, 35), B(70, 120, 110), C(20, 25, 65)$.

9	$\frac{x-25}{13} = \frac{y-35}{8} = \frac{z-65}{0}$.	$\Gamma(m//n)$, $m: \frac{x-65}{7} = \frac{y-75}{-8} = \frac{z-70}{4}$, $n: \frac{x-65}{7} = \frac{y-150}{-8} = \frac{z-25}{4}$.
10	$\frac{x-40}{15} = \frac{y-15}{20} = \frac{z-110}{-18}$.	$\Gamma(A, B, C)$, $A(90, 15, 20), B(125, 55, 90), C(30, 95, 90)$.
11	$\frac{x-60}{4} = \frac{y-65}{-5} = \frac{z-35}{-6}$.	$\Gamma(m \cap n)$, $m: \frac{x-90}{8} = \frac{y-70}{3} = \frac{z-75}{0}$, $n: \frac{x-90}{5} = \frac{y-70}{-6} = \frac{z-75}{4}$.
12	$\frac{x-30}{10} = \frac{y-35}{10} = \frac{z-15}{9}$.	$\Gamma(A, B, C)$, $A(80, 30, 115), B(135, 110, 30), C(30, 110, 55)$.
13	$\frac{x-30}{15} = \frac{y-25}{17} = \frac{z-15}{17}$.	$\Gamma(m//n)$, $m: \frac{x-45}{5} = \frac{y-50}{0} = \frac{z-110}{-4}$, $n: \frac{x-45}{5} = \frac{y-90}{0} = \frac{z-55}{-4}$.
14	$\frac{x-15}{26} = \frac{y-50}{9} = \frac{z-125}{-21}$.	$\Gamma(A, B, C)$, $A(140, 110, 95), B(95, 25, 20), C(35, 110, 95)$.
15	$\frac{x-50}{4} = \frac{y-90}{-3} = \frac{z-85}{-7}$.	$\Gamma(m \cap n)$, $m: \frac{x-100}{8} = \frac{y-75}{0} = \frac{z-70}{-3}$, $n: \frac{x-100}{9} = \frac{y-75}{-7} = \frac{z-70}{6}$.
16	$\frac{x-40}{15} = \frac{y-10}{21} = \frac{z-30}{10}$.	$\Gamma(A, B, C)$, $A(135, 35, 20), B(35, 35, 95), C(55, 120, 20)$.

17	$\frac{x-45}{19} = \frac{y-55}{6} = \frac{z-30}{19}.$	$\Gamma(m//n),$ $m: \frac{x-55}{3} = \frac{y-145}{-3} = \frac{z-110}{-2},$ $n: \frac{x-55}{3} = \frac{y-55}{-3} = \frac{z-65}{-2}.$
18	$\frac{x-35}{19} = \frac{y-25}{19} = \frac{z-30}{11}.$	$\Gamma(A, B, C),$ $A(150, 105, 20), B(110, 25, 95), C(20, 105, 95).$
19	$\frac{x-50}{5} = \frac{y-80}{-13} = \frac{z-55}{-5}.$	$\Gamma(m \cap n),$ $m: \frac{x-90}{8} = \frac{y-75}{7} = \frac{z-70}{-5},$ $n: \frac{x-90}{6} = \frac{y-75}{-3} = \frac{z-70}{5}.$
20	$\frac{x-45}{9} = \frac{y-72}{11} = \frac{z-55}{5}.$	$\Gamma(A, B, C),$ $A(115, 125, 30), B(55, 40, 115), C(10, 95, 65).$
21	$\frac{x-40}{12} = \frac{y-95}{-8} = \frac{z-120}{-19}.$	$\Gamma(m//n).$ $m: \frac{x-40}{6} = \frac{y-80}{5} = \frac{z-65}{-3},$ $n: \frac{x-40}{6} = \frac{y-15}{5} = \frac{z-110}{-3}.$
22	$\frac{x-35}{4} = \frac{y-35}{3} = \frac{z-65}{-1}.$	$\Gamma(A, B, C),$ $A(30, 25, 30), B(65, 135, 95), C(30, 55, 30).$
23	$\frac{x-80}{12} = \frac{y-45}{6} = \frac{z-5}{25}.$	$\Gamma(m \cap n),$ $m: \frac{x-75}{14} = \frac{y-65}{7} = \frac{z-85}{-13},$ $n: \frac{x-75}{11} = \frac{y-65}{-7} = \frac{z-85}{0}.$
24	$\frac{x-45}{16} = \frac{y-25}{-11} = \frac{z-110}{-16}.$	$\Gamma(A, B, C),$ $A(145, 20, 95), B(30, 95, 95), C(75, 20, 25).$
25	$\frac{x-65}{2} = \frac{y-125}{-4} = \frac{z-20}{3}.$	$\Gamma(m//n),$

		$m: \frac{x-60}{12} = \frac{y-55}{0} = \frac{z-95}{-5},$ $n: \frac{x-60}{12} = \frac{y-95}{0} = \frac{z-60}{-5}.$
26	$\frac{x-60}{5} = \frac{y-70}{-3} = \frac{z-70}{-4}.$	$\Gamma(A, B, C),$ $A(140, 110, 30), B(110, 25, 105), C(20, 25, 30).$
27	$\frac{x-10}{21} = \frac{y-100}{-13} = \frac{z-90}{-12}.$	$\Gamma(A, B, C),$ $A(60, 120, 20), B(30, 30, 95), C(120, 65, 95).$
28	$\frac{x-75}{7} = \frac{y-120}{-21} = \frac{z-20}{14}.$	$\Gamma(m \cap n),$ $m: \frac{x-60}{13} = \frac{y-35}{19} = \frac{z-80}{0},$ $n: \frac{x-60}{11} = \frac{y-35}{0} = \frac{z-80}{-14}.$
29	$\frac{x-25}{17} = \frac{y-30}{22} = \frac{z-110}{-21}.$	$\Gamma(A, B, C),$ $A(125, 90, 35), B(15, 45, 55), C(55, 130, 105).$
30	$\frac{x-50}{6} = \frac{y-65}{0} = \frac{z-80}{5}.$	$\Gamma(m // n),$ $m: \frac{x-50}{12} = \frac{y-75}{12} = \frac{z-75}{5},$ $n: \frac{x-50}{12} = \frac{y-10}{12} = \frac{z-30}{5}$

4.10. Контрольные вопросы

4.10.1. Как образуется комплексный чертёж Монжа?

4.10.2. Как задаются на чертеже прямые и плоскости общего положения?

4.10.3. Как задаются на чертеже прямые и плоскости частного положения? Как они называются?

4.10.4. Какие задачи называются позиционными? Приведите примеры.

4.10.5. Как определяется видимость фигур на комплексном чертеже?

4.10.6. Запишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки.

4.10.7. Запишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

4.10.8. По заданному уравнению прямой в пространстве построить проекции этой прямой на чертеже Монжа.

5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

5.1. Краткие теоретические сведения

К метрическим задачам относятся задачи начертательной геометрии, в которых находятся углы и расстояния.

Определение натуральной величины отрезка. Если прямая является прямой уровня, то есть параллельна какой-либо плоскости проекций, то любой отрезок данной прямой на эту плоскость проекций проецируется в истинную величину. Например, отрезок AB (рис. 5.1) проецируется на горизонтальную плоскость проекций Π_1 в натуральную величину. Для определения натуральной (истинной) величины отрезка прямой общего положения можно воспользоваться методом прямоугольного треугольника (рис.5.2): натуральная (истинная) величина отрезка равна гипотенузе прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция данного отрезка, а другим – разность расстояний концов отрезка до плоскости проекций. Угол между натуральной величиной и проекцией является углом наклона отрезка к соответствующей плоскости проекций. На рис. 5.3 показано построение натуральной величины отрезка AB и углов α и β наклона отрезка к плоскостям Π_1 и Π_2 соответственно.

Ортогональные проекции плоских углов. Для того чтобы плоский угол на некоторую плоскость проекций проецировался в истинную величину, необходимо и достаточно, чтобы обе его стороны были параллельны плоскости проекций, то есть, чтобы плоскость угла была параллельна данной плоскости проекций (рис.5.4).

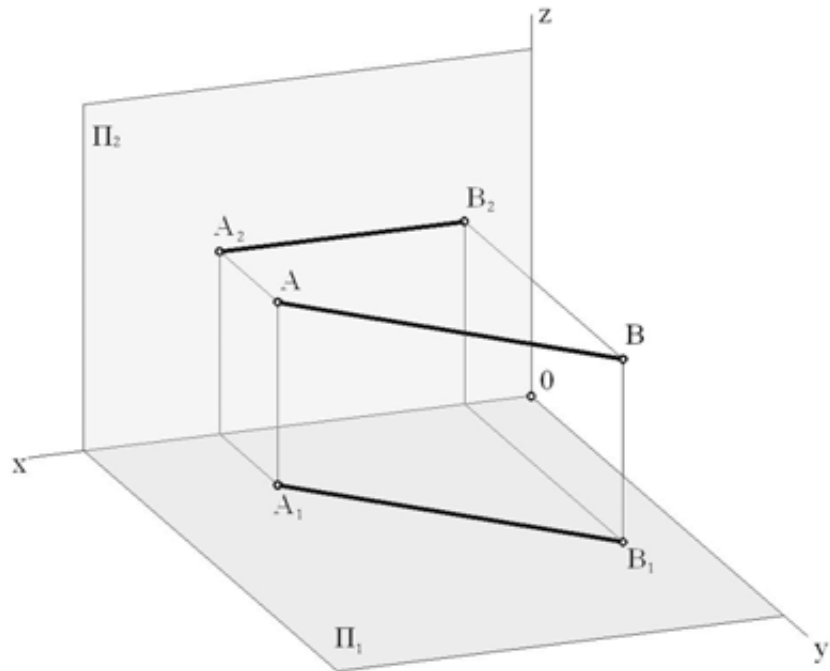


Рис. 5.1

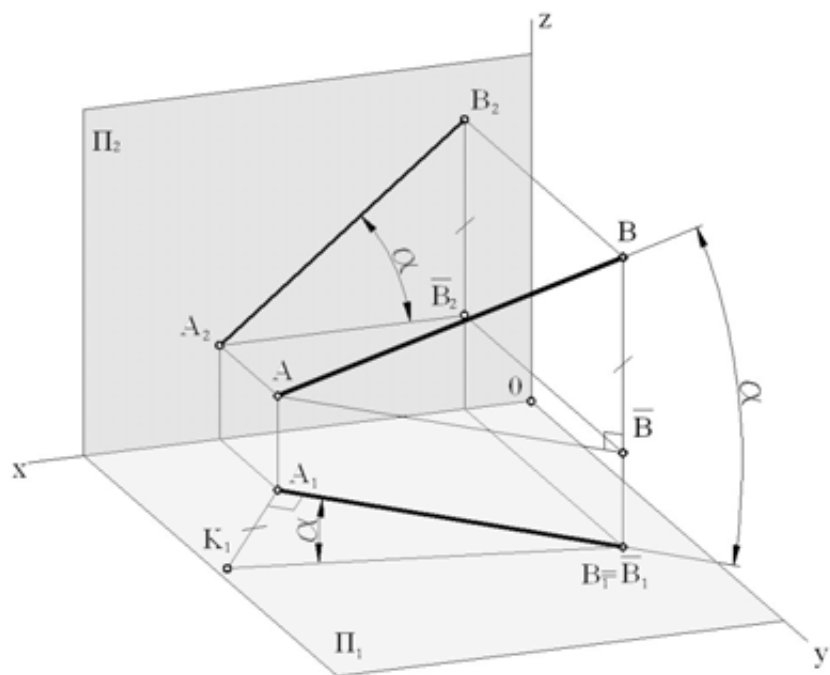


Рис. 5.2

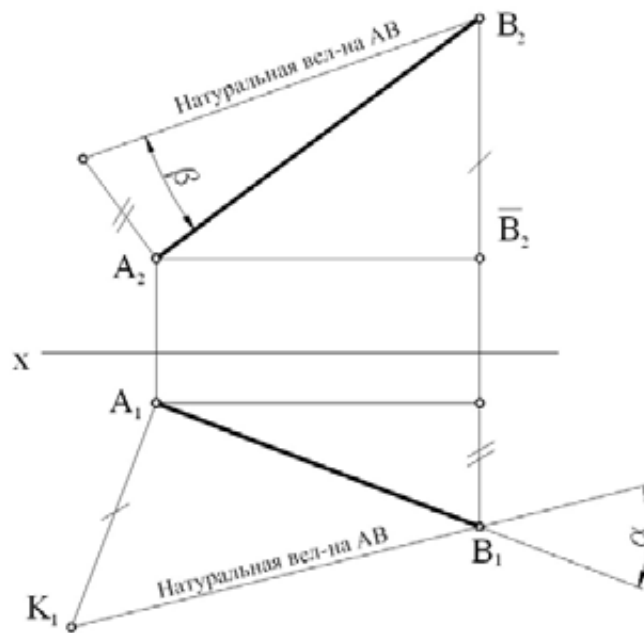


Рис. 5.3

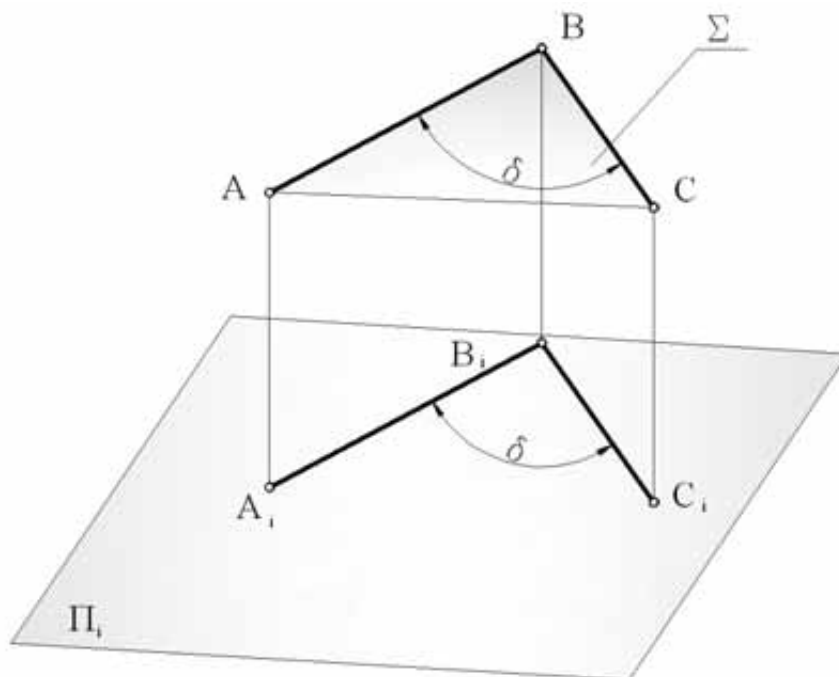


Рис. 5.4

Для того чтобы прямой угол на плоскость проекций проецировался в натуральную величину, необходимо и достаточно, чтобы лишь одна из его сторон была параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей.

Пусть задана некоторая горизонтальная прямая уровня h и точка M . Требуется провести прямую a , проходящую через точку M и пересекающую h под прямым углом (рис.5.5). Так как h параллельна плоскости проекций Π_1 , то на Π_1 прямой угол между h и a проецируется в истинную величину. По горизонтальной проекции K_1 точки K пересечения прямых h и a находим фронтальную проекцию K_2 и строим фронтальную проекцию a_2 искомой прямой a .

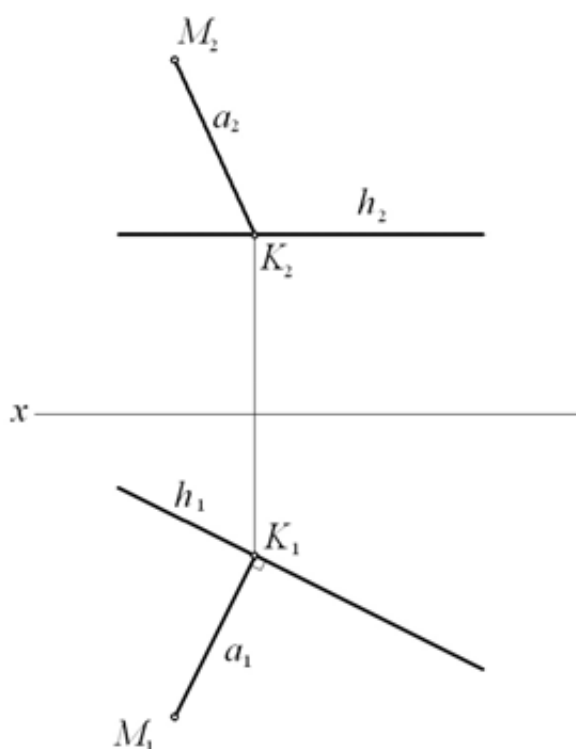


Рис. 5.5

Перпендикулярность прямой и плоскости. Известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум любым пересекающимся прямым этой плоскости. При задании перпендикуляра к плоскости на комплексном чертеже в качестве пересекающихся прямых удобно выбирать фронталь и горизонталь заданной плоскости. Тогда условие перпендикулярности прямой и плоскости применительно к комплексному чертежу формулируется следующим образом: прямая перпендикулярна плоскости, если ее фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости, а горизонтальная проекция – горизонтальной проекции горизонтали (рис.5.6).

Перпендикулярность двух плоскостей. При построении двух перпендикулярных плоскостей используется известное из стереометрии

положение, согласно которому две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. На рис. 5.7 показано построение плоскости $\Gamma(m \cap k)$, перпендикулярной данной плоскости $\Phi(A, B, C)$ и проходящей через точку E .

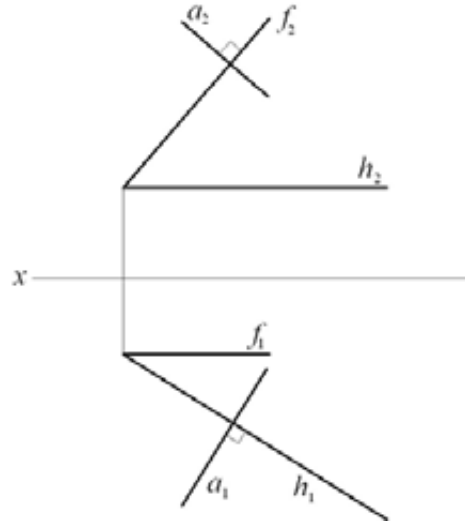


Рис. 5.6

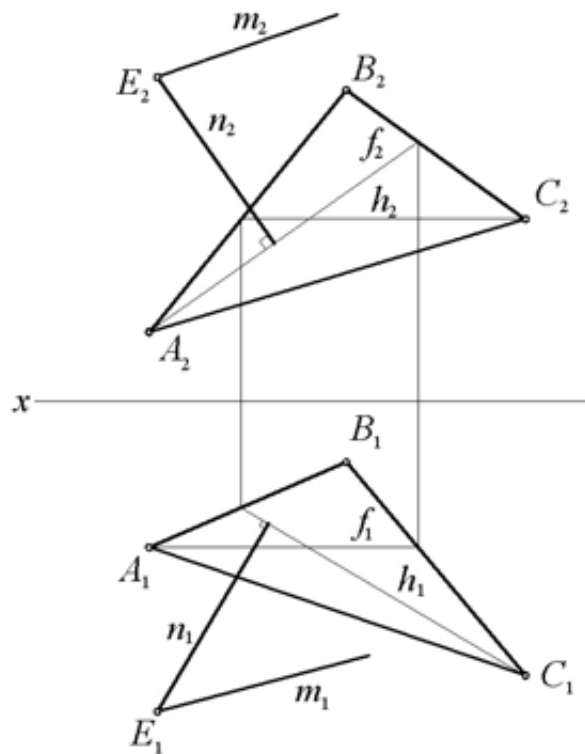


Рис. 5.7

Перпендикулярность двух прямых. Две взаимно перпендикулярные прямые строятся из условия, что одна из них инцидентна плоско-

сти, перпендикулярной другой прямой. Пусть требуется построить прямую l , проходящую через точку K и пересекающую прямую a под прямым углом (рис.5.8). Через точку K проведем плоскость $\Gamma(h \cap f)$, перпендикулярную прямой a : $a_2 \perp f_2$, $a_1 \perp h_1$, $f_1 \parallel Ox$, $h_2 \parallel Ox$. Далее найдем точку M пересечения Γ с прямой a (основная первая позиционная задача). Точки M и K определяют искомую прямую l .

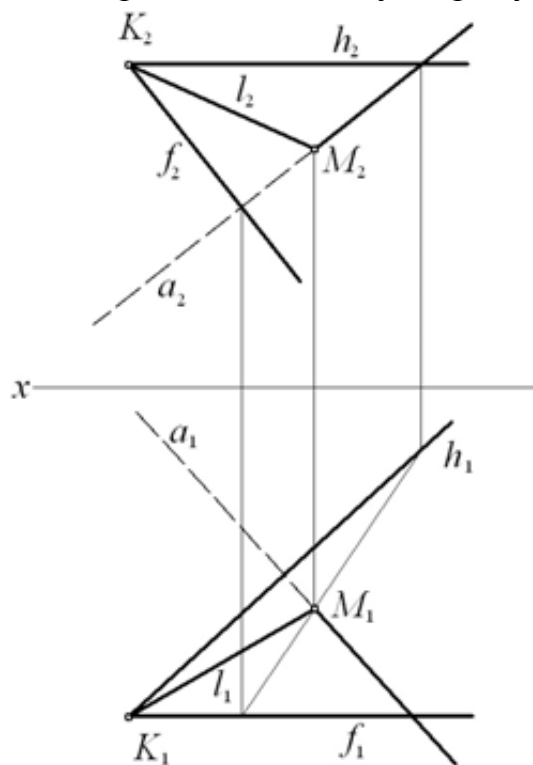


Рис. 5.8

Линии наибольшего наклона. Прямая, принадлежащая данной плоскости и составляющая с плоскостью проекций наибольший угол, называется линией наибольшего наклона к плоскости проекций (рис.5.9). Линия наибольшего наклона к Π_1 называется линией ската. Линия ската перпендикулярна горизонтали h , линия наибольшего наклона к Π_2 перпендикулярна фронтали f , линия наибольшего наклона к Π_3 – профильной прямой уровня p данной плоскости.

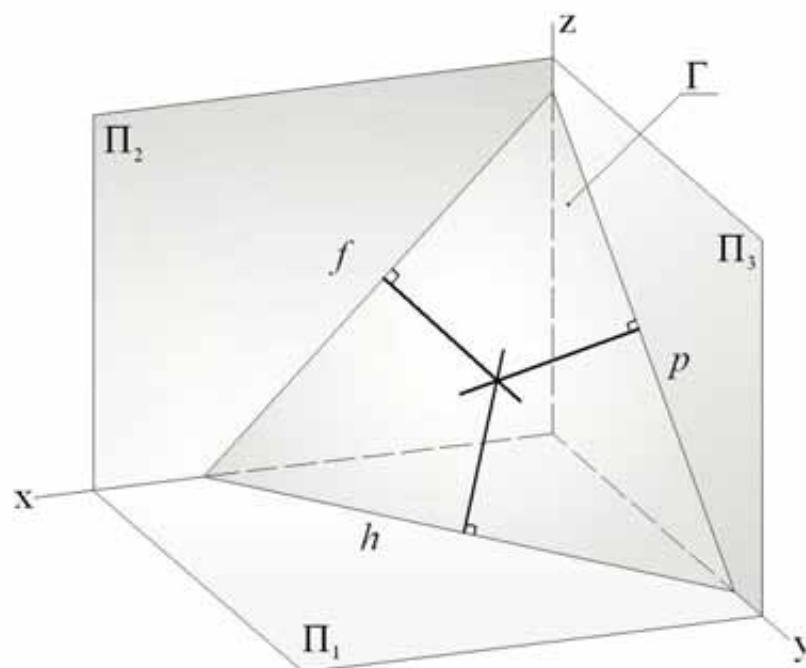


Рис. 5.9

Пусть задана плоскость $\Gamma(a//b)$. Построим линию ската l плоскости (рис.5.10). Сначала необходимо построить горизонталь h плоскости. Затем строим $l_1 \perp h_1$. Фронтальную проекцию l_2 искомой прямой l строим из условия принадлежности этой прямой плоскости Γ .

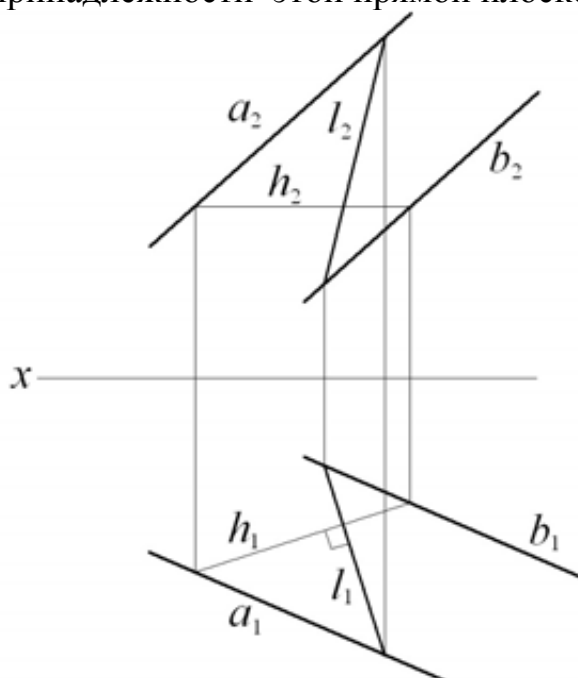


Рис. 5.10

5.2. Задачи для аудиторных занятий

5.2.1. Достроить фронтальную проекцию отрезка AB , если известна его натуральная величина, равная 50 мм (рис. 5.11).

5.2.2. Найти горизонтальную проекцию A_1 точки A , если она отстоит от прямой h на 20 мм (рис.5.12).

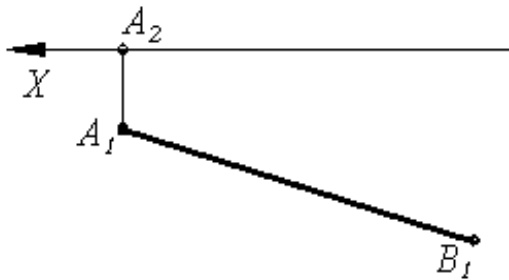


Рис. 5.11

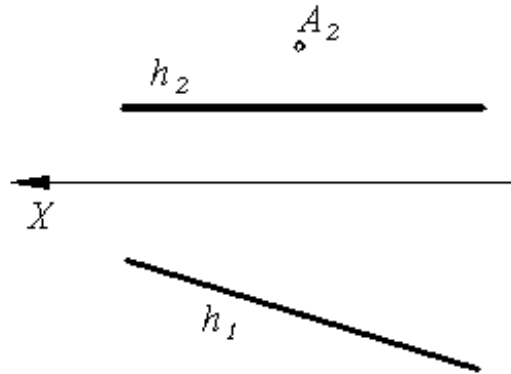


Рис. 5.12

5.2.3. Построить точку K , симметричную точке M относительно плоскости $\Gamma(a//b)$ (рис.5.13).

5.2.4. Через точку M провести плоскость, перпендикулярную прямой a (рис.5.14).

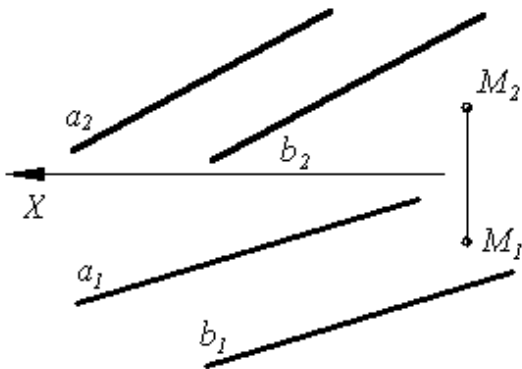


Рис. 5.13

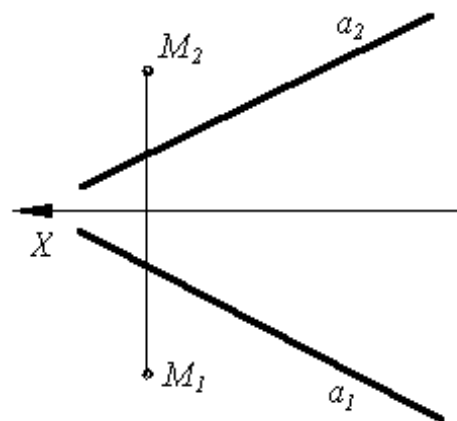


Рис. 5.14

5.2.5. Построить проекции пирамиды, основанием которой является треугольник ABC , а ребро SA определяет высоту $h = 40$ пирамиды, если заданы $A(60,45,5)$, $B(25,12,40)$, $C(0,42,25)$.

5.2.6. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от точек M и K (рис.5.15).

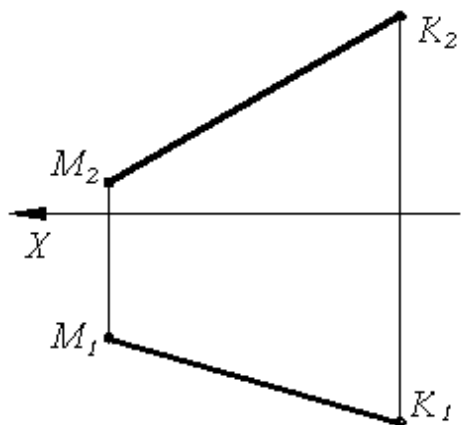


Рис. 5.15

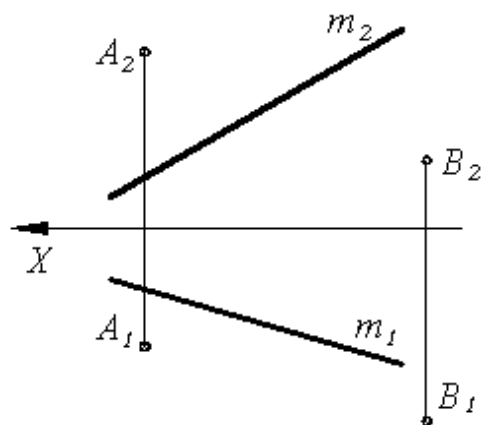


Рис. 5.16

5.2.7. На прямой m найти точку, равноудаленную от двух данных точек A и B (рис.5.16).

5.2.8. Построить проекции перпендикуляра, проведенного из точки A к прямой m (рис.5.17).

5.2.9. В плоскости $\Gamma(a//b)$ построить проекции линии наибольшего наклона к фронтальной плоскости проекций Π_2 , проходящей через точку A (рис. 5.18).

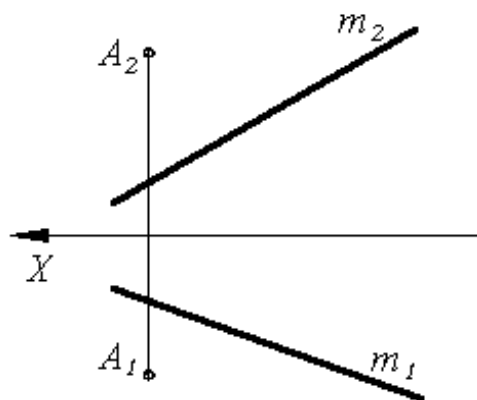


Рис. 5.17

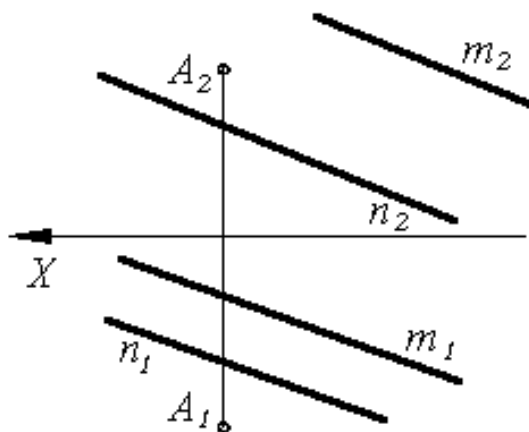


Рис. 5.18

5.2.10. Через точку M провести плоскость, параллельную прямой m и перпендикулярную плоскости $\Gamma(ABC)$ (рис. 5.19).

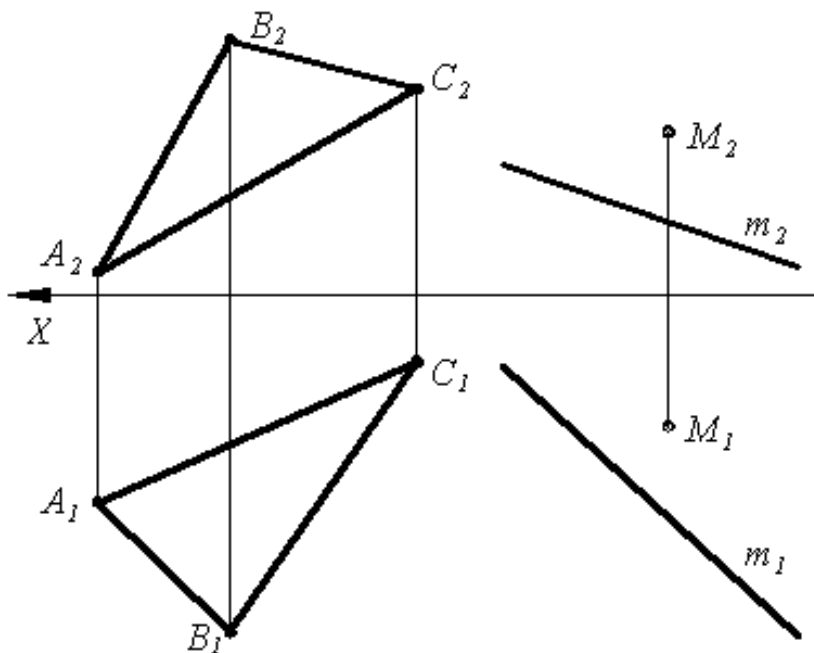


Рис. 5.19

5.3. Задачи для самостоятельной работы

5.3.1. Достроить горизонтальную проекцию отрезка AB , если известна его натуральная величина, равная 50 мм (рис. 5.20).

5.3.2. Найти фронтальную проекцию A_2 точки A , если она отстоит от прямой f на 20 мм (рис.5.21).

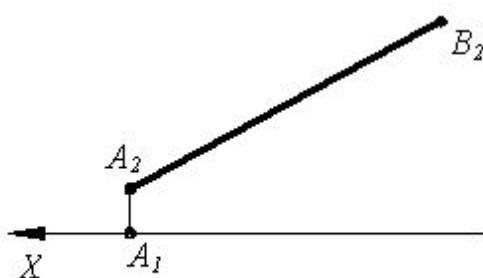


Рис. 5.20

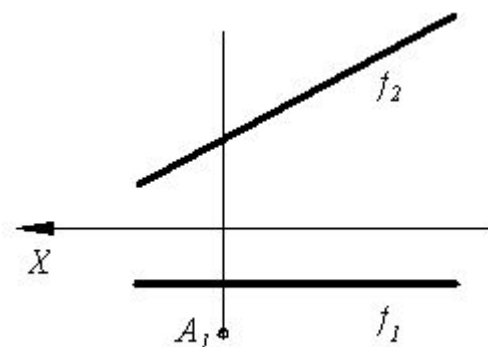


Рис. 5.21

5.3.3. Построить точку K , симметричную точке M относительно плоскости $\Gamma(ABC)$ (рис.5.22).

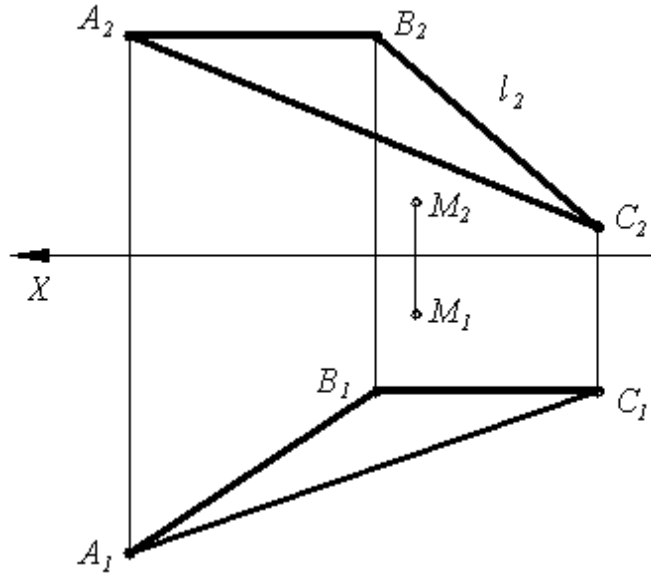


Рис. 5.22

5.3.4. Через точку M провести плоскость, перпендикулярную прямой h (рис.5.23).

5.3.5. Построить проекции пирамиды, основанием которой является треугольник ABC , а высота, равная 40 мм проходит через точку S (рис. 5.24).

5.3.6. Построить геометрическое место точек, удаленных от заданной плоскости ABC на расстоянии 30 мм (рис. 5.24). Сколько решений имеет задача?

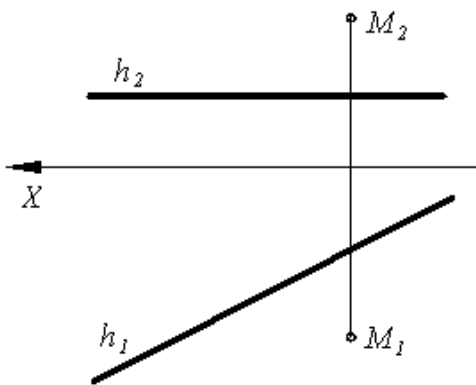


Рис. 5.23

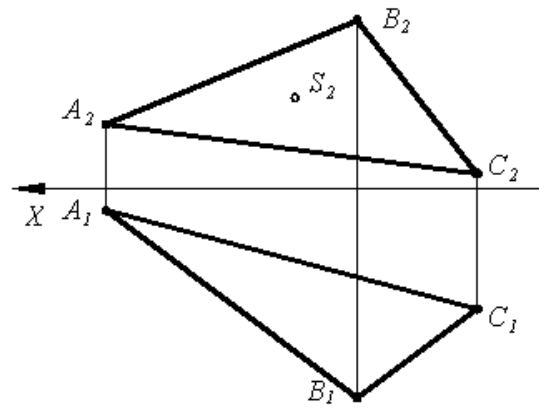


Рис. 5.24

5.3.7. На прямой t найти точку, равноудаленную от двух данных точек A и B (рис.5.25).

5.3.8. В плоскости $\Gamma(ABC)$ построить проекции линии ската, проходящей через точку S (рис. 5.24).

5.3.9. Через точку M провести плоскость, параллельную прямой a и перпендикулярную плоскости $\Gamma(ABC)$ (рис. 5.26).

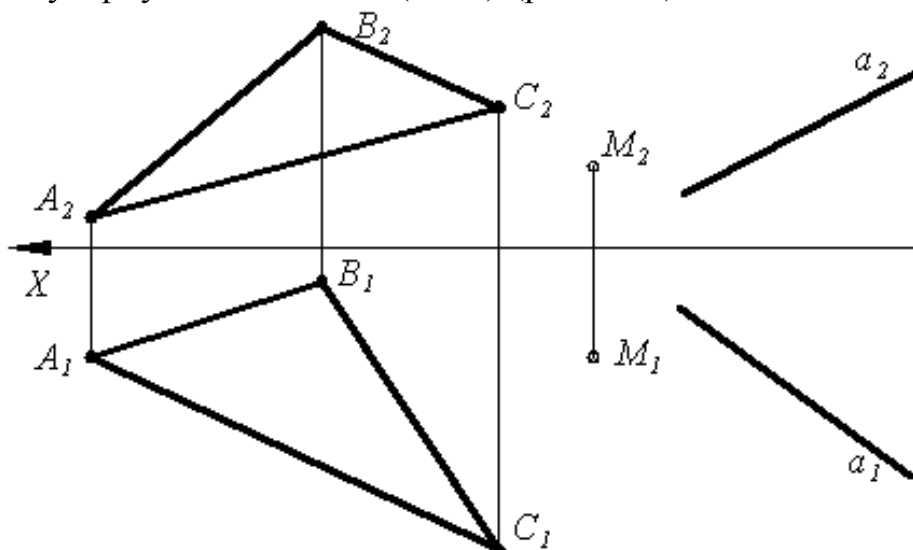


Рис. 5.26

5.3.10. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , если один из катетов расположен на прямой l , а одной из вершин является точка A (рис. 5.27).

5.3.11. Определить угол наклона прямой l к плоскости $\Gamma(ABC)$ (рис.5.28).

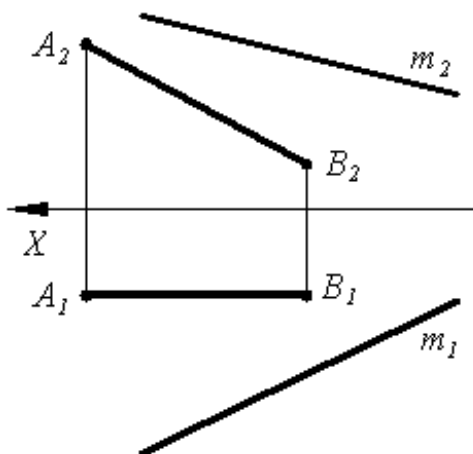


Рис. 5.25

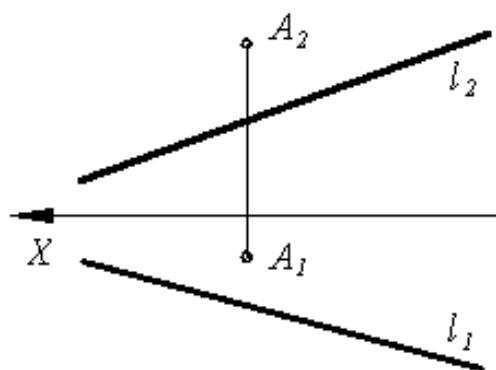


Рис. 5.27

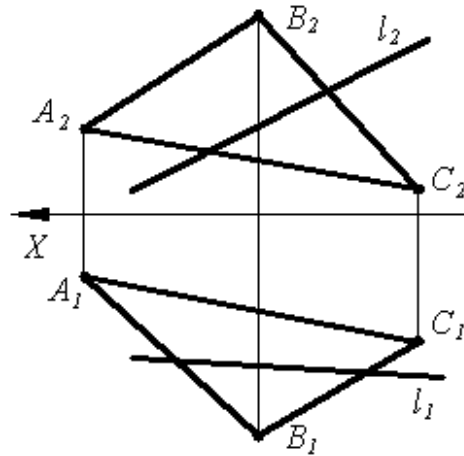


Рис. 5.28

5.4. Задачи повышенной сложности

5.4.1. Построить горизонтальную проекцию прямой m , перпендикулярной прямой k (рис.5.29).

5.4.2. Построить проекции квадрата $ABCD$ по данной стороне AB , если известно, что сторона AD принадлежит прямой m (рис.5.30).

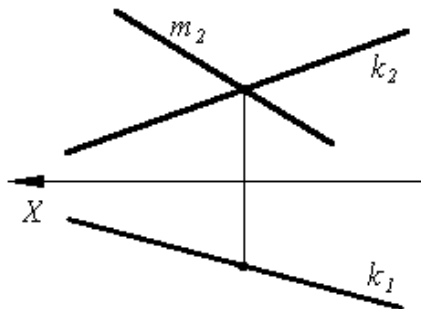


Рис. 5.29

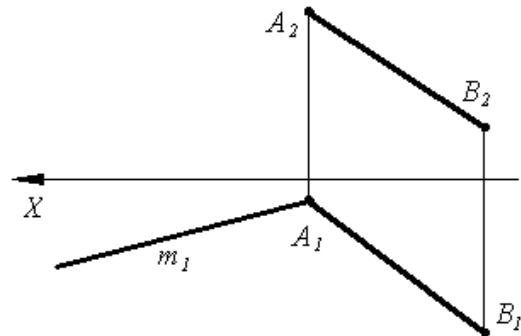


Рис. 5.30

5.4.3. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC основание которого на 10 мм длиннее высоты и принадлежит горизонтали h (рис.5.31).

5.4.4. На заданной прямой m найти точку M , отстоящую от заданной плоскости $\Gamma(ABC)$ на расстояние 30 мм (рис. 5.32).

5.4.5. Определить геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных скрещивающихся прямых a и b (рис. 5.33).

5.4.6. В плоскости $\Gamma(a//b)$ задать равнобедренный треугольник, вершиной которого является точка A , а высота, проходящая через эту вершину, равна 40 мм (рис. 5.34).

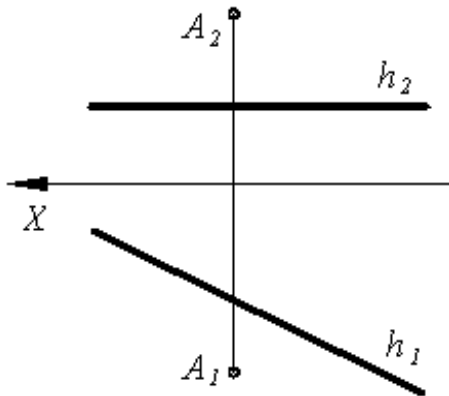


Рис. 5.31

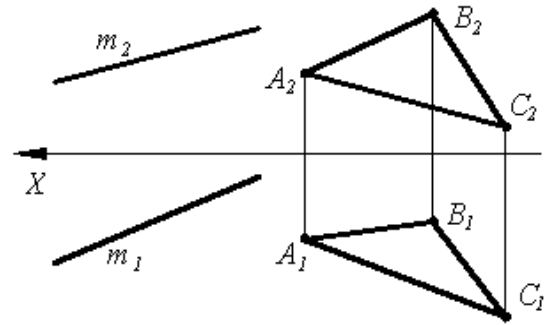


Рис. 5.32

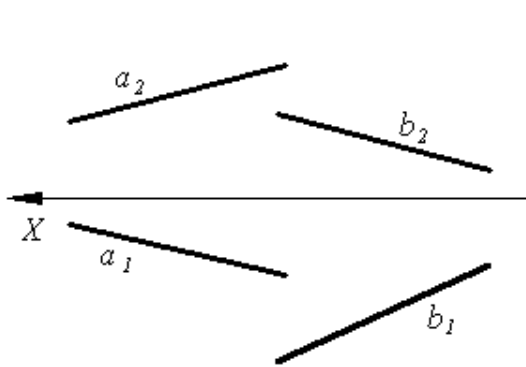


Рис. 5.33

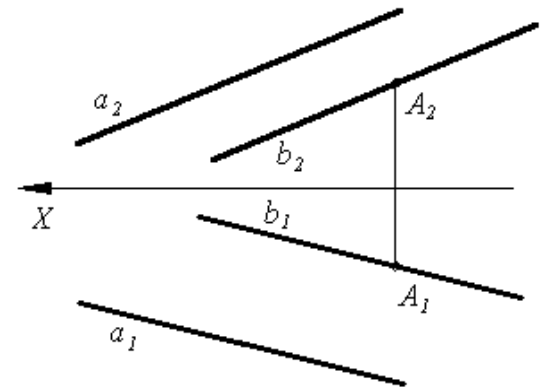


Рис. 5.34

5.5. Содержание графического задания №2 «Метрические задачи»

5.5.1. В соответствии с заданным вариантом на комплексном чертеже построить горизонтальную и фронтальную проекции геометрических фигур.

5.5.2. Решить метрическую задачу графически, не используя способов преобразования чертежа.

5.6. Оформление задания №2

5.6.1. Задание выполняется по вариантам на листах чертежной бумаги форматов А3 или А4 карандашом. Образец выполнения задания приведен на рис.5.35.

5.6.2. Линии, относящиеся к результату решения задачи, по ГОСТ 2.303-68 должны иметь толщину $s=0,5-1,4$ мм. Линии вспомогательных

построений, которые сохраняются на чертеже для проверки правильности решения задачи, выполняются толщиной $s/3 - s/4$.

5.6.3. Основная надпись оформляется по ГОСТ 2.104-68.

5.6.4. Текстовое условие задачи выполняется чертежным шрифтом.

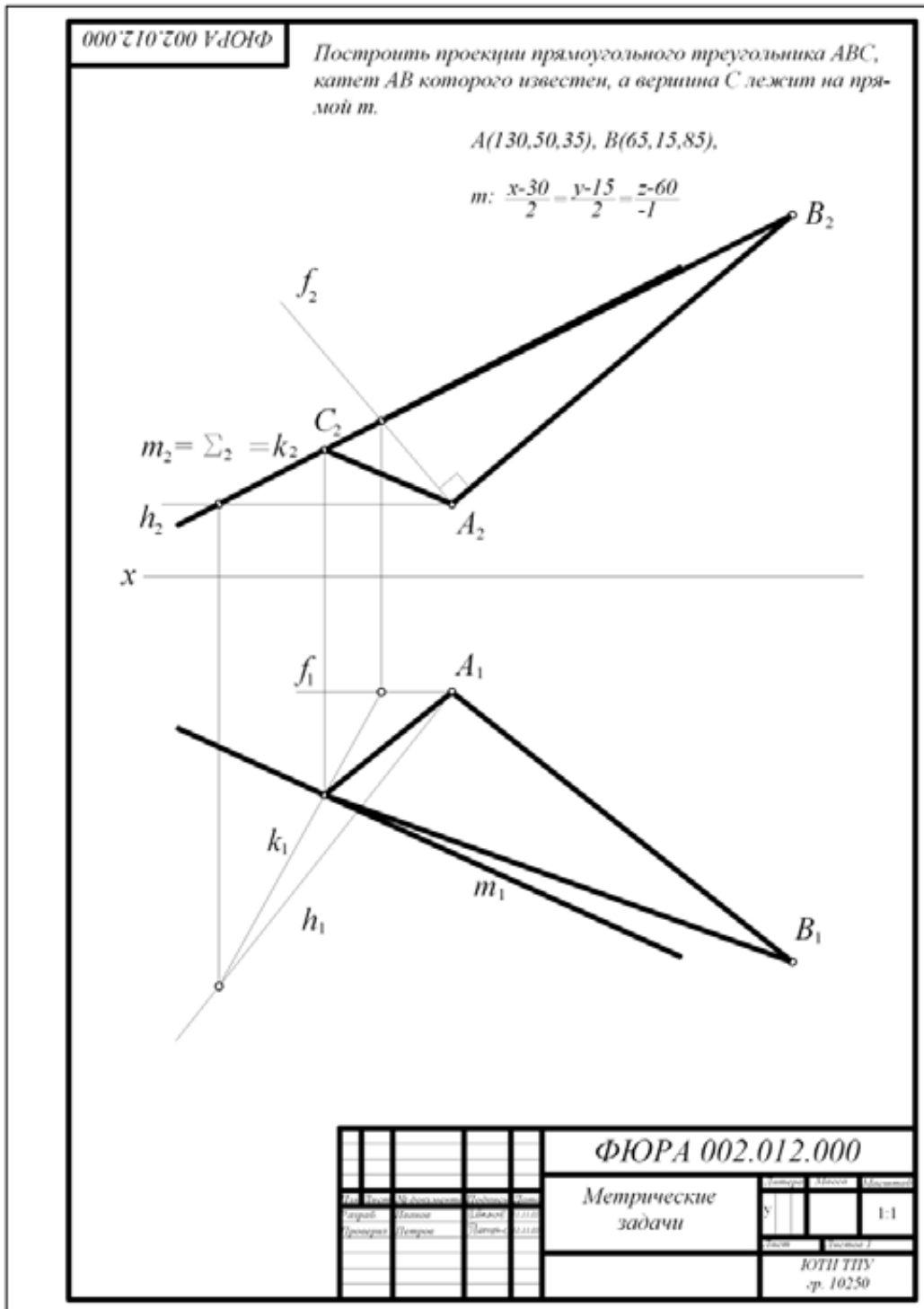


Рис.5.35

5.7. Варианты индивидуальных заданий к работе №2

Вариант 1. Построить проекции прямоугольного треугольника ABC , один катет которого AB известен, а вершина C лежит на прямой m .

$$A(130,60,35), B(65,15,85),$$
$$m: \frac{x-30}{2} = \frac{y-15}{2} = \frac{z-60}{-1}.$$

Вариант 2. Построить проекции высоты пирамиды $SABC$. S – вершина пирамиды.

$$A(120,45,60), B(55,20,50), C(90,50,25), S(75,90,90).$$

Вариант 3. Построить проекции прямоугольного треугольника ABC , гипотенуза AC которого известна, катет AB лежит в плоскости AMN , а другой катет ей перпендикулярен.

$$A(120,60,30), N(45,30,45), M(75,105,90), C(30,75,20).$$

Вариант 4. На прямой l найти точку, одинаково удаленную от точек A и B .

$$A(120,85,60), B(65,30,40),$$
$$l: \frac{x-30}{9} = \frac{y-55}{5} = \frac{z-24}{12}.$$

Вариант 5. В плоскости Σ построить множество точек, равноудаленных от точек A и B

$$A(120,60,96), B(48,30,60)$$
$$\Sigma: x - z + 30 = 0.$$

Вариант 6. Построить проекции отрезка, определяющего расстояние между прямой l и параллельной ей плоскостью $\Delta(m//n)$.

$$m: \frac{x-48}{2} = \frac{y-12}{1} = \frac{z-42}{3}$$
$$n: \frac{x-48}{2} = \frac{y-48}{1} = \frac{z-6}{3}$$
$$l: \frac{x-48}{2} = \frac{y-63}{1} = \frac{z-60}{3}.$$

Вариант 7. Построить проекции ромба $ABCD$. Известна его диагональ AC . Вершина B лежит на прямой m .

$$A(66,24,75), C(126,120,30),$$

$$m: \frac{x-45}{3} = \frac{y-66}{2} = \frac{z-72}{-4}.$$

Вариант 8. Построить проекции прямоугольного треугольника ABC , гипотенуза AC которого известна, катет AB лежит в плоскости $\Sigma(a \cap b)$, а другой катет ей перпендикулярен.

$$A(130,40,15), C(105,90,75),$$

$$a: \frac{x-70}{3} = \frac{y-60}{-1} = \frac{z-75}{-3},$$

$$b: \frac{x-70}{4} = \frac{y-100}{-4} = \frac{z-30}{-1}.$$

Вариант 9. Построить проекции высоты пирамиды $SABC$. S – вершина пирамиды.

$$A(110,65,75), B(25,30,60), C(80,70,20), S(50,100,100).$$

Вариант 10. Построить сферу с центром в точке P так, чтобы она касалась прямой l , и определить точку касания.

$$P(70, 45, 20),$$

$$l: \frac{x-60}{4} = \frac{y-80}{-3} = \frac{z-90}{-5}.$$

Вариант 11. Построить вершину B и проекции равнобедренного треугольника ABC с основанием AB , лежащим на прямой a , и вершиной C .

$$A(100,100,15), C(65,50,75),$$

$$a: \frac{x-40}{6} = \frac{y-30}{7} = \frac{z-55}{-4}.$$

Вариант 12. Построить проекции прямоугольного треугольника ABC , один катет которого AB известен. Гипотенуза лежит на прямой m .

$$A(35,60,15), B(80,45,75),$$

$$m: \frac{x-35}{18} = \frac{y-60}{4} = \frac{z-15}{3}.$$

Вариант 13. На прямой l найти точку, одинаково удаленную от точек A и B .

$$A(132, 84, 60), B(75, 3, 25),$$

$$l: \frac{x-60}{2} = \frac{y-66}{1} = \frac{z-36}{4}.$$

Вариант 14. Построить проекции ромба $ABCD$. Известна его диагональ AC . Вершина B лежит на прямой m .

$$A(110, 90, 36), C(60, 35, 75),$$

$$m: \frac{x-90}{9} = \frac{y-45}{5} = \frac{z-100}{-9}.$$

Вариант 15. Построить проекции отрезка MK , симметричного отрезку MN относительно плоскости $\Sigma(a \cap b)$.

$$M(96, 54, 51), N(30, 40, 40),$$

$$a: \frac{x-56}{4} = \frac{y-14}{4} = \frac{z-21}{3}$$

$$b: \frac{x-56}{4} = \frac{y-84}{-3} = \frac{z-81}{-3}.$$

Вариант 16. Построить проекции множества точек, принадлежащих плоскости $\Delta(ABC)$ и равноудаленных от точек A и B .

$$A(132, 15, 85) B(90, 105, 15), C(30, 45, 45).$$

Вариант 17. Построить проекции равнобедренного треугольника SAB , основанием которого является отрезок AB , а вершина S принадлежит прямой k .

$$A(35, 105, 50), B(95, 15, 25),$$

$$k: \frac{x-105}{2} = \frac{y-80}{1} = \frac{z-75}{-3}.$$

Вариант 18. Построить проекции отрезка PQ , определяющего расстояние между прямой l и параллельной ей плоскостью $\Sigma(m \cap n)$.

$$m: \frac{x-75}{3} = \frac{y-75}{-2} = \frac{z-15}{5},$$

$$n: \frac{x-30}{9} = \frac{y-15}{12} = \frac{z-65}{-10},$$

$$l: \frac{x-90}{3} = \frac{y-36}{-2} = \frac{z-4}{5}.$$

Вариант 19. Построить проекции отрезка MN , принадлежащего плоскости $\Omega(d // KL)$ и симметричного отрезку KL относительно прямой d .

$$L(90, 90, 15), K(15, 50, 100),$$

$$d: \frac{x-75}{15} = \frac{y-20}{8} = \frac{z-100}{-17}.$$

Вариант 20. Построить проекции равнобедренного треугольника MCD , плоскость которого перпендикулярна плоскости $\Delta(ABC)$, а основание CD принадлежит этой плоскости.

$$A(140, 45, 20), B(75, 80, 90), C(30, 30, 45), M(100, 15, 85).$$

Вариант 21. Построить проекции точки Q , симметричной точке P относительно плоскости $\Omega(m // n)$.

$$P(150, 55, 10)$$

$$m: \frac{x-72}{3} = \frac{y-63}{-2} = \frac{z-30}{4},$$

$$n: \frac{x-24}{3} = \frac{y-50}{-2} = \frac{z-30}{4}.$$

Вариант 22. Построить проекции плоскости Φ , параллельной плоскости $\Sigma(a \cap b)$ и одинаково удаленной от нее и от точки N .

$$N(50, 30, 80),$$

$$a: \frac{x-75}{6} = \frac{y-40}{15} = \frac{z-25}{7},$$

$$b: \frac{x-75}{-15} = \frac{y-40}{-8} = \frac{z-25}{6}.$$

Вариант 23. Построить проекции прямой q , проходящей через точку Q и пересекающей прямую l под углом 90° .

$$Q(90, 80, 15),$$

$$l: \frac{x-45}{12} = \frac{y-85}{5} = \frac{z-65}{-9}.$$

Вариант 24. В плоскости $\Sigma(a // b)$ построить проекции общего перпендикуляра двух параллельных прямых a и b .

$$a: \frac{x-120}{-3} = \frac{y-60}{-2} = \frac{z-45}{3},$$

$$b: \frac{x-90}{-3} = \frac{y-75}{-2} = \frac{z-12}{3}.$$

Вариант 25. Построить точку M , симметричную точке K относительно плоскости $\Sigma(a \cap b)$.

$$K(100, 90, 75),$$

$$a: \frac{x-75}{9} = \frac{y-95}{-13} = \frac{z-20}{9},$$

$$b: \frac{x-75}{-9} = \frac{y-95}{-4} = \frac{z-20}{11}.$$

Вариант 26. Построить проекции отрезка, определяющего расстояние от точки K до прямой l .

$$K(110, 45, 60),$$

$$l: \frac{x-45}{9} = \frac{y-50}{4} = \frac{z-75}{-9}.$$

Вариант 27. Построить проекции отрезка, определяющего расстояние между параллельными плоскостями $\Sigma(ABC)$ и $\Gamma(m \cap n)$.

$$A(130, 15, 75), B(100, 85, 30), C(45, 60, 105),$$

$$m: \frac{x-60}{-3} = \frac{y-10}{2} = \frac{z-50}{1},$$

$$n: \frac{x-60}{-2} = \frac{y-10}{5} = \frac{z-50}{-3}.$$

Вариант 28. Построить проекции отрезка, определяющего расстояние от точки K до прямой a .

$$K(100, 25, 75),$$

$$a: \frac{x-30}{9} = \frac{y-5}{7} = \frac{z-105}{-12}.$$

Вариант 29. Построить точку M , симметричную точке K относительно прямой a .

$$K(45, 90, 25),$$

$$a: \frac{x-45}{4} = \frac{y-25}{2} = \frac{z-90}{-3}.$$

Вариант 30. Построить проекции высоты треугольника ABC , проходящей через вершину C .

$$A(130, 25, 5), B(90, 75, 75), C(30, 5, 25).$$

5.8. Контрольные вопросы

5.8.1. Какие задачи называются метрическими? Приведите примеры.

5.8.2. В каком случае плоский угол, отличный от прямого, проецируется на плоскость проекций в натуральную величину?

5.8.3. При каком условии прямой угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину?

5.8.4. Как задается прямая, перпендикулярная плоскости, на комплексном чертеже Монжа?

5.8.5. Запишите условие перпендикулярности двух прямых плоскости в аналитическом виде.

5.8.6. Условие перпендикулярности двух плоскостей.

5.8.7. Как определяется кратчайшее расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой, между двумя прямыми?

5.8.8. Какие линии называются линиями наибольшего наклона к плоскостям проекций?

6. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

6.1. Краткие теоретические сведения

6.1.1. Общие сведения

Решение метрических и позиционных задач значительно упрощается, если хотя бы одна из геометрических фигур, о которых идет речь в задаче, находятся в частном положении относительно плоскостей проекций. Для преобразования геометрических фигур общего положения в фигуры частного положения используются преобразования комплексного чертежа, которые можно разделить на две группы. К первой группе относятся способ замены плоскостей проекций и способ дополнительного проецирования. В этом случае происходит замена исходных плоскостей проекций новыми, относительно которых геометрические фигуры будут находиться в частном положении. Ко второй группе относятся способ плоскопараллельного движения, способ вращения вокруг проецирующей прямой и способ вращения вокруг прямой уровня. При этом изменяется положение геометрических фигур относительно неизменных плоскостей проекций.

Перечисленными способами можно решить следующие четыре основные задачи по преобразованию: 1) прямой общего положения в прямую уровня; 2) прямой общего положения в проецирующую; 3) плоскости общего положения в проецирующую; 4) плоскости общего положения в плоскость уровня. Задачи 1 и 3 решаются одним преобразованием, а задачи 2 и 4 в общем случае – двумя преобразованиями.

6.1.2. Способ замены плоскостей проекций

В данном способе происходит замена одной из исходной плоскостей проекций на новую, по отношению к которой геометрические фигуры будут параллельны или перпендикулярны. На рис. 6.1а, 6.1б показана замена фронтальной плоскости проекций Π_2 новой фронтальной плоскостью проекций Π'_2 , параллельной отрезку AB .

Пример. На рис.6.2 показано определение натуральной величины плоского треугольника ABC . Задачу решаем с помощью двух преобразований. Новая фронтальная плоскость проекций

Π'_2 перпендикулярна плоскости треугольника ABC . Для построения фронтальной проекции $A'_2B'_2C'_2$ треугольника ABC в его плоскости проводим горизонталь $h(h_1, h_2)$. Ось $O'x'$ новой системы плоскостей проекций Π_1, Π'_2 должна быть перпендикулярна h_1 . Во втором преобразовании горизонтальная плоскость проекций Π'_1 параллельна плоскости треугольника ABC . При этом ось $O''x''$ системы плоскостей Π'_1, Π'_2 будет параллельна проекции $A'_2B'_2C'_2$ треугольника ABC . На плоскость проекций Π'_1 треугольник ABC проецируется в натуральную величину.

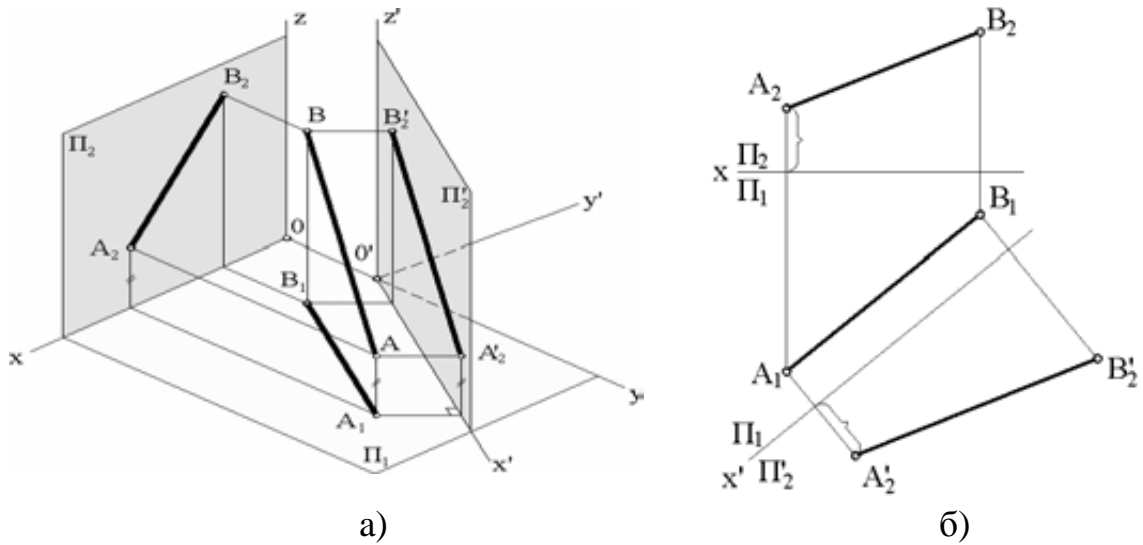


Рис.6.1

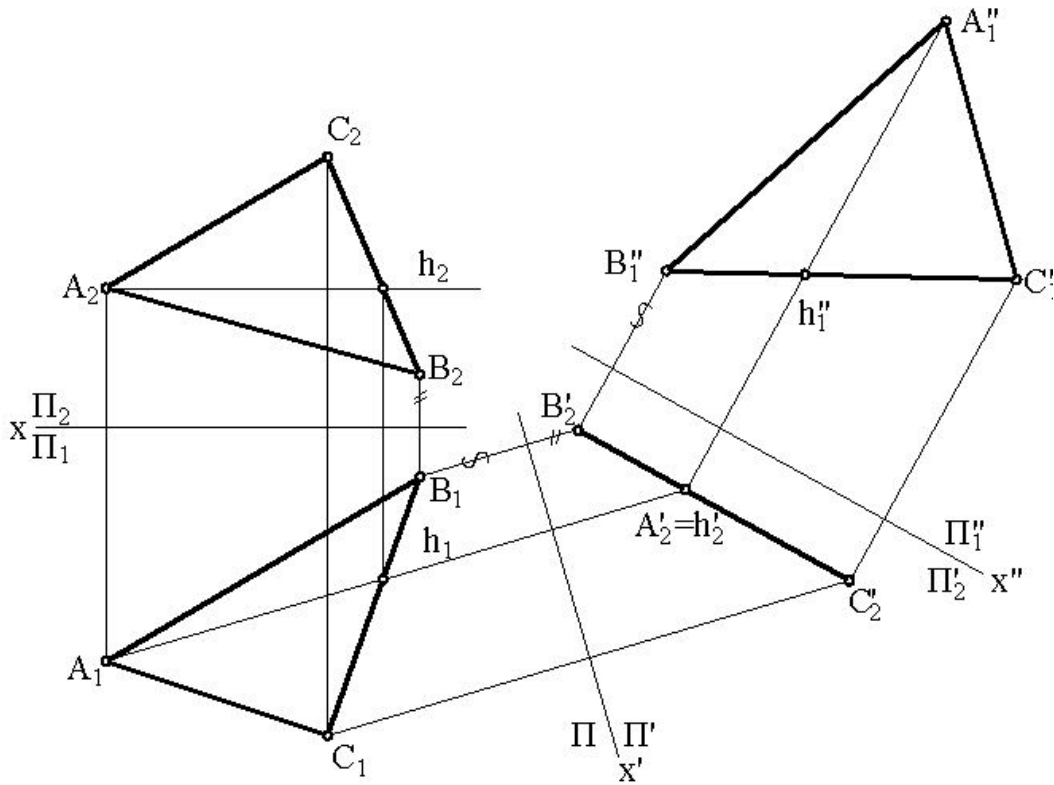


Рис. 6.2

6.1.3. Способ плоскопараллельного движения

При способе плоскопараллельного движения геометрические фигуры приводятся в частное положение путем их плоскопараллельного перемещения в пространстве относительно неподвижной системы плоскостей проекций. Плоскопараллельным перемещением фигуры относительно некоторой плоскости называется перемещение, при котором все ее точки перемещаются в плоскостях, параллельных этой плоскости. Если фигура совершает плоскопараллельное движение относительно Π_1 , то траектории движения всех ее точек расположены в плоскостях, параллельных Π_1 (эти плоскости на Π_2 проецируются в прямые, параллельные оси проекций Ox) (рис. 6.3а,б). Так как угол наклона к Π_1 в процессе плоскопараллельного перемещения не изменяется, то горизонтальная проекция фигуры остается конгруэнтной самой себе.

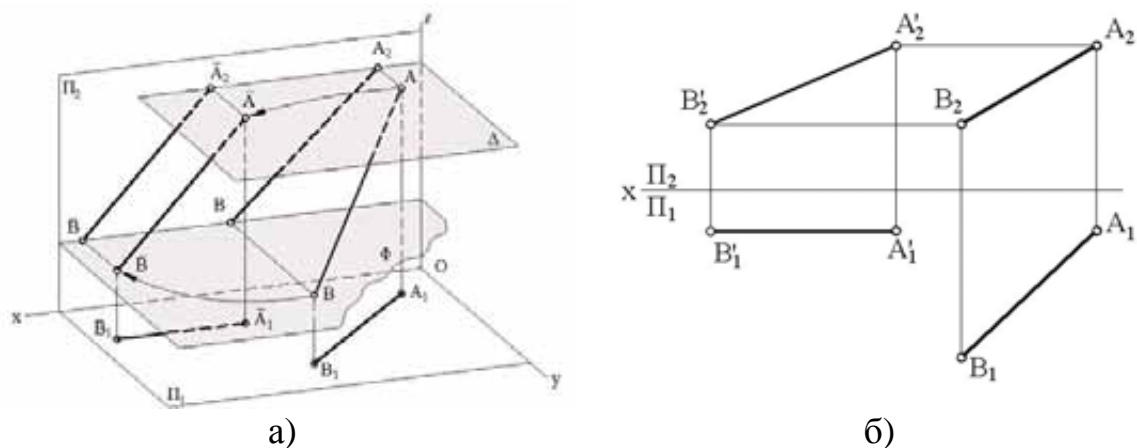


Рис. 6.3

Пример. На рис. 6.3б показано определение натуральной величины отрезка AB способом плоскопараллельного движения.

Плоскопараллельным движением относительно плоскости проекций Π_1 переводим отрезок AB в положение прямой уровня (фронталь). Его горизонтальная проекция $A'B'$ станет параллельной оси Ox . Фронтальные проекции A'_2, B'_2 точек A, B концов отрезка найдем на пересечении линий связи, проведенных из горизонтальных проекций точек, с фронтальными проекциями Φ_2, Δ_2 горизонтальных плоскостей уровня Φ, Δ , в которых перемещаются точки A и B .

6.1.4. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

Этот способ является частным случаем способа плоскопараллельного движения, когда точки геометрической фигуры перемещаются по дугам окружностей m^i (рис.6.4а,б) с центрами, расположенными на оси вращения i .

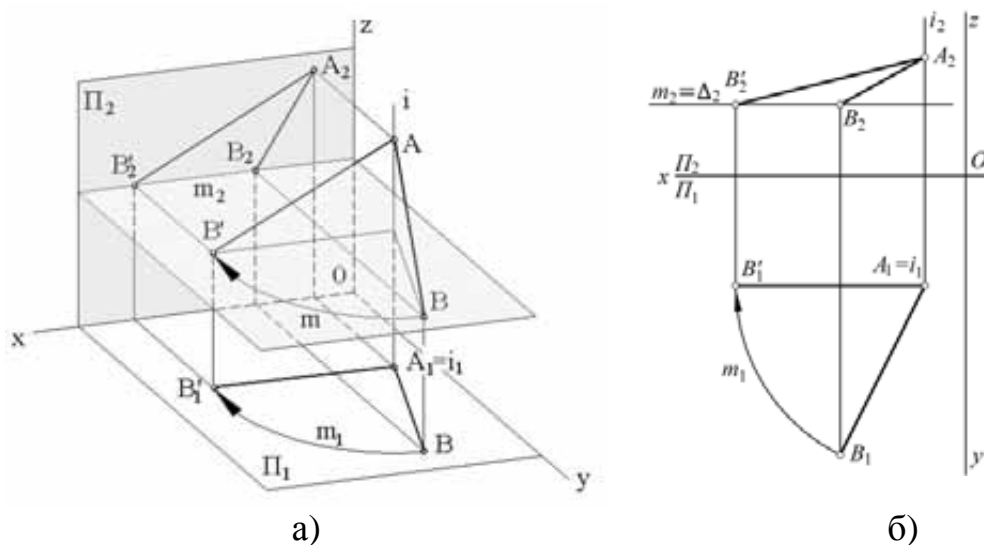


Рис. 6.4

Пример. Определим натуральную величину отрезка AB .

Будем вращать отрезок AB вокруг горизонтально проецирующей оси i , проходящей через точку A , до тех пор, пока он не будет параллельным фронтальной плоскости проекций Π_2 . Точка A останется неподвижной, поскольку принадлежит оси вращения i . Точка B перемещается по дуге окружности m , лежащей в горизонтальной плоскости уровня Δ . Эта окружность имеет радиус $R = A_1B_1$. На Π_1 она проецируется в истинную величину, ее фронтальная проекция совпадает с Δ_2 . Натуральная величина отрезка AB равна длине фронтальной проекции $A'_2B'_2$ отрезка AB для случая, когда он параллелен Π_2 .

6.2. Задачи для аудиторных занятий

6.2.1. Способ замены плоскостей проекций

6.2.1.1. Найти углы наклона прямой a к фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций (рис. 6.5)

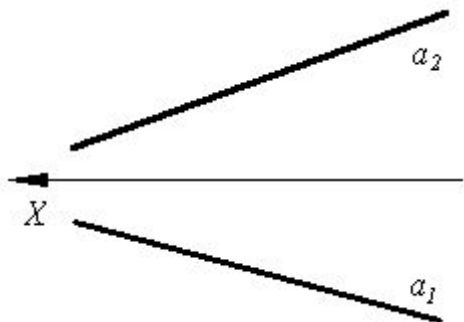


Рис. 6.5

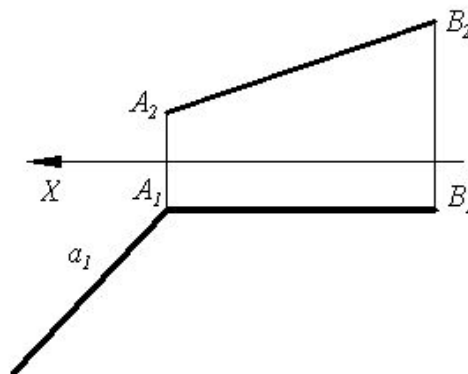


Рис. 6.6

6.2.1.2. На прямой a общего положения построить проекции отрезка AB длиной 30 мм (рис. 6.5).

6.2.1.3. Построить проекции квадрата $ABCD$ по заданной стороне AB , если известно, что сторона AD принадлежит прямой a (рис. 6.6).

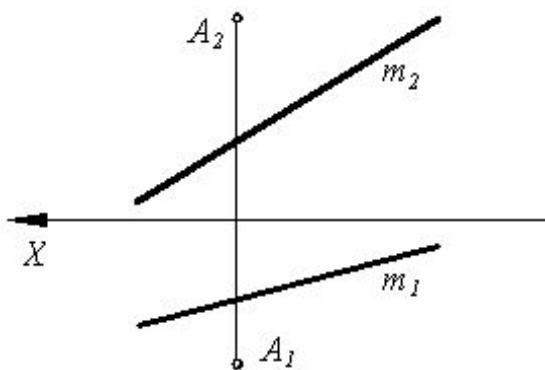


Рис. 6.7

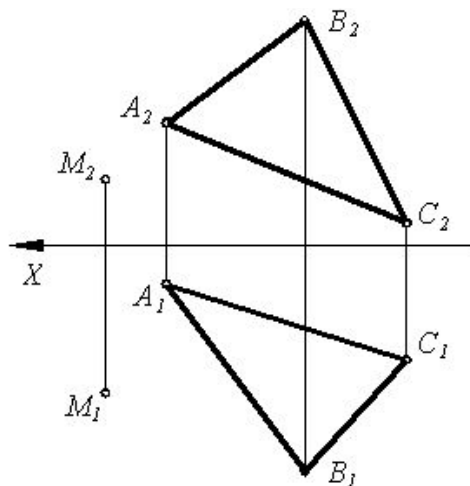


Рис. 6.8

6.2.1.4. Через точку A провести прямую, перпендикулярную прямой m (рис. 6.7).

6.2.1.5. Определить расстояние от точки M до плоскости треугольника ABC (рис. 6.8).

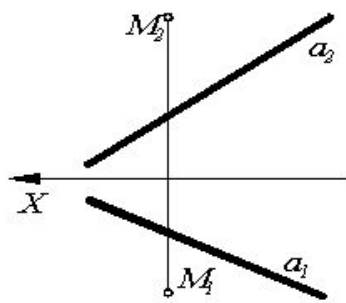


Рис. 6.9

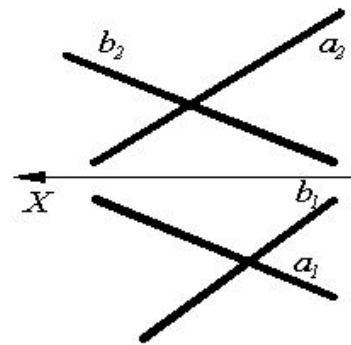


Рис. 6.10

6.2.1.6. Определить расстояние от точки M до прямой a (рис. 6.9).

6.2.1.7. Определить кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми a и b (рис. 6.10).

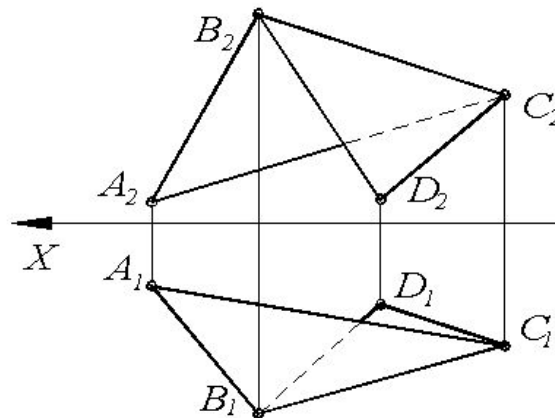


Рис. 6.11

6.2.1.8. Определить величину двугранного угла $ABCD$ (рис. 6.11).

6.2.1.9. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC

$$A(130, 15, 75), B(100, 85, 30), C(45, 60, 105).$$

6.2.2. Способ плоскопараллельного движения

6.2.2.1. На прямой a от точки A отложить отрезок AB , равный 50 мм (рис. 6.12).

6.2.2.2. Достроить фронтальную проекцию отрезка AB , длина которого равна 60 мм

$$A(30, 20, 40), B(60, 50, ?).$$

6.2.2.3. Определить радиус сферы с центром в точке S , касающейся заданной плоскости $\Gamma(ABC)$ (рис. 6.13).

6.2.2.4. Найти центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

$$A(120, 60, 96), B(48, 30, 60), C(84, 90, 30).$$

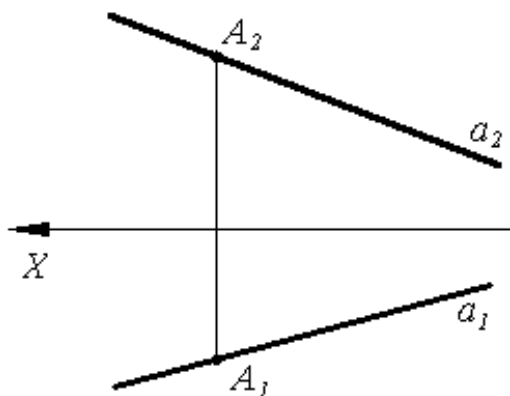


Рис. 6.12

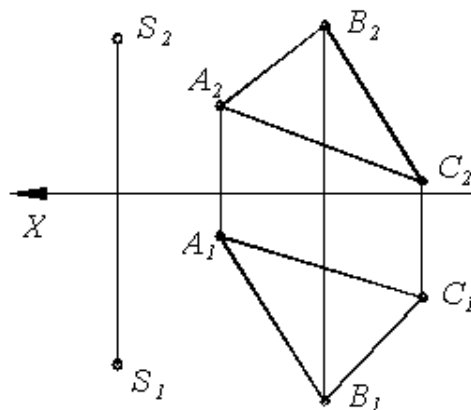


Рис. 6.13

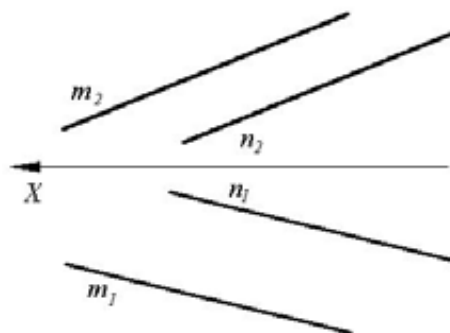


Рис. 6.14

6.2.2.5. Найти расстояние между параллельными прямыми m и n (рис. 6.14).

6.2.3. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

6.2.3.1. Найти угол наклона прямой a к горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 6.15).

6.2.3.2. Отрезок AB повернуть вокруг прямой i на угол 60° (рис. 6.16).

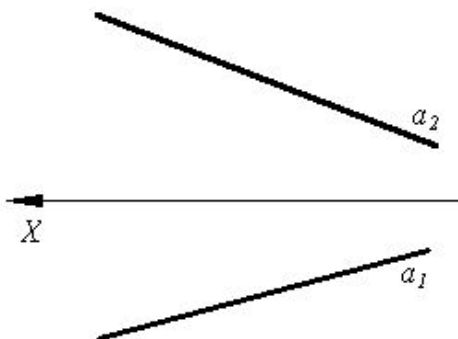


Рис. 6.15

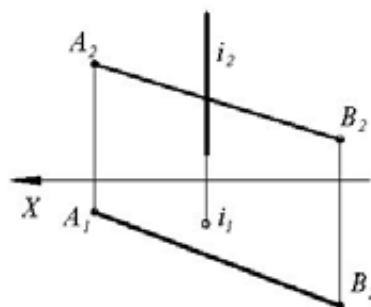


Рис. 6.16

6.2.3.3. Определить угол наклона плоскости $\Gamma(ABC)$ к фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 6.17).

6.2.3.4. Вращением вокруг оси i точку M совместить с плоскостью $\Gamma(ABC)$ (рис.6.18).

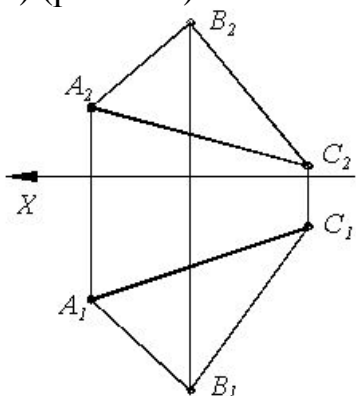


Рис. 6.17

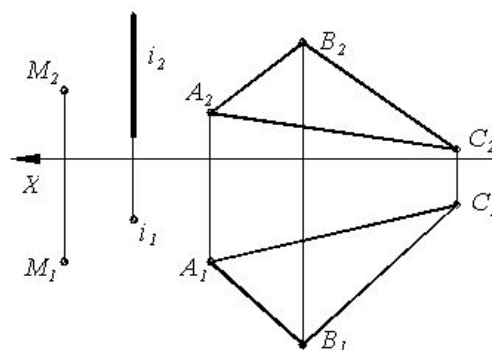


Рис. 6.18

6.2.3.5. Повернуть отрезок AB вокруг соответственно выбранной оси до положения $A'B'$, если $A_1B_1 = A'_1B'_1$ (рис. 6.19)

6.2.3.6. Плоскость треугольника ABC вращением вокруг фронтально проецирующей прямой преобразовать в проецирующую плоскость (рис. 6.17).

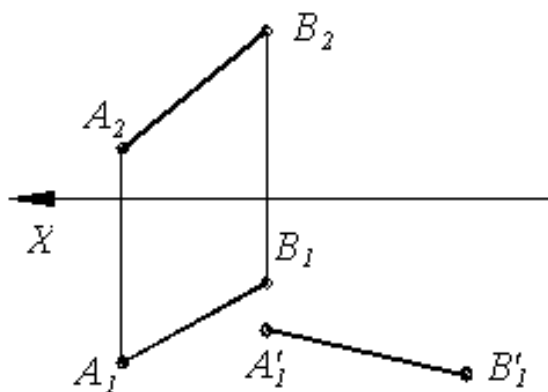


Рис. 6.19

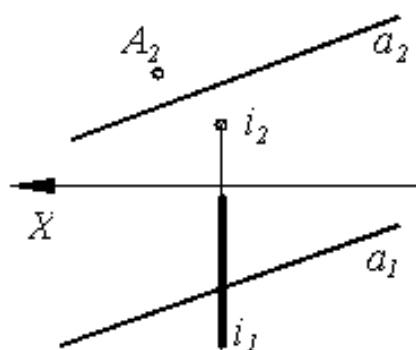


Рис. 6.20

6.2.3.7. Достроить горизонтальную проекцию точки A при условии, что при вращении вокруг заданной оси i она попадет на прямую a (рис.6.20).

6.3. Задачи для самостоятельной работы

6.3.1. На прямой AB построить проекции отрезка CD так, чтобы отрезок AC был равен 20 мм, а отрезок BD – 10 мм (рис. 6.21).

6.3.2. Построить проекции общего перпендикуляра двух прямых a и b , пересекающего эти прямые (рис. 6.22).

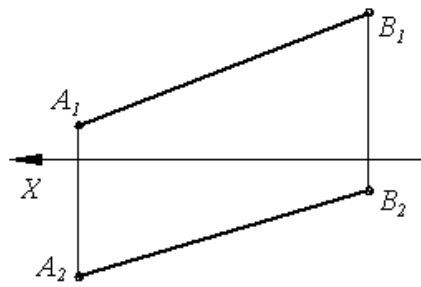


Рис. 6.21

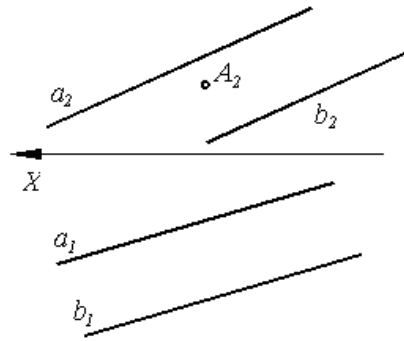


Рис. 6.22

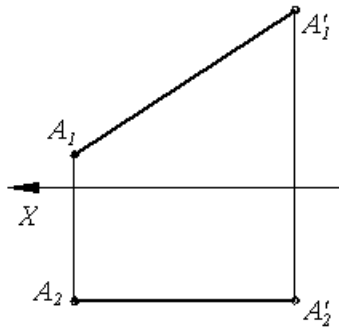


Рис. 6.23

6.3.3. Построить точку пересечения биссектрис треугольника ABC

$A(120,60,90)$, $B(50,30,60)$, $C(80,90,30)$.

6.3.4. В плоскости $\Gamma(a//b)$ построить равносторонний треугольник с вершиной в точке A и стороной, равной 20 мм (рис. 6.22).

6.3.5. Построить ось i , вращением вокруг которой точку A можно перевести в положение A' (рис. 6.23).

6.3.6. Преобразовать призму $ABCD$ так, чтобы она заняла проецирующее положение (рис. 6.24).

6.3.7. Определить радиус окружности касания конуса к сфере, заданной точкой S и точкой A на поверхности сферы, если угол при вершине конуса равен 90° (рис. 6.25).

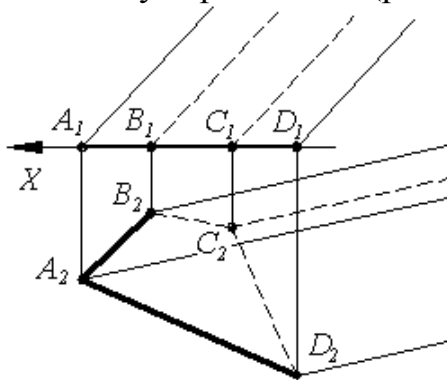


Рис. 6.24

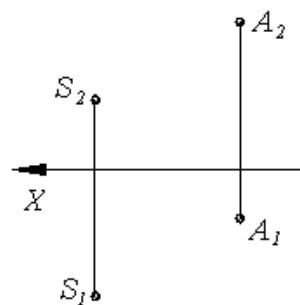


Рис. 6.25

6.4. Задачи повышенной сложности

6.4.1. Построить проекции квадрата $ABCD$ со стороной BC , принадлежащей данной прямой m , если положение вершины A задано (рис. 6.26).

6.4.2. Построить геометрическое место прямых, проходящих через точку S и наклоненных под углом 45° к плоскости $\Sigma(ABC)$ (рис. 6.27).

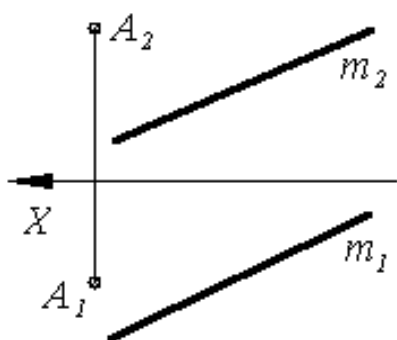


Рис. 6.26

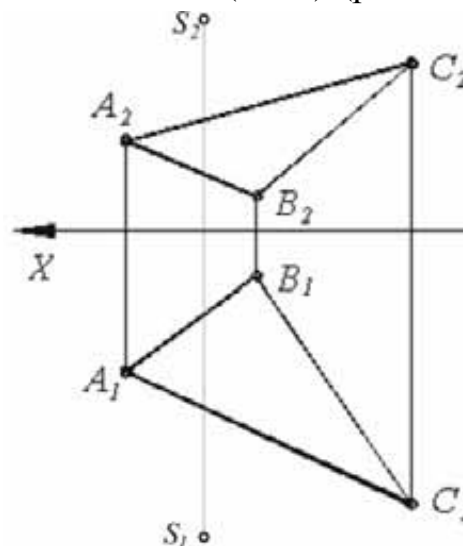


Рис. 6.27

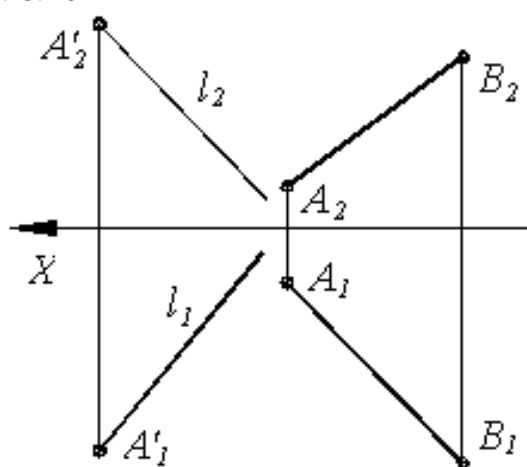


Рис. 6.28

6.4.3. Построить ось вращения i и определить угол, на который нужно повернуть отрезок AB вокруг оси i , чтобы он совместился с прямой l , если точка $A' \in l$ является образом точки A (рис. 6.28).

6.4.4. Точку A повернуть вокруг прямой i до совмещения с плоскостью $\Sigma(a//b)$ (рис. 6.29).

6.4.5. Двумя последовательными вращениями преобразовать треугольник ABC так, чтобы его сторона AC принадлежала фронтальной

плоскости проекций, а вершина B – горизонтальной плоскости проекций (рис. 6.30).

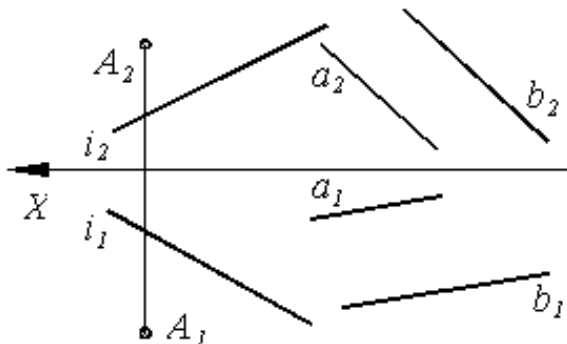


Рис. 6.29

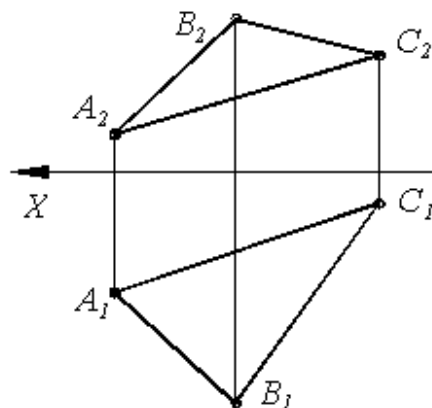


Рис. 6.30

6.5. Контрольная работа №3

6.5.1. Построить фронтальную и горизонтальную проекции отрезка AB , найти его натуральную величину и углы наклона к плоскостям проекций.

$$A(30,10,20), \quad B(70,50,60)$$

6.5.2. Достроить горизонтальную проекцию отрезка AB , длина которого равна 90 мм

$$A(20,?,60), \quad B(70,10,10)$$

6.5.3. Построить проекции отрезка, определяющего кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми m и k (рис. 6.31).

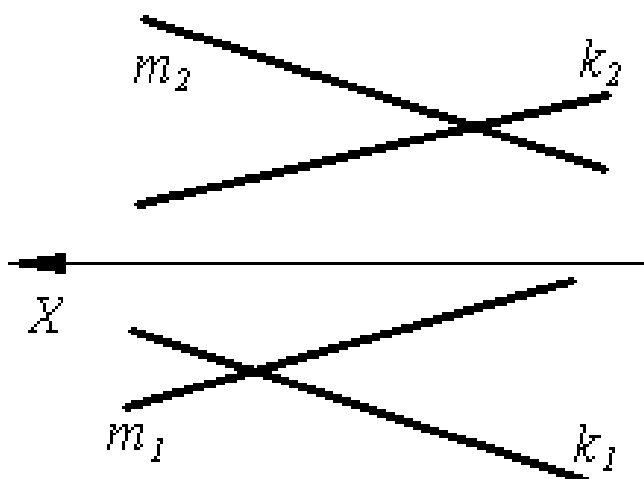


Рис. 6.31

6.5.4. В плоскости $\Sigma(A, l)$ на прямой l найти точки, удаленные от точки A на расстоянии 80 мм.

$$A(50, 30, 10),$$
$$l: \frac{x-30}{20} = \frac{y-50}{10} = \frac{z-20}{15}$$

6.5.5. Найти кратчайшее расстояние от точки K до плоскости $\Gamma(ABC)$

$$K(50, 20, 20)$$
$$A(130, 10, 80), B(90, 100, 15), C(30, 40, 40)$$

6.6. Содержание графического задания №3 «Способы преобразования чертежа»

6.6.1. В соответствии с заданным вариантом на комплексном чертеже построить горизонтальную и фронтальную проекции геометрических фигур.

6.6.2. Решить метрическую задачу графически с использованием методов преобразования чертежа.

6.7. Требования к оформлению задания

6.7.1. Задание выполняется в соответствии с индивидуальными заданиями на листах чертежной бумаги форматов А3 карандашом. Образец выполнения задания приведен на рис.6.32

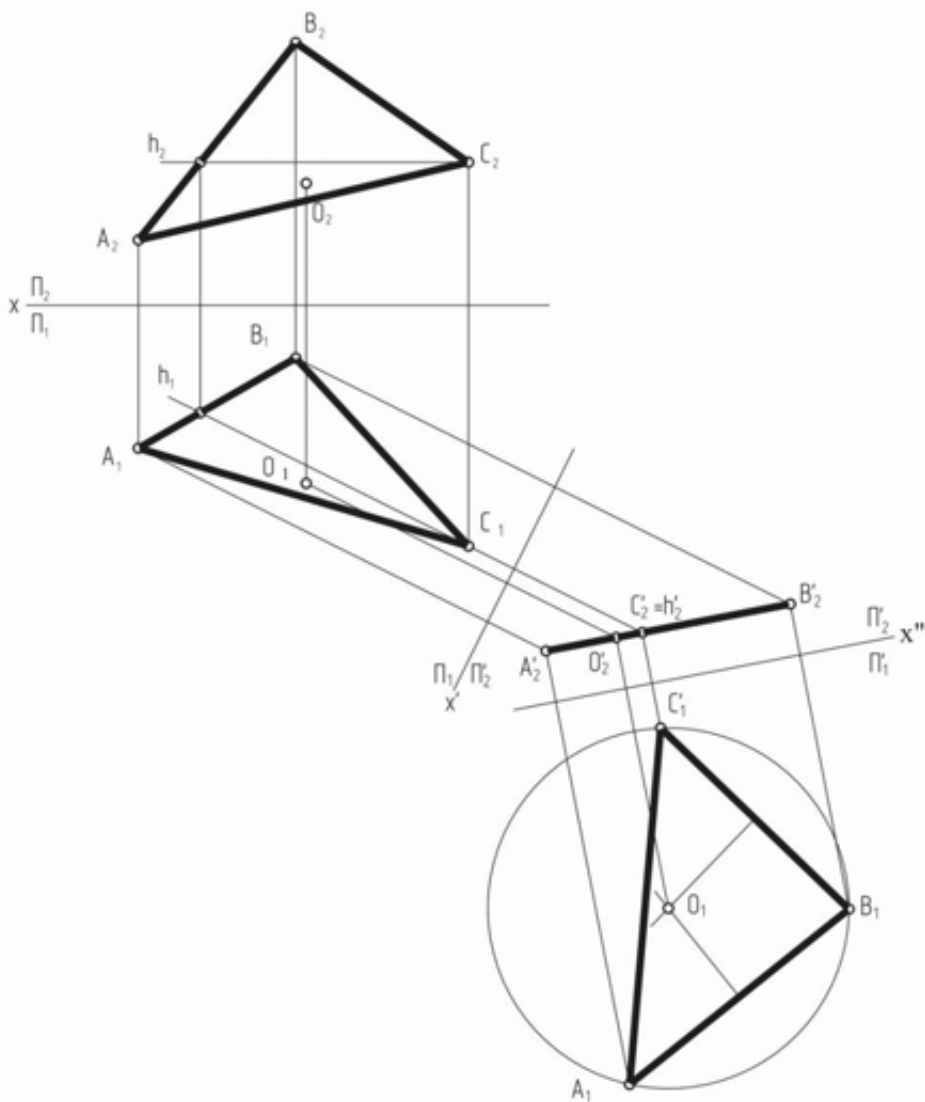
6.7.2. Линии вспомогательных построений на чертеже сохранить.

6.7.3. Основная надпись оформляется по ГОСТ 2.104-68.

6.7.4. Текстовое условие задачи выполняется чертежным шрифтом.

ФЮРА 000.000.000

Построение проекций центра окружности описанной вокруг треугольника ABC



ФЮРА 000.000.000				
№	Дата	Ф.И.О. преподавателя	Ф.И.О. студента	№
1			Иванов И.И.	2.11.20
2			Петров П.П.	3.11.20
Метрические задачи				
Дата		Выполнено		
Формат А4 5 з. 6 стр. 10/600				

Рис. 6.32

6.8. Варианты индивидуальных заданий к работе №3

Вариант 1. В плоскости $\Sigma(A, m)$ построить проекции прямой n , параллельной прямой m и отстоящей от нее на расстояние 20 мм.

$$A(130, 60, 35),$$
$$m: \frac{x-30}{2} = \frac{y-15}{2} = \frac{z-60}{-1}.$$

Вариант 2. В треугольнике SCB определить натуральную величину угла B .

$$B(55, 20, 50), C(90, 50, 25), S(75, 90, 90).$$

Вариант 3. Построить проекции центра окружности, вписанной в треугольник AMN .

$$A(120, 60, 30), M(75, 105, 90), N(45, 30, 45).$$

Вариант 4. В плоскости $\Sigma(B, l)$ на прямой l найти точки, удаленные от точки B на расстоянии 50 мм.

$$B(65, 30, 50),$$
$$l: \frac{x-30}{9} = \frac{y-55}{5} = \frac{z-24}{12}.$$

Вариант 5. В треугольнике ABC построить биссектрису угла при вершине C .

$$A(120, 60, 96), B(48, 30, 60), C(84, 90, 30).$$

Вариант 6. Определить натуральную величину расстояния между параллельными прямыми m и n .

$$m: \frac{x-48}{2} = \frac{y-12}{1} = \frac{z-42}{3},$$
$$n: \frac{x-48}{2} = \frac{y-48}{1} = \frac{z-6}{3}.$$

Вариант 7. В плоскости $\Sigma(A, m)$ через точку A провести прямую под углом 75° к прямой m .

$$A(66, 24, 75),$$
$$m: \frac{x-45}{3} = \frac{y-66}{2} = \frac{z-72}{-4}.$$

Вариант 8. На прямых a и b построить точки, удаленные от вершины A на расстоянии 30 мм.

$$A(130,40,15),$$

$$a: \frac{x-70}{3} = \frac{y-60}{-1} = \frac{z-75}{-3},$$

$$b: \frac{x-70}{4} = \frac{y-100}{-4} = \frac{z-30}{-1}.$$

Вариант 9. В плоскости $\Sigma(ABC)$ провести прямую $a \parallel BC$ на расстоянии 20 мм от стороны BC .

$$A(25,30,60), B(80,70,20), C(50,100,100).$$

Вариант 10. В плоскости $\Sigma(P,l)$ через точку P провести прямую под углом 45° к прямой l .

$$P(70,45,20),$$

$$l: \frac{x-60}{4} = \frac{y-80}{-3} = \frac{z-90}{-5}.$$

Вариант 11. В плоскости $\Sigma(C,a)$ построить равнобедренный треугольник ABC с основанием AB , расположенным на прямой a .

$$A(100,100,15), P(65,50,75),$$

$$a: \frac{x-40}{6} = \frac{y-30}{7} = \frac{z-55}{-4}.$$

Вариант 12. В плоскости $\Sigma(AB \cap m)$ построить точку D , удаленную от точки A на 30 мм, а от точки B – на 50 мм.

$$A(35,60,15), B(80,45,75),$$

$$m: \frac{x-35}{18} = \frac{y-60}{4} = \frac{z-15}{3}.$$

Вариант 13. В плоскости $\Sigma(B,l)$ построить равнобедренный прямоугольный треугольник BDC с вершиной прямого угла D на прямой l .

$$B(75,35,25),$$

$$l: \frac{x-60}{2} = \frac{y-66}{1} = \frac{z-36}{4}.$$

Вариант 14. В плоскости $\Sigma(A,m)$ построить центр окружности, проходящей через точку A и касающейся прямой m .

$$A(110,90,36),$$

$$m: \frac{x-90}{9} = \frac{y-45}{5} = \frac{z-100}{-9}.$$

Вариант 15. Найти проекции точек пересечения прямых a и b с окружностью радиуса 30 мм и центром в точке M .

$$M(96,54,51),$$

$$a: \frac{x-56}{4} = \frac{y-14}{4} = \frac{z-21}{3},$$

$$b: \frac{x-56}{4} = \frac{y-84}{-3} = \frac{z-81}{-3}.$$

Вариант 16. Построить проекции центра окружности, вписанной в треугольник ABC .

$$A(132,15,85), B(90,105,15), C(30,45,45).$$

Вариант 17. Построить проекции точки M , принадлежащей плоскости $\Gamma(ABC)$ и равноудаленной от точек A , B и C .

$$A(35,105,50), B(95,15,25), C(107,81,72).$$

Вариант 18. Построить проекции центра O окружности, инцидентной плоскости $\Sigma(m \cap n)$ и касающейся прямых m и n .

$$m: \frac{x-75}{3} = \frac{y-75}{-2} = \frac{z-15}{5},$$

$$n: \frac{x-30}{9} = \frac{y-15}{12} = \frac{z-65}{-10}.$$

Вариант 19. Построить проекции центра O окружности, инцидентной плоскости $\Sigma(d // KL)$, проходящей через концы отрезка KL и касающейся прямой d .

$$L(90,90,15), K(15,50,100),$$

$$d: \frac{x-75}{15} = \frac{y-20}{8} = \frac{z-100}{-17}.$$

Вариант 20. Построить проекции точки P пересечения высот треугольника ABC

$$A(140,45,20), B(75,80,90), C(30,30,45).$$

Вариант 21. Построить проекции равностороннего треугольника PKL . Сторона KL принадлежит прямой m .

$$P(150,60,10),$$

$$m: \frac{x-72}{3} = \frac{y-63}{-2} = \frac{z-30}{4}.$$

Вариант 22. Построить проекции точки K , инцидентной плоскости $\Sigma(a \cap b)$ и удаленной от прямых a и b на расстояние 20 мм.

$$a: \frac{x-75}{6} = \frac{y-40}{15} = \frac{z-25}{7},$$

$$b: \frac{x-75}{-15} = \frac{y-40}{-8} = \frac{z-25}{6}.$$

Вариант 23. Определить натуральную величину угла между скрещивающимися прямыми k и l .

$$k: \frac{x-90}{6} = \frac{y-80}{-11} = \frac{z-15}{6},$$

$$l: \frac{x-45}{12} = \frac{y-85}{5} = \frac{z-65}{-9}.$$

Вариант 24. Построить проекции центра окружности, касающейся прямых a и b , если известна одна из точек касания K , принадлежащая прямой a .

$$a: \frac{x-120}{-3} = \frac{y-60}{-2} = \frac{z-45}{3},$$

$$b: \frac{x-90}{-3} = \frac{y-75}{-2} = \frac{z-12}{3},$$

$$K(108,52,57).$$

Вариант 25. Построить проекции равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны 50 мм и принадлежат прямым a и b .

$$a: \frac{x-75}{9} = \frac{y-95}{-13} = \frac{z-20}{9},$$

$$b: \frac{x-75}{-9} = \frac{y-95}{-4} = \frac{z-20}{11}.$$

Вариант 26. Построить проекции центра окружности радиуса $r = 35$ мм, проходящей через точку K и касающейся прямой l .

$$K(110,45,60),$$

$$l: \frac{x-45}{9} = \frac{y-50}{4} = \frac{z-75}{-9}.$$

Вариант 27. Построить проекции высоты треугольника ABC , проходящей через вершину B .

$$A(130,15,75), B(100,85,30), C(45,60,105).$$

Вариант 28. Построить биссектрису угла, образованного прямыми a и b .

$$a: \frac{x-30}{7} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-105}{-3},$$

$$b: \frac{x-30}{9} = \frac{y-5}{7} = \frac{z-105}{-12}.$$

Вариант 29. Построить проекции и определить натуральную величину отрезка, задающего расстояние от точки K до прямой a .

$$K(45,90,25),$$

$$a: \frac{x-45}{4} = \frac{y-25}{2} = \frac{z-90}{-3}.$$

Вариант 30. Построить проекции центра окружности, описанной вокруг треугольника ABC .

$$A(130,25,5), B(90,75,75), C(30,5,25).$$

6.9. Контрольные вопросы

6.9.1. Какие прямые называются прямыми общего положения, прямыми частного положения?

6.9.2. Какие плоскости называются проецирующими плоскостями, плоскостями уровня?

6.9.3. В чем заключается сущность преобразования комплексного чертежа?

6.9.4. В чем заключается способ замены плоскостей проекций.

6.9.5. В чем заключается способ плоскопараллельного движения?

6.9.6. Как перемещаются проекции точек геометрической фигуры при ее плоскопараллельном движении относительно горизонтальной плоскости проекций?

6.9.7. В чем заключается сущность способа вращения вокруг проецирующей прямой?

7. КРИВЫЕ ЛИНИИ И ОБВОДЫ

7.1. Основные понятия и определения

Кривая линия (или просто кривая) – это геометрическое место точек, координаты которых являются функциями одной переменной. В инженерной графике кривую рассматривают как траекторию движущейся точки; как линию пересечения двух поверхностей и т.д. Самой простой кривой линией является прямая линия.

Кривые подразделяют на алгебраические и трансцендентные в зависимости от того, какими являются их уравнения – алгебраическими или трансцендентными. Трансцендентное уравнение содержит трансцендентные функции (показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические) от переменного. В практике реального конструирования наиболее часто используют алгебраические кривые. Если все точки кривой лежат в одной плоскости, то кривая является плоской, если не лежат, то – пространственной.

Алгебраические кривые различают по порядку кривой. Порядок кривой можно определить графически как максимальное количество точек пересечения ее с прямой (для плоской кривой) или с плоскостью (для пространственной кривой). При этом точки могут быть действительными (различными или совпавшими) и мнимыми.

На рис. 7.1 показана плоская кривая m третьего порядка. Прямая a пересекает кривую m в трех различных действительных точках. Прямая b пересекает m в трех действительных точках, две из которых совпали. Прямая c - в одной действительной точке и двух мнимых.

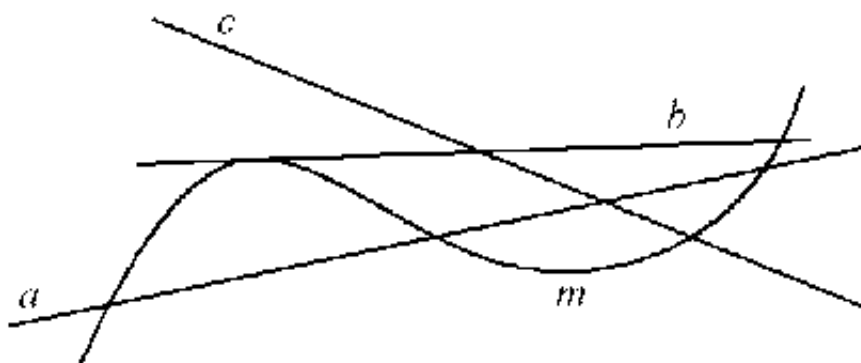


Рис. 7.1

Порядок плоской кривой определяется степенью ее уравнения. Например, кривая, описываемая уравнением $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ (кубическая парабола), является кривой третьего порядка.

Класс плоской алгебраической кривой графически определяется количеством касательных, проведенных к ней из точки, не принадлежащей кривой. На рис. 7.2 изображена кривая – эллипс, которая имеет второй порядок и класс. Следует заметить, что только для кривых второго порядка класс равен порядку. Для других кривых равенство не является обязательным.

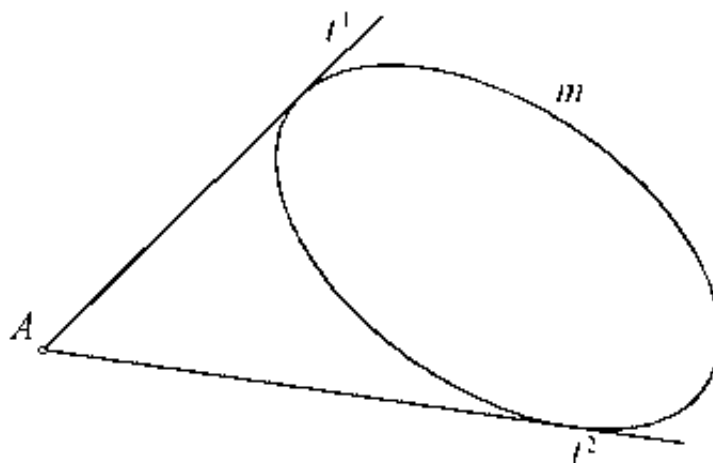


Рис. 7.2

7.2. Дифференциальные характеристики кривых линий

Для исследования локальных (дифференциальных) свойств кривых вводят понятия касательной, нормали и кривизны кривой в определенных ее точках.

Касательной t в точке M кривой m называют предельное положение секущей прямой MN , когда точка N стремится вдоль линии m к точке M на бесконечно близкое расстояние (рис. 7.3). Прямую n , перпендикулярную к касательной t в точке M , называют нормалью к плоской кривой m в точке M .

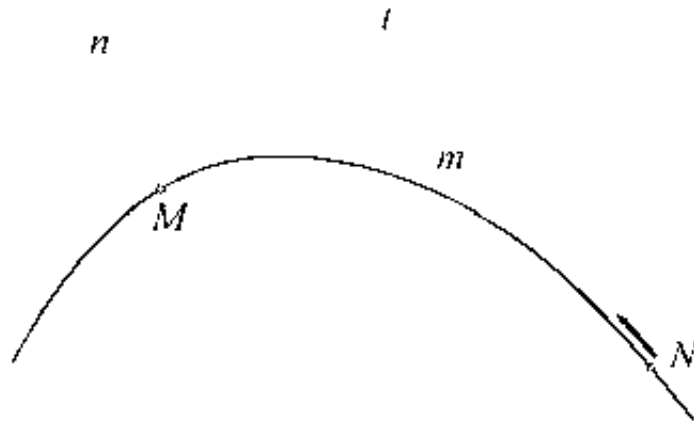


Рис. 7.3

Под кругом кривизны кривой m в заданной точке M понимают предельное положение окружности r , проходящей через точки M, N, P , когда точки M и P стремятся вдоль линии m на бесконечно близкое расстояние к точке M (рис. 7.4).

Центр O круга кривизны находится на нормали n кривой в направлении ее вогнутости. Величину $k = \frac{1}{R}$, обратную радиусу R круга кривизны, называют кривизной кривой в точке M .

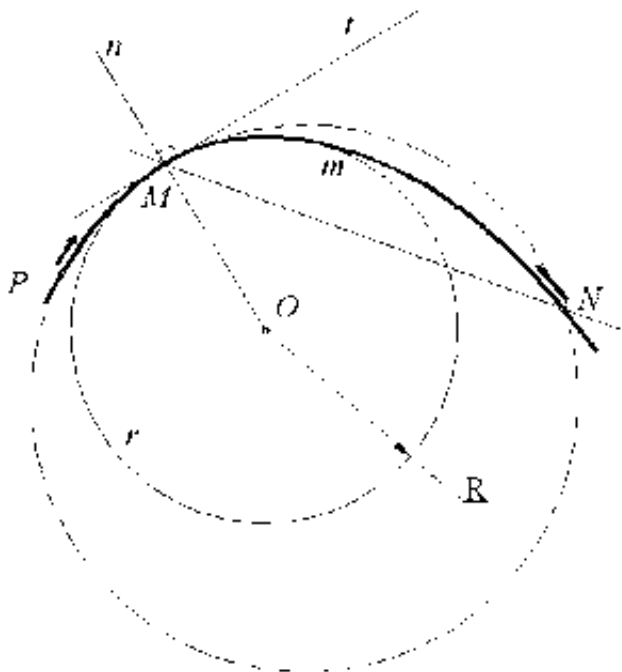


Рис. 7.4

7.3. Точки плоской кривой

Точку плоской кривой называют обыкновенной (регулярной), если в этой точке можно построить единственную касательную к кривой. Если в обыкновенной точке кривизна имеет экстремальное значение (максимальное или минимальное), то такую точку называют специальной. Например, к специальным точкам относятся точки перегиба (рис. 7.5), вершины кривой (рис. 7.6). В точке перегиба ветви кривой расположены по разные стороны касательной t , а кривизна равна нулю. При этом радиус круга кривизны стремится к бесконечности. В вершинах кривой точки имеют минимальное или максимальное значение кривизны.

В особых точках невозможно однозначно определить положение касательной. К ним относятся точки узловые (рис. 7.7), изолированные (рис. 7.8), возврата (рис. 7.9), самоприкосновения (рис. 7.10).

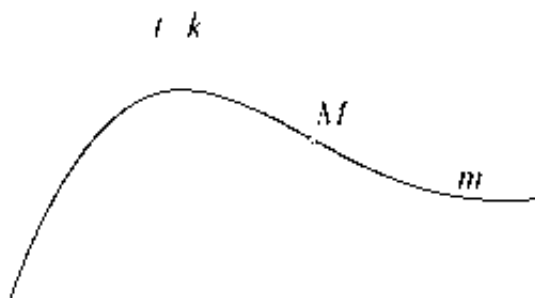


Рис. 7.5

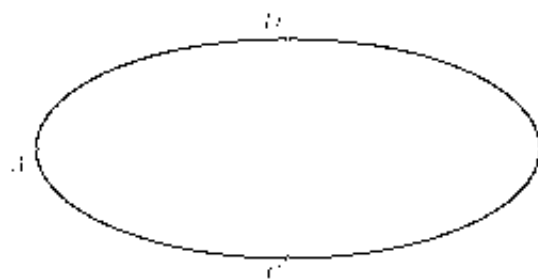


Рис. 7.6

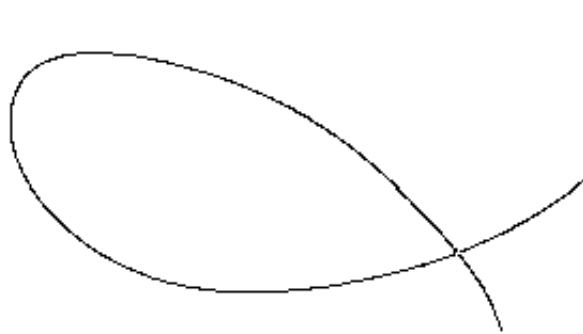


Рис. 7.7



Рис. 7.8



Рис. 7.9

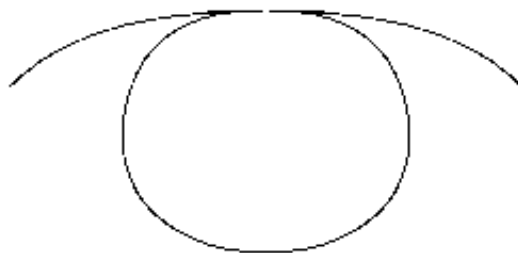


Рис. 7.10

Разность между возможным для данного порядка кривой количеством двойных точек и существующим называется жанром кривой. Число возможных двойных точек (узловых, изолированных и возврата) определяется формулой

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

где n – порядок кривой.

На рис. 7.2 изображена кривая нулевого жанра. Кривые нулевого жанра называют рациональными. Такие кривые получили широкое распространение в конструировании гладких обводов.

7.4. Пространственные кривые

На чертеже пространственная кривая задается своими ортогональными проекциями. Свойства пространственной кривой можно исследовать по ее проекциям. Для проекций пространственных и плоских кривых справедливы следующие утверждения:

- касательная к кривой проецируется в касательную к ее проекции, если направление проецирования не параллельно касательной;
- в общем случае порядок кривой и ее проекции равны.

Для того, чтобы по чертежу кривой выяснить, какая кривая задана – плоская или пространственная, нужно, на кривой выбрать три произвольные точки A, B, C и проверить, расположена ли произвольная точка D в плоскости $\Gamma(A, B, C)$. Кривая, изображенная на рис. 7.11, является пространственной, так как точка D не принадлежит плоскости $\Sigma(A, B, C)$.

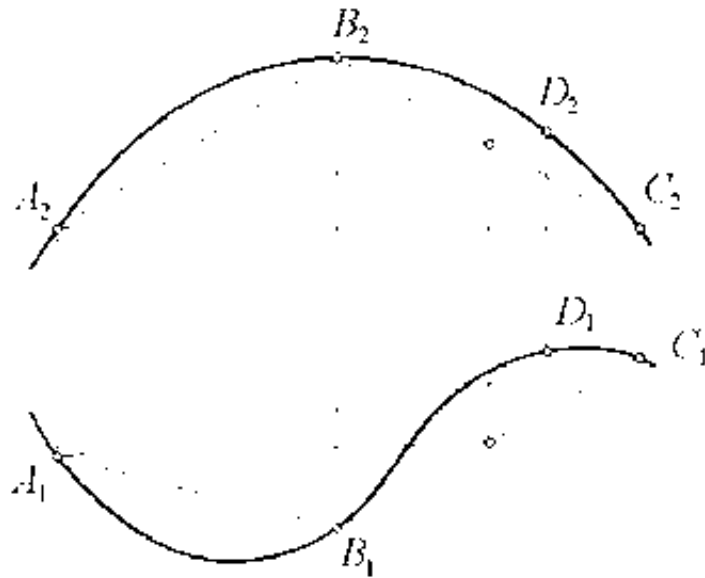


Рис. 7.11

7.5. Конические сечения

Коническими сечениями называют кривые второго порядка, которые получаются в результате пересечения поверхности прямого кругового конуса (рис. 7.12) различными плоскостями.

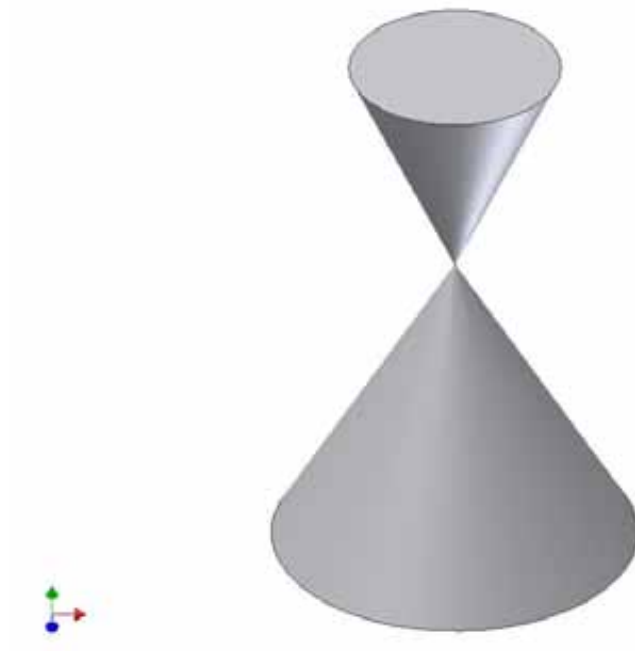


Рис. 7.12

Если секущая плоскость Δ (рис. 7.13, 7.14) пересекает все образующие конуса, то в сечении получаем эллипс. Эллипс содержит пару сопряженных взаимно перпендикулярных диаметров, называемых большой и малой осями.

Рассмотрим построение эллипса по заданным большой a и малой b осям. Вычерчиваем взаимно перпендикулярные прямолинейные отрезки a и b , пересекающиеся между собой в средних точках (рис. 7.15а). Концы отрезков a и b будут совпадать с вершинами эллипса (рис. 7.6). Точка O пересечения осей a и b является центром эллипса.

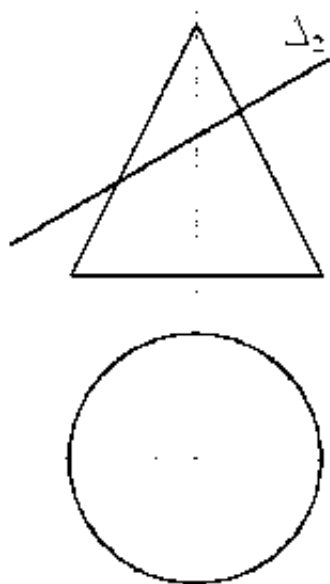


Рис. 7.13

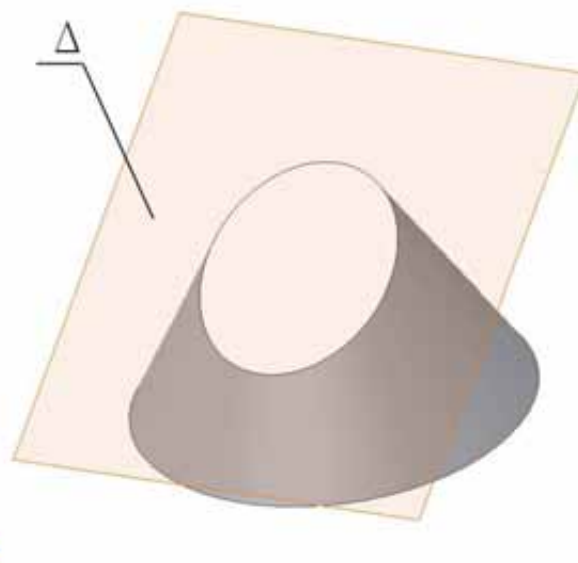


Рис. 7.14

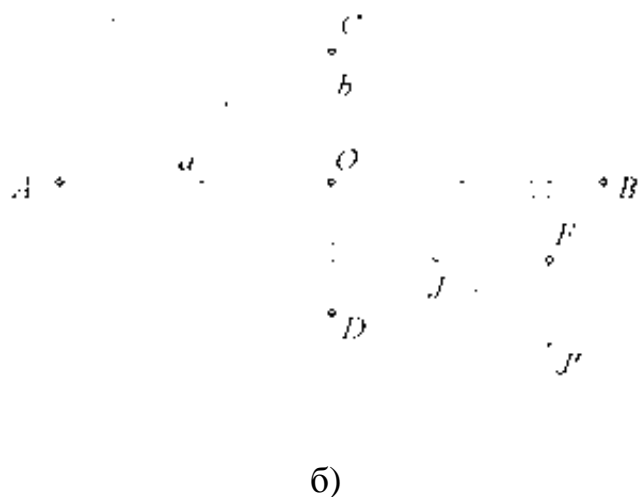
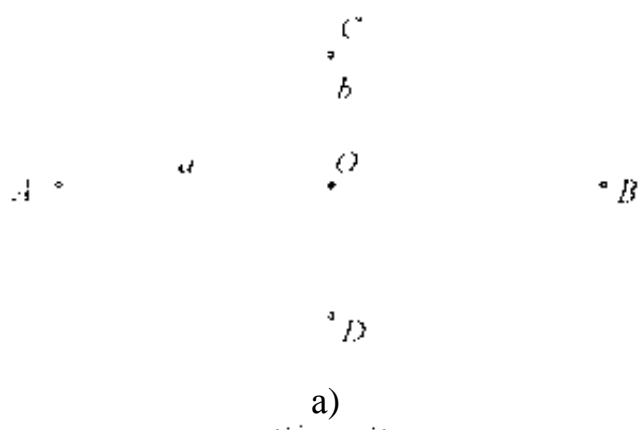
Строим две окружности, центры которых совпадают с точкой O – центром эллипса (рис. 7.15 б). Диаметры окружностей равны длинам соответствующих осей эллипса. Из центра эллипса O проводим любую прямую OJ' . Из точки J пересечения данной прямой с окружностью меньшего диаметра проводим прямую, перпендикулярную малой оси b эллипса, а из точки J' – прямую, перпендикулярную большой оси a эллипса. Точка F пересечения этих двух прямых принадлежит эллипсу. Повторяем эту графическую операцию необходимое число раз. В результате получим точки, соединяя которые с помощью лекала, получим эллипс k (рис. 7.15 в).

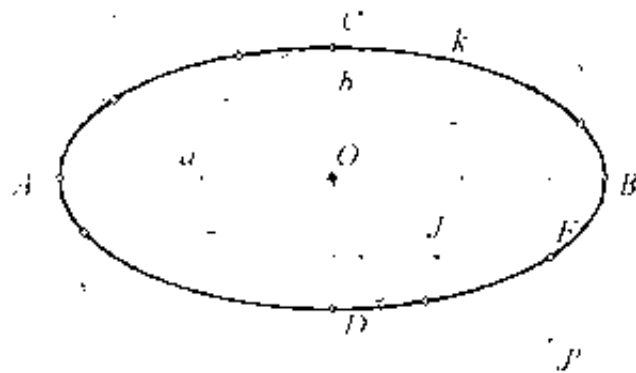
На рис. 7.16, 7.17 показано коническое сечение, полученное как результат пересечения поверхности конуса плоскостью Σ , параллельной одной из образующих конуса. Такое сечение является параболой.

Если секущую плоскость Γ провести параллельно двум образующим поверхности конуса, то в сечении получим гиперболу (рис. 7.18, 7.19).

Если секущая плоскость Φ перпендикулярна оси конуса, то сечением будет окружность (рис. 7.20, 7.21).

Если секущая плоскость T проходит через вершину конуса, то в сечении получается коника, распавшаяся на две прямые – образующие конуса (рис. 7.22, 7.23).





в)
Рис. 7.15

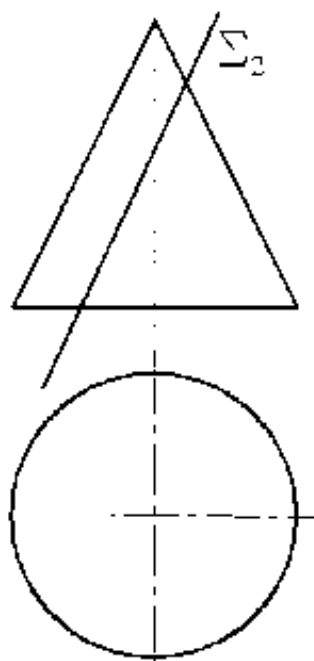


Рис. 7.16

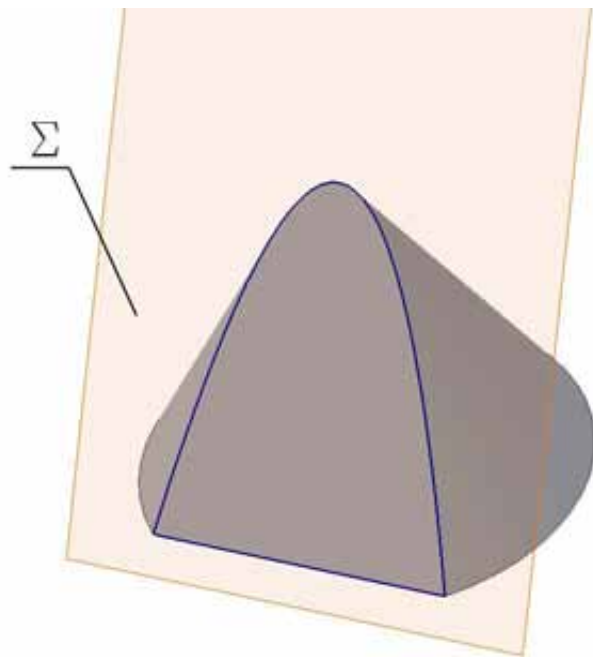


Рис. 7.17

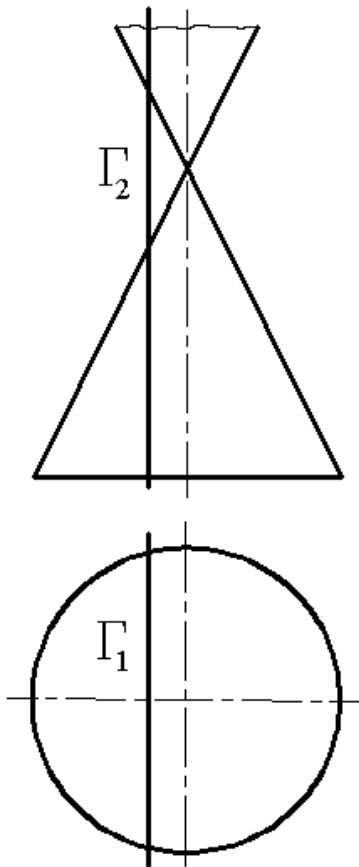


Рис. 7.18

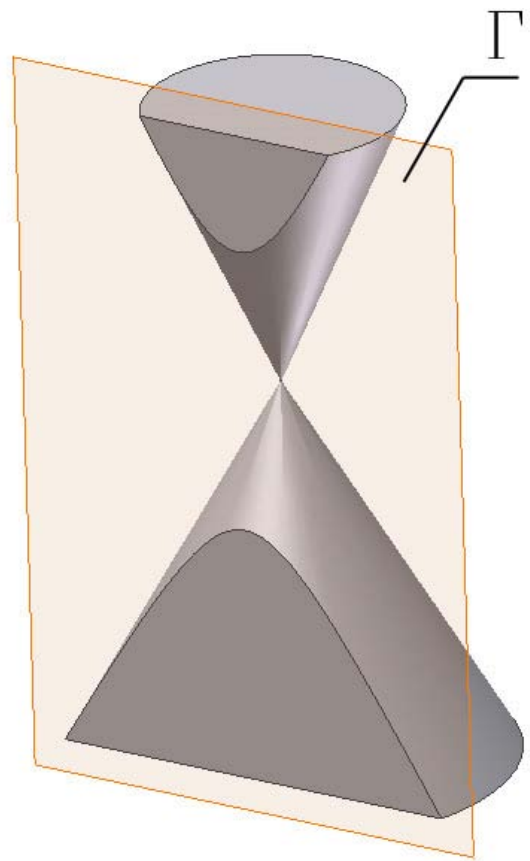


Рис. 7.19

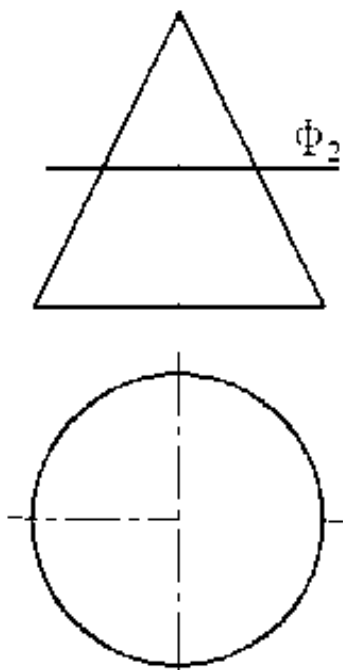


Рис. 7.20

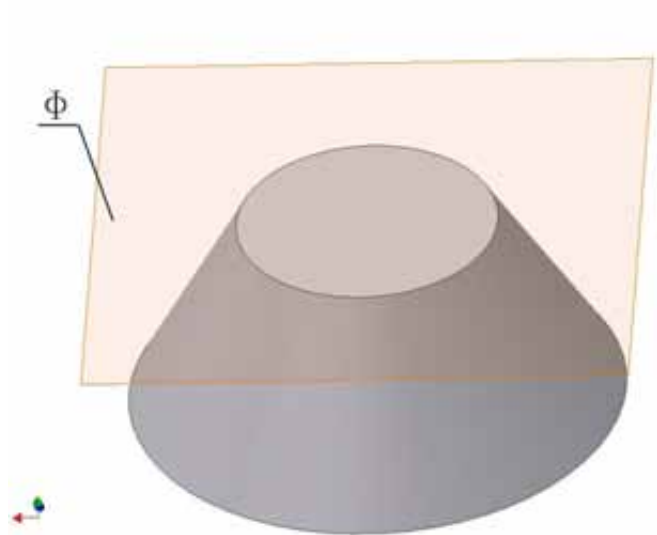


Рис. 7.21

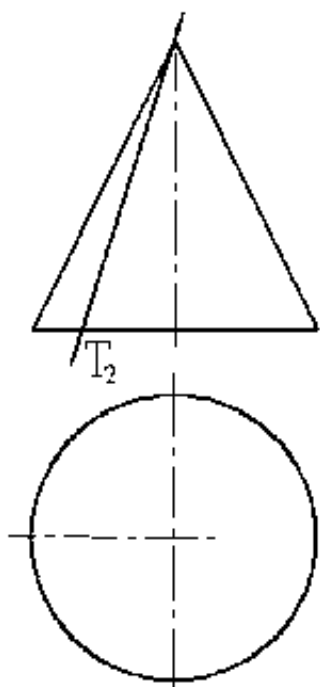


Рис. 7.22

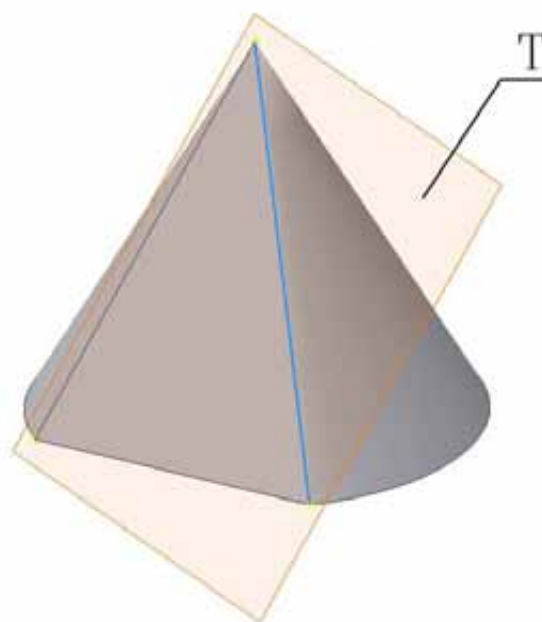


Рис. 7.23

7.6. Прямоугольная проекция окружности

При выполнении машиностроительных чертежей возникает необходимость в построении прямоугольных проекций окружности. Примером является деталь, представленная на рис. 7.24.

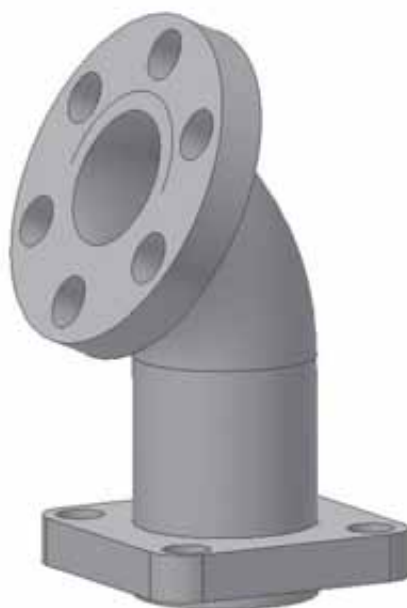


Рис. 7.24

Очевидно, что прямоугольной проекцией окружности является эллипс. При этом в большую ось эллипса проецируется диаметр окружности, лежащий на прямой уровня, а в малую ось – диаметр, принадлежащий линии наибольшего наклона плоскости окружности.

Рассмотрим три возможных варианта расположения окружности по отношению к плоскостям проекций.

1. Окружность $a(O, R)$ находится в плоскости уровня Δ , например, горизонтальной (рис. 7.25).

На фронтальную плоскость проекций Π_2 окружность a проецируется в отрезок a_2 , совпадающий с фронтальной проекцией Δ_2 плоскости Δ . Так как любая геометрическая фигура, лежащая в плоскости уровня, на плоскость проекций, параллельную плоскости уровня, проецируется в натуральную величину, то на горизонтальную плоскость проекций Π_1 , окружность a будет проецироваться в окружность a_1 того же радиуса R (рис. 7.26).

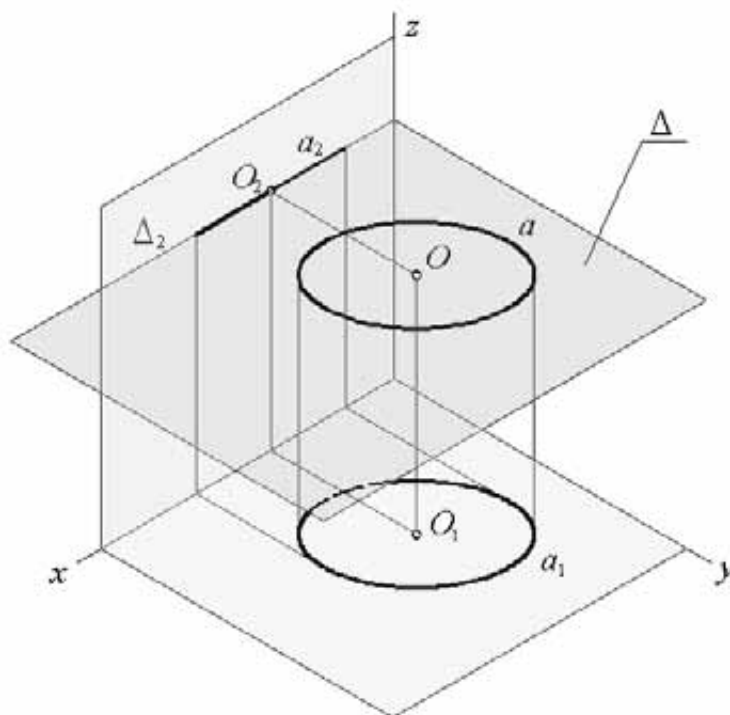


Рис. 7.25

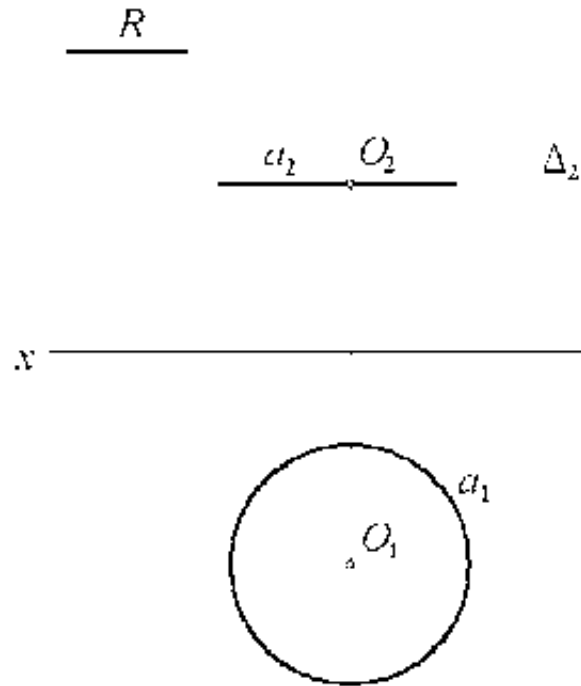


Рис. 7.26

2. Окружность $k(O, R)$ принадлежит проецирующей плоскости Λ . Пусть плоскость Λ будет фронтально-проецирующей плоскостью (рис. 7.27, 7.28 а).

На фронтальную плоскость проекций Π_2 окружность k проецируется в отрезок k_2 , совпадающий с фронтальной проекцией Λ_2 плоскости Λ (рис. 7.27, 7.28 б). Длина отрезка k_2 равна диаметру окружности, так как один из диаметров окружности k будет параллелен фронтальной плоскости проекций.

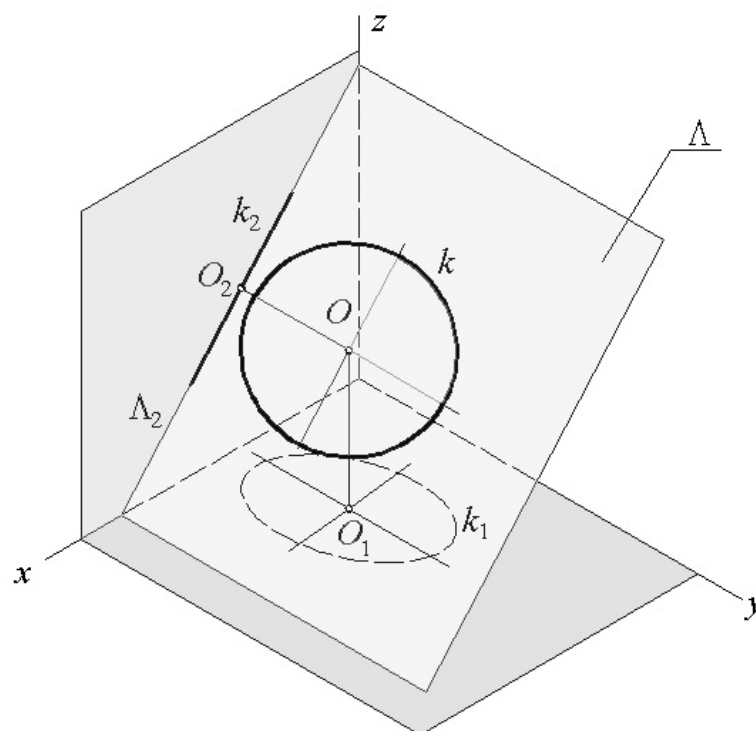
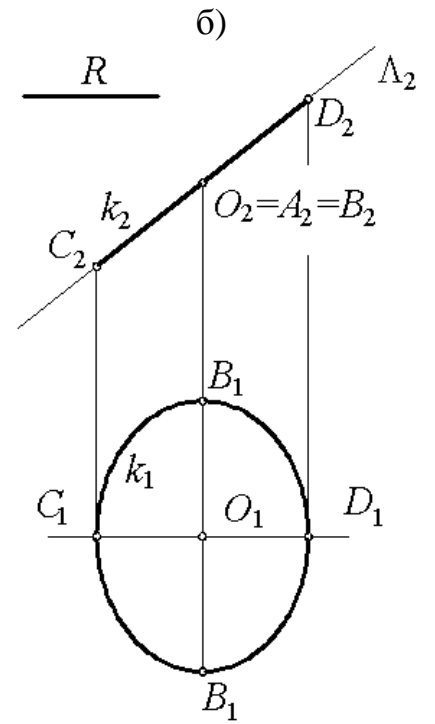
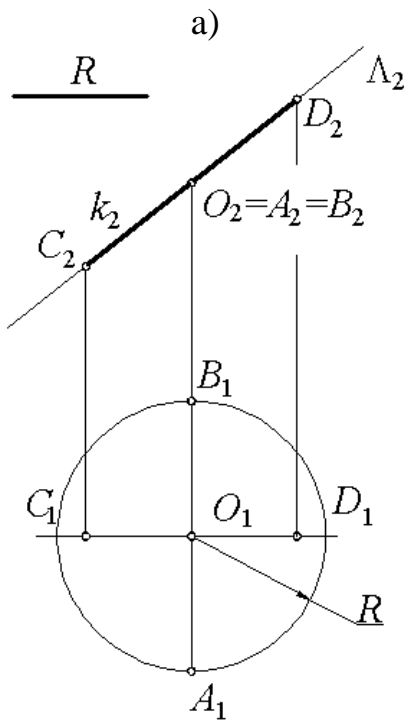
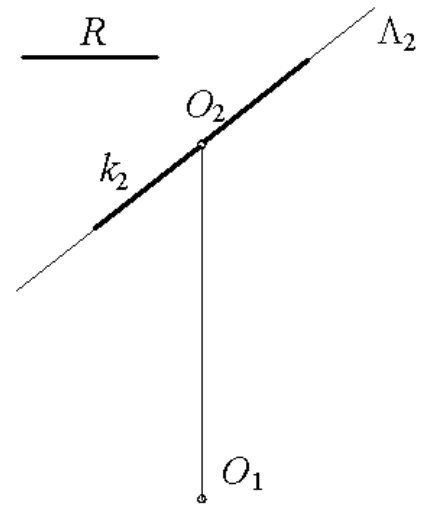
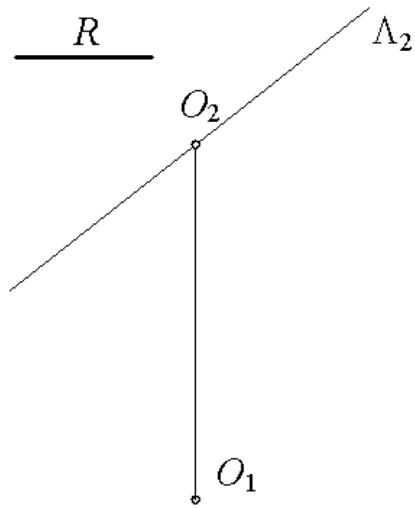


Рис. 7.27

На горизонтальную плоскость проекций Π_1 окружность k проецируется в эллипс, поскольку плоскость Λ , не параллельна и не перпендикулярна Π_1 . Один из диаметров окружности k перпендикулярен фронтальной плоскости проекций Π_2 и, следовательно, параллелен горизонтальной плоскости проекций Π_1 . На Π_1 , этот диаметр проецируется в отрезок A_1B_1 ($|A_1B_1| = R$, $A_1B_1 \perp Ox$), который является большой осью эллипса k_1 (рис. 7.28 б). Диаметр CD принадлежит линии наибольшего наклона плоскости Λ . Он будет проецироваться на плоскость проекций Π_1 в малую ось C_1D_1 эллипса k_1 . Вершины C_1 и D_1 , принадлежащие малой оси эллипса k_1 , являются точками пересечения линий связи, проведенных из точек C_2 и D_2 с прямой, перпендикулярной A_1B_1 . По большой и малой осям строим эллипс k_1 так, как это было показано выше.



в)

г)

Рис. 7.28

3. Окружность k принадлежит плоскости общего положения $\Theta(h \cap f)$ (рис. 7.29а).

Большие оси эллипсов k_1, k_2 , являющихся проекциями окружности, принадлежат линиям уровня (горизонтали и фронтали). Их величины равны диаметру окружности k .

Большую ось A_2B_2 эллипса k_2 откладываем на фронтальной проекции f_2 фронтали f (рис. 7.29 б), а большую ось C_1D_1 эллипса k_1 – на горизонтальной проекции h_1 горизонтали h . Вторые проекции A_2, B_2, C_1, D_1 соответствующих точек A, B, C, D находим с помощью линий связи из условия их принадлежности горизонтали или фронтали (рис. 7.29 в).

Проводим прямую $n_1 \perp C_1D_1$ (рис. 7.29 г), определяющую направление малой оси эллипса k_1 . Определяем величину малой оси:

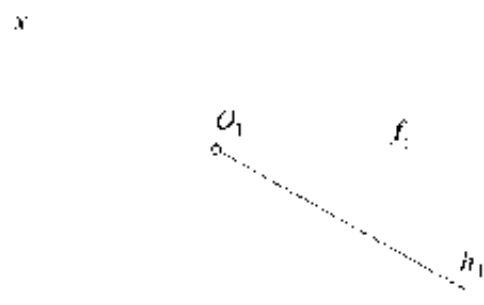
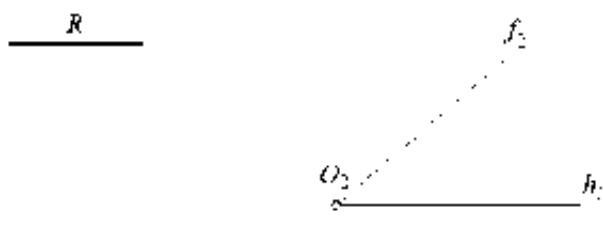
- через точку A_1 проводим прямые, параллельные направлениям большой и малой осей эллипса k_1 (рис. 7.29 д);

- точку P_1 , в которой прямая, параллельная малой оси эллипса k_1 , пересекается с окружностью, описанной на C_1D_1 как на диаметре, соединяем с центром O_1 эллипса;

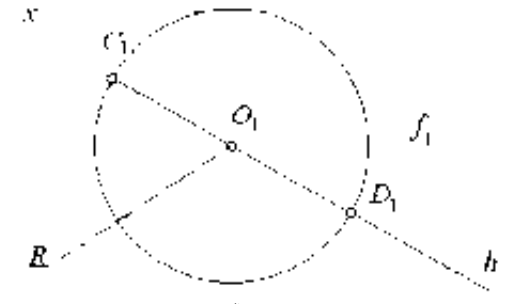
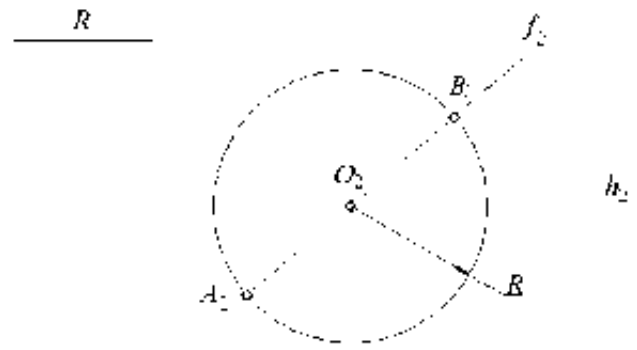
- отмечаем точку S_1 , в которой прямая, параллельная большой оси, пересекает отрезок P_1O_1 , и получаем отрезок O_1S_1 , равный длине полуоси эллипса k_1 .

- по большой и малой осям строим эллипс, являющийся горизонтальной проекцией окружности k (рис. 7.29 е).

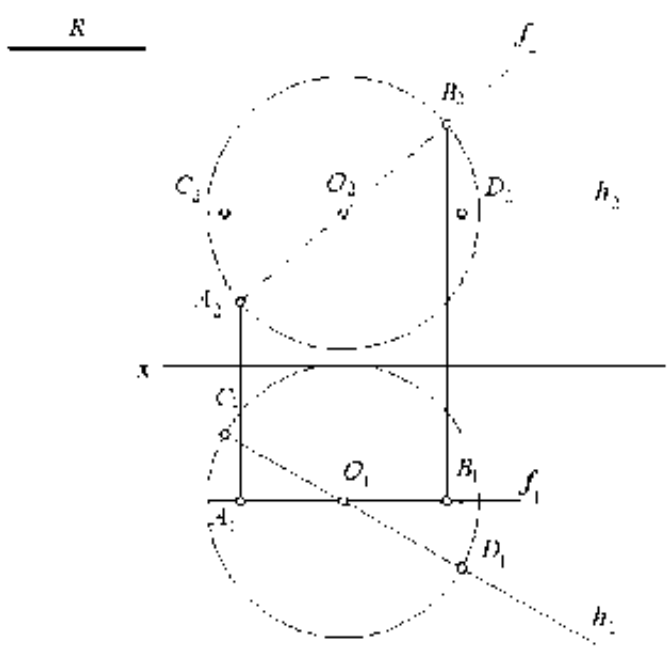
Аналогично строим фронтальную проекцию k_2 окружности k (рис. 7.29 ж,з).



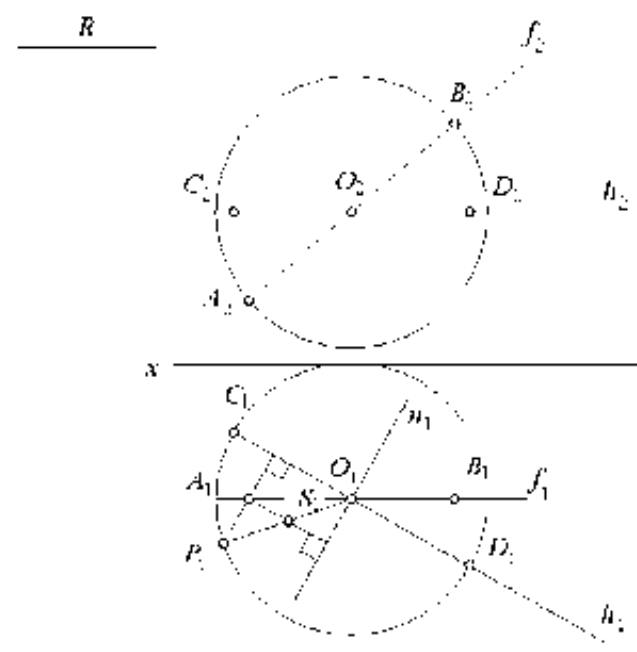
a)



б)



в)



г)

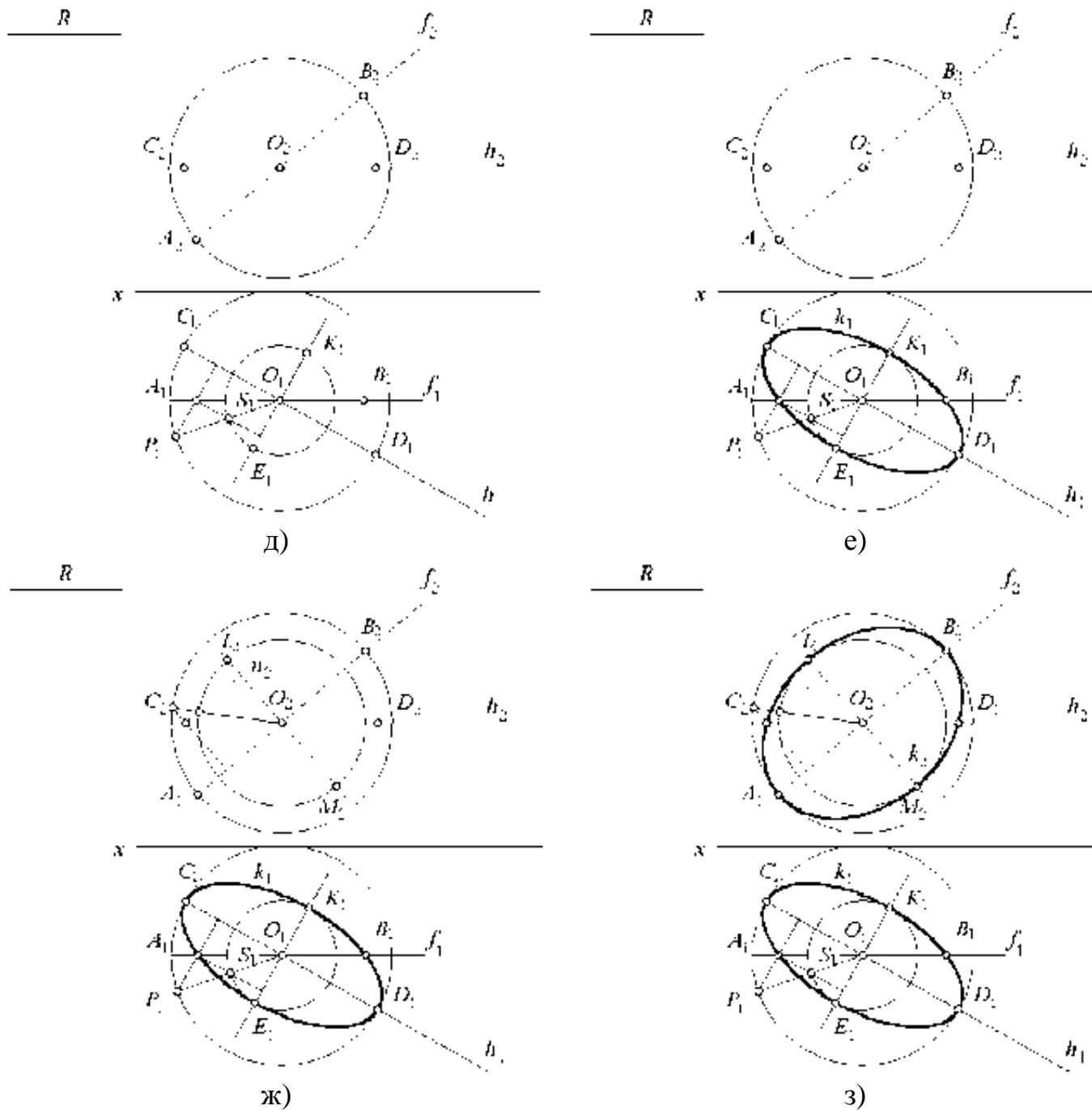


Рис. 7.29

7.7. Обводы

Обводом называют кривую, составленную из дуг кривых. Если дуги двух смежных кривых имеют в точке стыка общую касательную, то обвод называют обводом первого порядка гладкости, общий круг

кривизны – обводом второго порядка гладкости и т.д. Ломаная линия представляет собой обвод нулевого порядка гладкости.

Наиболее простым способом построения обводов является радиусографический способ.

7.7.1. Радиусографический способ построения обводов

С помощью данного способа через упорядоченный набор точек $A^j (j=1, 2, \dots, n)$, где n – число заданных точек, проводится обвод первого порядка гладкости, составленный из дуг окружностей. Рассмотрим пример построения обвода для $n=5$ (рис. 7.30).



Рис. 7.30

Дуга первой составляющей (окружности) m^1 однозначно определяется тремя точками A^1, A^2, A^3 . Центр O^1 окружности m^1 находится как точка пересечения перпендикуляров p^1, p^2 , проведенных через середины ее хорд A^1A^2, A^2A^3 (рис. 7.31). Радиус дуги окружности m^1 равен длине отрезков $O^1A^1 = O^1A^2 = O^1A^3$.

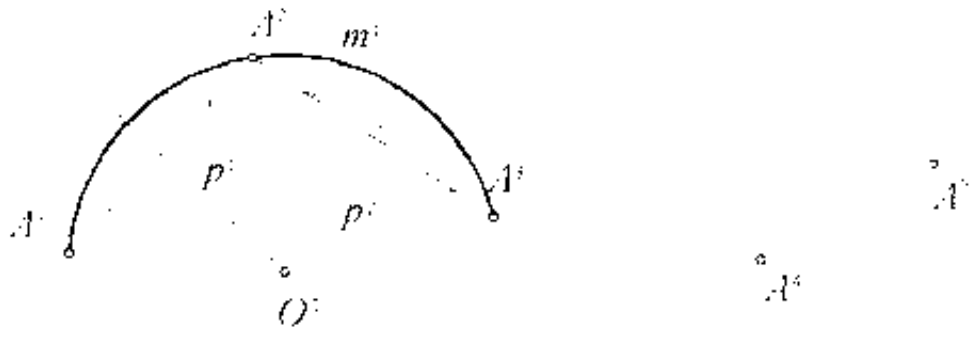


Рис. 7.31

Вторая составляющая m^2 определяется двумя точками A^3, A^4 и касательной t^1 , построенной к предыдущей составляющей m^1 в точке стыка A^2 . Центр O^2 дуги второй окружности m^2 определяется как точка пересечения прямой $O^1A^2 \perp t^1$ и перпендикуляра p^3 , проведенного через середину хорды A^2A^4 (рис. 7.32). Аналогично строится и третья составляющая.

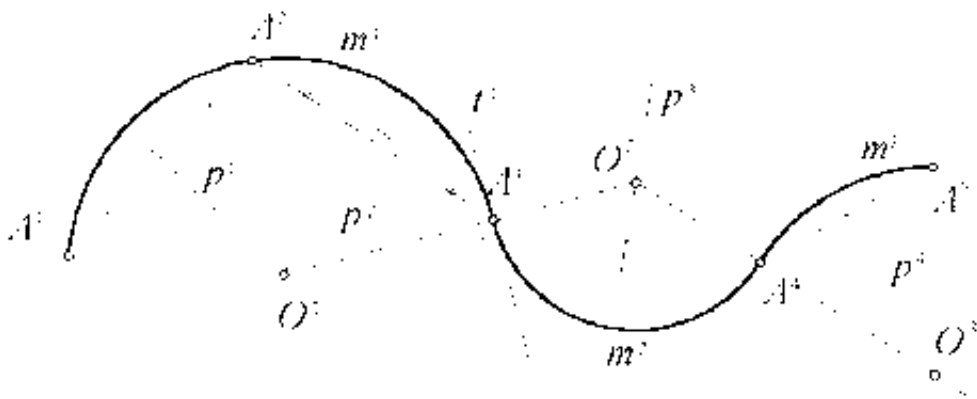


Рис. 7.32

7.7.2. Аналитический способ задания обводов сплайн-функциями

Слово "spline" в переводе с английского языка означает "упругая рейка". Такую рейку используют в качестве гибкого лекала при вычерчивании плоских кривых по опорным точкам (рис.7.33). Форма осевой линии рейки на участке между двумя соседними опорами описывается функцией

$$y = S(x) = a_i + b(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

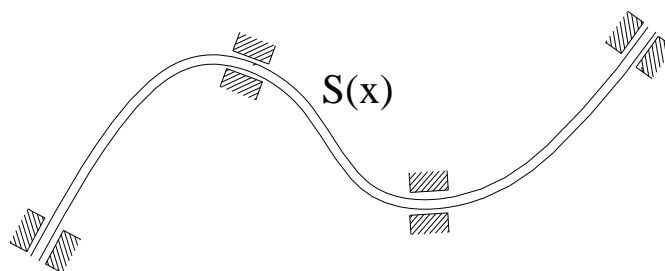


Рис. 7.33

Сплайн-функцией (или просто сплайном) называют функцию с кусочной структурой и повторяющемся на каждом звене строением, но с различными значениями параметров.

Сплайн-функции в настоящее время широко используют для задач интерполяции и аппроксимации в математике. В машиностроении с их помощью описывают сложные контуры деталей.

Рассмотрим построение кубического сплайна, интерполирующего гладкую функцию, заданную таблично. В качестве исходных условий имеем массив точек (x_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, 4$, декартовы координаты которых представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

№ п.п.	x	y
1	0	0
2	1	2
3	2	4
4	3	6
5	4	3

Сплайн должен состоять из дуг четырех (рис. 7.34) кубических парабол, состыкованных во внутренних узловых точках 2, 3, 4 по второму порядку гладкости (т.е. стыкуемые кривые должны иметь в точках стыка одинаковые первые и вторые производные).

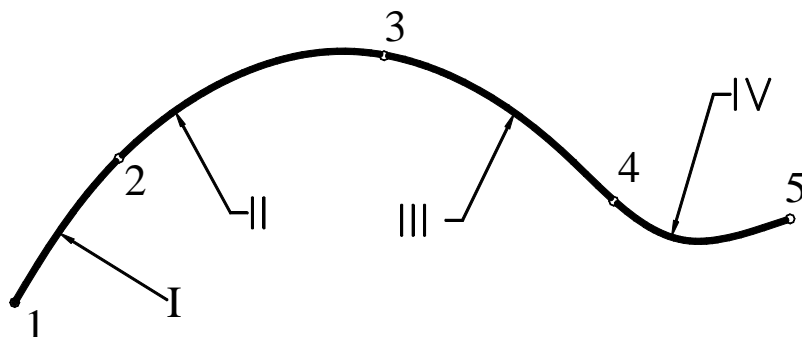


Рис. 7.34

Определим количество коэффициентов сплайна. Умножим количество парабол (составляющих сплайна) m на количество коэффициентов n в уравнении кубической параболы

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3.$$

Получим

$$m \times n = 4 \times 4 = 16.$$

Запишем систему из 16 уравнений, с 16 неизвестными коэффициентами. Условия прохождения кусков сплайна через узловые точки позволяют записать 8 уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{01} + A_{11}x_1 + A_{21}x_1^2 + A_{31}x_1^3; \\ y_2 &= A_{01} + A_{11}x_2 + A_{21}x_2^2 + A_{31}x_2^3; \\ y_2 &= A_{02} + A_{12}x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{32}x_2^3; \\ &\dots\dots\dots \\ y_5 &= A_{04} + A_{14}x_5 + A_{24}x_5^2 + A_{34}x_5^3. \end{aligned}$$

Равенство первых производных кусков сплайна во внутренних узловых точках дает еще три уравнения

$$\begin{aligned} A_{11} + 2A_{21}x_2 + 3A_{31}x_2^2 &= A_{12} + 2A_{22}x_2 + 3A_{32}x_2^2; \\ A_{12} + 2A_{22}x_3 + 3A_{32}x_3^2 &= A_{13} + 2A_{23}x_3 + 3A_{33}x_3^2; \\ A_{13} + 2A_{23}x_4 + 3A_{33}x_4^2 &= A_{14} + 2A_{24}x_4 + 3A_{34}x_4^2. \end{aligned}$$

Из равенства вторых производных в узловых точках получим три уравнения

$$2A_{21} + 6A_{31}x_2 = 2A_{22} + 6A_{32}x_2;$$

$$2A_{22} + 6A_{32}x_3 = 2A_{23} + 6A_{33}x_3;$$

$$2A_{23} + 6A_{33}x_4 = 2A_{24} + 6A_{34}x_4.$$

Оставшиеся два уравнения, возьмем из граничных условий первого типа – заданных значений первых производных в концах промежутка [a,b]

$$y_1' = A_{11} + 2A_{21}x_1 + 3A_{31}x_1^2;$$

$$y_5' = A_{14} + 2A_{24}x_5 + 3A_{34}x_5^2.$$

Представим систему уравнений в следующем виде

$$y_1 = A_{01} + A_{11}x_1 + A_{21}x_1^2 + A_{31}x_1^3;$$

$$y_2 = A_{01} + A_{11}x_2 + A_{21}x_2^2 + A_{31}x_2^3;$$

$$y_2 = A_{02} + A_{12}x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{32}x_2^3;$$

.....

$$y_5 = A_{04} + A_{14}x_5 + A_{24}x_5^2 + A_{34}x_5^3.$$

$$A_{11} + 2A_{21}x_2 + 3A_{31}x_2^2 = A_{12} + 2A_{22}x_2 + 3A_{32}x_2^2;$$

$$A_{12} + 2A_{22}x_3 + 3A_{32}x_3^2 = A_{13} + 2A_{23}x_3 + 3A_{33}x_3^2;$$

$$A_{13} + 2A_{23}x_4 + 3A_{33}x_4^2 = A_{14} + 2A_{24}x_4 + 3A_{34}x_4^2.$$

$$2A_{21} + 6A_{31}x_2 = 2A_{22} + 6A_{32}x_2;$$

$$2A_{22} + 6A_{32}x_3 = 2A_{23} + 6A_{33}x_3;$$

$$2A_{23} + 6A_{33}x_4 = 2A_{24} + 6A_{34}x_4.$$

$$y_1' = A_{11} + 2A_{21}x_1 + 3A_{31}x_1^2;$$

$$y_5' = A_{14} + 2A_{24}x_5 + 3A_{34}x_5^2.$$

Данная система уравнений однозначно определяется расширенной матрицей системы. Зная значения коэффициентов сплайна, можно вычислить координаты точек составляющих сплайна.

На рис. 7.35 показан график сплайна, интерполирующего заданный массив точек.

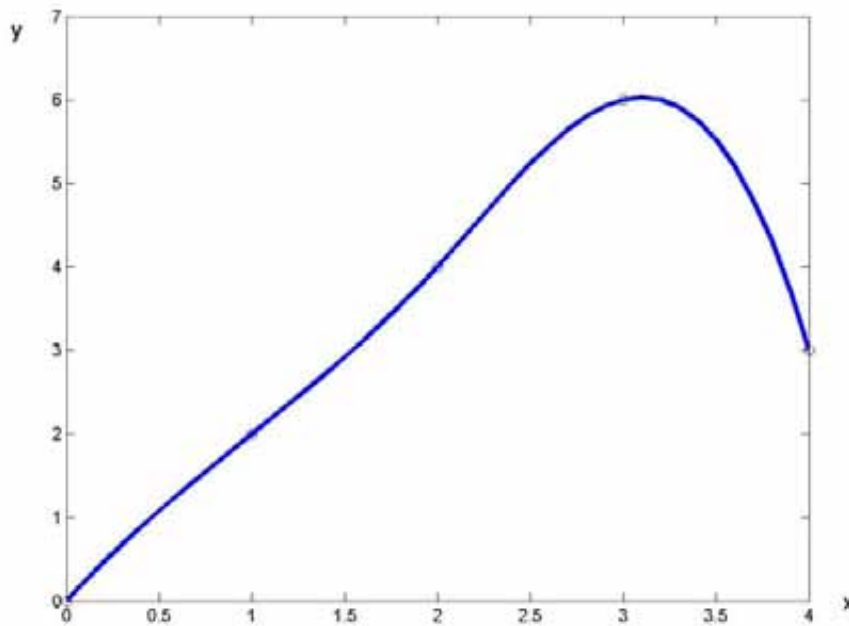


Рис. 7.35

7.8. Задачи для аудиторных занятий

7.8.1. Определить по чертежу кривой a , плоская она или пространственная (рис. 7.36).

7.8.2. В точке C кривой $a(a_1, a_2)$ построить касательную t (рис. 7.36).

7.8.3. Определить, является ли дуга KL кривой m плоской или пространственной. Построить плоскость, перпендикулярную к дуге KL в точке N (рис. 7.37).

7.8.4. Построить недостающие проекции B_2, C_1 точек B, C , принадлежащих кривой $a(a_1, a_2)$ (рис. 7.38).

7.8.5. Построить проекции окружностей $m(O, R = 20)$ $m(O, R = 20)$, принадлежащих плоскостям $\Gamma // \Pi_1$, $\Delta \perp \Pi_1$ (рис. 7.39).

7.8.6. Построить проекции m_1, m_2 окружности $m(O, R)$, принадлежащей плоскости $\Phi(h \cap f)$, где $O = h \cap f$, $R = 30$ мм (рис. 7.40).

7.8.7. Построить проекции окружности, касающейся прямой a в точке A и проходящей через точку B (рис. 7.41).

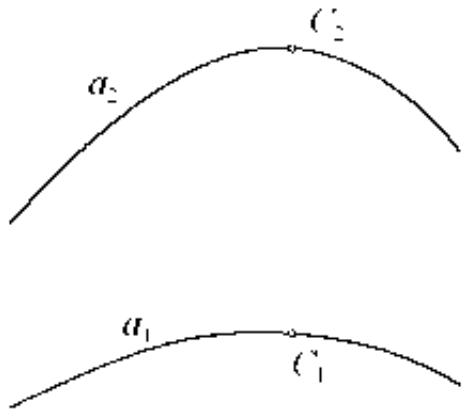


Рис. 7.36

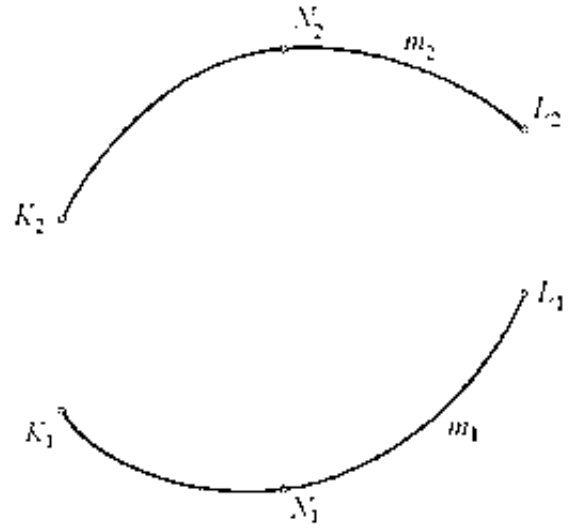


Рис. 7.37

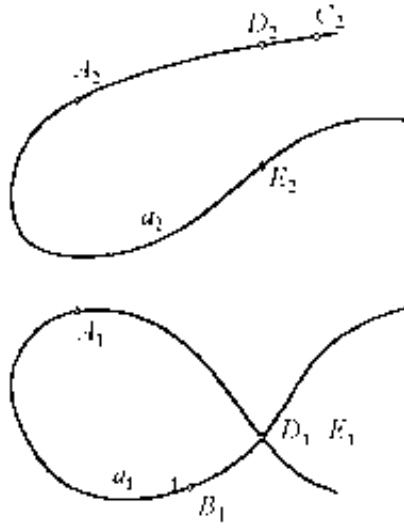


Рис. 7.38

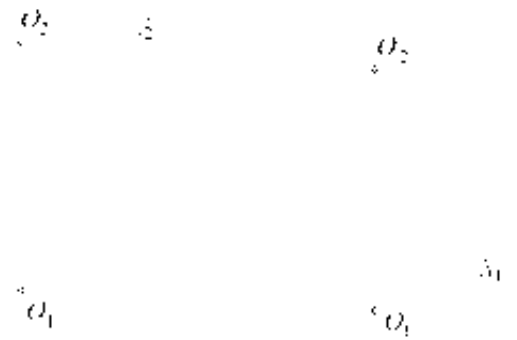


Рис. 7.39

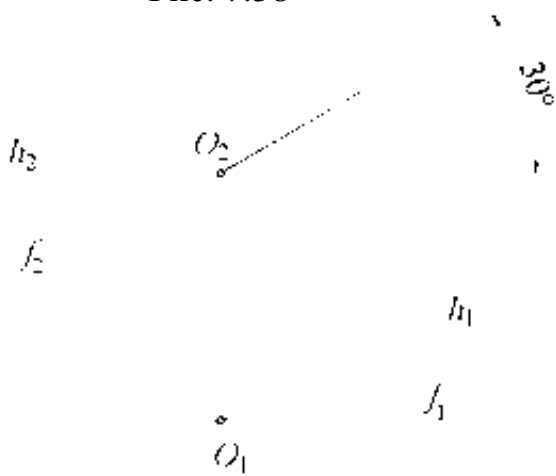


Рис. 7.40

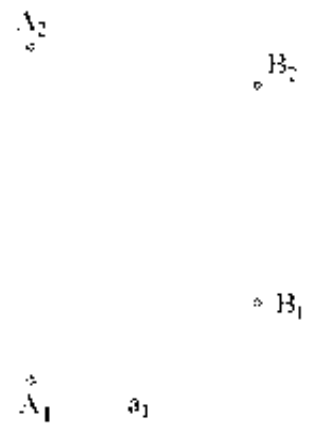


Рис. 7.41

7.9. Задачи для самостоятельной работы

7.9.1. По заданным большой и малой осям a и b (табл. 7.2) построить эллипс. В точке M провести нормаль и касательную.

Таблица 7.2

№ варианта	Большая ось a	Малая ось b	Точка M	
			x	y
1	70	30	20	$y > 0$
2	80	35	-30	$y > 0$
3	85	35	25	$y < 0$
4	90	40	35	$y > 0$
5	85	60	-30	$y < 0$
6	80	50	20	$y > 0$
7	70	56	-15	$y < 0$
8	110	70	40	$y > 0$
9	100	60	20	$y < 0$
10	120	80	-40	$y > 0$
11	106	40	-30	$y < 0$
12	116	70	-30	$y > 0$

7.9.2. В плоскости $\Gamma(ABC)$ построить проекции окружности заданного радиуса R с центром в точке A . Данные для своего варианта взять из таблицы 7.3.

Таблица 7.3

№ вар.	x_A	y_A	z_A	x_B	y_B	z_B	x_C	y_C	z_C	R
1	50	58	60	10	58	115	0	120	60	46
2	50	56	58	10	56	115	0	124	58	48
3	52	58	60	0	58	113	0	124	60	47
4	52	58	58	5	58	112	10	120	58	47
5	52	56	60	5	56	112	10	120	60	45
6	52	60	58	0	113	58	0	113	124	47

7	50	62	58	0	62	108	10	120	58	48
8	52	62	56	0	62	106	10	124	56	48
9	54	60	58	8	60	106	0	126	58	50
10	54	62	58	0	62	104	12	122	58	50
11	54	62	58	8	62	104	0	124	58	50
12	52	60	56	8	60	106	0	126	56	50
13	50	62	56	0	62	108	10	124	56	48

7.9.3. Методом радиусографии построить плоский обвод для заданного массива точек A, B, C, D, E, F, M . Координаты узлов интерполяции взять из таблицы 7.4.

Таблица 7.4

№ вар.	A		B		C		D		E		F		M	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	0	20	40	30	50	15	70	40	90	90	120	40	170	30
2	0	30	40	10	50	45	70	0	90	9	120	40	170	20
3	0	0	40	30	50	40	70	50	90	90	120	60	170	30
4	0	10	40	30	50	15	70	70	90	90	120	100	170	90
5	0	70	40	30	50	85	70	40	90	65	120	40	170	30
6	0	0	40	90	50	25	70	40	90	90	120	65	170	0
7	0	0	40	60	50	70	70	50	90	95	120	65	170	50
8	0	30	40	30	50	60	70	50	90	120	120	50	170	30
9	0	10	40	30	50	30	70	50	90	80	120	60	170	70
10	0	70	45	30	50	85	75	40	90	65	115	40	170	80
11	0	80	40	90	50	38	70	40	80	90	120	65	170	0
12	0	70	40	30	50	85	70	40	90	65	120	40	170	30
13	0	50	40	80	50	25	70	110	90	90	120	85	170	70

7.10. Контрольные вопросы

7.10.1. На сколько плоскостей проекций плоская кривая может одновременно проецироваться в прямую линию?

7.10.2. Могут ли проекции алгебраической кривой на Π_1, Π_2, Π_3 иметь различные порядки?

7.10.3. Какая алгебраическая кривая второго порядка может проецироваться одновременно на Π_1 и Π_2 в окружности?

7.10.4. Какие точки называют регулярными?

7.10.5. В какую линию окружность, лежащая в горизонтально проецирующей плоскости Σ , проецируется на горизонтальную плоскость проекций Π_1 ?

7.10.6. Чем пространственная кривая отличается от плоской?

7.10.7. Что называется плоским обводом?

7.10.8. Чем определяется порядок гладкости обвода?

7.10.9. Что такое радиусография?

7.10.10. Что называется сплайн-интерполяцией?

8. ПОВЕРХНОСТИ

8.1. Основные понятия и определения

Поверхность – двупараметрическое множество точек пространства, то есть множество точек пространства, координаты которых являются функциями от двух параметров.

В начертательной геометрии изучают кинематический способ образования поверхностей, когда поверхности образуются в результате перемещения в пространстве некоторой линии u (образующей) по определенному закону. Закон перемещения образующей может быть задан кривыми (направляющими), которые образующая пересекает при своем движении.

На любой кинематической поверхности можно выделить однопараметрическое множество линий (например, u или v), которые составляют линейный каркас поверхности.

Зададим на поверхности Σ **криволинейную систему координат** $\bar{0}uv$ (рис 8.1). Положение произвольной точки M поверхности однозначно определяется двумя параметрами (криволинейными координатами) u_i, v_j . Декартовы координаты точек поверхности выражаются через их криволинейные координаты параметрическими уравнениями поверхности

$$x = f_1(u, v),$$

$$y = f_2(u, v),$$

$$z = f_3(u, v).$$

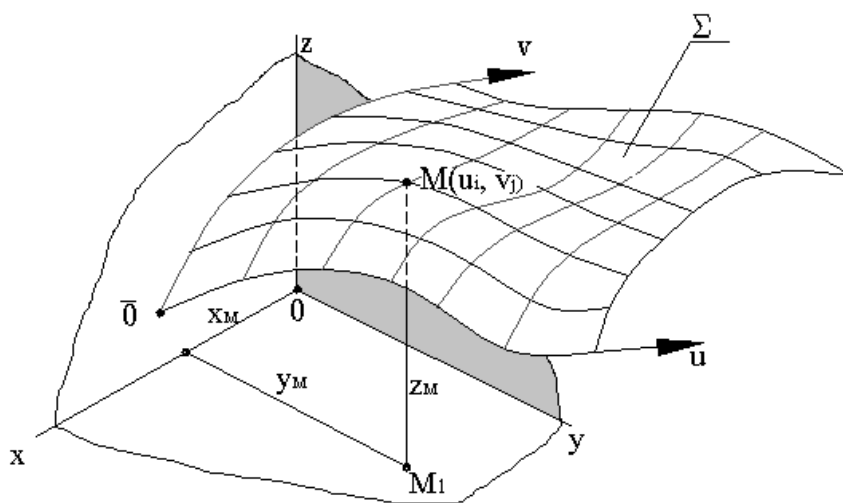


Рис. 8.1

Совокупность независимых условий, однозначно определяющих поверхность, называется определителем поверхности. Например, сфера может быть определена положением ее центра O и величиной радиуса R . В этом случае определитель сферы записывается так: $\Delta(O, R)$. Та же самая сфера может быть определена четырьмя точками A, B, C, D , не лежащими в одной плоскости. Определитель будет иметь вид $\Delta(A, B, C, D)$.

На чертеже кинематические поверхности можно задавать проекциями геометрической части определителя. Однако чертеж будет более наглядным, если его дополнить очерковыми линиями поверхности. Очерковая линия k_j является проекцией контурной линии k на плоскость проекций Π_j (рис.8.2). Контурная линия – множество точек касания проецирующих прямых с поверхностью Δ .

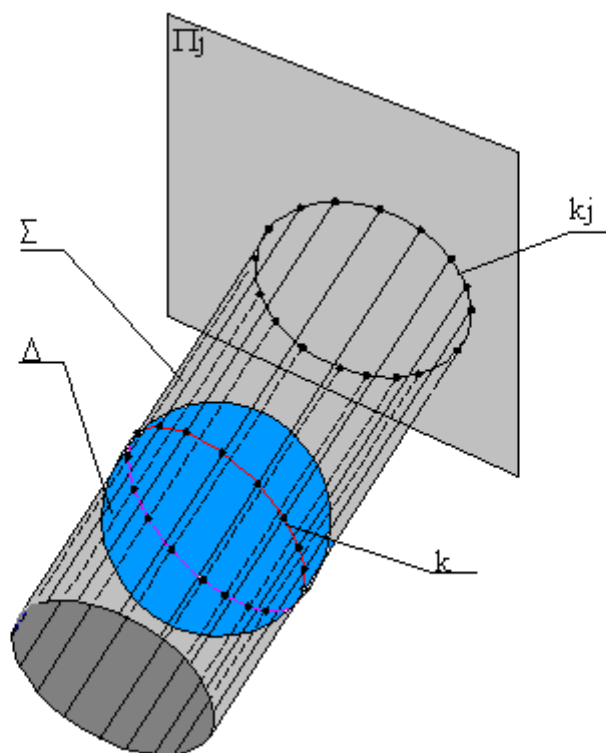


Рис. 8.2

Кинематические поверхности обычно систематизируют по виду образующей и закону ее перемещения. По виду образующей различают: линейчатые (образующая – прямая), циклические (образующая – окружность) и поверхности зависимых сечений (образующая – плоская кривая переменной формы). По закону перемещения образующей можно различать поверхности параллельного переноса, вращения,

винтовые. Однако, такая систематизация достаточно условна, так как одна и та же поверхность может быть отнесена к различным видам. Например, прямой круговой конус, относится к **линейчатым** поверхностям и поверхностям вращения.

Различают поверхности алгебраические и трансцендентные. Алгебраические поверхности в декартовой системе координат определяются уравнением в явной форме:

$$z = \varphi(x, y)$$

или в неявной форме:

$$\gamma(x, y, z) = 0,$$

где $\varphi(x, y)$, $\gamma(x, y, z)$ – алгебраические многочлены n -го порядка.

Если уравнение поверхности содержит трансцендентные функции (показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические), то поверхность является трансцендентной.

Порядок алгебраической поверхности равен степени ее уравнения. Графически порядок определяется числом точек пересечения поверхности с произвольной прямой или порядком кривой, по которой поверхность пересекается с произвольной плоскостью.

Различают односторонние и двусторонние поверхности – по способу их расположения в объемлющем пространстве. Примером односторонней поверхности может служить поверхность Клейна (бутылка Клейна) (рис.8.3).

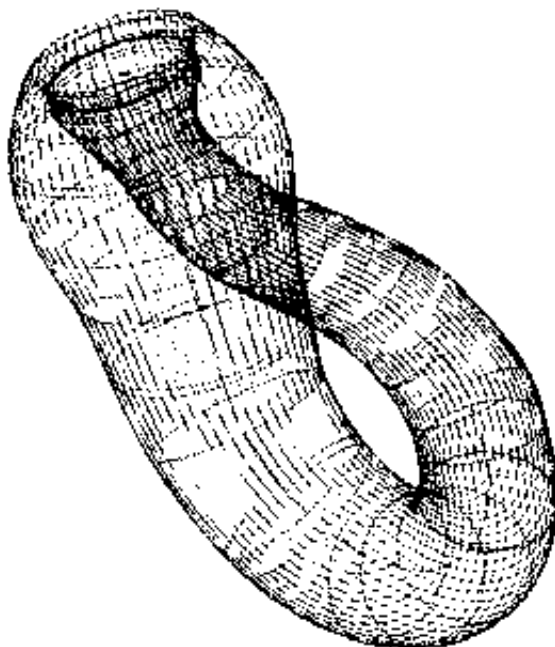


Рис.8.3

В трехмерном пространстве поверхность Клейна может быть получена из трубы, открытой с обеих сторон, если, изогнув трубу, пропустить более узкий ее конец через стенку и склеить обе граничные окружности, изгибая внешнюю широкую окружность внутрь, а внутреннюю узкую окружность наружу. Таким образом, получается поверхность, имеющая линию самопересечения.

Поверхность задана на чертеже полно, если по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, можно найти недостающие проекции (критерий полноты задания поверхности на чертеже). Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит некоторой линии, лежащей на данной поверхности.

8.2. Поверхности вращения

Поверхность вращения $\Lambda(k, i)$ образуется при вращении плоской или пространственной кривой линии k (образующей) вокруг неподвижной прямой i – оси поверхности (рис. 8.4).

Если образующей является алгебраическая кривая n -го порядка, то в общем случае поверхность будет поверхностью $2n$ -го порядка. Например, при вращении прямой получается поверхность второго порядка. Однако, если образующая n -го порядка имеет плоскость симметрии, а ось вращения лежит в этой плоскости, то получается поверхность n -го порядка. Примером может являться сфера, образованная при вращении окружности вокруг своего диаметра.

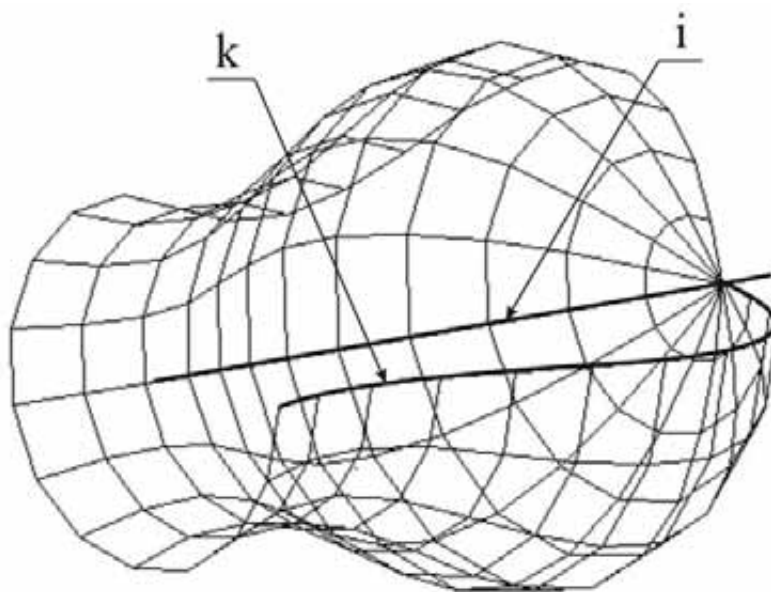


Рис.8.4

Окружности, которые описывают точки образующей при вращении, называются параллелями. Параллель, радиус которой меньше радиусов смежных параллелей, называется горловиной или горлом, а параллель с большим радиусом – экватором (рис. 8.5, 8.6). Поверхность может иметь несколько горловин и экваторов.

Плоскость Σ , проходящую через ось поверхности вращения, называют меридиональной. Меридиональные плоскости пересекают поверхность вращения по линиям, называемым меридианами поверхности. Меридианы, расположенные в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, называются главными.

Свойства поверхностей вращения:

- меридиан поверхности вращения, проходящий через две точки поверхности, является кратчайшей линией между этими точками (геодезической линией);

- все меридианы поверхности конгруэнтны;

- каждая из параллелей поверхности пересекает меридианы под прямым углом;

- каждая из нормалей к поверхности вращения пересекает ось поверхности.

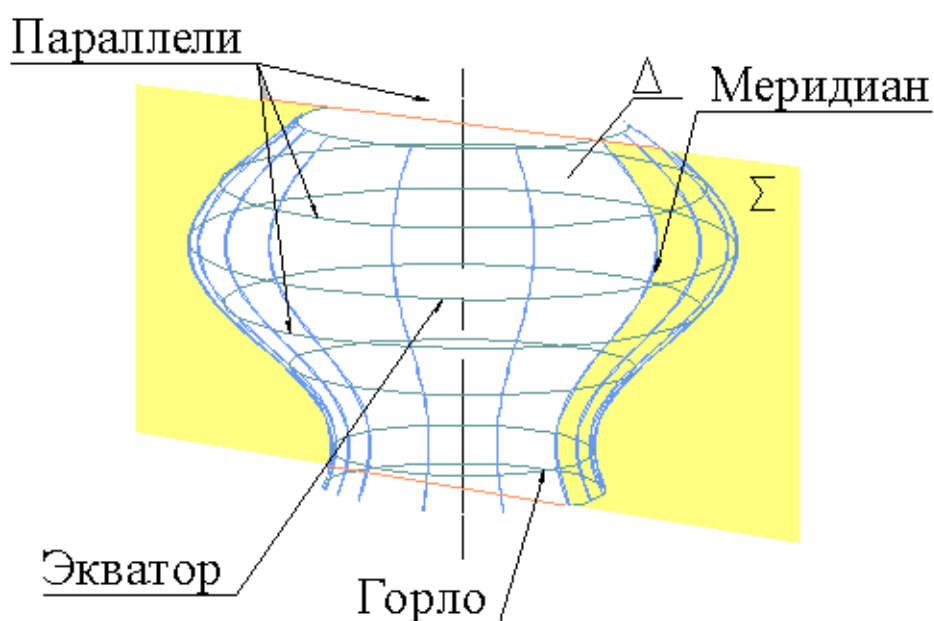


Рис.8.5

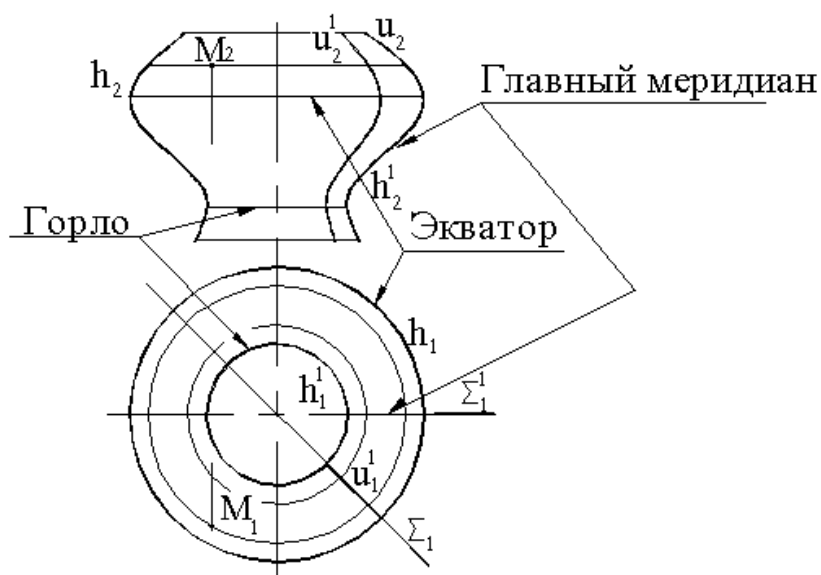


Рис.8.6

Пользуясь условием принадлежности точек поверхности, можно строить недостающие проекции точек, инцидентных поверхности вращения. Пусть, например, поверхность вращения задана осью вращения i и образующей u (рис.8.7). Построим горизонтальную проекцию точки M и фронтальную проекцию точки N , принадлежащих данной поверхности. Для этого строим проекции параллелей, проходящих через заданные точки.

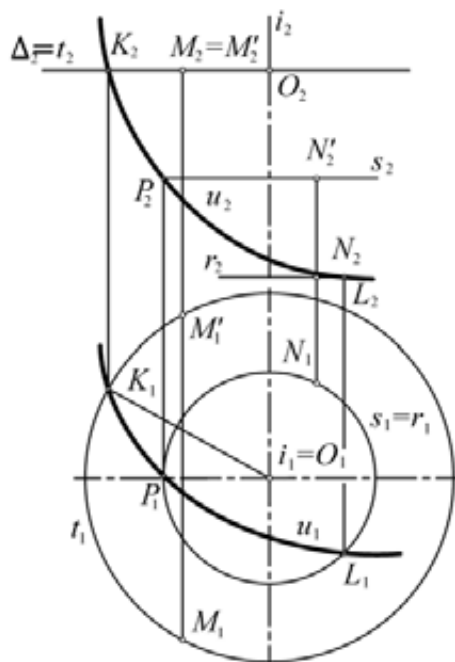


Рис. 8.7

8.3. Способы задания поверхностей вращения

На комплексном чертеже поверхность вращения можно задать:

- проекциями геометрической части определителя поверхности (рис 8.8 а);
- очерками (рис.8.8 б);
- каркасом параллелей (меридианов) или сетью, образованной параллелями и меридианами (рис.8.8 в).

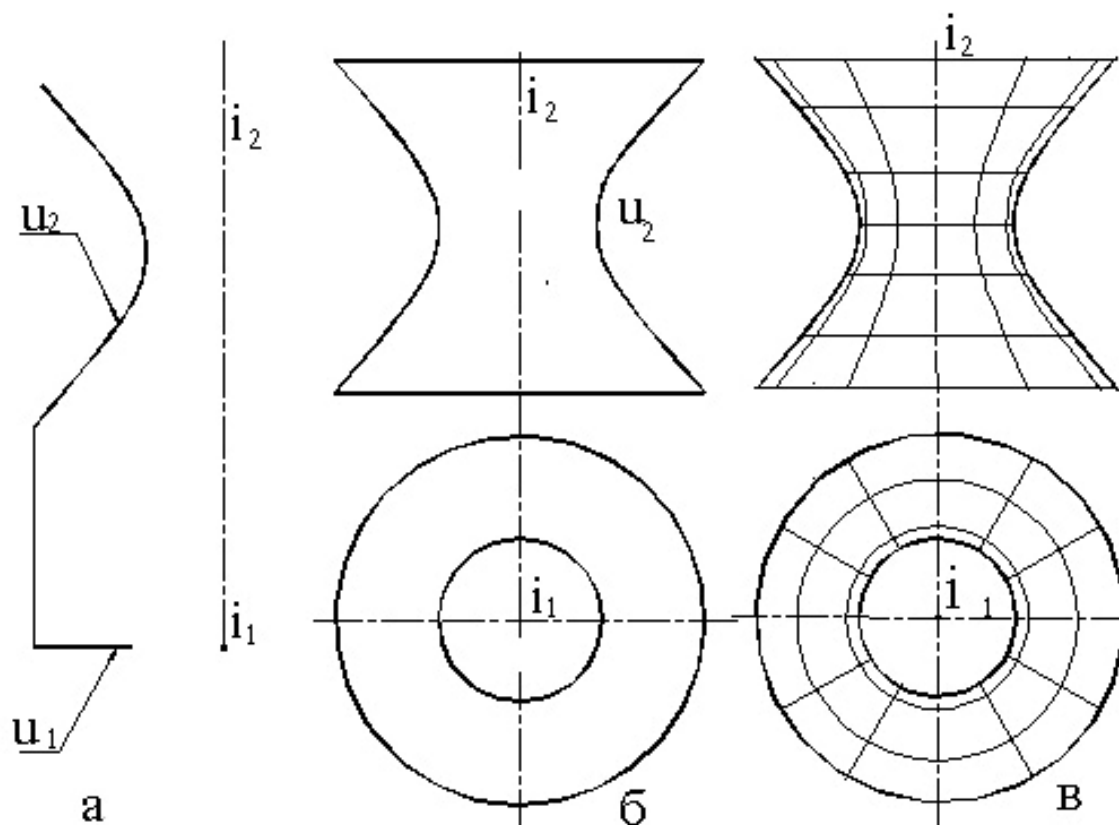


Рис. 8.8

Пусть поверхность вращения задана образующей u и осью вращения i , перпендикулярной плоскости проекций Π_1 (рис. 8.9). Построим проекции главного меридиана. Для этого точки A, B, C, D кривой u повернем вокруг оси i до совмещения с фронтальной плоскостью уровня Δ , проходящей через i . Найдем фронтальные проекции A'_2, B'_2, C'_2, D'_2 . Соединив их плавной кривой, получаем фронтальную проекцию u'_2 главного меридиана. Горизонтальная проекция u'_1 совпадает с Δ_1 .

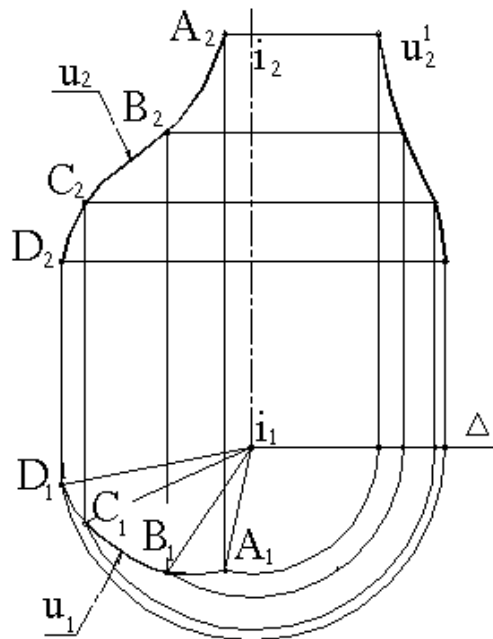


Рис. 8.9

8.4. Примеры поверхностей вращения

8.4.1. Тор

Тором называют поверхность, образованную вращением окружности u вокруг оси i , лежащей в плоскости этой окружности. Тор может быть открытым (рис.8.10 а), или закрытым (рис.8.10 б, в).

Построение недостающих проекций точек, принадлежащих поверхности тора, показано на рис. 8.10.

8.4.2. Сфера

Сфера образуется при вращении окружности вокруг одного из диаметров (рис.8.11).

Очерками сферы на фронтальной, горизонтальной и профильной плоскостях проекций являются одинаковые окружности, радиусы которых равны радиусу сферы. Недостающие проекции точки, принадлежащей сфере, можно найти с помощью параллели, на которой расположена данная точка (рис. 8.12).

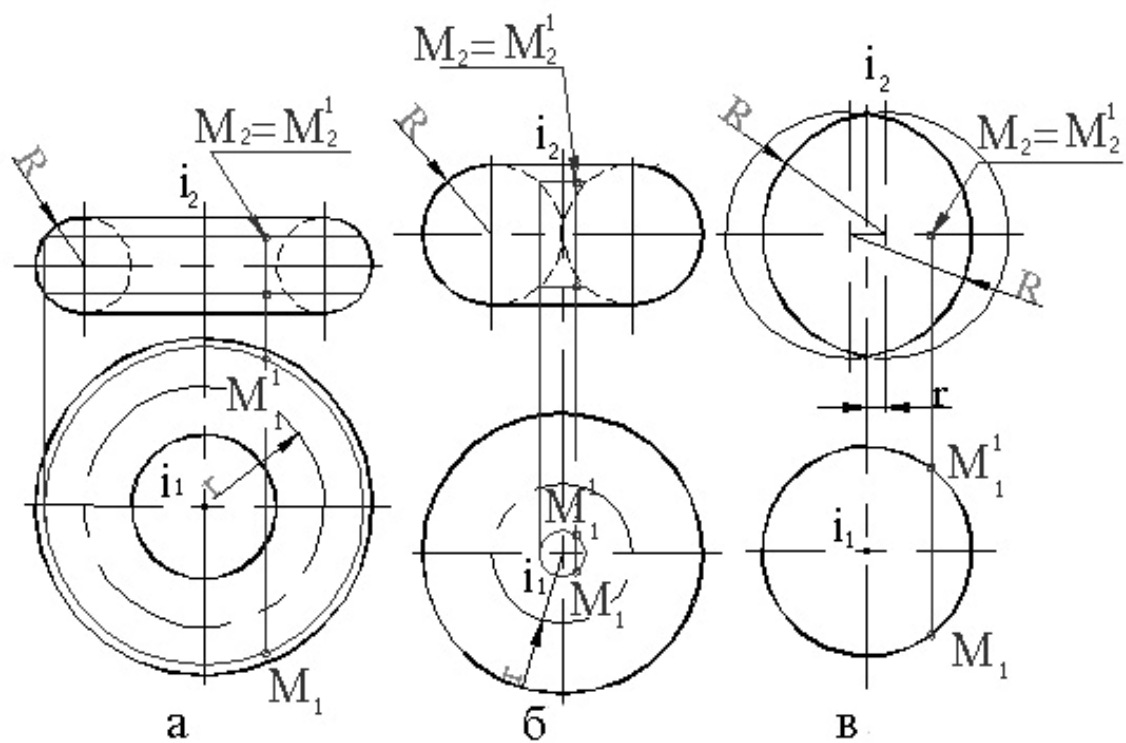


Рис. 8.10

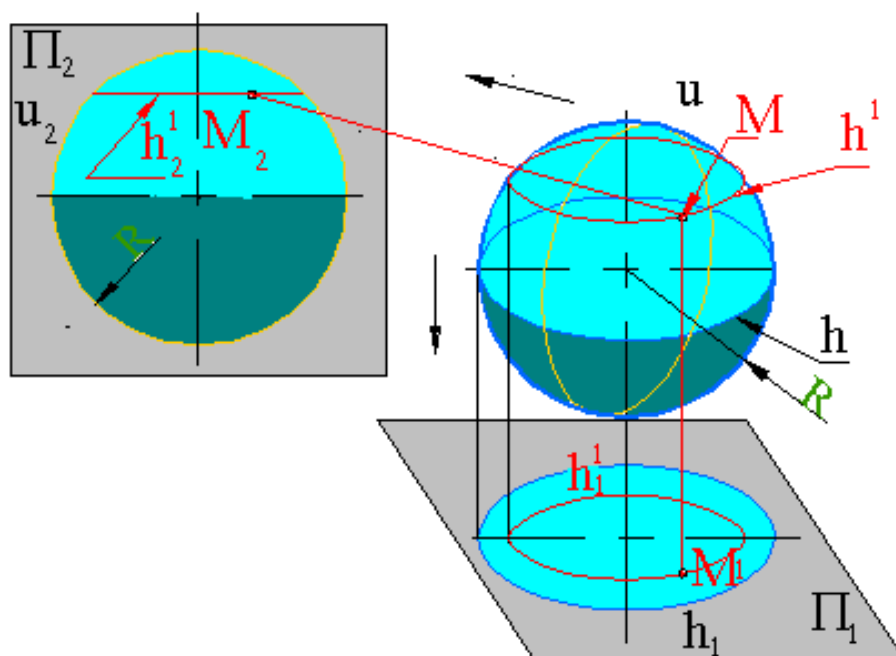


Рис. 8.11

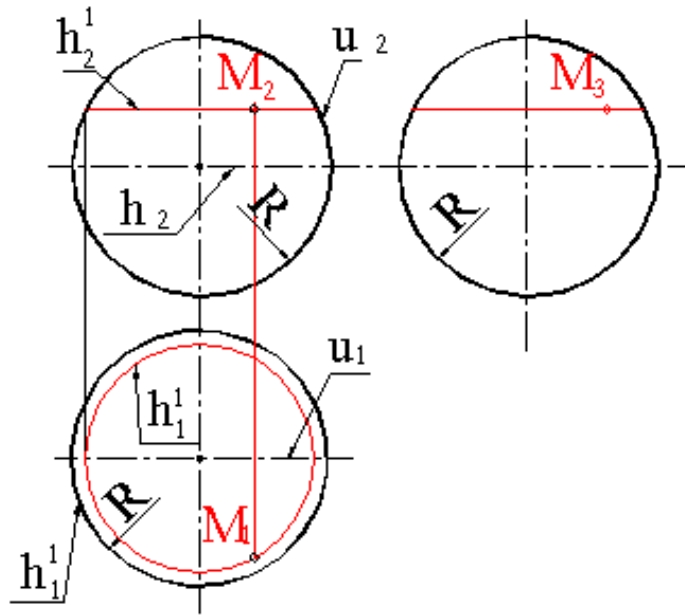


Рис.8.12

8.4.3. Эллипсоид вращения

Поверхность эллипсоида вращения получается при вращении эллипса вокруг его большой (рис.8.13 а) или малой (рис.8.13 б) осей.

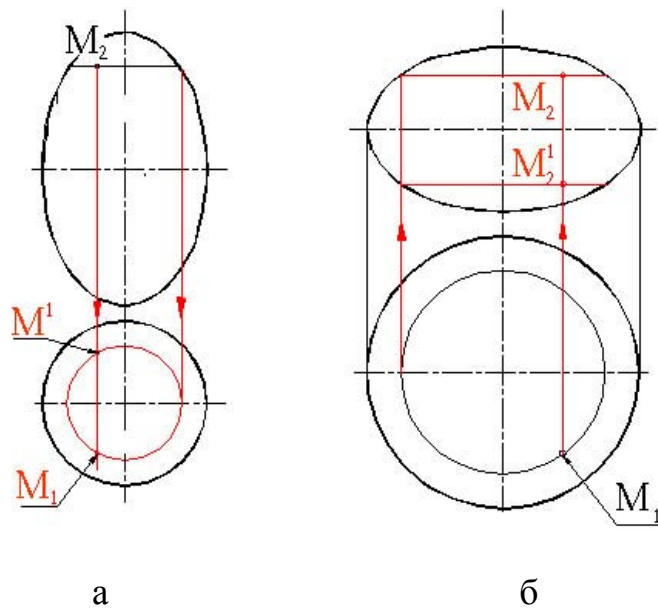


Рис.8.13

8.4.4. Параболоид вращения

Параболоид вращения образуется при вращении параболы вокруг своей оси (рис.8.14).

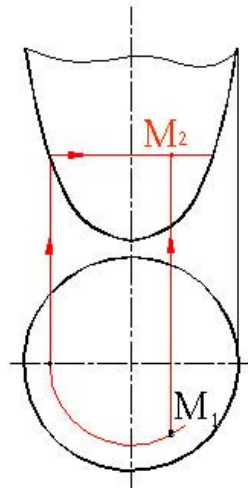


Рис. 8.14

8.4.5. Гиперboloид вращения

Однополостный гиперболоид вращения образуется при вращении гиперболы вокруг мнимой оси гиперболы (рис.8.15 а).

Двуполостный гиперболоид вращения образуется при вращении гиперболы вокруг действительной оси (рис.8.15 б).

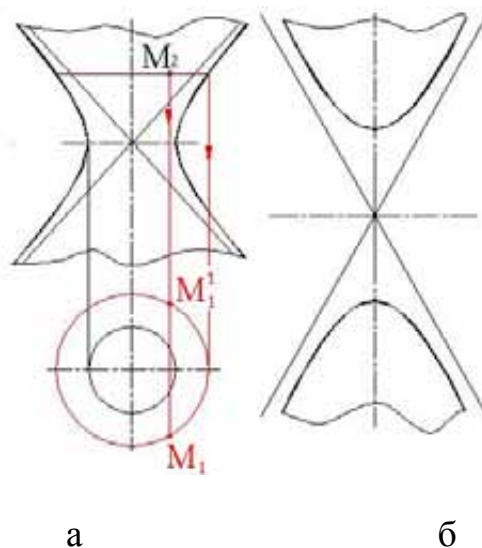


Рис.8.15

8.4.6. Линейчатые поверхности вращения

Такие поверхности получаются при вращении прямой u вокруг оси i . Если прямая u параллельна оси i , то получается цилиндр вращения (рис.8.16 а), если прямые u и i скрещиваются, получается однополостный гиперболоид (рис.8.16 б), если u пересекает ось i – конус вращения (рис.8.16 в),

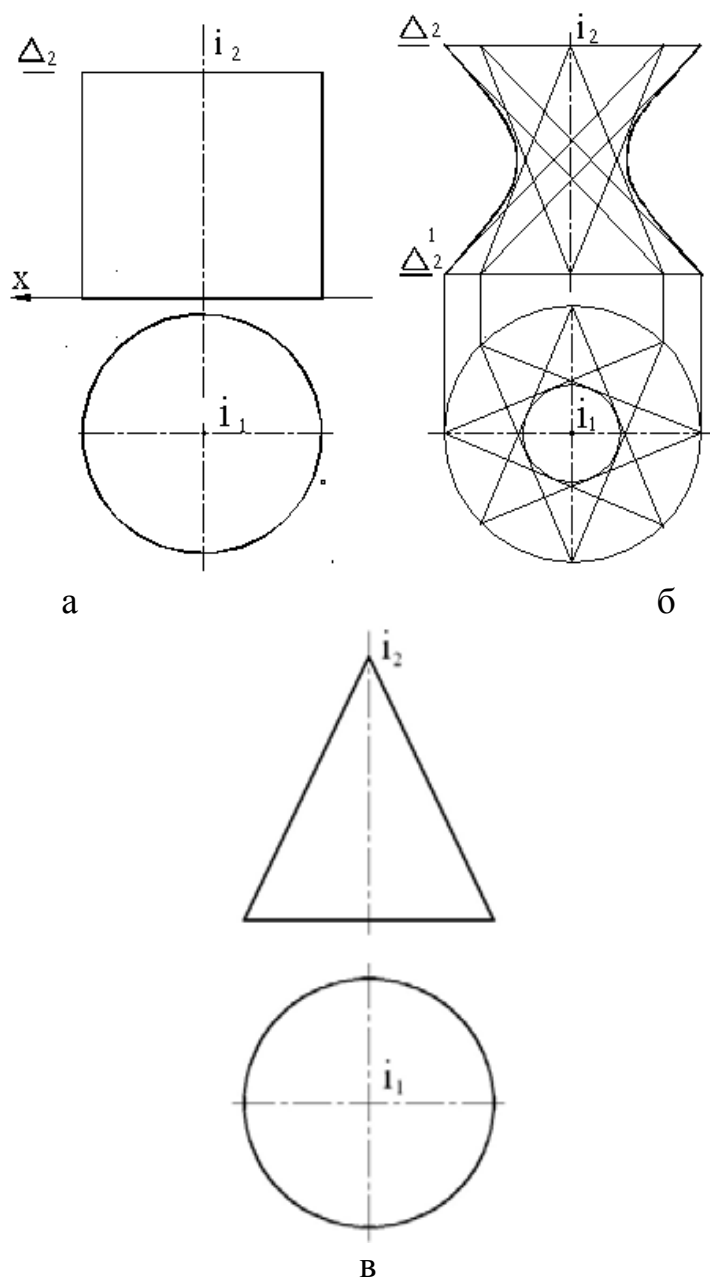


Рис.8.16

Эти поверхности бесконечно простираются в направлении их образующих. Такие поверхности называют незамкнутыми. Замкнутые поверхности: тор, сфера, эллипсоид вращения на комплексном чертеже изображаются полностью. При изображении незамкнутых поверхностей на комплексном чертеже их обычно ограничивают какими-либо линиями: линией пересечения поверхности с плоскостью проекций (следом поверхности) или линией пересечения поверхности с плоскостью, параллельной плоскости проекций (рис.8.16).

8.5. Линейчатые поверхности

8.5.1. Общие сведения о линейчатых поверхностях

Линейчатой поверхностью называется поверхность, образованная перемещением прямой линии (образующей) по определенному закону. Закон движения образующей задается с помощью некоторых линий (направляющих). В общем случае, линейчатая поверхность имеет три направляющие линии. Порядок линейчатой поверхности с тремя направляющими алгебраическими кривыми определяется по формуле

$$n = 2n_1n_2n_3$$

где n_1, n_2, n_3 – порядки направляющих.

Линейчатая поверхность, определяемая тремя прямолинейными направляющими, называется эллиптическим однополостным гиперboloидом (рис. 8.17).

В практике часто используются линейчатые поверхности с одной или двумя действительными собственными направляющими (конические и цилиндрические поверхности, поверхности с плоскостью параллелизма, линейчатые поверхности, заданные инженерным способом).

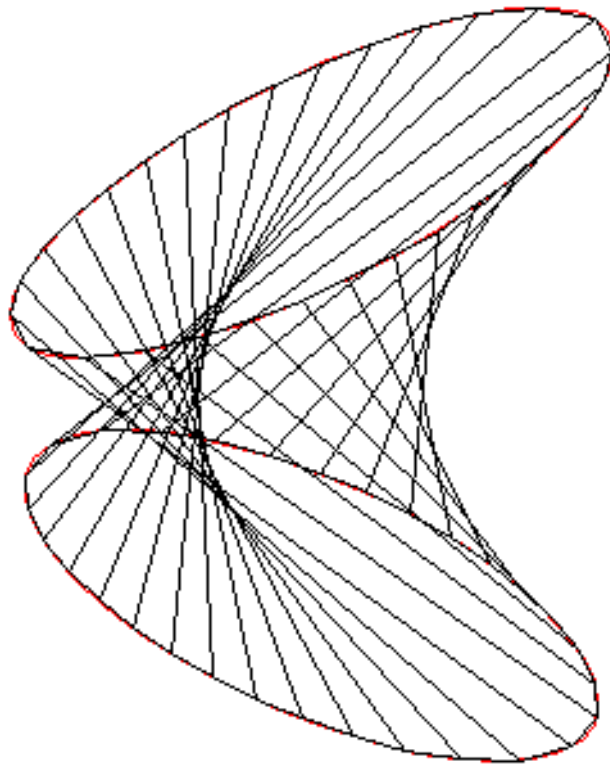


Рис. 8.17

8.5.2. Конические и цилиндрические поверхности

Конической называется линейчатая поверхность, образованная движением прямой k (образующей), проходящей через точку S (вершину) и пересекающей кривую m (направляющую) (рис.8.18).

Если вершину S конической поверхности удалить в бесконечность, то есть сделать несобственной точкой, то получается цилиндрическая поверхность. Образующая k цилиндрической поверхности при своем движении пересекает направляющую m и параллельна некоторому вектору \vec{s} (рис.8.19).

Если направляющей конической (цилиндрической) поверхности является алгебраическая кривая, то порядок поверхности равен порядку ее направляющей. Геометрическая часть определителя конической поверхности включает в себя вершину S и направляющую m : $\Phi(S, m)$. Определитель цилиндрической поверхности имеет вид $\Gamma(\vec{s}, m)$.

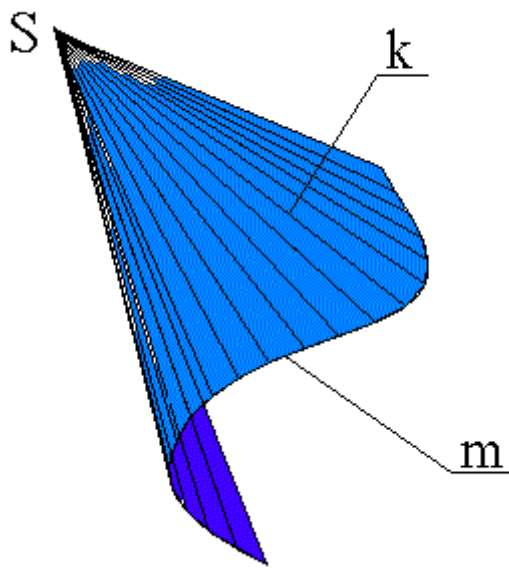


Рис.8.18

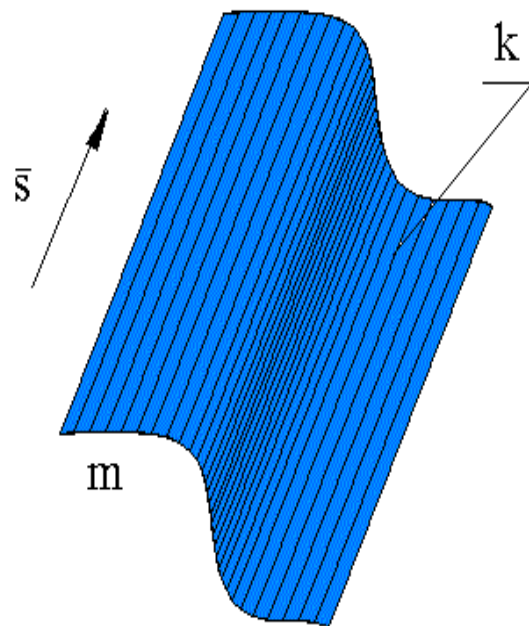


Рис.8.19

На комплексном чертеже коническая и цилиндрическая поверхности задаются проекциями геометрической части своего определителя (рис.8.20, 8.21). Недостающие проекции точек, принадлежащих этим поверхностям, строятся из условия их принадлежности образующей k .

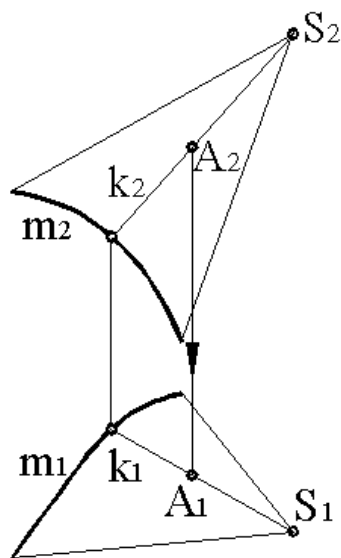


Рис.8.20

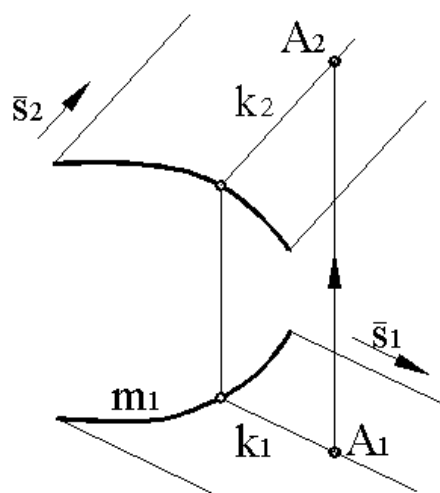


Рис.8.21

8.5.3. Торсовые поверхности

Торсовой поверхностью называется линейчатая поверхность, образующими которой являются касательные к пространственной кривой m (направляющей). Направляющую кривую m торсовой поверхности называют ребром возврата.

Геометрическая часть определителя торсовой поверхности включает ребро возврата – $\Gamma(m)$.

На комплексном чертеже торсовая поверхность задается проекциями ребра возврата m .

Произвольная плоскость Δ пересекает торсовую поверхность по кривой n , которая будет иметь точку возврата N , принадлежащую направляющей m (рис. 8.22).

Если направляющей торсовой поверхности является алгебраическая кривая порядка n_1 , то порядок торсовой поверхности определяется выражением

$$n = (n_1 - 1)^2.$$

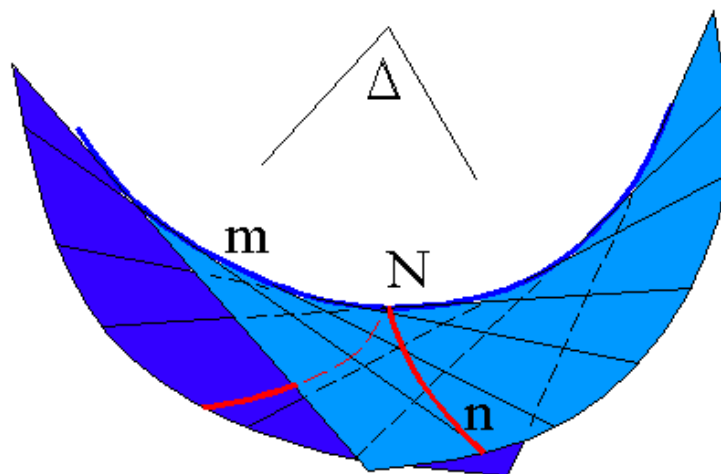


Рис.8.22

8.5.4. Поверхности Каталана

Поверхностями Каталана называют линейчатые поверхности, у которых две направляющие – действительные собственные кривые, а третья – несобственная прямая. Образующие k_i этих поверхностей пересекают направляющие кривые m , n и параллельны некоторой

плоскости Γ , называемой плоскостью параллелизма. В качестве плоскости параллелизма удобно выбирать одну из плоскостей проекций или проецирующую плоскость.

Поверхности с плоскостью параллелизма разделяют по виду направляющих m и n .

Цилиндроид – линейчатая поверхность с плоскостью параллелизма, у которой обе направляющие – кривые линии. На рис.8.23 представлен комплексный чертеж цилиндриоида $\Phi(m,n,\Pi_2)$, у которого плоскостью параллелизма является фронтальная плоскость проекций Π_2 . Все образующие поверхности Φ будут параллельны Π_2 .

Рассмотрим построение недостающих проекций точек A_1 и B_2 точек A и B , принадлежащих поверхности цилиндриоида. Проекцию A_2 точки A найдем из условия принадлежности точки образующей a . Горизонтальная проекция a_1 образующей a параллельна оси Ox .

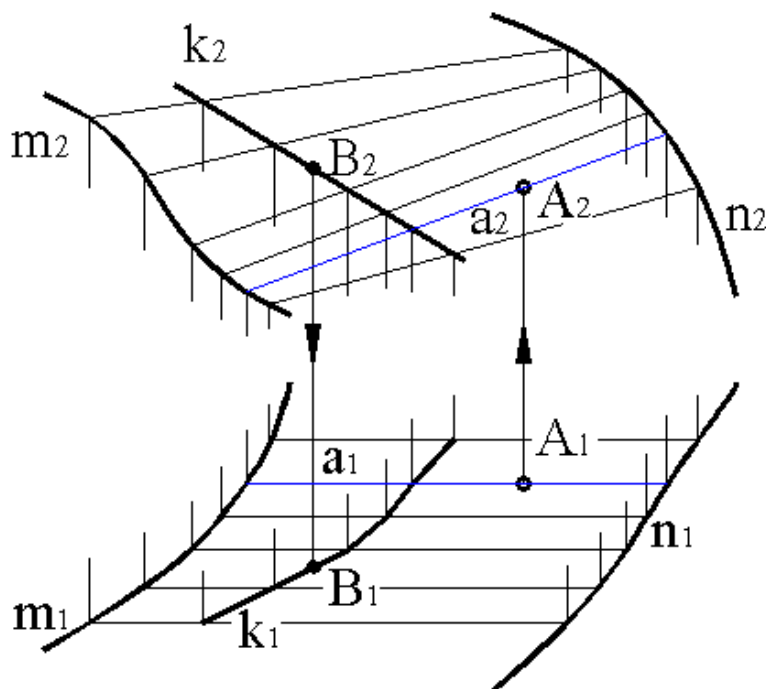


Рис.8.23

Для нахождения недостающей проекции B_1 точки B через точку B на поверхности Φ проводим произвольную кривую k (фронтальная проекция k_2 кривой k строится произвольно). Горизонтальная проекция k_1 кривой k построена по точкам ее пересечения с образующими цилиндриоида. Горизонтальную проекцию B_1 точки B находим из условия ее принадлежности кривой k .

Если направляющими цилиндроида являются алгебраические кривые порядков n_1 и n_2 , то порядок n цилиндроида определяется по формуле:

$$n=2n_1n_2.$$

Коноид имеет одну криволинейную и вторую прямолинейную направляющие. На рис.8.24 представлен чертеж коноида $\Phi(m,n,\Pi_1)$, у которого плоскостью параллелизма является плоскость проекций Π_1 .

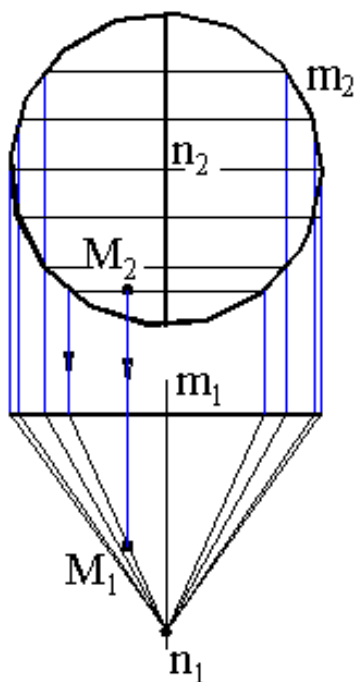


Рис.8.24

Порядок коноида определяется по формуле:

$$n=2n_1,$$

где n_1 – порядок его криволинейной алгебраической направляющей.

Косой плоскостью (гиперболическим параболоидом) называется поверхность с плоскостью параллелизма, у которой обе направляющие m и n – прямые линии. Кроме каркаса прямолинейных образующих на этой поверхности можно выделить каркасы гипербол и парабол. Косая плоскость является поверхностью второго порядка. На рис.8.25 дан комплексный чертеж косой плоскости $\Phi(m,n,\Gamma_2)$. Поверхность Φ несет на себе каркас прямолинейных образующих, параллельных плоскости параллелизма Γ .

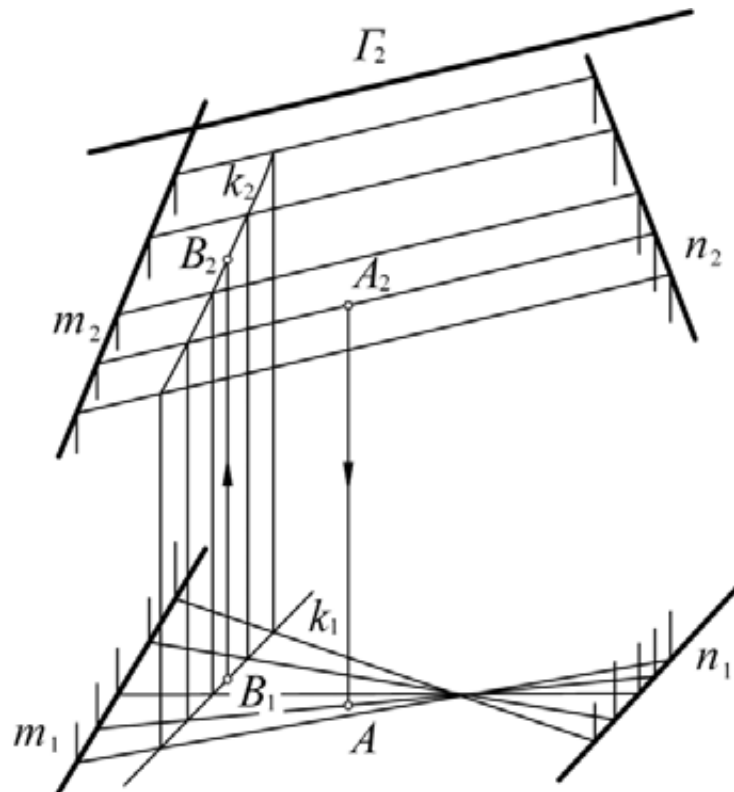


Рис. 8.25

8.5.5. Инженерный способ задания линейчатых поверхностей

При инженерном способе линейчатая поверхность задается двумя направляющими m и n , между точками которых устанавливается взаимно однозначное соответствие T . Определитель такой поверхности можно записать следующим образом: $\Gamma(m, n, T)$.

Построим на комплексном чертеже каркас прямолинейных образующих линейчатой поверхности $\Gamma(m, n, T)$, заданной инженерным способом (рис.8.26).

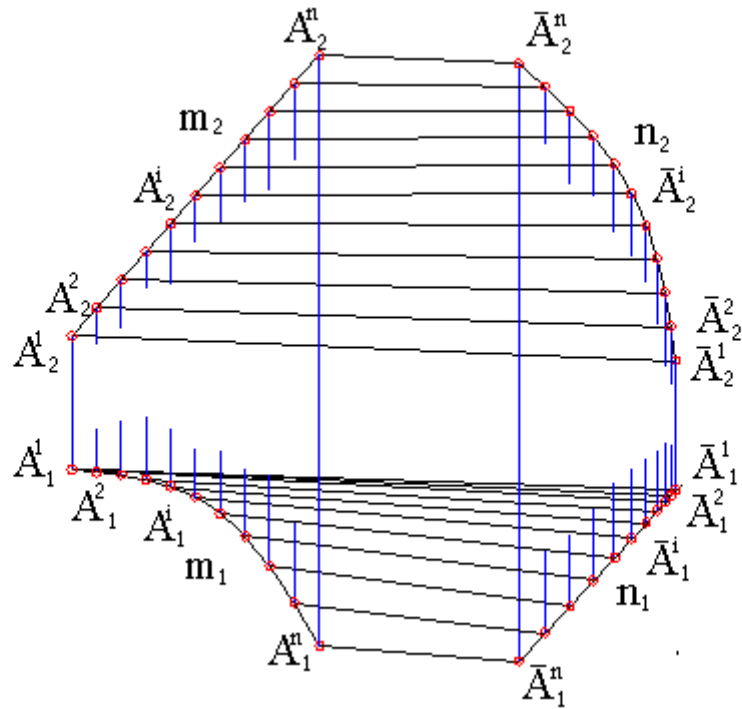


Рис.8.26

Установим взаимно однозначное соответствие между точками направляющих m и n . Это можно сделать различными способами. Используем самый простой. Фронтальные проекции m_2 и n_2 направляющих m и n делим на равное количество отрезков по длинам дуги или хорды. Находим горизонтальные проекции точек разбиения $A^1, A^2, \dots, A^i, \dots, A^n$; $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^i, \dots, \bar{A}^n$. Через соответственные точки A^i и \bar{A}^i проводим прямые образующие, получая каркас линейчатой поверхности, заданной инженерным способом.

Порядок n линейчатой поверхности, заданной инженерным способом, равен сумме порядков направляющих n_1 и n_2 , т.е.

$$n = n_1 + n_2.$$

8.6. Винтовые поверхности

Винтовая поверхность получается при винтовом перемещении некоторой кривой m (рис.8.27). Винтовое перемещение складывается из вращения вокруг оси i и поступательного перемещения в направлении этой оси.

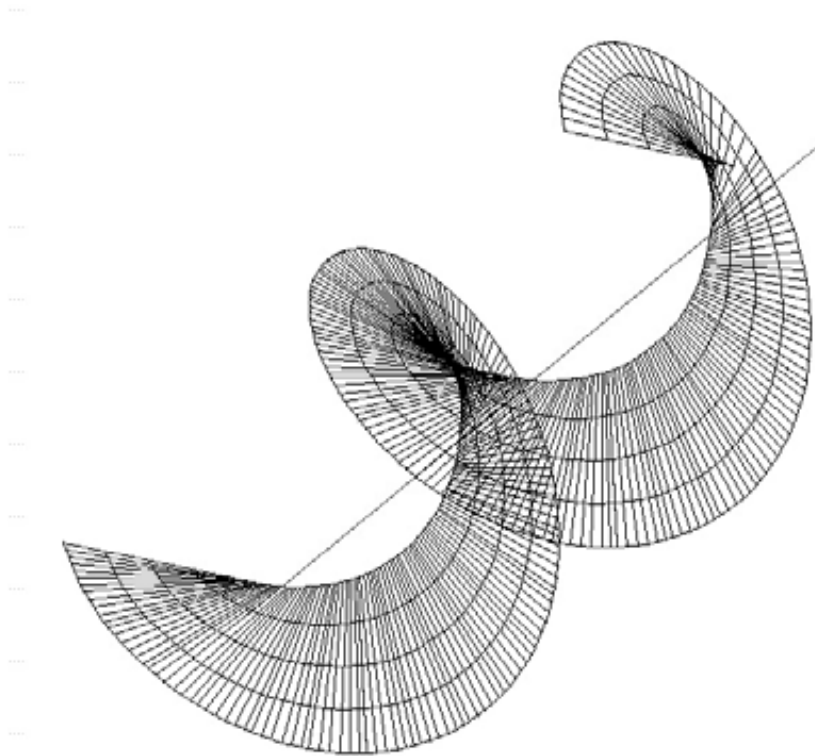


Рис.8.27

Поступательное перемещение l образующей m и угол φ ее поворота связаны следующей зависимостью

$$l = p\varphi,$$

где p – единичный шаг.

При винтовом движении образующей m , каждая ее точка описывает цилиндрическую винтовую линию.

Множество винтовых линий, описываемых точками образующей, и множество ее положений составляют сетчатый каркас винтовой поверхности.

На комплексном чертеже винтовую поверхность можно задать проекциями оси i , образующей m и величиной единичного шага p . Под единичным шагом p понимают величину перемещения точки K вдоль оси i за время поворота прямой m на угол, равный одному радиану.

Величина $h = 2\pi p$ называется шагом винтовой поверхности. Если образующая m при своем движении пересекает ось i , то поверхность называется закрытой (рис.8.27), в противном случае – открытой (рис. 8.28).

В технике наибольшее применение нашли линейчатые винтовые поверхности (**геликоиды**), образованные винтовым движением прямой. Рассмотрим построение каркаса прямого геликоида $\Phi(i, m, h)$ (рис.8.29).

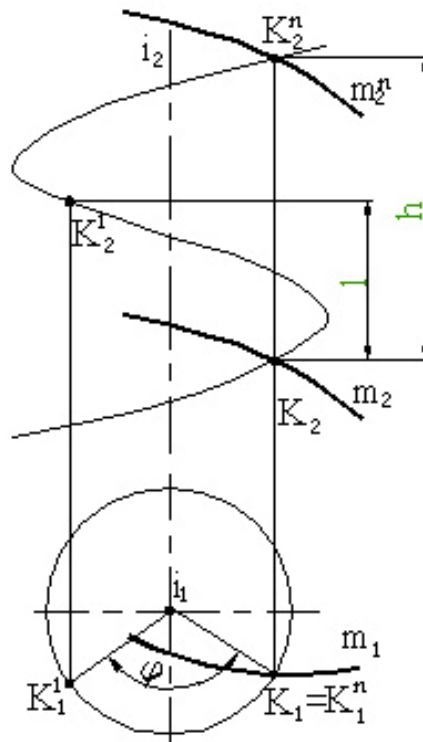


Рис.8.28

Горизонтальная проекция n_1 винтовой линии n , образованной движением точки K образующей m представляет собой окружность. Разделим ее и отрезок O_2O_2' фронтальной проекции оси i на одинаковое число равных частей, например, на 12 (рис. 8.30). Фронтальные проекции точек винтовой линии находим как точки пересечения одноименных горизонтальных и вертикальных прямых, проведенных через точки деления. Построение проекций линий каркаса показано на рис. 8.31.

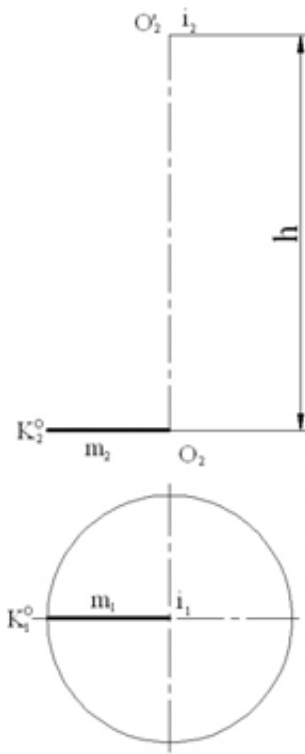


Рис.8.29

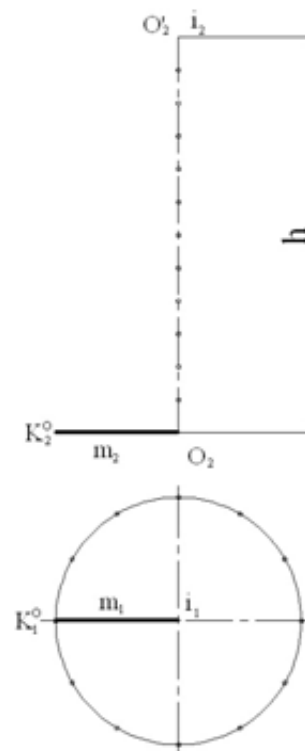


Рис.8.30

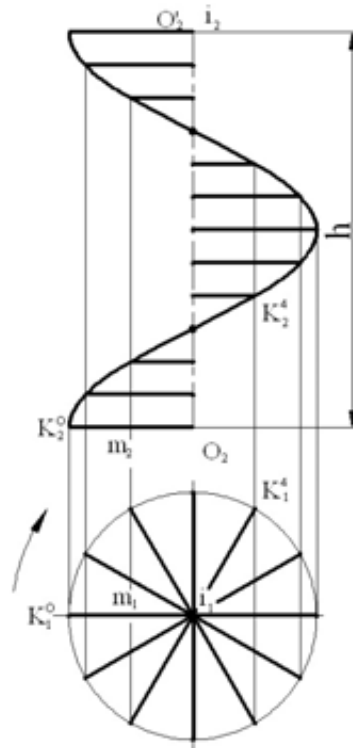


Рис. 8.31

8.7. Циклические поверхности

Циклическими называют поверхности, образованные перемещением окружности постоянного или переменного радиуса. Существует большое количество способов задания циклических поверхностей. На рис 8.32, 8.33 представлен случай, когда циклическая поверхность задана тремя линиями l, m, n и плоскостью параллелизма Π_1 , которой параллельны плоскости всех образующих окружностей. Для построения произвольной образующей проводим плоскость Γ , параллельную Π_1 , Она пересекает кривые l, m, n в трех точках, однозначно определяющих окружность k , которая на Π_1 проецируется в натуральную величину. Такая поверхность называется циклической поверхностью с плоскостью параллелизма.

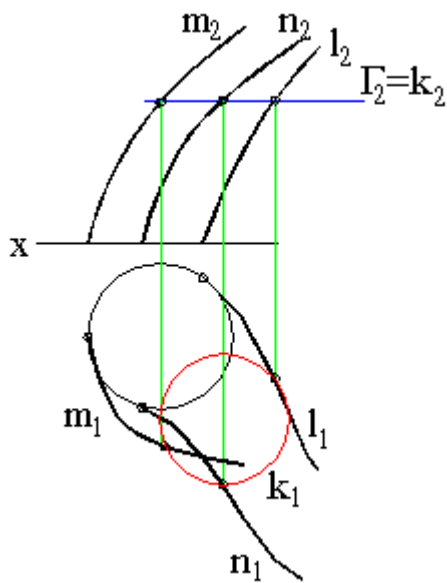


Рис. 8.32



Рис. 8.33

Если плоскости образующих циклической поверхности перпендикулярны траектории движения образующей, то циклическая поверхность называется каналовой. Каналовая поверхность, содержащая каркас конгруэнтных окружностей, называется трубчатой.

8.8. Линии на поверхности

Линии на поверхности, достаточно малые дуги которых являются кратчайшими путями между концами этих дуг, называются **геодезическими**. На плоскости геодезическими линиями являются отрезки прямых, на круговом цилиндре – дуги винтовых линий, на сфере – дуги окружностей, плоскости которых проходят через центр сферы. Геодезические линии обладают тем свойством, что их главные нормали являются нормальными к поверхности.

Рассмотрим примеры определения кратчайших расстояний между двумя точками поверхностей.

Пример 1. Определить кратчайшее расстояние между точками A и B , принадлежащими поверхности прямого кругового цилиндра (рис.8.34).

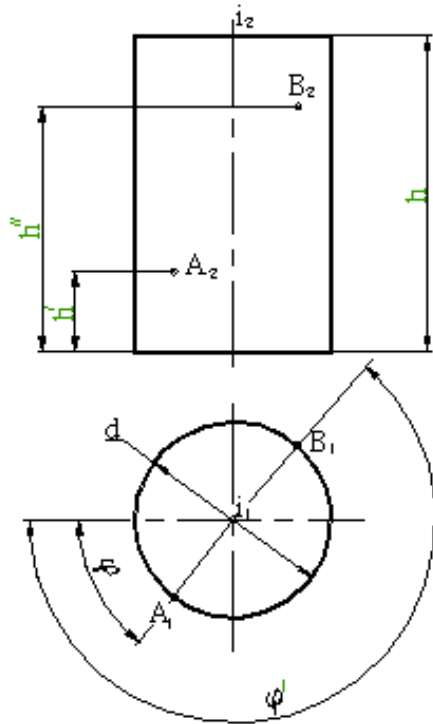


Рис.8.34

Кратчайшей линией между двумя точками A и B на поверхности цилиндра является винтовая линия. Известно, что винтовая линия разворачивается на плоскость в прямую. Поэтому для определения кратчайшего расстояния между точками A и B строим развертку боковой поверхности цилиндра (рис.8.35). На развертке находим образы \bar{A}, \bar{B} точек A и B . Длина отрезка $\bar{A}\bar{B}$ определяет натуральную величину кратчайшего расстояния между точками A и B поверхности цилиндра.

Пример 2. Определить кратчайшее расстояние между точками A и B , принадлежащими сфере.

Дуга AB окружности, которая является результатом пересечения поверхности сферы плоскостью $S(A, B, O)$, является кратчайшим расстоянием между точками A и B на сфере (рис. 8.36).

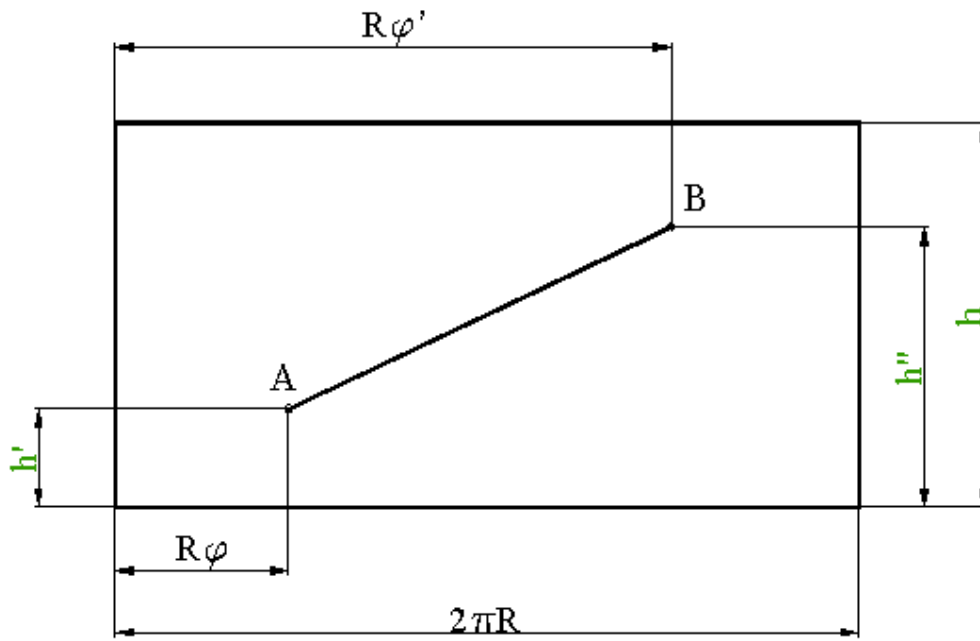


Рис.8.35

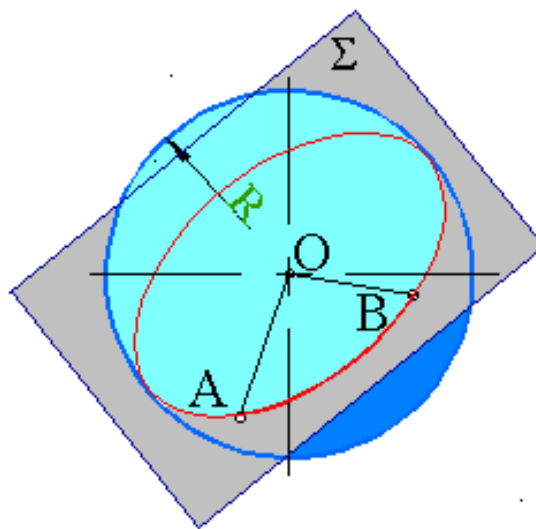


Рис.8.36

8.9. Задачи для аудиторных занятий

8.9.1. Построить очерковые линии и линии видимости сферы, заданной центром $S(30,30,30)$ и точкой $A(20,45,40)$, принадлежащей сфере.

8.9.2. Построить недостающие проекции точек $A(40,?,40)$, $B(20,15,?)$, принадлежащих сфере, уравнение которой имеет вид: $(x-50)^2 + (y-30)^2 + (z-30)^2 = 625$.

8.9.3. Построить недостающую проекцию линии AB , принадлежащей сфере (рис.8.37).

8.9.4. Построить очерковые линии цилиндра вращения, образованного вращением прямой l вокруг оси i (рис.8.38).

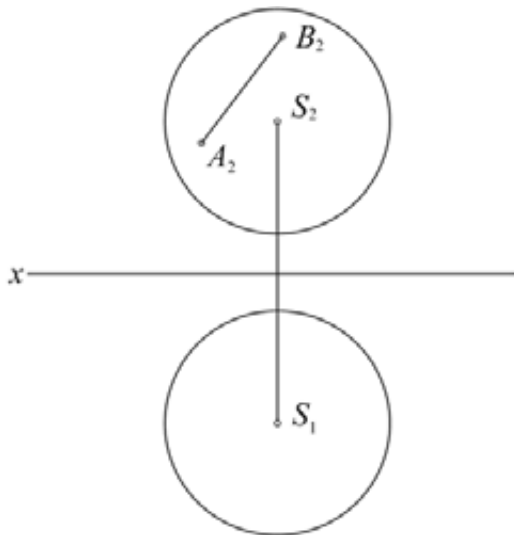


Рис. 8.37

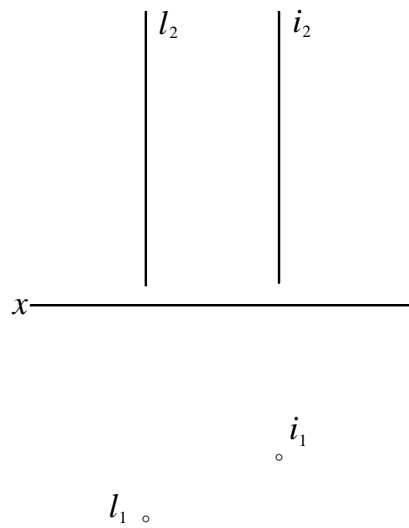


Рис. 8.38

8.9.5. Построить очерковые линии конуса вращения, образованного вращением прямой SA вокруг оси i (рис.8.39).

8.9.6. Построить очерковые линии однополостного гиперболоида вращения, если даны его ось i и отрезок AB его образующей (рис.8.40).

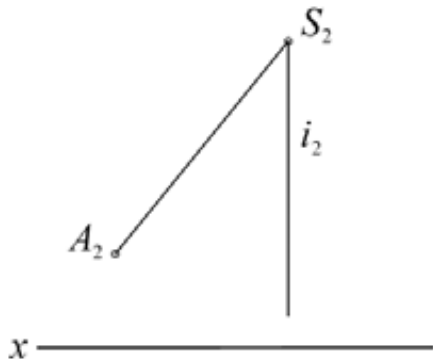


Рис. 8.39

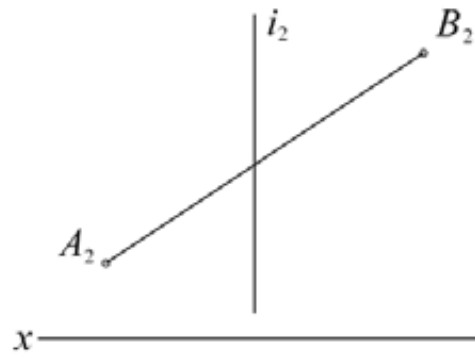
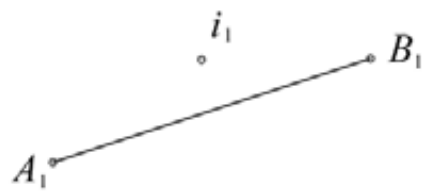
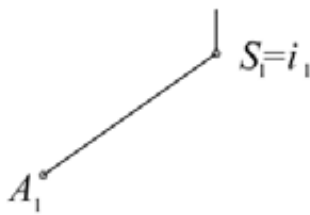


Рис. 8.40



8.9.7. Построить каркас образующих косою плоскости, заданной двумя прямолинейными направляющими a и b и плоскостью параллелизма Γ (рис.8.41).

8.9.8. Построить каркас образующих коноида, если заданы две его направляющие – окружность k и прямая m – и плоскость параллелизма Φ (рис.8.42).

8.9.9. По трем прямолинейным направляющим a, b, c линейчатой поверхности построить образующую, проходящую через точку A (рис.8.43).

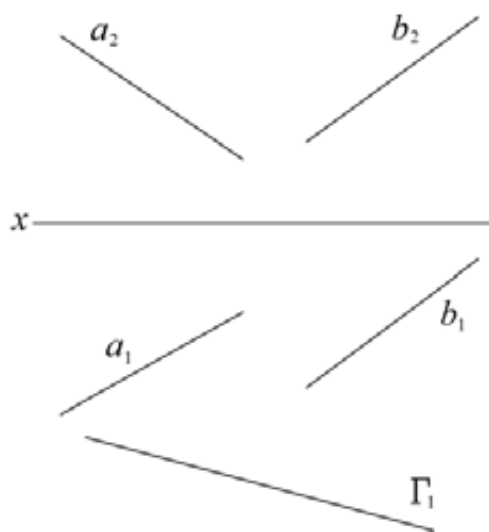


Рис. 8.41

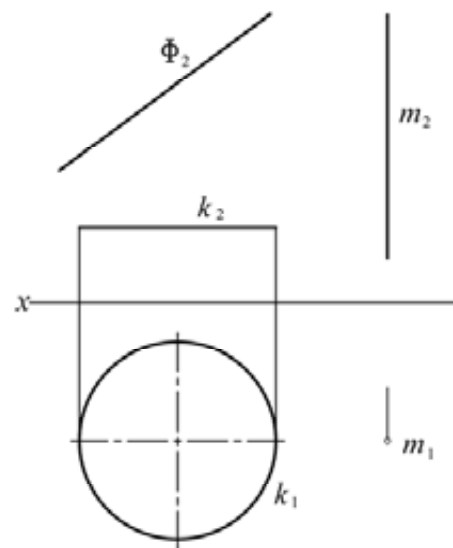


Рис. 8.42

8.9.10. Построить очерковые линии открытого тора, образованного вращением заданной окружности k вокруг оси i (рис.8.44).

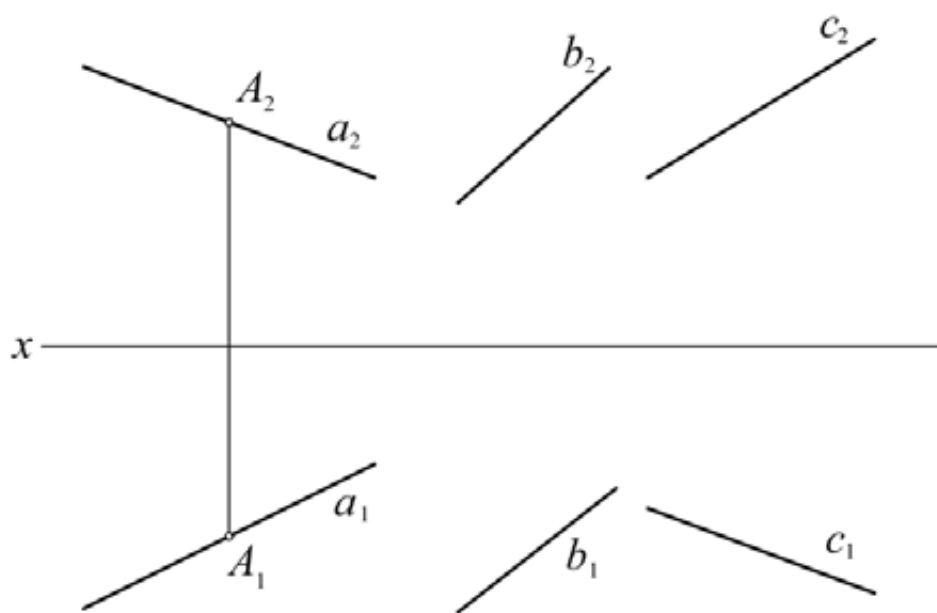


Рис. 8.43

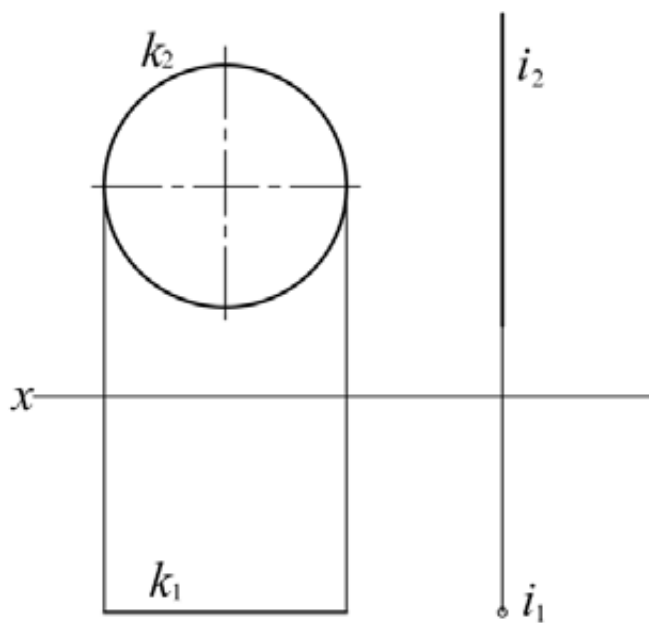


Рис. 8.44

8.10. Задачи для самостоятельной работы

8.10.1. Построить очерковые линии и линии видимости сферы, проходящей через окружности a и b (рис.8.45).

8.10.2. Построить недостающие проекции точек $A(70,50,?)$, $B(50,?,40)$, принадлежащих сфере, уравнение которой имеет вид: $(x - 60)^2 + (y - 40)^2 + (z - 50)^2 = 900$.

8.10.3. Построить недостающую проекцию линии AB , принадлежащей поверхности конуса вращения (рис.8.46).

8.10.4. Построить проекции конуса вращения, заданного осью i , образующей l , если известно, что его основание принадлежит горизонтально проецирующей плоскости Γ (рис.8.47).

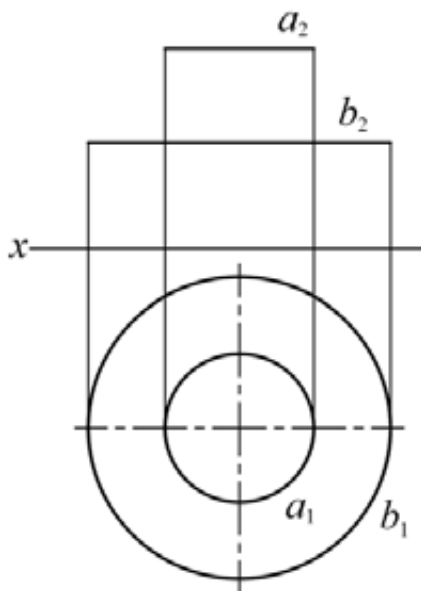


Рис. 8.45

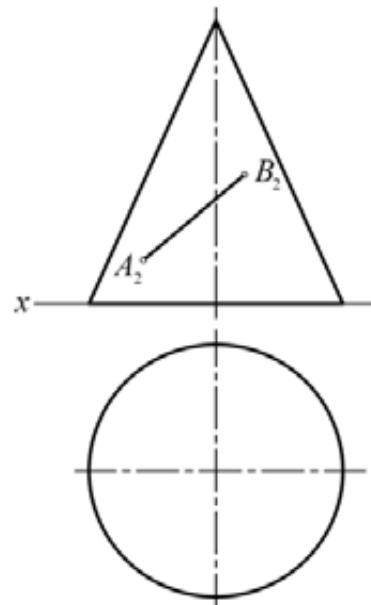


Рис. 8.46

8.10.5. Построить фронтальный очерк поверхности вращения, заданной осью i и образующей l . По фронтальной проекции точки A найти ее горизонтальную проекцию (рис.8.48).

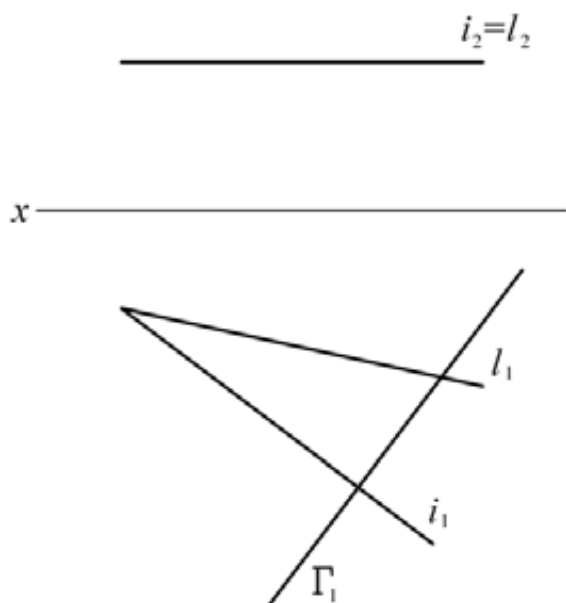


Рис. 8.47

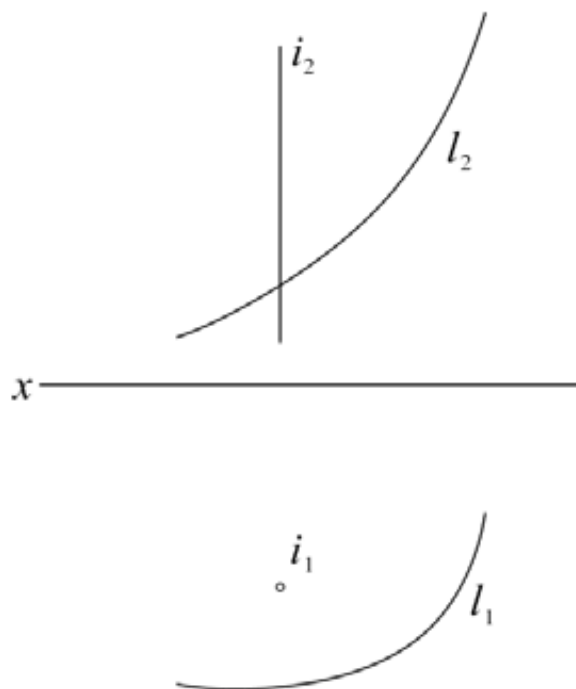


Рис. 8.48

8.10.6. Построить каркас образующих однополостного эллиптического гиперboloида, заданного направляющими a , b и c (рис.8.49).

8.10.7. Построить каркас образующих косої плоскости, если заданы две ее направляющие a , b и плоскость параллелизма Π_1 (рис.8.50).

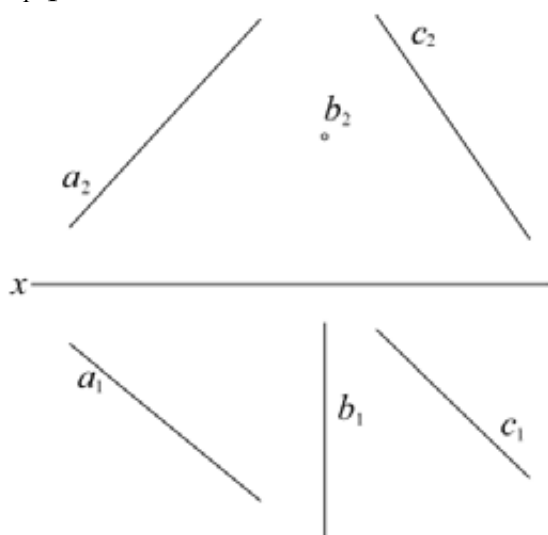


Рис. 8.49

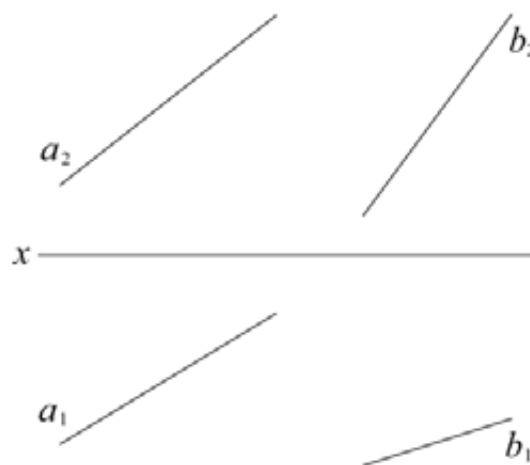


Рис. 8.50

8.10.8. Построить каркас образующих линейчатой поверхности $\Gamma(a,b,T)$, заданной инженерным способом (рис.8.51). Взаимно

однозначное соответствие между направляющими a и b задать самостоятельно.

8.10.9. Построить каркас торсовой поверхности, заданной ребром возврата a , и фронтальную проекцию линии k , принадлежащей поверхности (рис.8.52).

8.10.10. Циклическая поверхность, образованная окружностями, расположенными в профильных плоскостях, задана тремя направляющими a, b, c . Построить образующую, принадлежащую профильной плоскости Γ (рис.8.53).

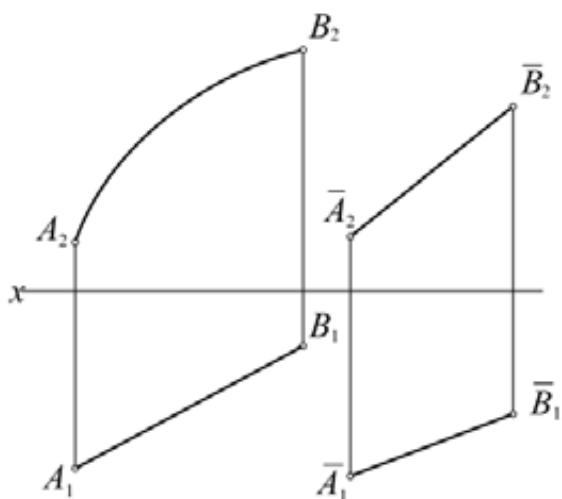


Рис. 8.51

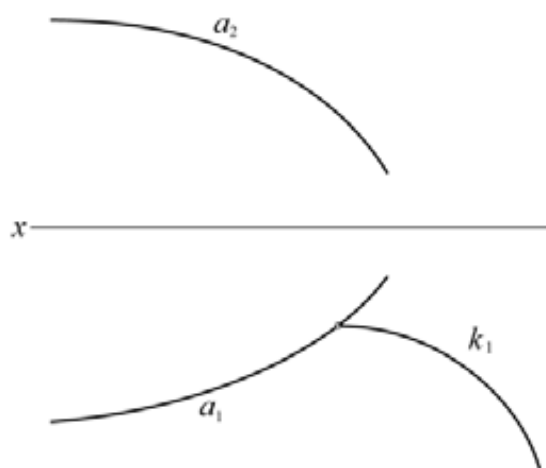


Рис. 8.52

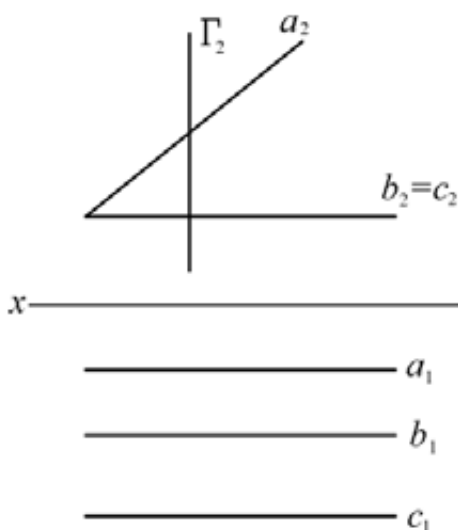


Рис. 8.53

8.11. Задачи повышенной сложности

8.11.1. Определить величину радиуса и построить проекции параллели наименьшего радиуса поверхности вращения, заданной осью i и образующей k (рис.8.54).

8.11.2. Точки A, B, C, D принадлежат сфере. Определить радиус сферы, ее центр и построить очерки сферы (рис.8.55).

8.11.3. Построить каркас образующих и очерки циклической поверхности по заданным направляющим a, b, c , если образующие являются окружностями, расположенными в профильных плоскостях уровня (рис. 8.56).

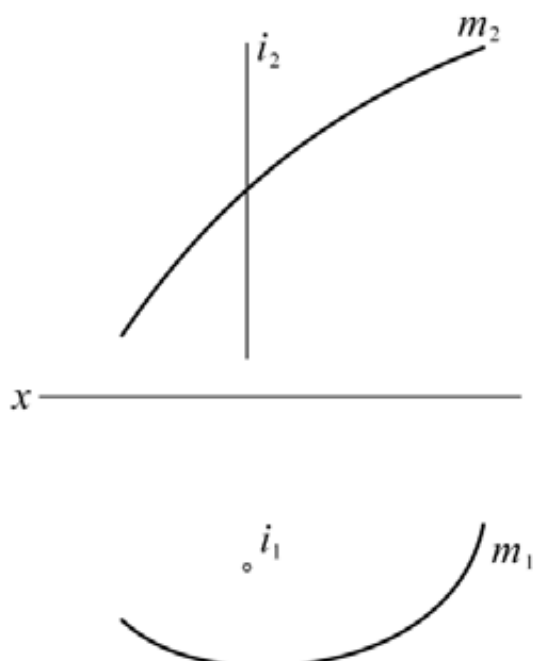


Рис. 8.54

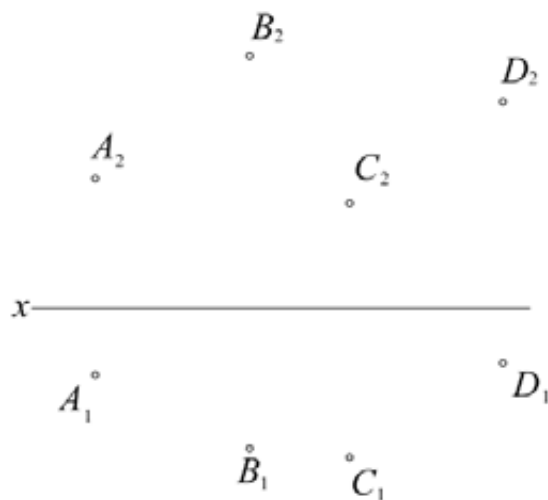


Рис. 8.55

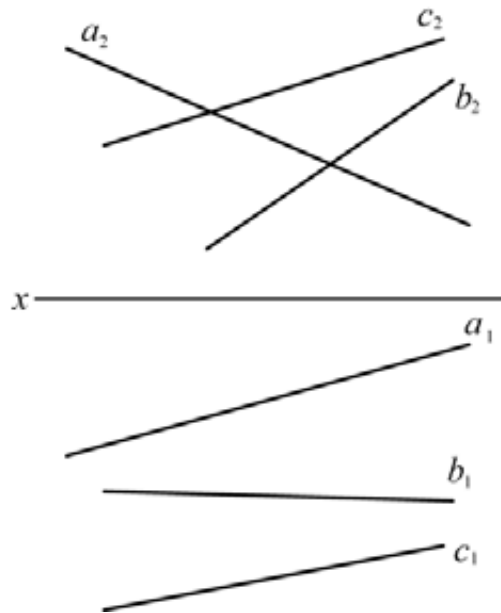


Рис. 8.56

8.12. Контрольные вопросы

- 8.12.1. Какая поверхность называется алгебраической?
 трансцендентной?
- 8.12.2. Как определяется порядок алгебраической поверхности?
- 8.12.3. Как задается поверхность на чертеже?
- 8.12.4. Что такое очерк поверхности?
- 8.12.5. Что является критерием полноты задания поверхности на чертеже?
- 8.12.6. Какая поверхность называется поверхностью вращения?
- 8.12.7. Приведите примеры поверхностей вращения.
- 8.12.8. Что называется параллелью поверхности вращения?
- 8.12.9. Что называется экватором поверхности вращения?
- 8.12.10. Что называется меридианом поверхности вращения?
- 8.12.11. Какой меридиан называется главным?
- 8.12.12. Какая поверхность называется линейчатой?
- 8.12.13. Сколько направляющих нужно задать для полного определения линейчатой поверхности?
- 8.12.14. Какие поверхности называются линейчатыми поверхностями с плоскостью параллелизма (поверхностями Каталана)?
- 8.12.15. Какая поверхность называется коноидом?
- 8.12.16. Какая поверхность называется цилиндроидом?
- 8.12.17. Как задается линейчатая поверхность инженерным способом?

- 8.12.18. Что такое конус? цилиндр?
- 8.12.19. Какая поверхность называется винтовой?
- 8.12.20. Какая поверхность называется геликоидом?
- 8.12.21. Что такое циклическая поверхность?
- 8.12.22. Какая циклическая поверхность называется каналовой?
трубчатой?

9. ОБОБЩЕННЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

К обобщенным позиционным задачам относятся следующие задачи:

- построение точек L_i кривой l с поверхностью Φ (первая обобщенная позиционная задача);
- построение линии l пересечения двух поверхностей Φ и Δ .

9.1. Первая обобщенная позиционная задача

Первая обобщенная позиционная задача решается в три этапа:

- 1) данная кривая l заключается во вспомогательную проецирующую цилиндрическую поверхность Γ ;
- 2) строится линия m пересечения данной Φ и вспомогательной Γ поверхностей;
- 3) находятся точки L_i пересечения данной l и построенной m линий.

На рис. 9.1 показано построение одной из точек пересечения кривой l с цилиндридом $\Phi(a, b, \Pi_2)$.

Рассмотрим частные случаи решения первой обобщенной задачи на конкретных примерах.

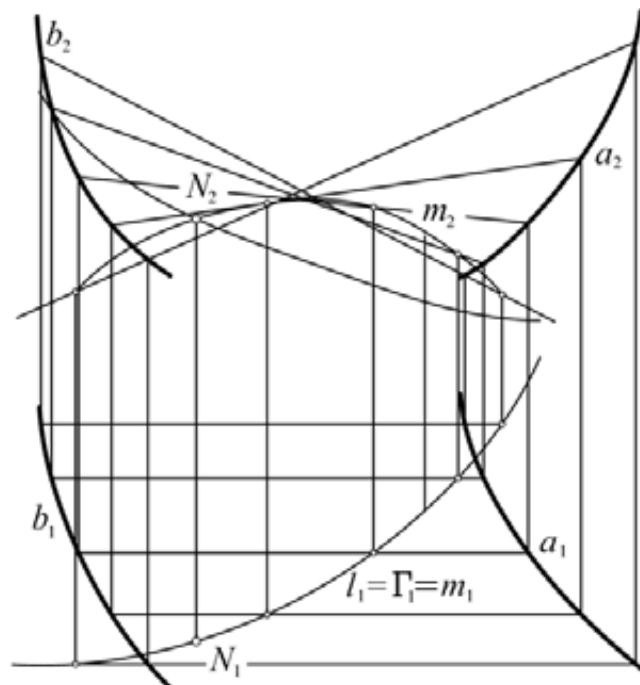


Рис. 9.1

Пример 1. Построить точки пересечения прямой k общего положения с наклонным конусом $\Phi(S, m)$ (рис.9.2).

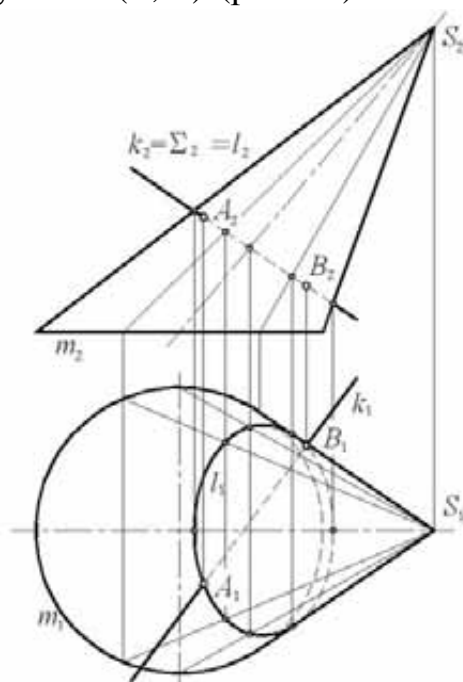


Рис. 9.2

Прямую k заключаем во вспомогательную фронтально проецирующую плоскость Σ . Строим горизонтальную проекцию l_1 линии l пересечения плоскости Σ с поверхностью конуса Φ . Точки пересечения A и B линии l с прямой k являются точками пересечения прямой k с поверхностью Φ .

Однако, при решении первой обобщенной позиционной задачи вспомогательную поверхность желательно выбирать таким образом, чтобы она пересекала заданную поверхность по прямым или окружностям. Так, например, в нашем случае, в качестве вспомогательной цилиндрической поверхности целесообразно выбрать плоскость Σ , проходящую через заданную прямую k и вершину конуса S (рис. 9.3). Тогда плоскость Σ пересечет конус Φ по образующим SC и SD , в пересечении которых с прямой k получают искомые точки A и B пересечения прямой k с поверхностью конуса Φ .

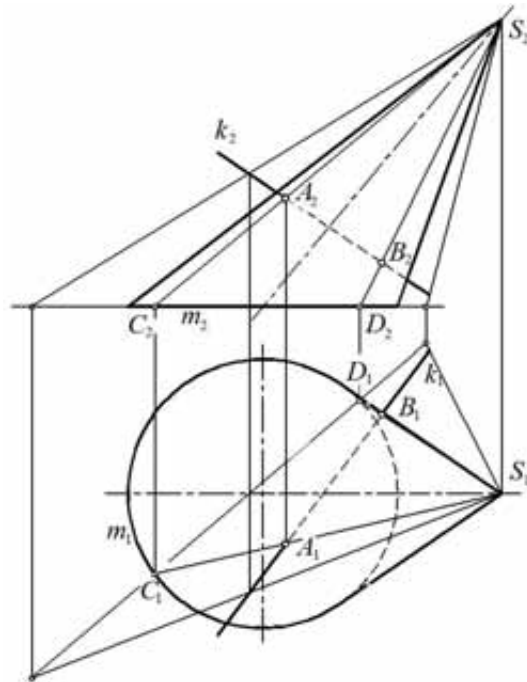


Рис. 9.3

Пример 2. Построить точки пересечения фронтально проецирующей прямой l с конусом вращения (рис.9.4).

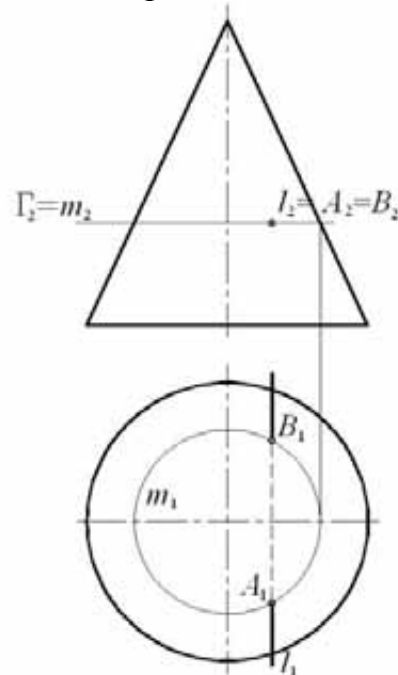


Рис. 9.4

Через заданную прямую l проведем вспомогательную горизонтальную плоскость уровня Γ , пересекающую конус по окружности m . Так как эта окружность расположена в плоскости, параллельной гори-

горизонтальной плоскости проекций Π_1 , то на Π_1 она проецируется в натуральную величину. Точки A и B пересечения m с заданной прямой l будут являться искомыми точками пересечения l с поверхностью конуса. Фронтальные проекции A_2, B_2 точек A и B находятся без дополнительных построений.

9.2. Взаимное пересечение поверхностей

В общем случае задача на построение линии пересечения двух поверхностей (вторая обобщенная позиционная задача) решается в следующей последовательности:

1) выбирается вспомогательная поверхность-посредник Γ_i , пересекающая заданные поверхности Δ и Σ по наиболее простым линиям (рис. 9.5);

2) строится линия k_i пересечения посредника Γ_i с поверхностью Δ ;

3) строится линия m_i пересечения посредника Γ_i с поверхностью Σ ;

4) в пересечении линий k_i и m_i находят точки A_i, B_i, \dots , принадлежащие искомой линии пересечения поверхностей Δ и Σ ;

5) выбирается новая поверхность-посредник и построения повторяются;

6) полученные точки соединяются плавной кривой.

В качестве поверхностей-посредников можно выбирать плоскости и сферы.

Рассмотрим наиболее распространенные способы построения линии пересечения поверхностей.

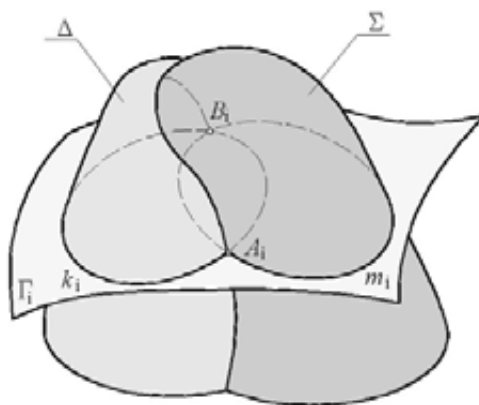


Рис. 9.5

9.2.1. Способ плоскостей уровня

Сущность способа заключается в том, что в качестве секущих поверхностей-посредников выбираются плоскости уровня, пересекающие заданные поверхности по прямым и окружностям. В пересечении этих линий получают точки, принадлежащие обеим поверхностям.

Рассмотрим пример построения линии пересечения поверхностей конуса Φ и сферы Δ (рис. 9.6).

На комплексном чертеже задача решается в следующей последовательности.

9.2.1.1. Находим наиниžшую и наивысшую точки A и D линии пересечения (рис. 9.8, 9.9). Для этого воспользуемся вспомогательной фронтальной плоскостью уровня Σ , являющейся общей плоскостью симметрии для заданных поверхностей и пересекающей их по главным меридианам n и k . В пересечении очерковых линий n_2 и k_2 получаем фронтальные проекции A_2 и D_2 точек A и D . Горизонтальные проекции A_1 и D_1 получаем из условия принадлежности точек A и D плоскости Σ .

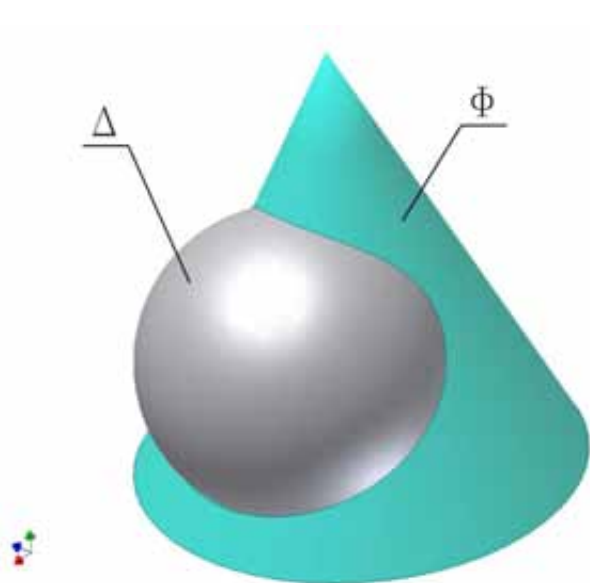


Рис. 9.6

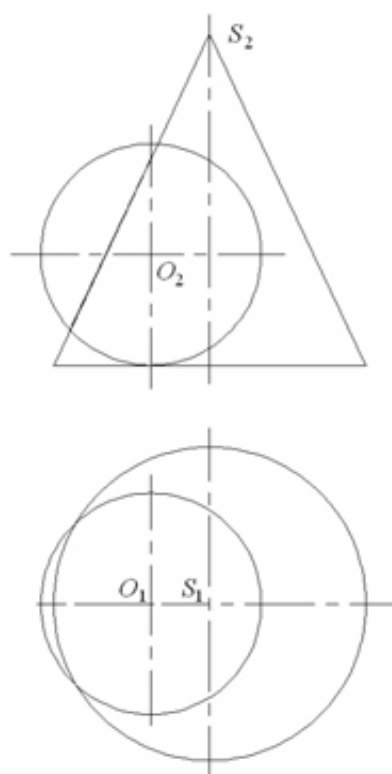


Рис. 9.7

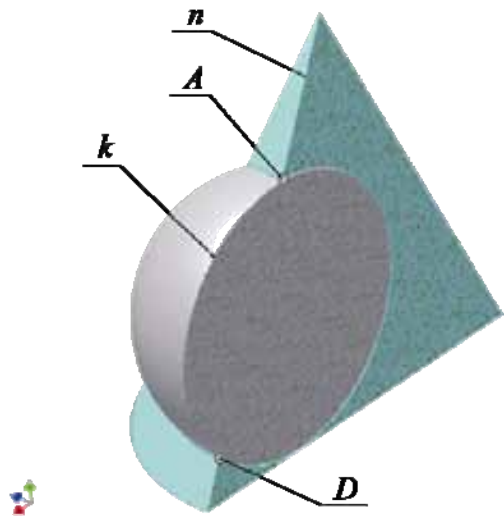


Рис. 9.8

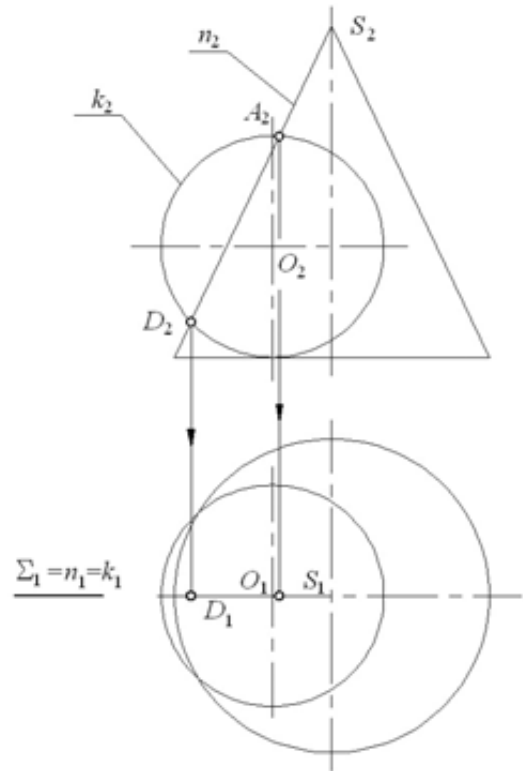


Рис. 9.9

9.2.1.2. Определяем точки видимости B^1 и B^2 относительно Π_1 с помощью горизонтальной плоскости уровня Δ , проходящей через центр сферы (рис. 9.10). Эта плоскость пересекает сферу по экватору d , а конус – по окружности q , в пересечении которых и получают искомые точки B^1 и B^2 (рис. 9.11, 9.12).

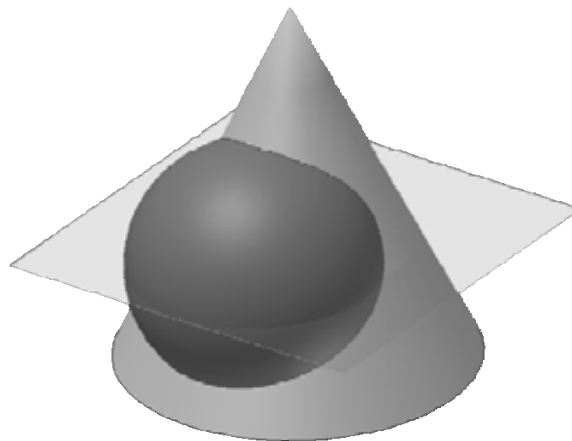


Рис. 9.10

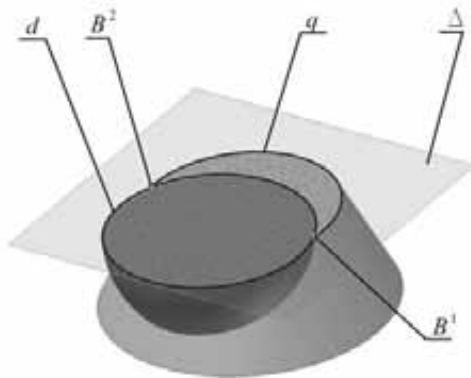


Рис. 9.11

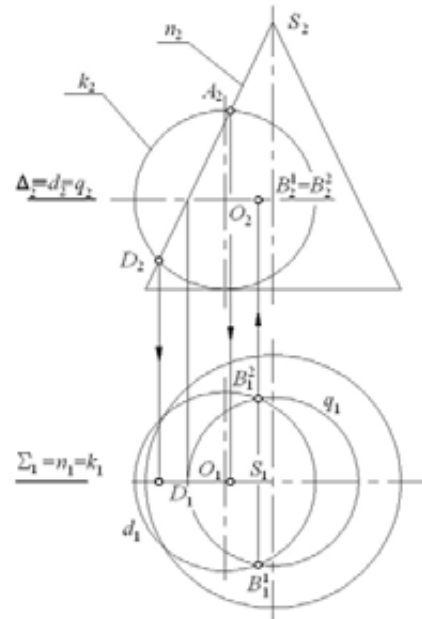


Рис. 9.12

9.2.1.3. С помощью горизонтальных плоскостей уровня Γ^i находим случайные точки $1^1, 1^2, 2^1, 2^2, \dots$ (рис. 9.13).

9.2.1.4. Соединяя полученные точки плавной кривой (рис. 9.14), получаем искомую линию пересечения поверхностей. На рис. 9.15 линия пересечения показана наглядно.

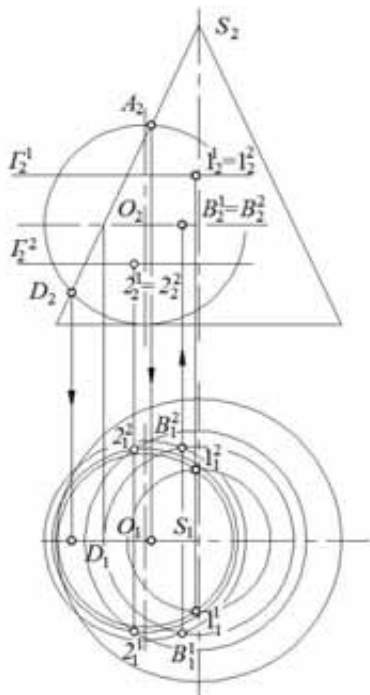


Рис. 9.13

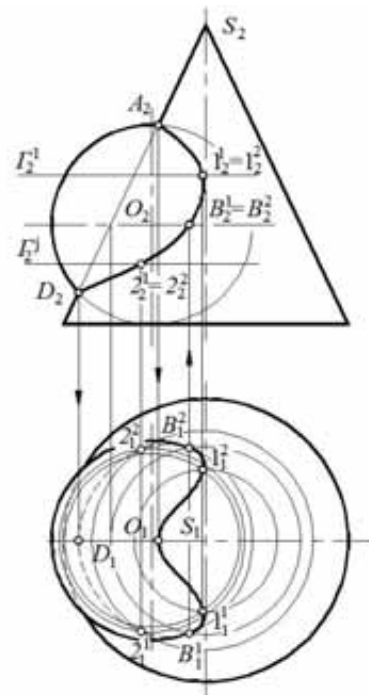


Рис. 9.14

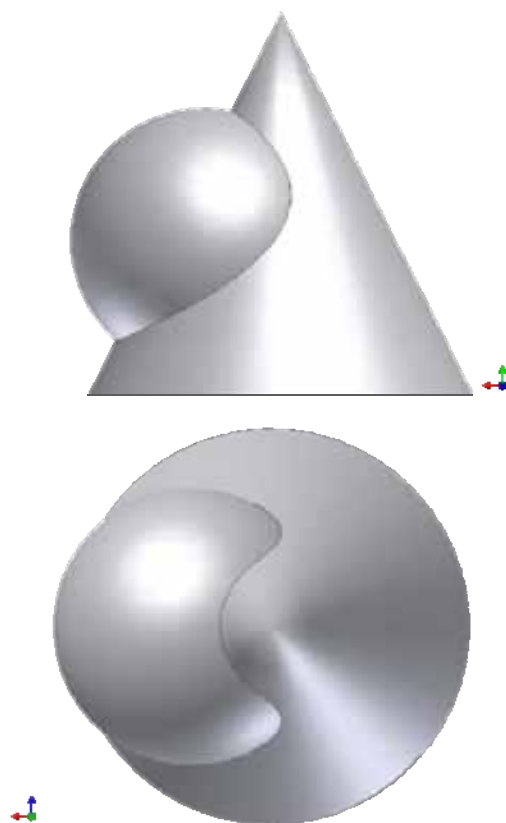


Рис. 9.15

9.2.2. Способ концентрических сфер

Этот способ применяют для построения линии пересечения двух поверхностей вращения общего вида с пересекающимися осями и с общей плоскостью симметрии. Использование способа основано на следующей теореме.

Теорема. Сфера, центр которой расположен на оси поверхности вращения, пересекает эту поверхность по окружностям. Если ось поверхности вращения перпендикулярна одной из плоскостей проекций, то на эту плоскость проекций окружности проецируются в натуральную величину, а на другую – в виде отрезков прямых.

Рис. 9.16 иллюстрирует эту теорему. Сфера Δ , центр S которой расположен в точке пересечения осей цилиндра вращения Φ , конуса вращения Σ и сферы пересекает перечисленные поверхности соответственно по окружностям m и q , которые на фронтальную плоскость про-

екций проецируются в отрезки прямых (горизонтальная проекция на чертеже не дана).

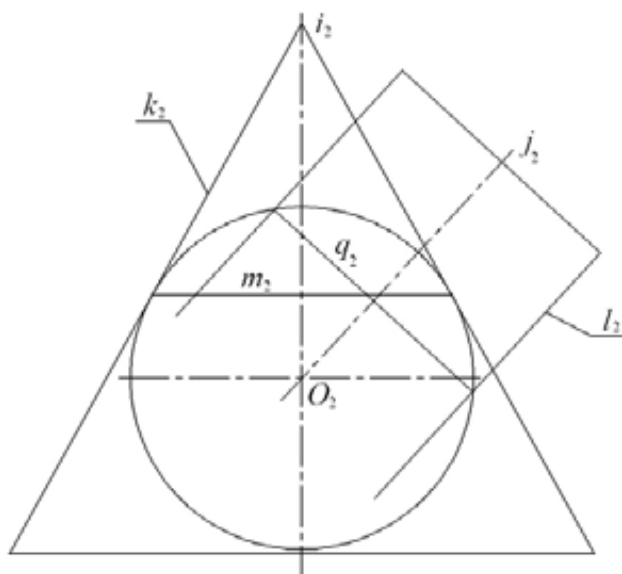


Рис. 9.16

Построим линию l пересечения двух конусов вращения Φ и Δ (рис.9.17, 9.18). Заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии T , параллельную Π_2 . Плоскость T пересекает Φ и Δ по образующим, которые пересекаются в точках A и B , принадлежащих искомой линии l (рис. 9.19).

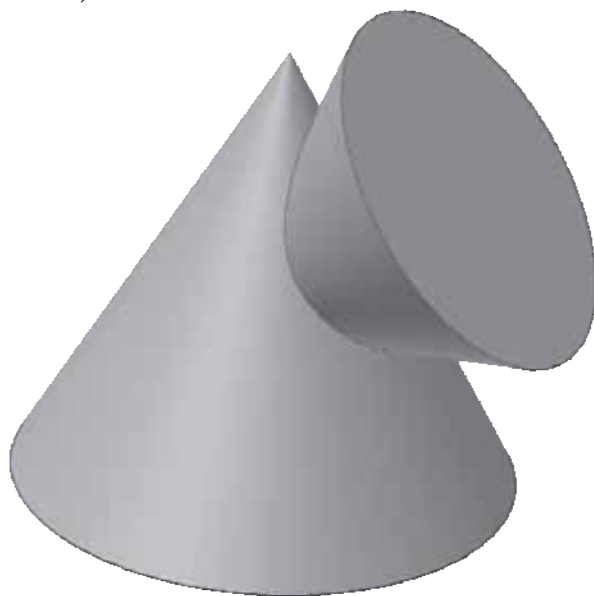


Рис. 9.17

Промежуточные точки линии пересечения найдем с помощью концентрических сфер с центром в точке S пересечения осей i и j . Радиус максимальной сферы R_{\max} будет равен расстоянию от центра S до наиболее удаленной точки A . Для определения радиуса минимальной сферы R_{\min} из S_2 опускаем перпендикуляры на очерковые линии данных поверхностей, наибольший из них определяет R_{\min} . Радиусы R^i вспомогательных сфер Γ^i должны выбираться из условия $R_{\min} \leq R^i \leq R_{\max}$ (рис. 9.20).

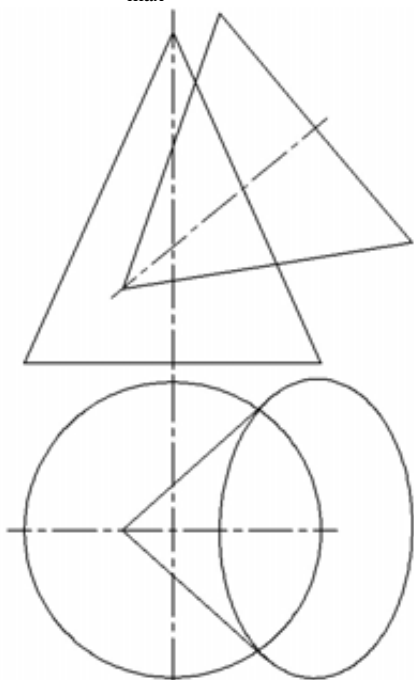


Рис. 9.18

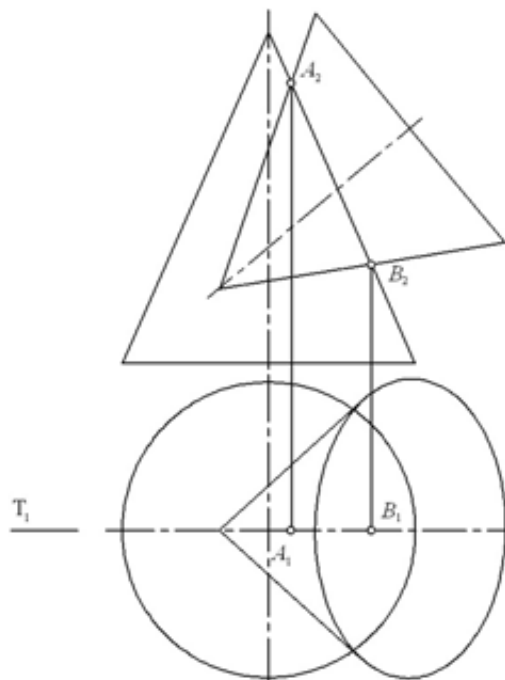


Рис. 9.19

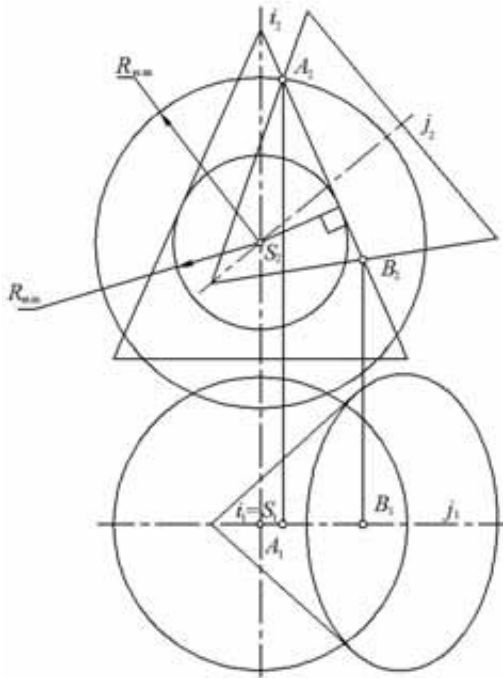


Рис. 9.20

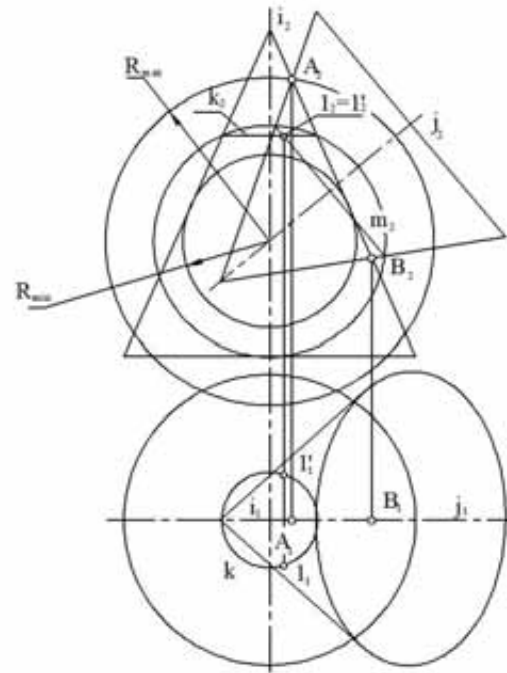


Рис. 9.21

На рис. 9.21 построения показаны для одного посредника Γ^i . Каждую из поверхностей Φ и Δ сфера Γ^i пересекает по окружностям m и k , плоскости которых перпендикулярны осям конусов. Точки пересечения 1 и $1'$ окружностей принадлежат линии пересечения поверхностей. Горизонтальные проекции 1_1 и $1'_1$ этих точек построены из условия их принадлежности поверхности конуса Φ .

9.2.3. Способ вращающейся плоскости

Этот способ применяют для построения линии пересечения конических и цилиндрических поверхностей общего вида. При этом плоскости-посредники Γ^i должны проходить через вершины обеих поверхностей и пересекать поверхности по прямолинейным образующим.

Пример. Построить линию пересечения двух конических поверхностей $\Sigma(S, m)$ и $\Phi(\bar{S}, n)$ (рис. 9.22).

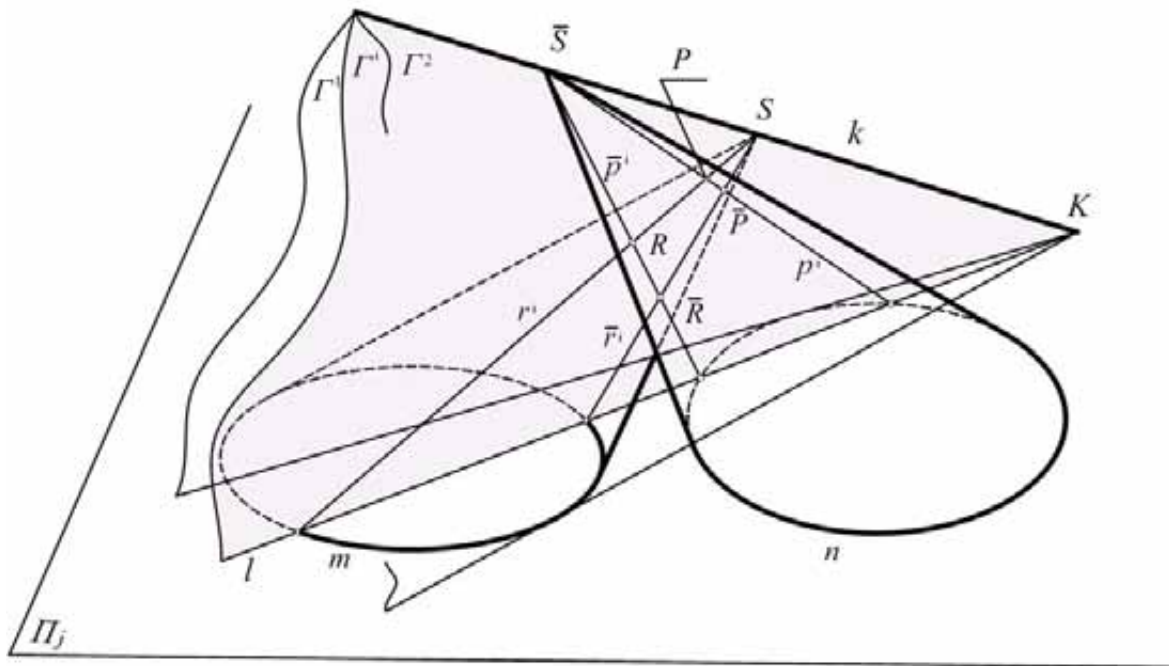


Рис. 9.22

Через вершины S, \bar{S} конусов проводим прямую k , которая является осью вращения плоскостей-посредников Γ^i , пересекающих поверхности конусов Σ, Φ по прямолинейным образующим (p, \bar{p}, r, \bar{r}) .

Задание плоскостей-посредников осуществляется следующим образом. Определяется точка K пересечения прямой k с плоскостью проекций Π_j . Прямые k и $l_i \in \Pi_j$ задают положение посредника Γ^i . Определяем образующие $p^i, \bar{p}^i, r^i, \bar{r}^i$, по которым плоскость Γ^i пересекает поверхности конусов Σ, Φ . Точки пересечения P, \bar{P}, R, \bar{R} данных образующих являются общими точками для поверхностей Σ и Φ , следовательно, принадлежат линии их пересечения. Проекции точек P, \bar{P}, R, \bar{R} найдем из условия их принадлежности соответствующим образующим.

Для определения предельных положений точек линии пересечения используются посредники Γ^1, Γ^2 , которые касаются поверхностей соответствующих конусов.

9.2.4. Способ проецирующих цилиндров

В случае, представленном на рис. 9.23, 9.24, задача построения линии пересечения поверхностей цилиндра Δ и тора Φ может быть решена с использованием фронтально проецирующих цилиндров. Как и в предыдущих случаях, экстремальные точки A, B могут быть найдены в результате пересечения поверхностей Δ и Φ фронтальной плоскостью уровня $\Sigma(\Sigma_1)$ (рис. 9.25). Очевидно, что фронтальная проекция m_2 линии пересечения поверхностей Δ и Φ совпадает с вырожденной проекцией Δ_2 цилиндра Δ .

Для нахождения горизонтальных проекций точек линии пересечения t используем фронтально проецирующие цилиндры $\Gamma^i(j_z, l^i)$, где j_z – ось вращения цилиндра, совпадающая с осью j тора; l^i – образующая прямая (рис. 9.26).

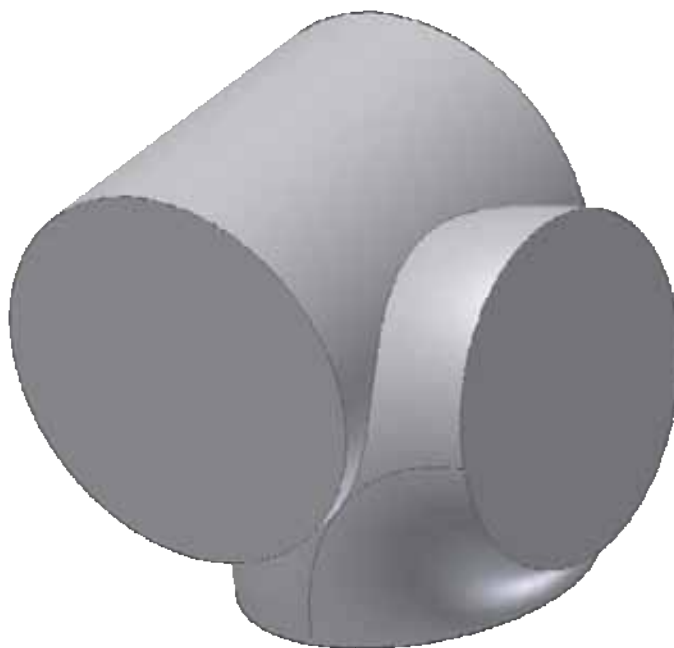


Рис. 9.23

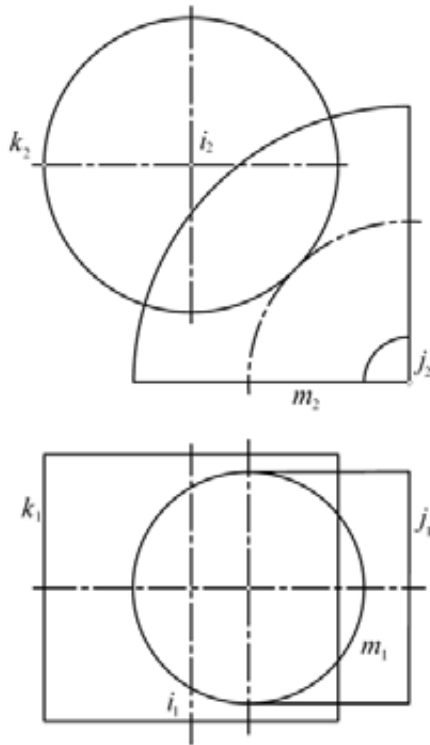


Рис. 9.24

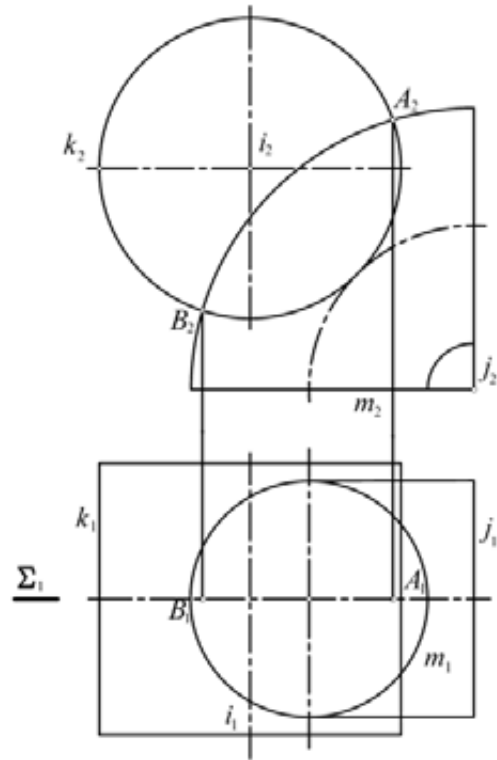


Рис. 9.25

Проводим вспомогательный проецирующий цилиндр Γ , который пересечет поверхность цилиндра Δ по двум прямолинейным образующим, а поверхность тора Φ по окружностям r, n . Фронтальные проекции r_2, n_2 окружностей r, n совпадают с вырожденной проекцией цилиндра Γ_2 .

Точки пересечения $1_2, 2_2$ фронтальной проекции цилиндра с r_2, n_2 являются фронтальными проекциями точек пересечения образующих цилиндра и окружностей r, n , т.е. являются точками, принадлежащими линии пересечения поверхностей Δ и Φ . Горизонтальные проекции $1_1, 2_1$ точек 1 и 2 найдем из условия их принадлежности окружностям r и n .

Остальные точки линии пересечения поверхностей находим аналогичным образом (рис. 9.27).

Точки видимости C, C' определим с помощью проецирующего цилиндра, проведенного через соответствующую образующую цилиндра.

При построении горизонтальной проекции линии пересечения следует учитывать расположение точек линии пересечения на фронтальной плоскости проекций.

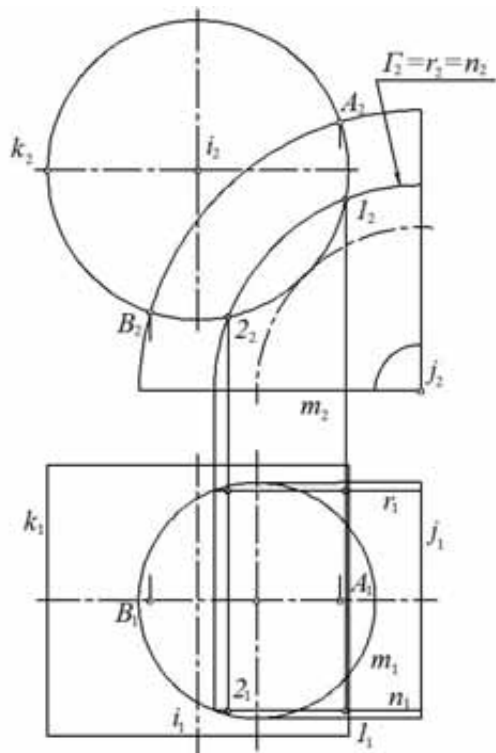


Рис. 9.26

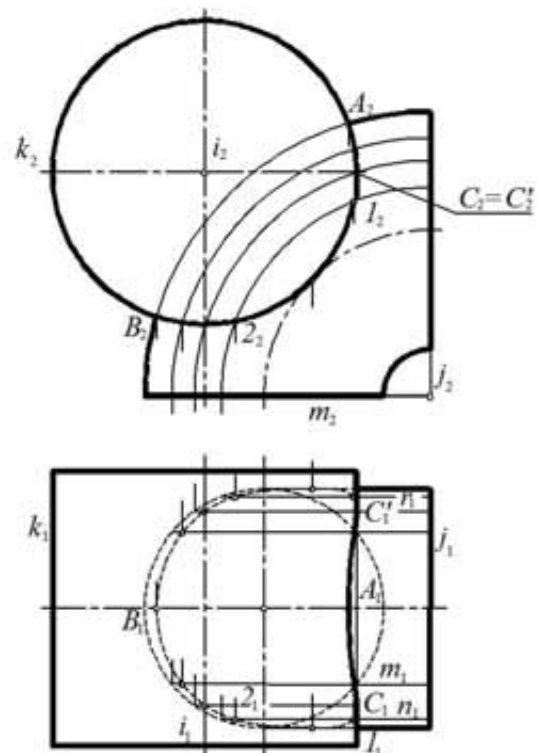


Рис. 9.27

9.3. Частные случаи пересечения поверхностей

Теорема 1. Две поверхности порядков n_1 и n_2 пересекаются по пространственной кривой $n = n_1 n_2$.

Следствие. Две поверхности второго порядка пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка.

Теорема 2. Если две поверхности порядков n_1 и n_2 имеют общую плоскость симметрии, то их линия пересечения проецируется на эту плоскость или плоскость ей параллельную, в кривую порядка $\frac{n_1 n_2}{2}$.

Следствие. Если две поверхности второго порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость или ей параллельную в кривую второго порядка.

Теорема 3. Если две поверхности второго порядка имеют общую кривую второго порядка, то они пересекаются еще по одной кривой второго порядка.

Пример. Построим линию пересечения двух наклонных конусов с общей направляющей окружностью a (рис. 9.28, 9.29). Так как данные поверхности имеют общую плоскость симметрии параллельную плоскости проекций Π_2 , то линия их пересечения (согласно теореме 2) проецируется на фронтальную плоскость проекций в прямую линию.

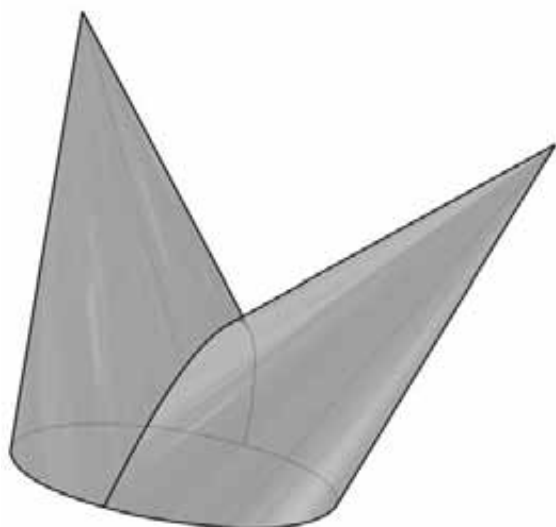


Рис. 9.28

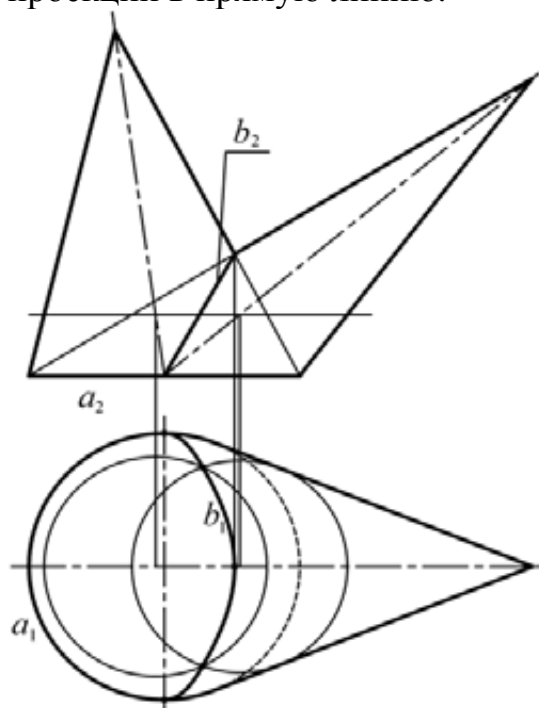


Рис. 9.29

Теорема 4 (теорема о двух точках соприкосновения). Если две поверхности второго порядка имеют две точки соприкосновения, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, проходящие через точки соприкосновения (рис. 9.30, 9.31).

Точкой соприкосновения двух поверхностей называется их общая точка, в которой они имеют общую касательную плоскость.

Теорема 5 (теорема Монжа). Если две поверхности второго порядка вписаны в третью поверхность второго порядка или описаны вокруг нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка.

На рис. 9.32, 9.33 приведен пример пересечения цилиндра и конуса вращения. Эти поверхности описаны вокруг сферы и имеют две точки соприкосновения A и B . Линия пересечения поверхностей распадается на два эллипса a, b .

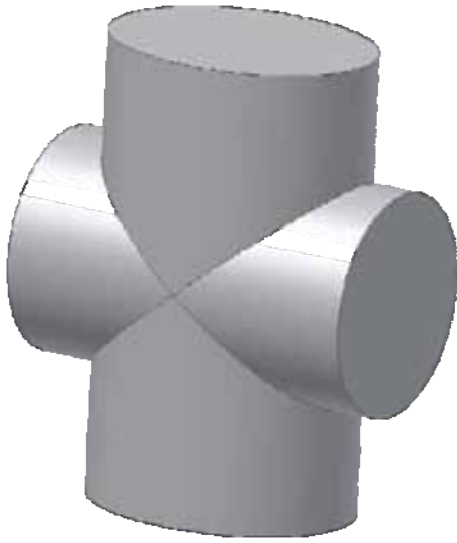


Рис. 9.30

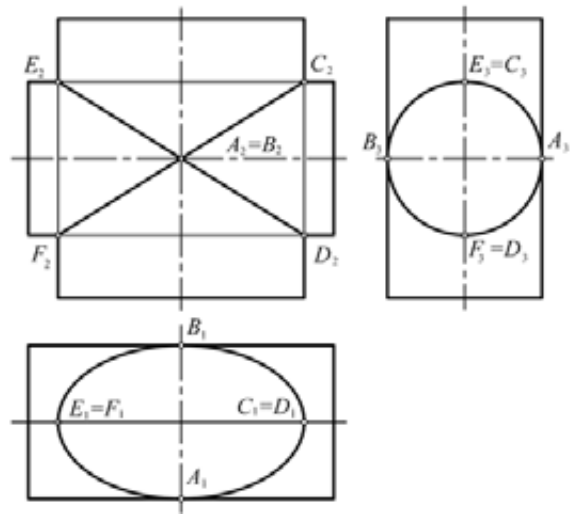


Рис. 9.31

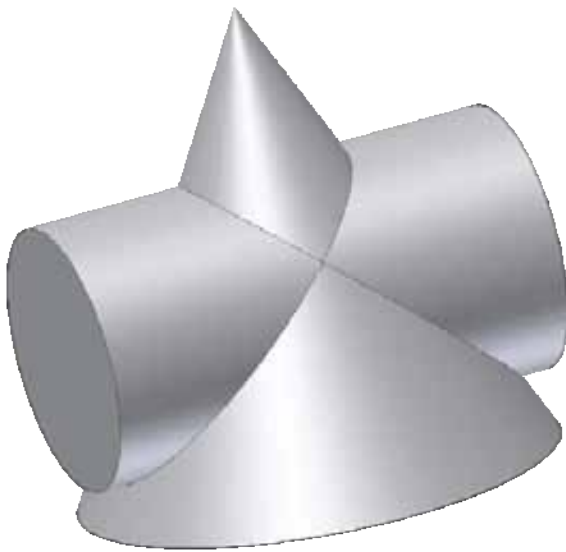


Рис. 9.32

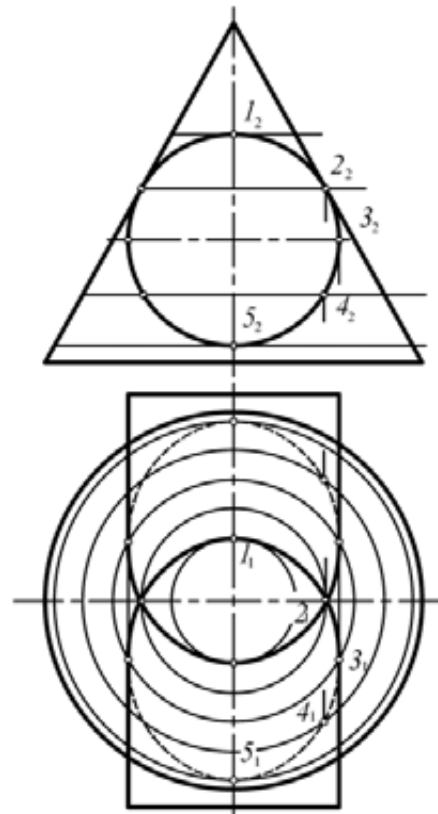


Рис. 9.33

9.4. Построение очерковых образующих поверхности конуса

Построение очерковых образующих поверхности конуса вращения не вызывает затруднений, если через ось вращения поверхности можно провести плоскость уровня. В этом случае проекция главного меридиана поверхности на соответствующую плоскость проекций будет очерком данной поверхности.

Рассмотрим случай, когда ось конуса вращения является линией уровня – горизонталью (рис. 9.34). Построим очерковые образующие l, \bar{l} фронтальной проекции конуса.

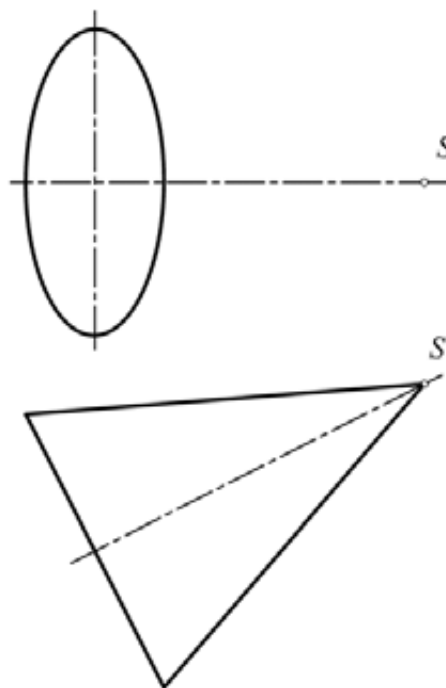


Рис. 9.34

Для этого проведем профильную плоскость уровня Θ , которая пересечет поверхность конуса по кривой второго порядка – эллипсу m . Большая ось a эллипса m принадлежит фронтально проецирующей прямой и проецируется на плоскость проекций Π_1 в натуральную величину. Найдем горизонтальную проекцию O_1 центра эллипса, как середину отрезка A_1, \bar{A}_1 (рис. 9.35).

Горизонтальная проекция b_1 малой оси b эллипса принадлежит горизонтально проецирующей прямой и совпадает с горизонтальной проекцией O_1 точки O . Точки B, \bar{B} являются самой высокой и самой

низкой точками данного сечения конуса. Через точки B, \bar{B} проводим очерковые образующие l, \bar{l} . Горизонтальные проекции l_1, \bar{l}_1 образующих l, \bar{l} проходят через точки S_1 и B_1, \bar{B}_1 (рис. 9.36). Отмечаем точки пересечения 1,2 образующих l_1, \bar{l}_1 с окружностью a основания конуса. Определяем фронтальные проекции B_2, \bar{B}_2 точек B, \bar{B} принадлежащих очерковым образующим l, \bar{l} фронтальной проекции конуса.

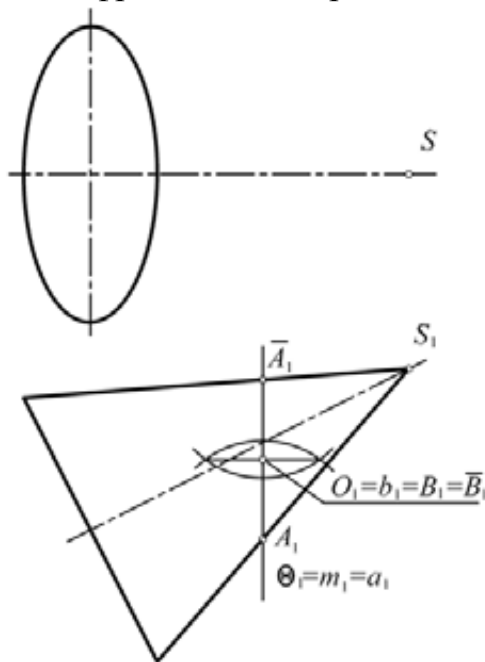


Рис. 9.35

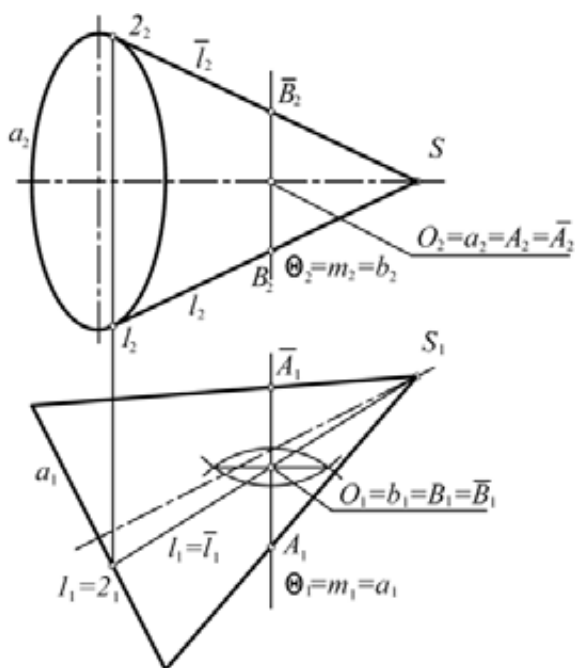


Рис. 9.36

9.5. Задачи для аудиторных заданий

9.5.1. Построить проекции сечения призмы плоскостью $\Gamma(ABC)$ (рис.9.37).

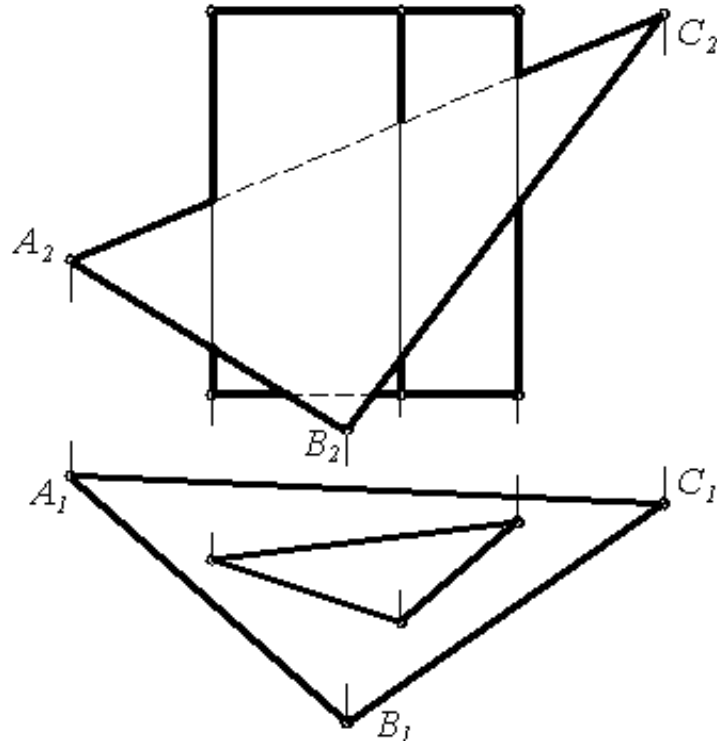


Рис. 9.37

9.5.2. Построить проекции и натуральный вид сечения конуса фронтально проецирующей плоскостью Γ (рис.9.38).

9.5.3. Через точку A провести плоскость так, чтобы она пересекала поверхность конуса по параболе. Построить проекции и натуральный вид сечения (рис.9.39).

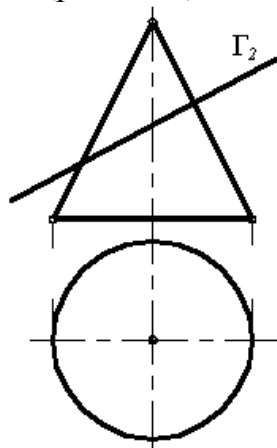


Рис. 9.38

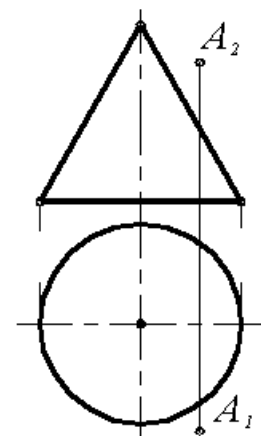


Рис. 9.39

9.5.4. Построить точки пересечения прямой m с призмой (рис.9.40).

9.4.5. Построить точки пересечения прямой l с конусом (рис.9.41).

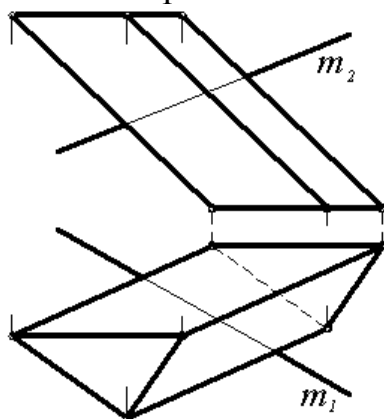


Рис. 9.40

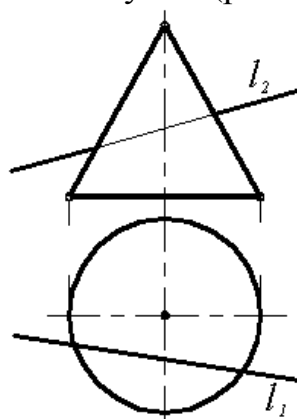


Рис. 9.41

9.5.6. Построить точки пересечения прямой l с по сферой (рис.9.42).

9.5.7. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и сферы (рис.9.43).

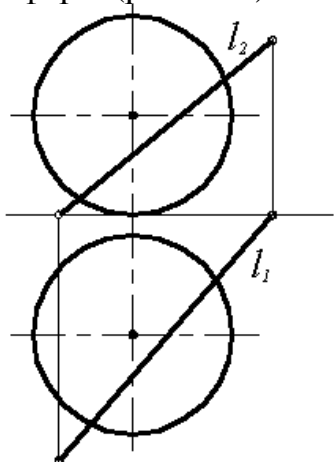


Рис. 9.42

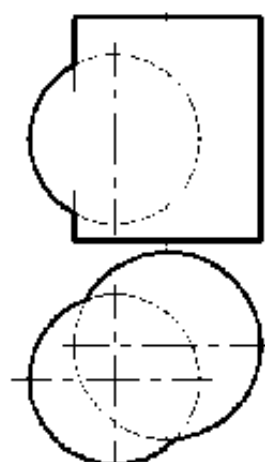


Рис. 9.43

9.5.8. Построить проекции линии пересечения двух цилиндров вращения (рис.9.44).

9.5.9. Построить проекции линии пересечения двух конусов (рис.9.45).

9.5.10. Построить плоскость, касательную к поверхности конуса и проходящую через точку, принадлежащую поверхности конуса (рис.9.46).

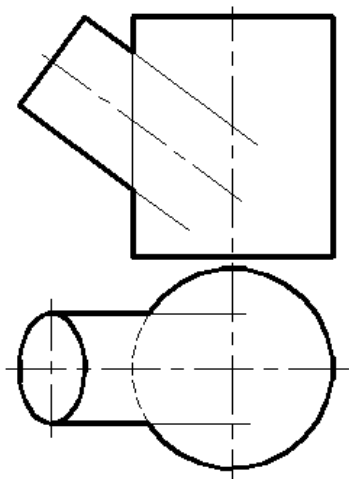


Рис. 9.44

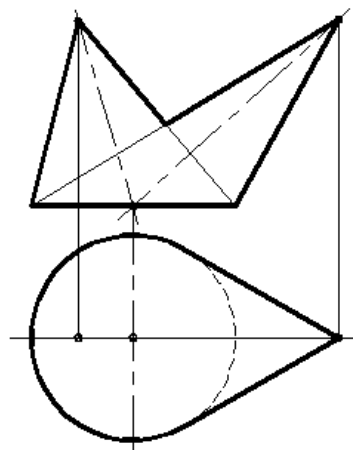


Рис. 9.45

9.5.11. Построить плоскость, проходящую через данную точку M и касающуюся сферы (рис.9.47).

9.5.12. Через данную прямую l провести плоскость, касательную к сфере (рис.9.47).

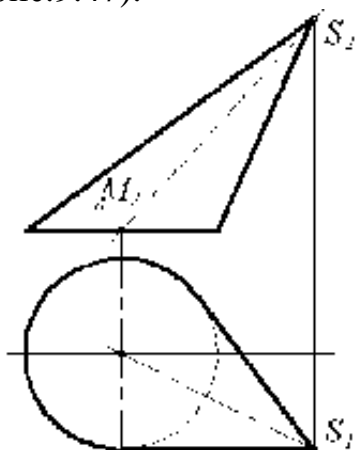


Рис. 9.46

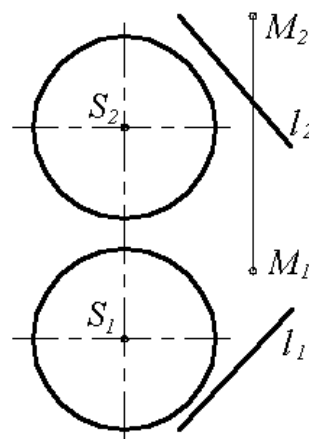


Рис. 9.47

9.6. Задачи для самостоятельной работы

9.6.1. Построить проекции сечения пирамиды плоскостью $\Gamma(ABC)$ (рис.9.48).

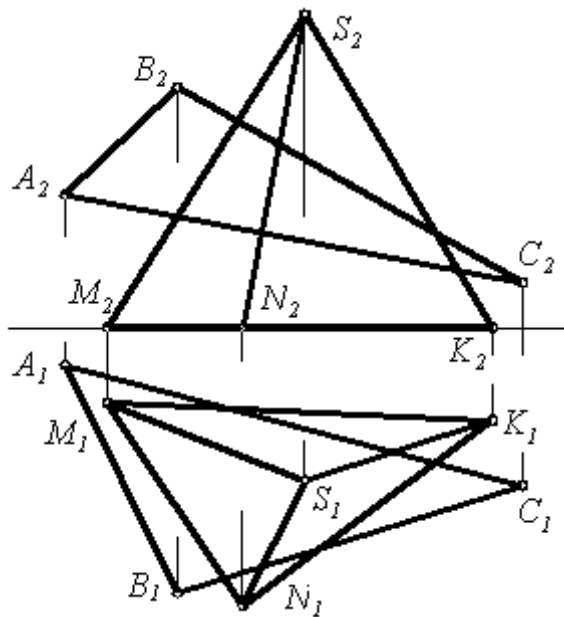


Рис. 9.48

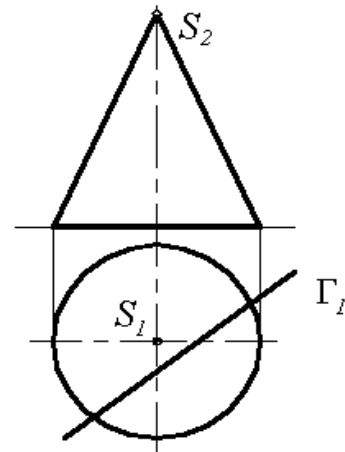


Рис. 9.49

9.6.2. Построить проекции и натуральный вид сечения конуса горизонтально проецирующей плоскостью Γ (рис.9.49).

9.6.3. Через точку A провести плоскость так, чтобы она пересекала поверхность конуса по параболе. Построить проекции и натуральный вид сечения (рис.9.50).

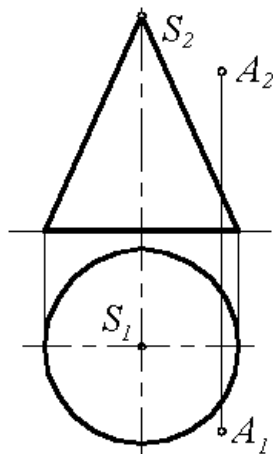


Рис. 9.50

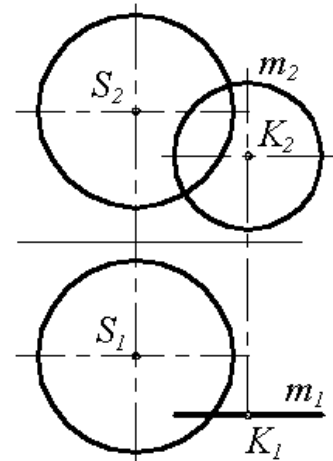


Рис. 9.51

9.6.4. Построить точки пересечения окружности m со сферой (рис.9.51).

9.6.5. Построить точки пересечения прямой l с поверхностью конуса $\Phi(m, S)$ (рис. 9.52).

9.6.6. Определить на сфере точку, ближайшую к точке A . Через найденную точку провести плоскость, касательную к сфере (рис.9.53).

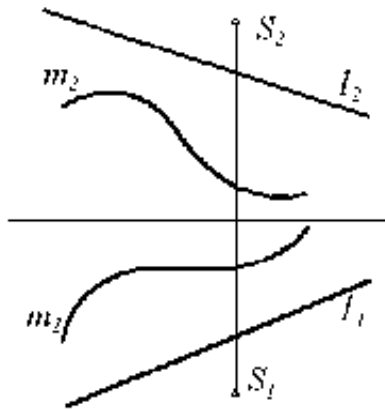


Рис. 9.52

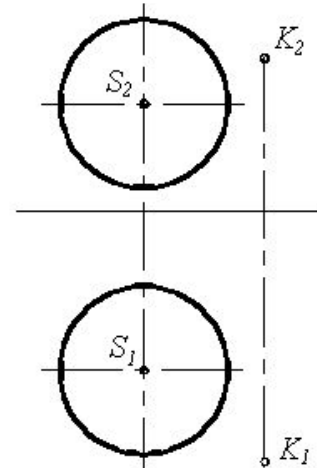


Рис. 9.53

9.6.7. Построить линию пересечения полусферы с цилиндром вращения (рис.9.54).

9.6.8. Построить линию пересечения трехгранной призмы с тором (рис.9.55).

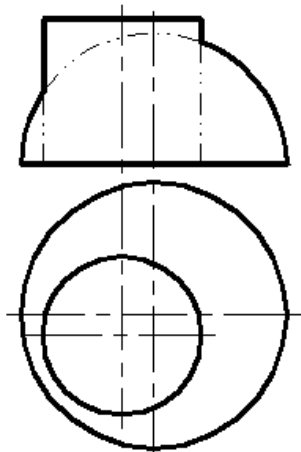


Рис. 9.54

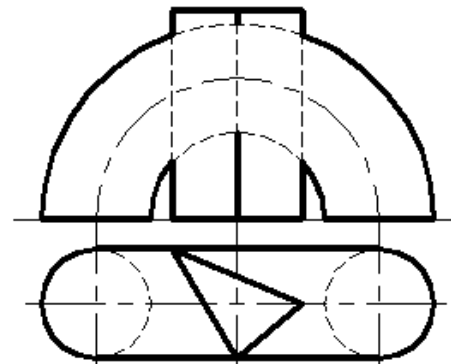


Рис. 9.55

9.6.9. Построить линию пересечения поверхностей конуса вращения и тора (рис. 9.56).

9.6.10. Построить линию пересечения поверхностей цилиндра и конуса (рис.9.57).

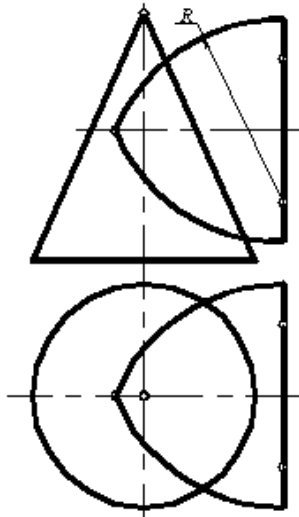


Рис. 9.56

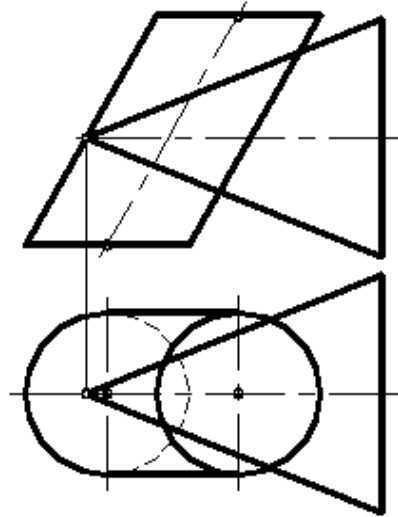


Рис. 9.57

9.7. Задачи повышенной сложности

9.7.1. Вращением вокруг оси i подкатить сферу с центром S' и радиуса 30 мм к конусу до их соприкосновения. Построить точку соприкосновения (рис.9.58).

9.7.2. Через точки A, B, C провести сферу, касающуюся прямой m (рис.9.59).

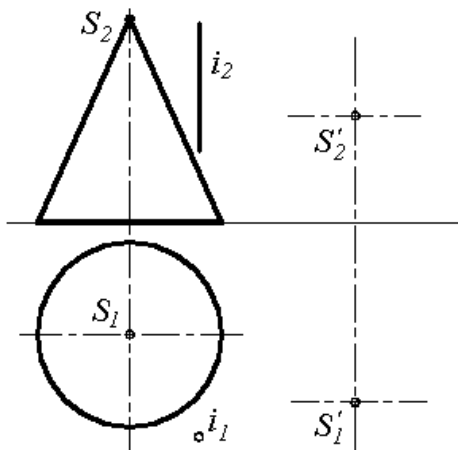


Рис. 9.58

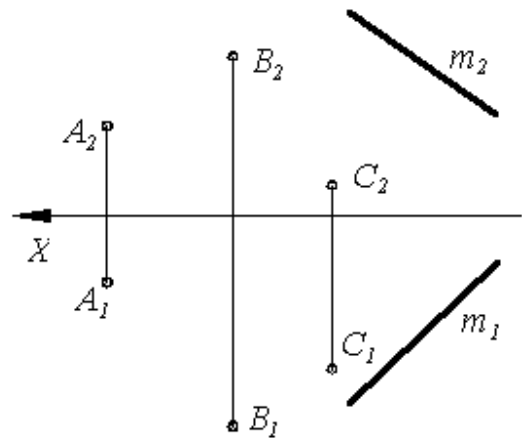


Рис. 9.59

9.7.3. Построить сферу радиуса 20 мм, касающуюся сферы $\Phi(S, R)$, если центр искомой сферы принадлежит прямой l (рис.9.60).

9.7.4. Построить плоскость, проходящую через точку A и касающуюся сфер $\Phi(S, R), \Delta(\bar{S}, \bar{R})$ (рис.9.61).

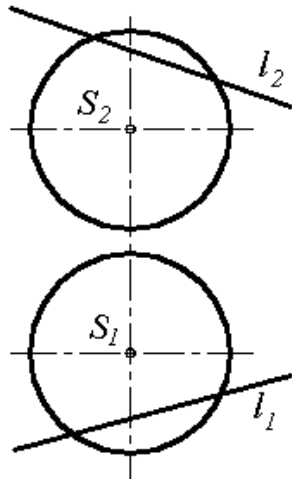


Рис. 9.60

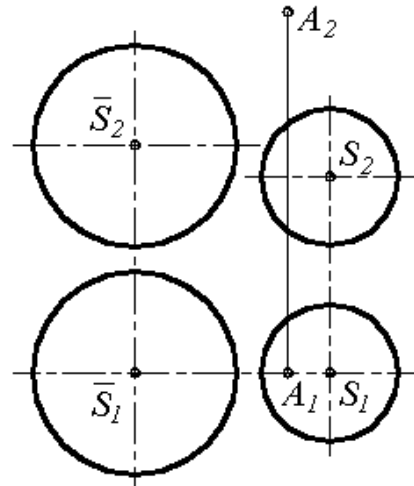


Рис. 9.61

9.7.5. Построить сферу с центром на прямой l , касающейся прямой m и проходящую через точку K (рис.9.62).

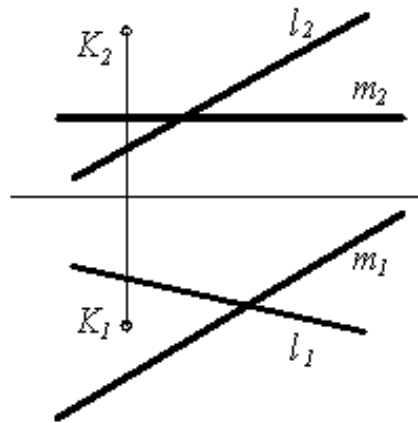
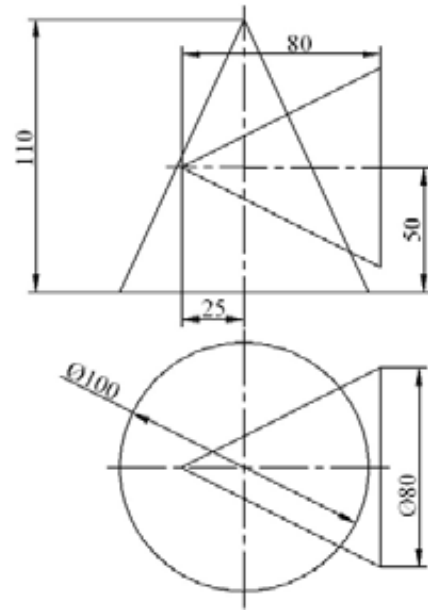
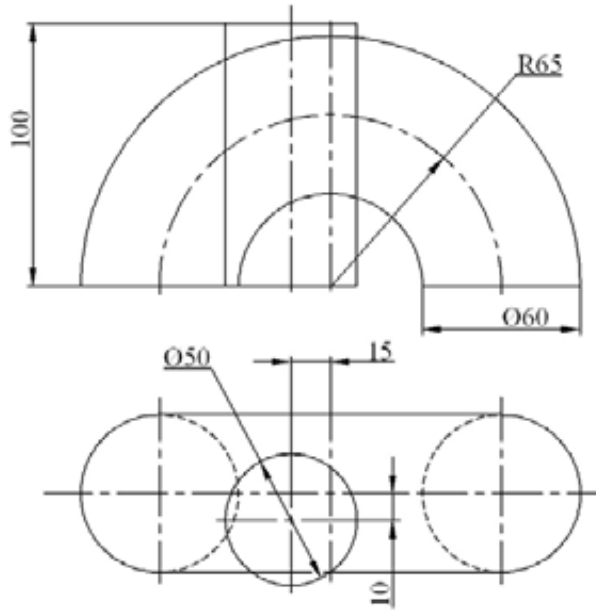


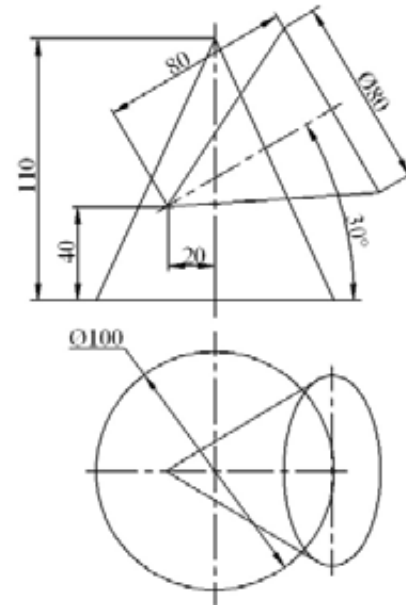
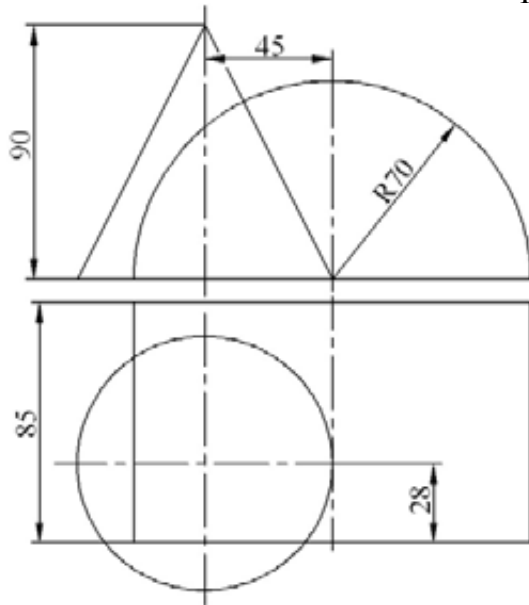
Рис. 9.62

9.8. Контрольная работа № 4

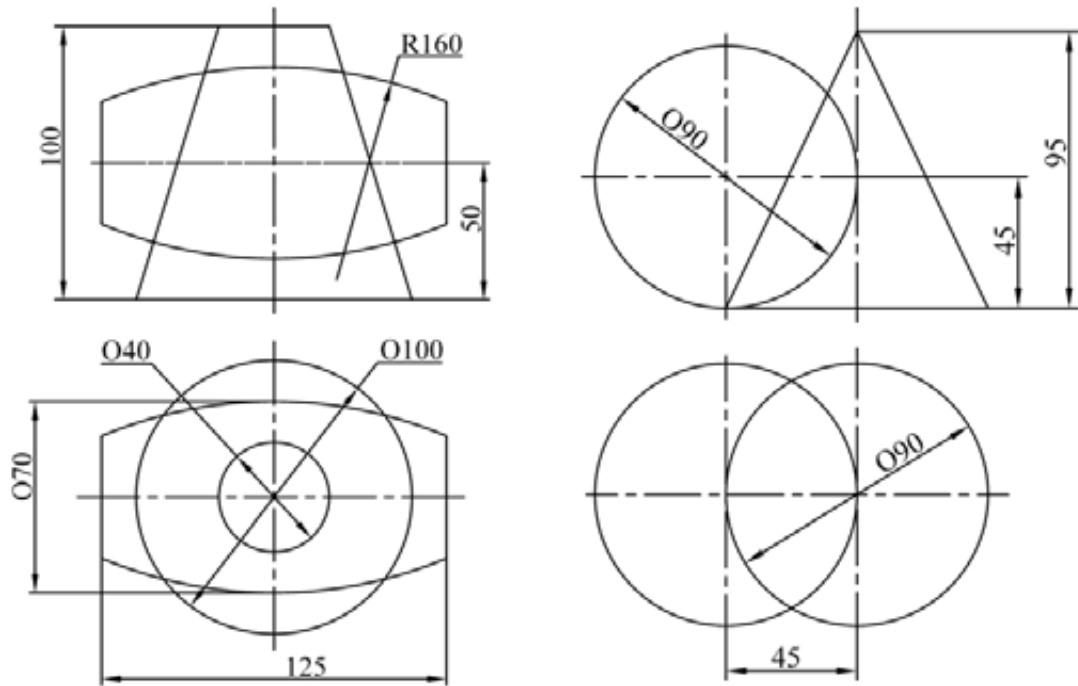
Построить экстремальные точки, точки находящиеся на границе видимости и одну из промежуточных точек инцидентных линии пересечения двух поверхностей.



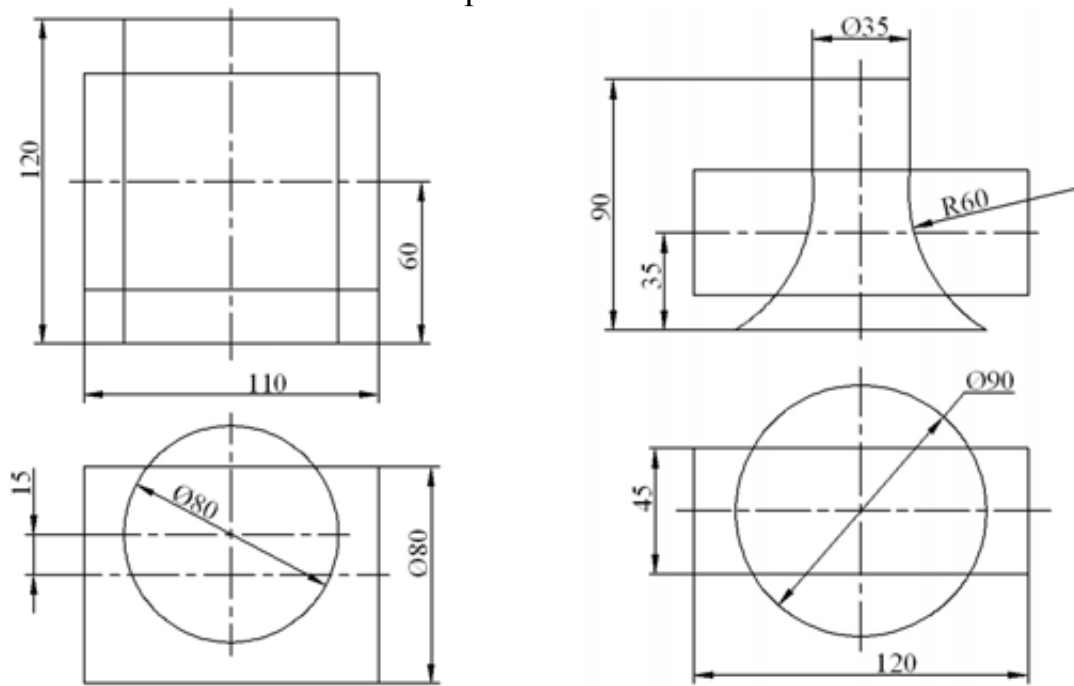
Вариант 1



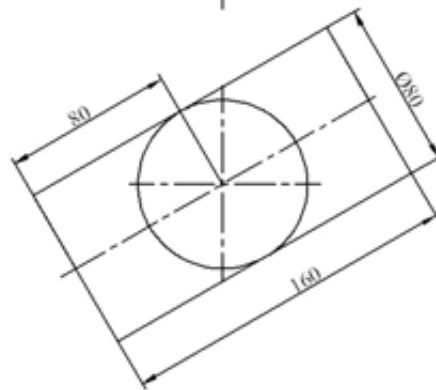
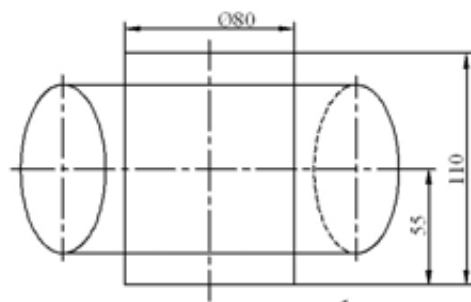
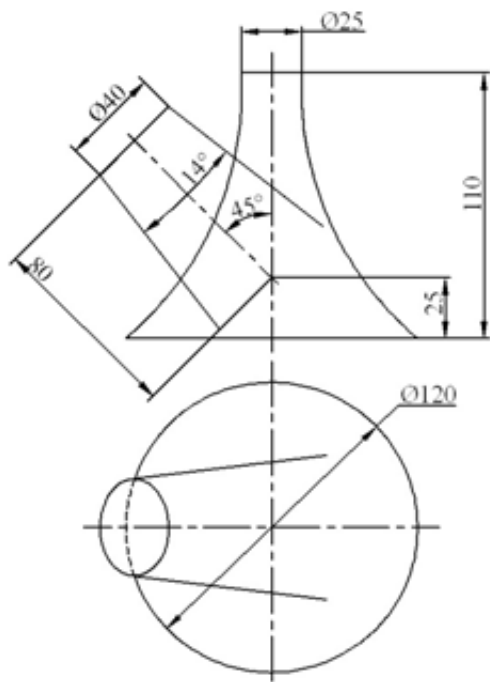
Вариант 2



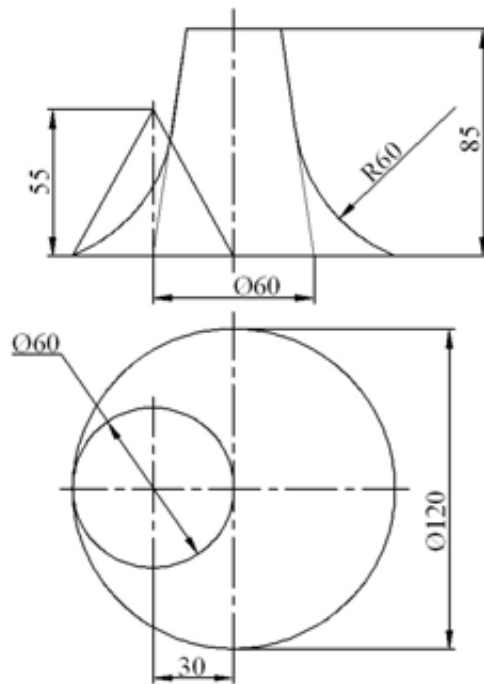
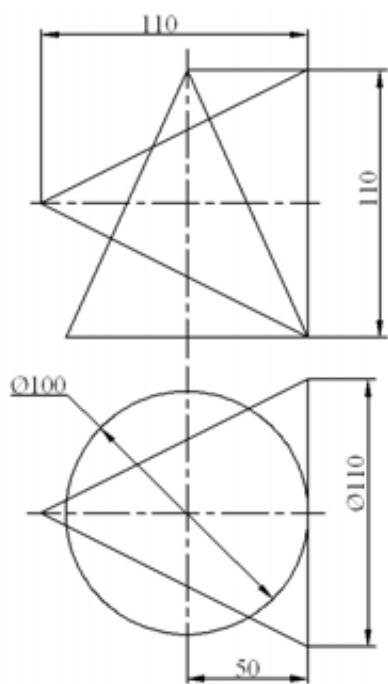
Вариант 3



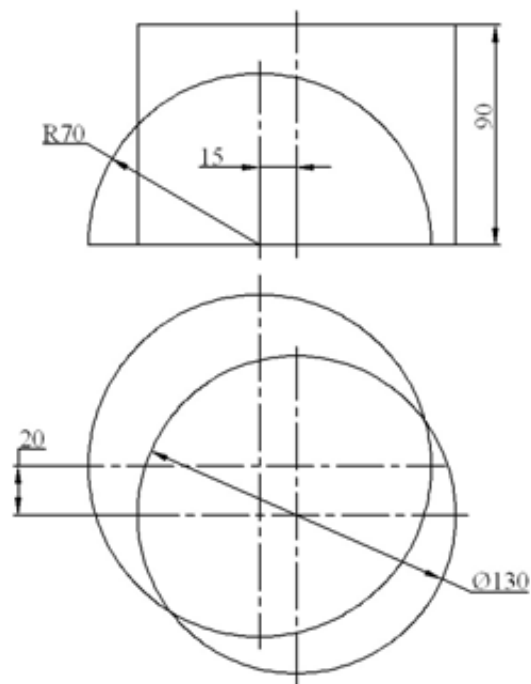
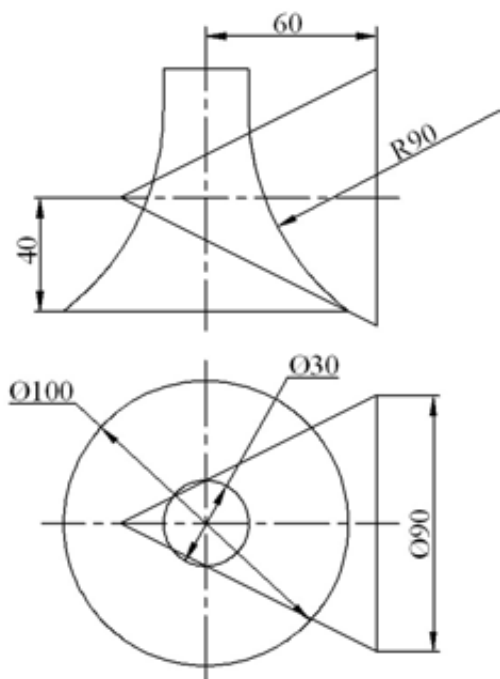
Вариант 4



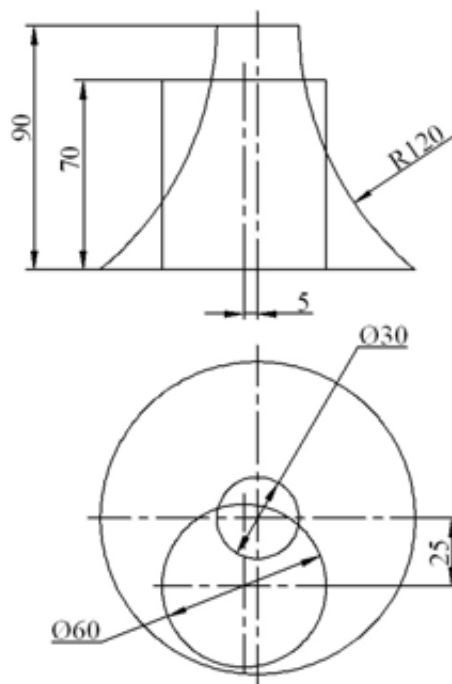
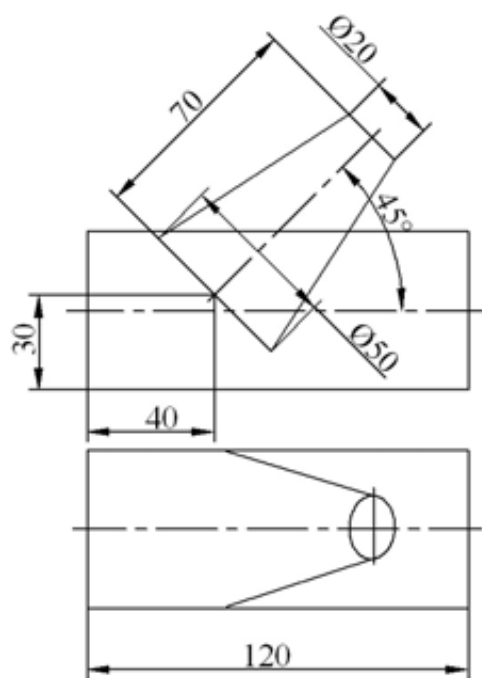
Вариант 5



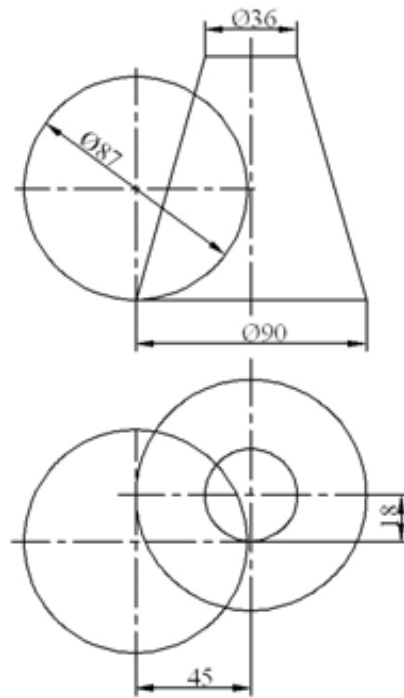
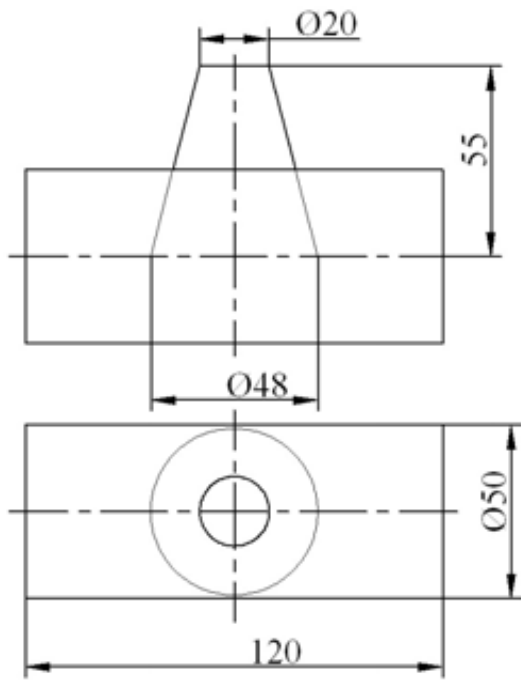
Вариант 6



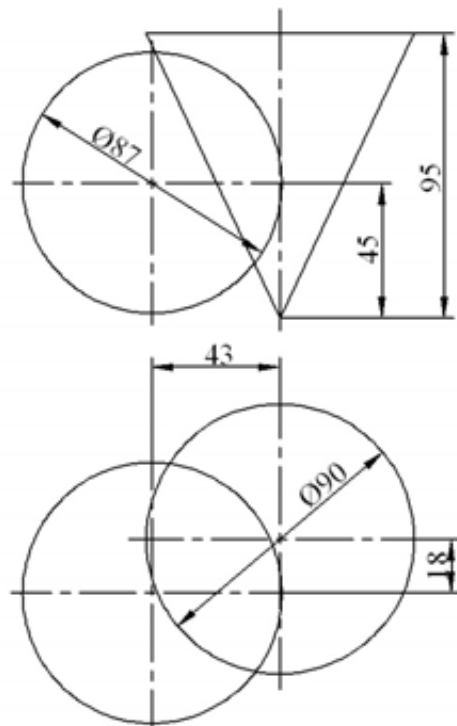
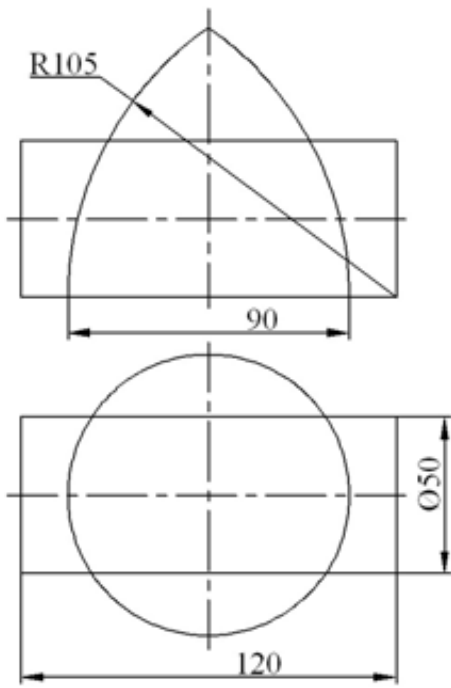
Вариант 7



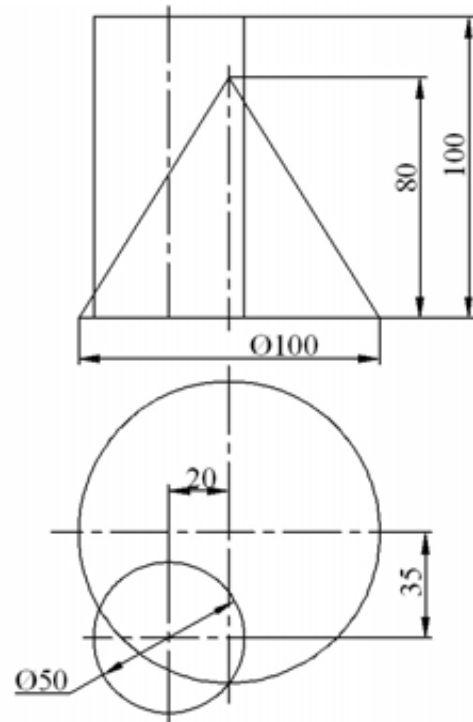
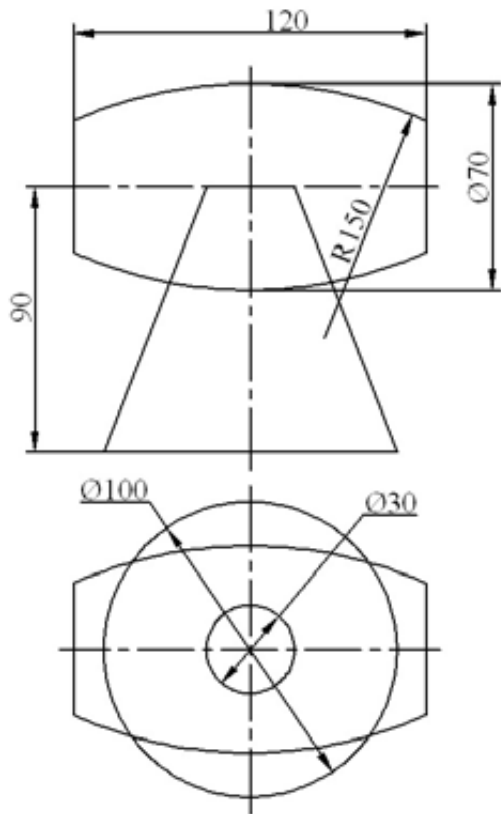
Вариант 8



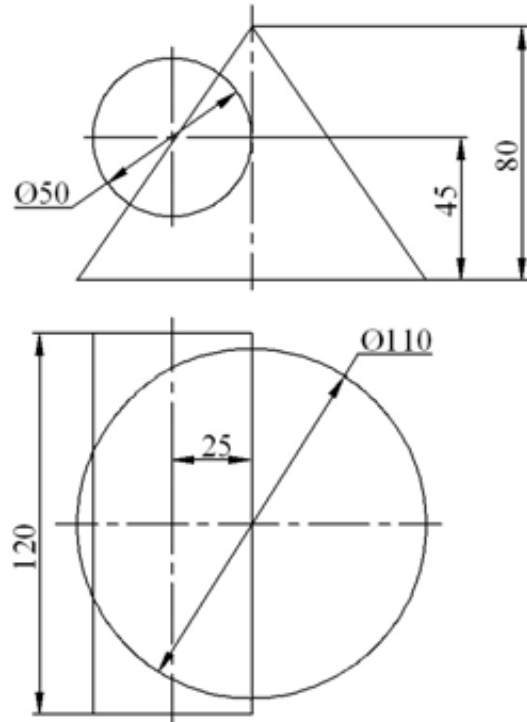
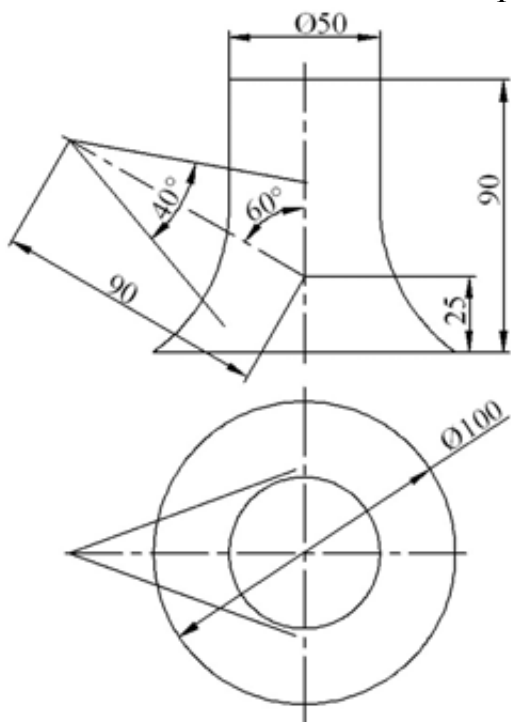
Вариант 9



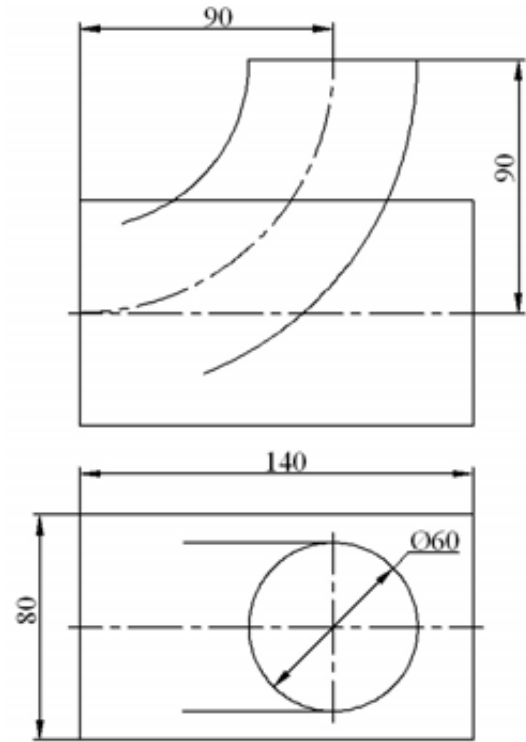
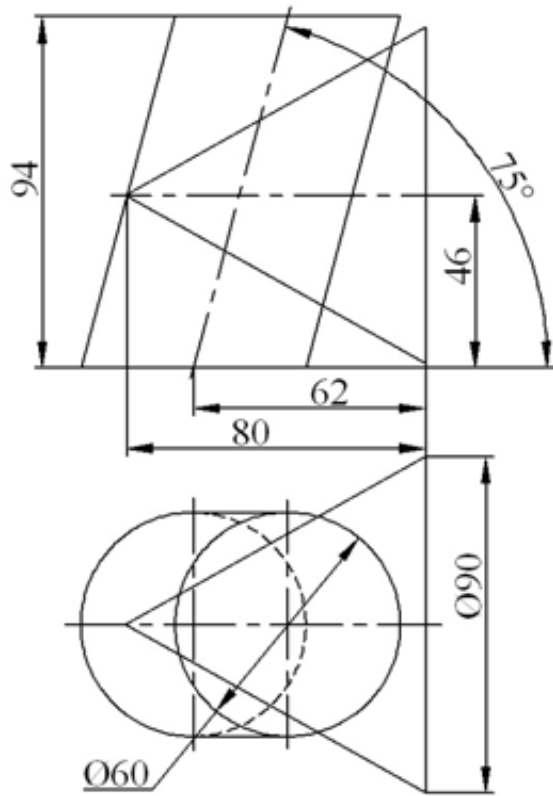
Вариант 10



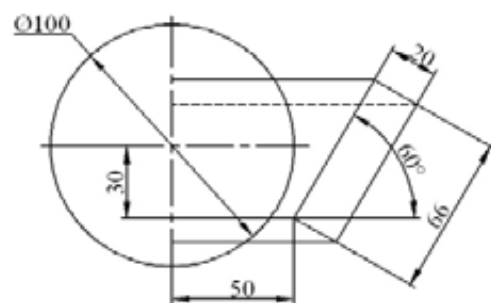
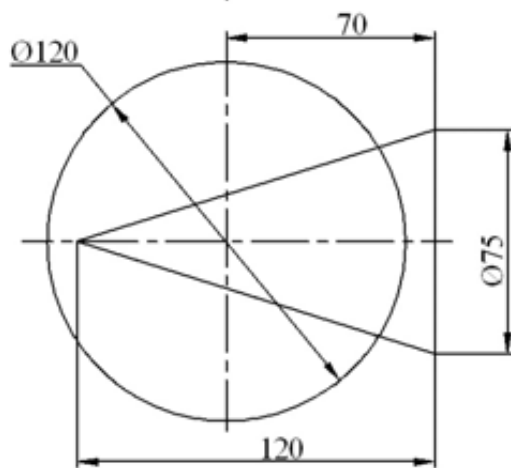
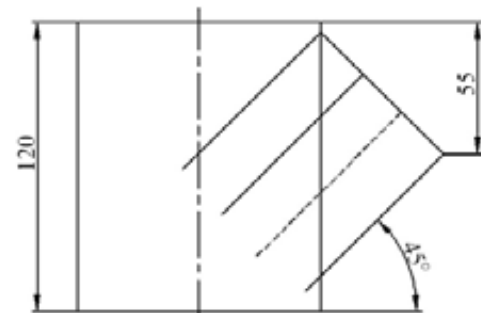
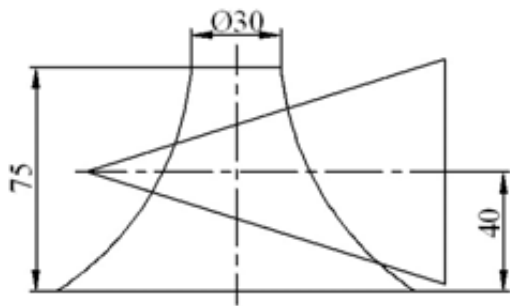
Вариант 11



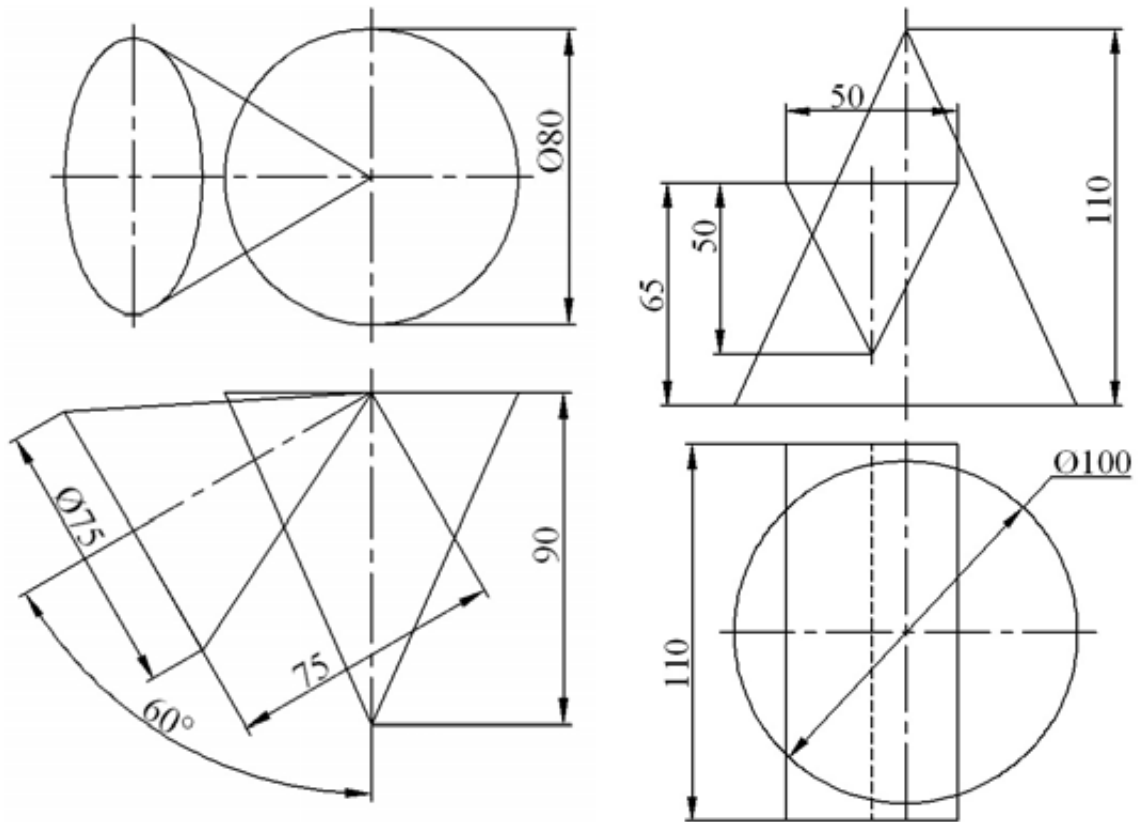
Вариант 12



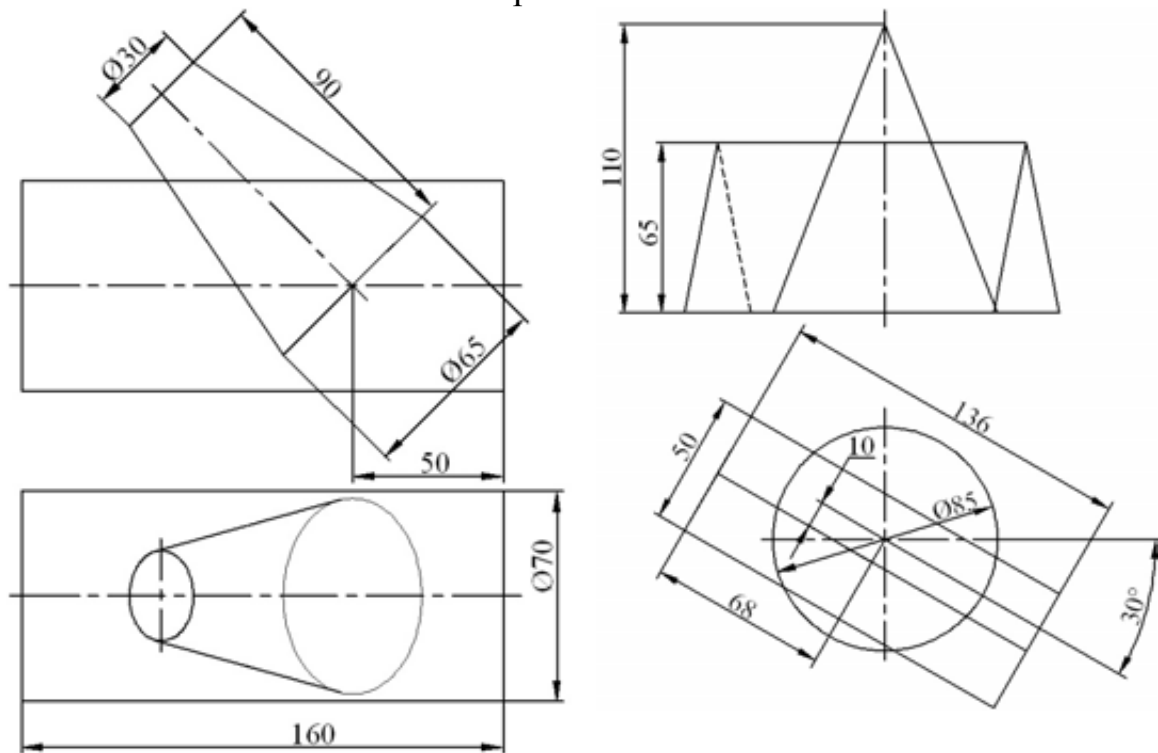
Вариант 13



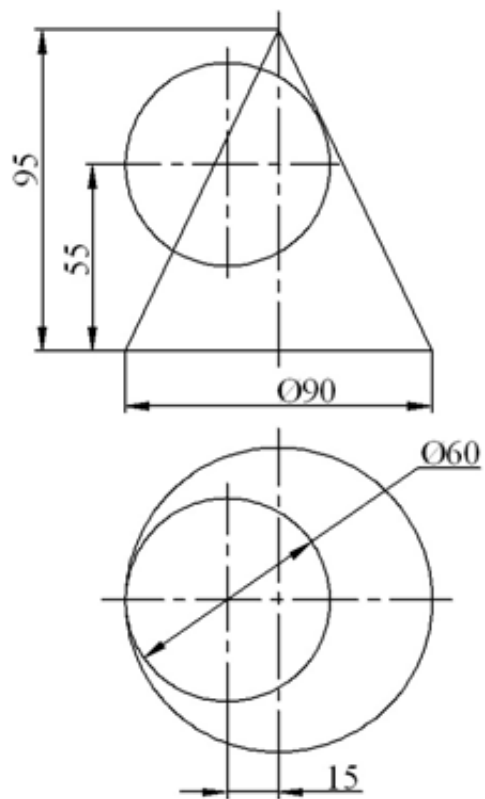
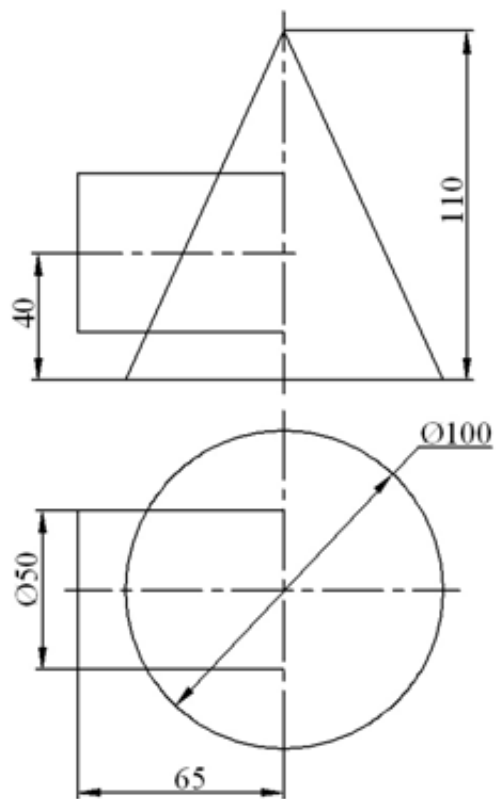
Вариант 14



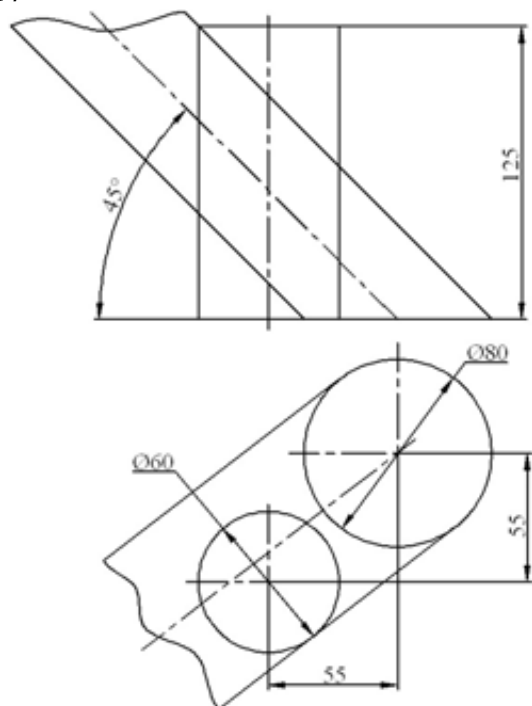
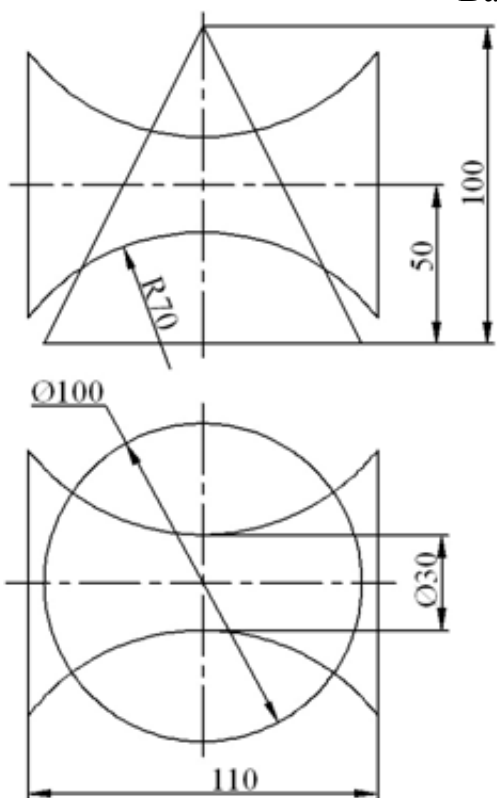
Вариант 15



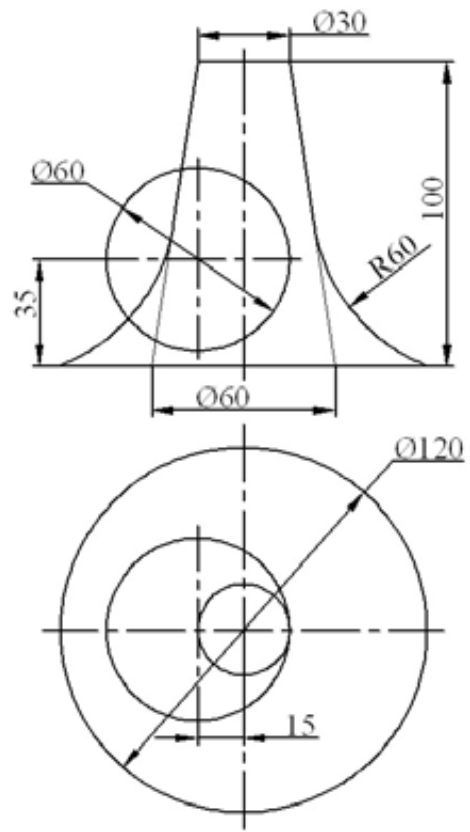
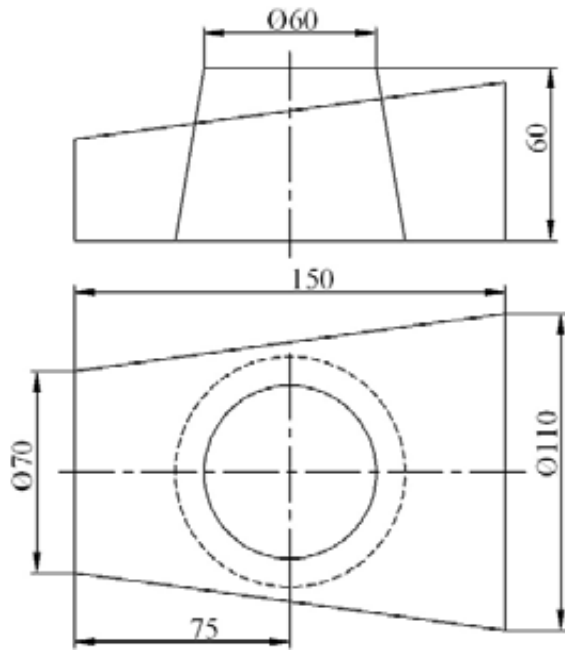
Вариант 16



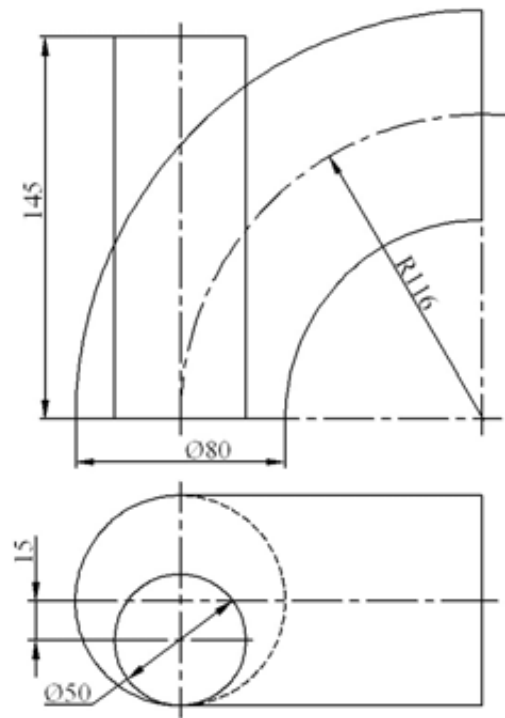
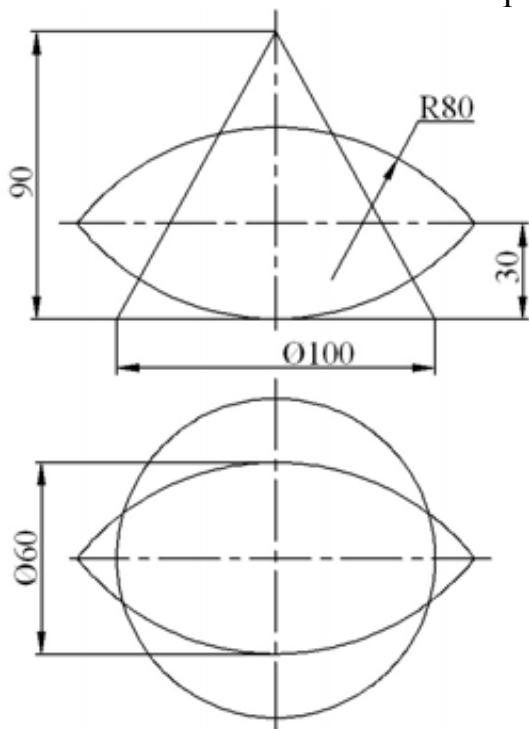
Вариант 17



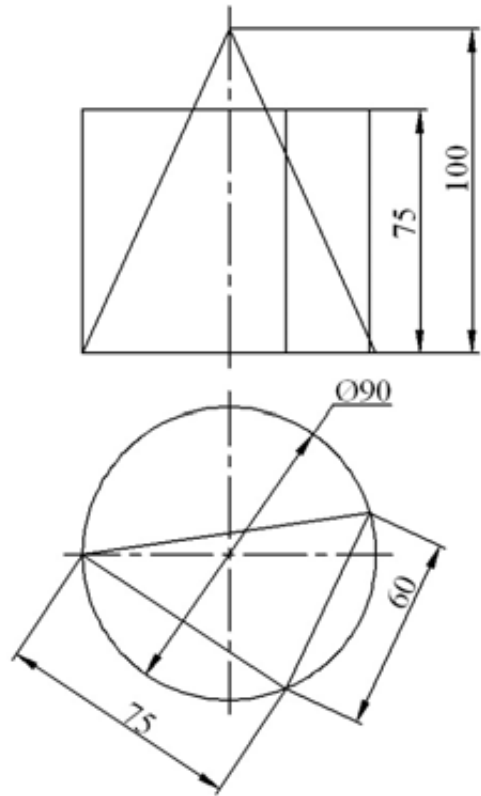
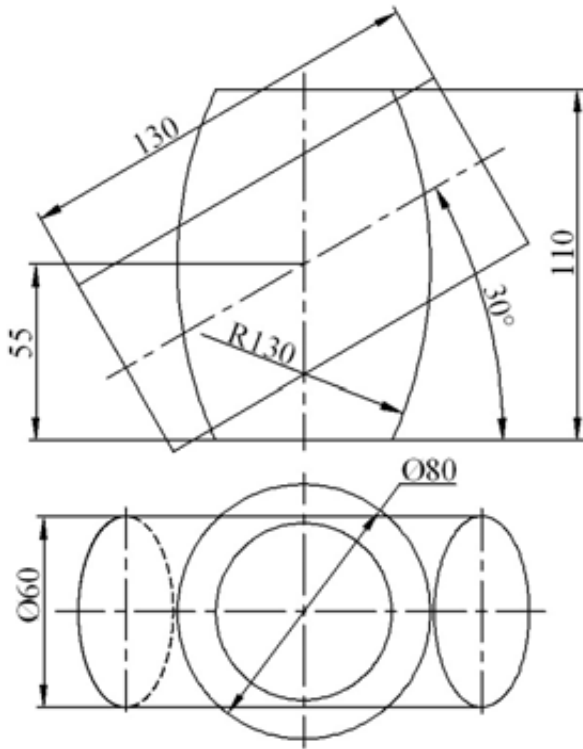
Вариант 18



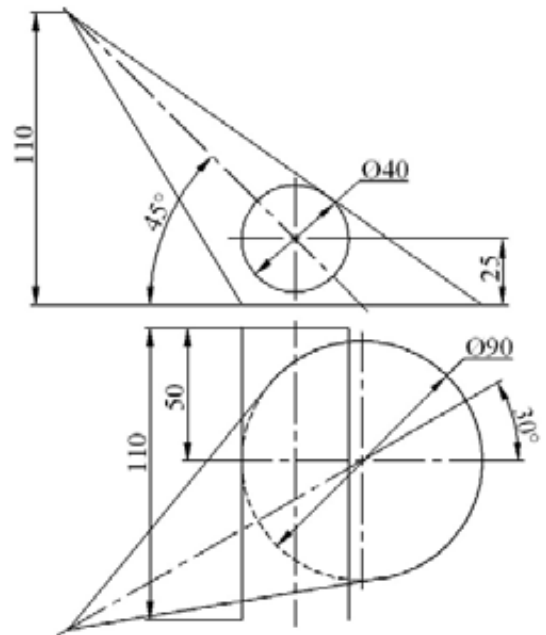
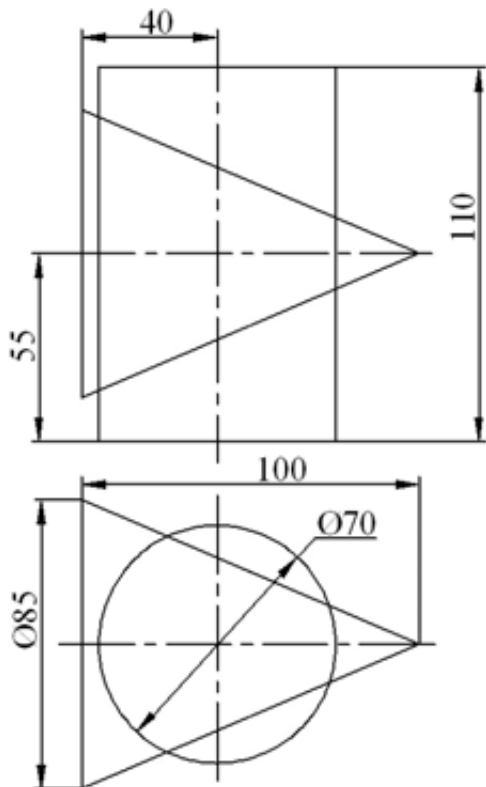
Вариант 19



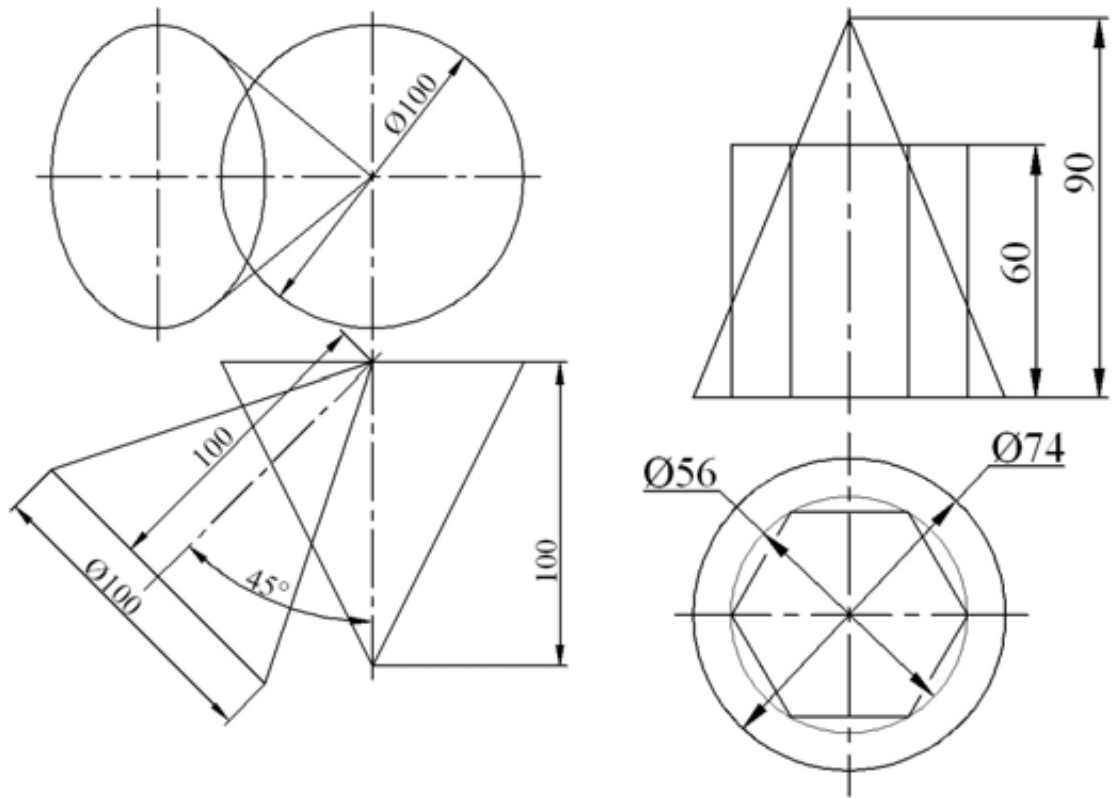
Вариант 20



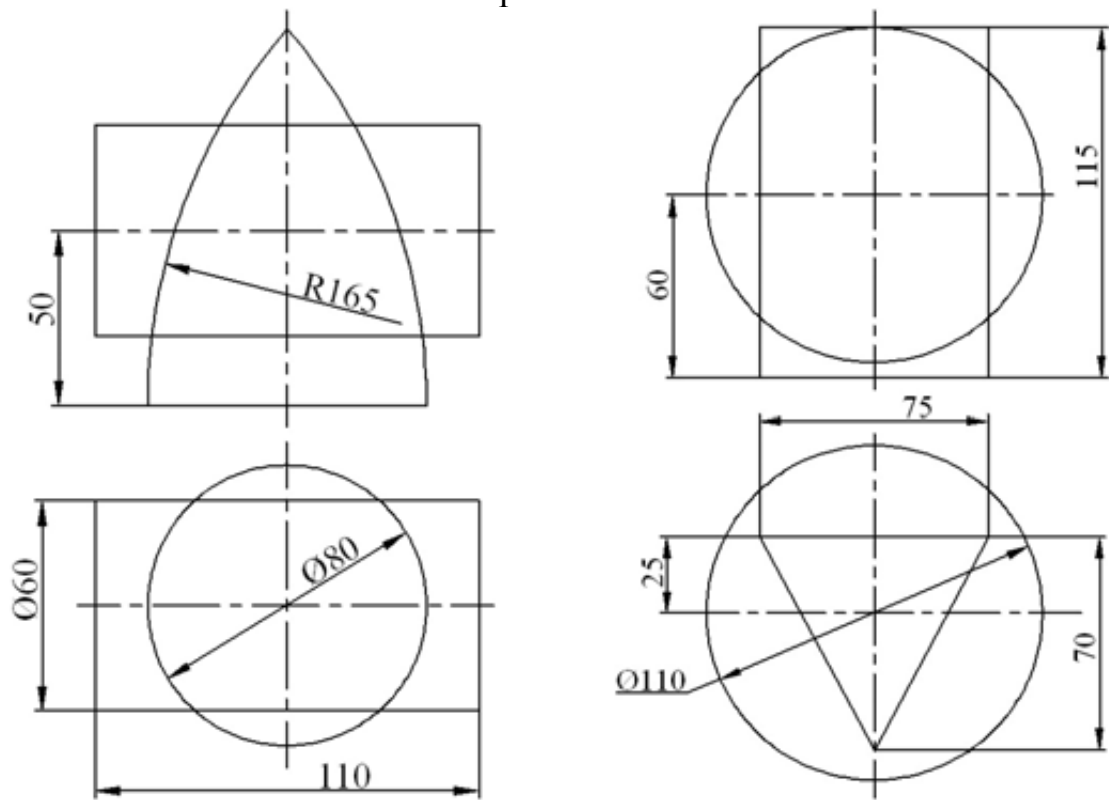
Вариант 21



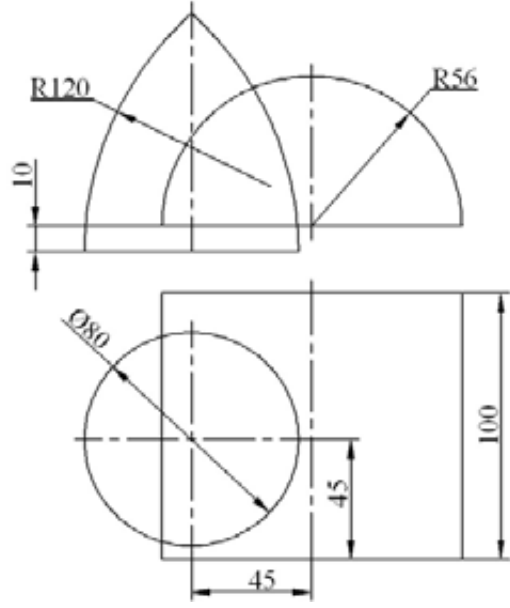
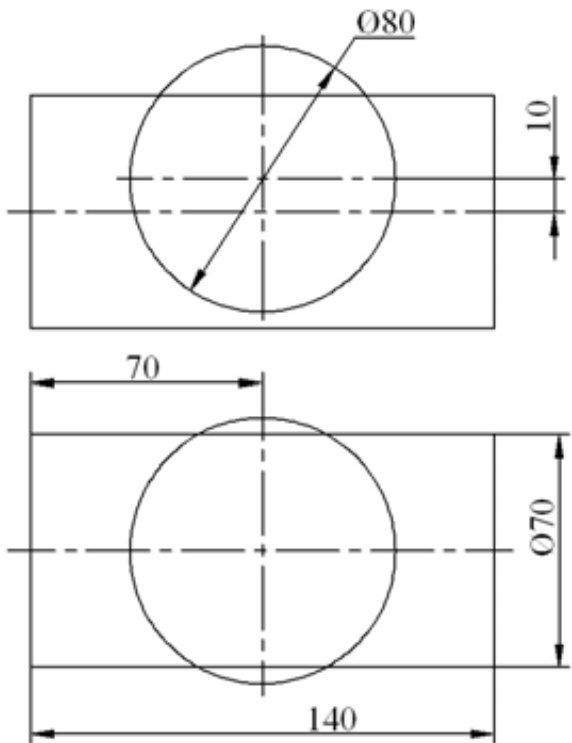
Вариант 22



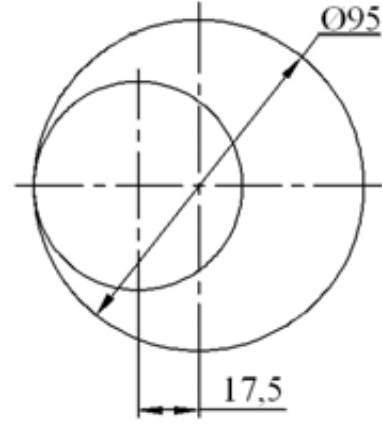
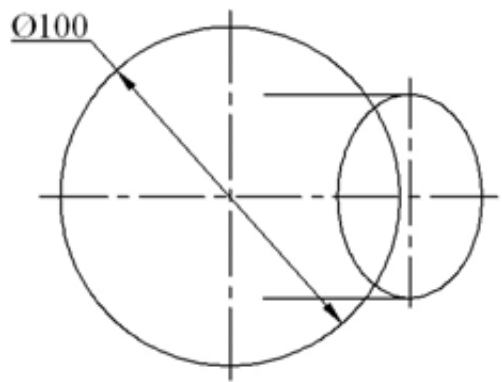
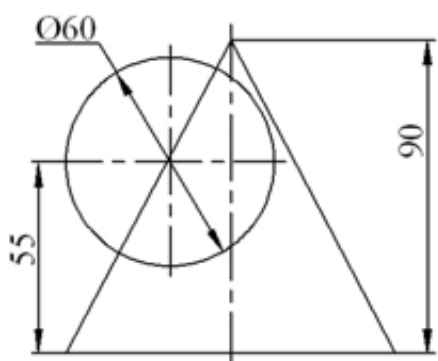
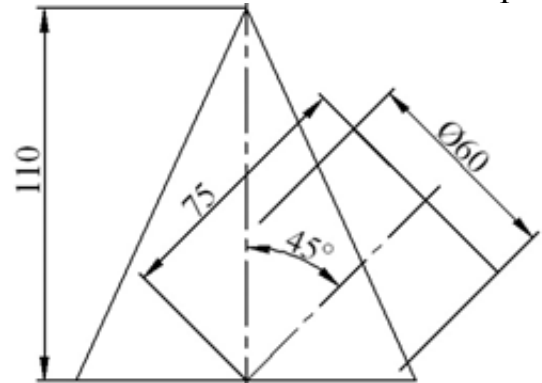
Вариант 23



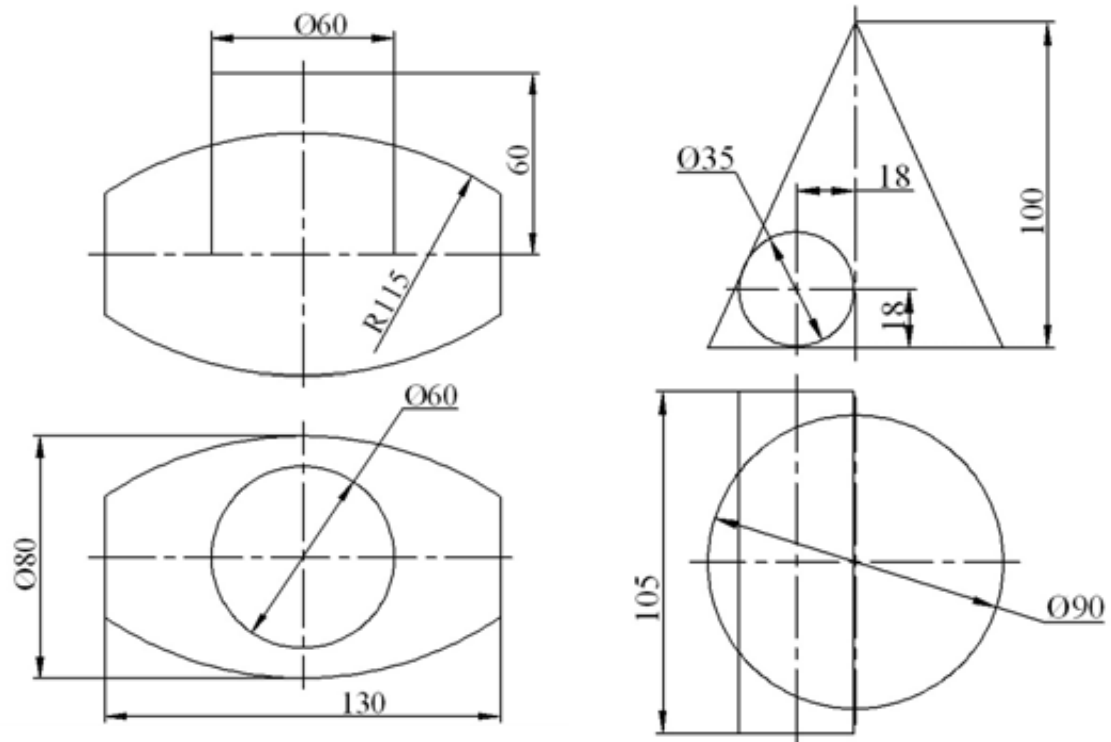
Вариант 24



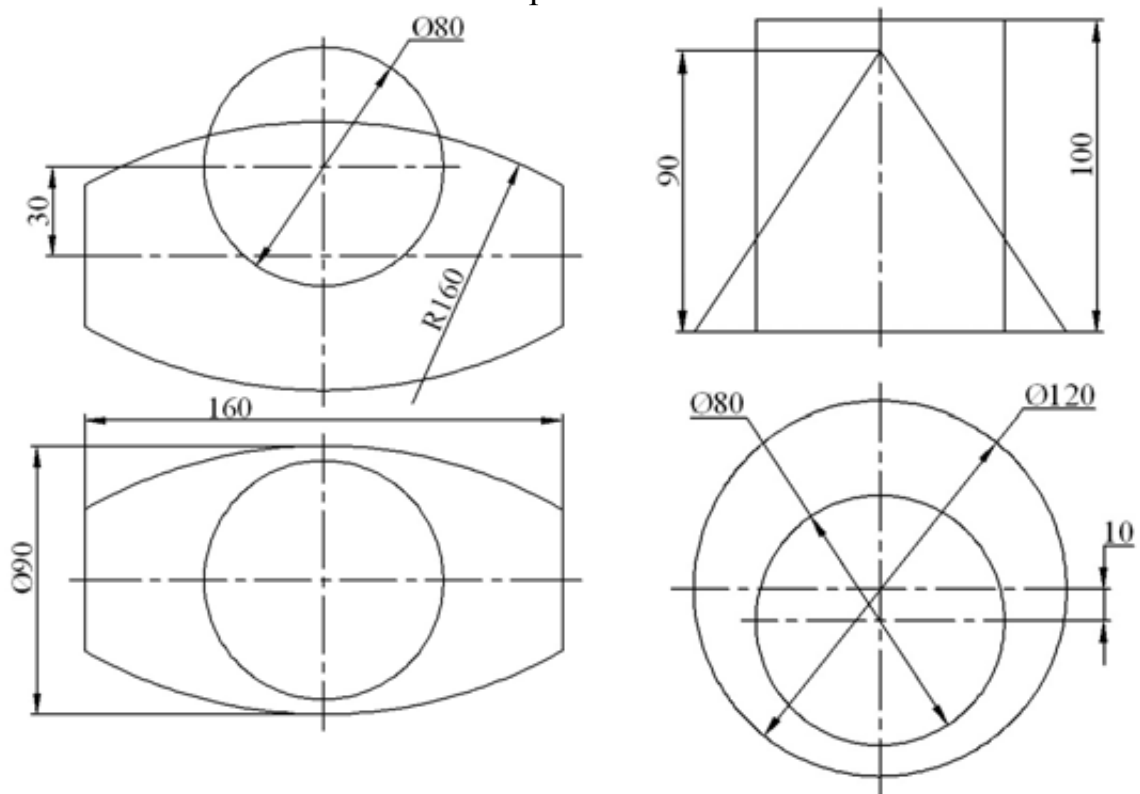
Вариант 25



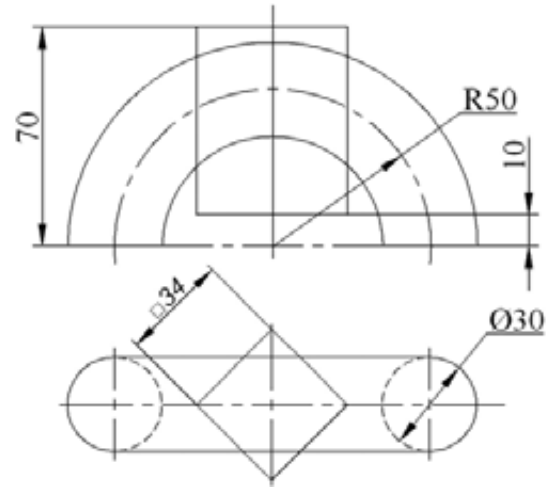
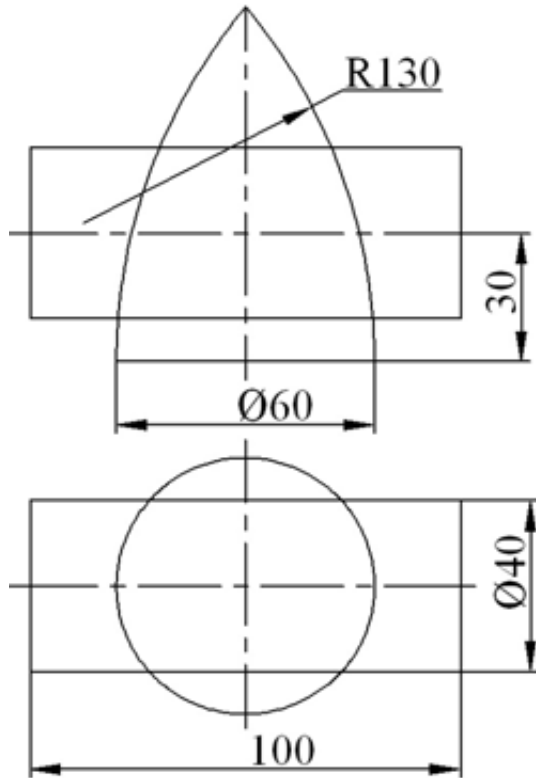
Вариант 26



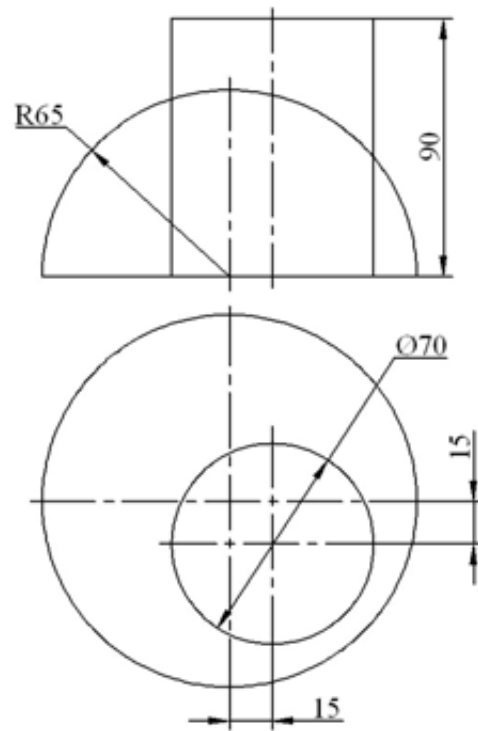
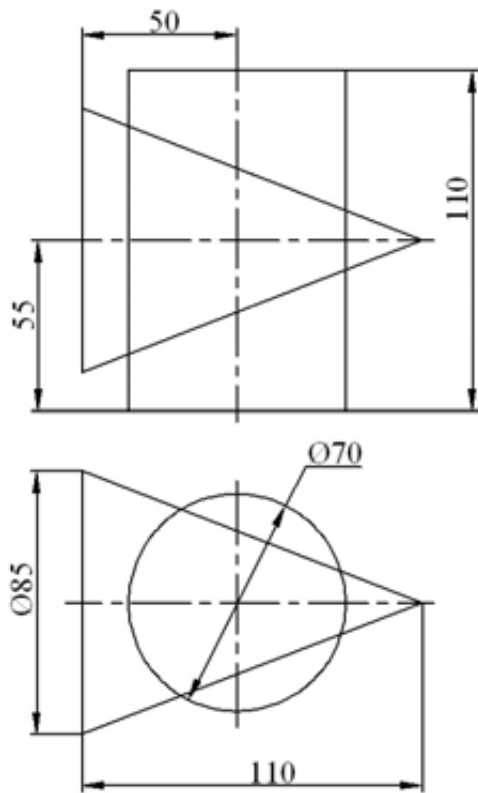
Вариант 27



Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30

9.9. Содержание задания №4 «Обобщенные позиционные задачи»

9.9.1. В соответствии с заданным вариантом на комплексном чертеже построить горизонтальную и фронтальную проекции заданных поверхностей Г и Ф (табл.9.1).

9.9.2. Найти линию пересечения заданных поверхностей.

9.10. Оформление задания №4

9.10.1. Задание выполняется на листах чертежной бумаги формата А4 карандашом. Образец выполнения задания приведен на рис.9.63.

9.10.2. Линии, относящиеся к результату решения задачи по ГОСТ 2.303-68 должны иметь толщину $s=0,5-1,4$ мм. Линии вспомогательных построений на чертеже сохранить.

9.10.3. Текстовое условие задачи выполняется чертежным шрифтом.

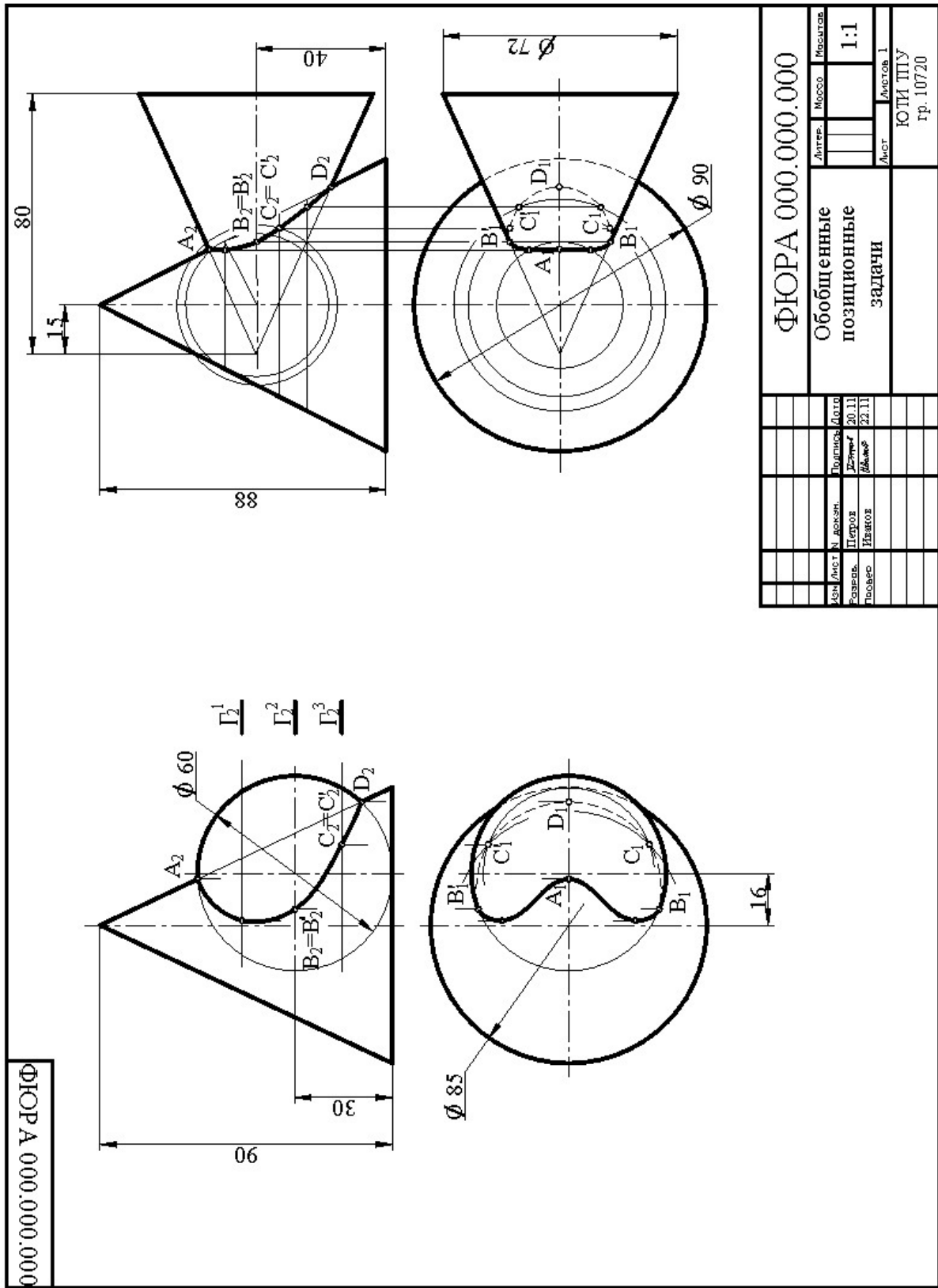


Рис. 9.63

9.11. Варианты индивидуальных заданий к работе №4

Таблица 9.1

№№ Вариантов	Поверхности	Уравнения
1	Г	$(x-120)^2 + (y-80)^2 + (z-55)^2 = 30^2$
	Ф	$(x-90)^2 + (y-80)^2 - (45-0,45z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$
2	Г	$(x-100)^2 + (z-18)^2 = 18^2,$ $27 \leq y \leq 133$
	Ф	$(x-82)^2 + (y-80)^2 - (45-0,45z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$
3	Г	$(x-100)^2 + (y-72)^2 + z^2 = 70^2,$ $0 \leq z \leq 70$
	Ф	$(x-85)^2 + (y-92)^2 = 65^2,$ $0 \leq z \leq 90$
4	Г	$(x-100)^2 + (y-88)^2 + z^2 = 65^2,$ $0 \leq z \leq 65$
	Ф	$(x-85)^2 + (y-103)^2 = 35^2,$ $0 \leq z \leq 90$
5	Г	$(x-72)^2 + (y-90)^2 = 30^2,$ $0 \leq z \leq 110$
	Ф	$(x-92)^2 + (y-80)^2 + (z-55)^2 = 40^2,$
6	Г	$(x-110)^2 + (y-120)^2 = 25^2,$ $0 \leq z \leq 100$
	Ф	$(x-90)^2 + (y-85)^2 - (50-0,5z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$

7	Г	$(x-100)^2 + (y-76)^2 = 40^2,$ $0 \leq z \leq 120$
	Ф	$(y-91)^2 + (z-60)^2 = 40^2,$ $45 \leq x \leq 155$
8	Г	$(x-100)^2 + (y-100)^2 - (55-0,7z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 80$
	Ф	$(x-125)^2 + (z-45)^2 = 25^2,$ $40 \leq y \leq 160$
9	Г	$(x-72)^2 + (y-80)^2 - (45-0,5z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 90$
	Ф	$(x-87)^2 + (y-80)^2 + (z-55)^2 = 30^2$
10	Г	$(x-88)^2 + (y-64)^2 = 35^2,$ $0 \leq z \leq 110$
	Ф	$(y-64)^2 + (z-55)^2 - (0,43x-12,04)^2 = 0$ $28 \leq x \leq 128$
11	Г	$(x-80)^2 + (y-60)^2 + (z-60)^2 = 40^2$
	Ф	$(y-60)^2 + (z-50)^2 = 35^2,$ $10 \leq x \leq 150$
12	Г	$(x-80)^2 + (y-72)^2 - (50-0,5z)^2 = 0,$ $0 \leq z \leq 100$
	Ф	$(y-72)^2 + (z-45)^2 = 25^2,$ $60 \leq x \leq 140$
13	Г	$(x-88)^2 + (y-60)^2 + (z-80)^2 = 35^2$
	Ф	$(y-60)^2 + (z-60)^2 = 40^2,$ $20 \leq x \leq 150$
14	Г	$(x-80)^2 + (y-60)^2 - (50-0,5z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$
	Ф	$(y-60)^2 + (z-40)^2 = 25^2,$ $70 \leq x \leq 150$
15	Г	$(x-80)^2 + (y-72)^2 - (30-0,3z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$
	Ф	$(y-72)^2 + (z-50)^2 - (52,5-0,42x)^2 = 0$ $25 \leq x \leq 125$

16	Г	$(x-80)^2 + (y-72)^2 - (50-0,5z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$
	Ф	$(x-100)^2 + (y-72)^2 + (z-50)^2 = 35^2$
17	Г	$(x-80)^2 + (y-80)^2 - (50-0,5z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$
	Ф	$(x-100)^2 + (z-20)^2 = 20^2,$ $27 \leq y \leq 133$
18	Г	$(x-60)^2 + (y-60)^2 = 60^2,$ $0 \leq z \leq 90$
	Ф	$(x-80)^2 + (y-80)^2 + z^2 = 65^2,$ $0 \leq z \leq 70$
19	Г	$(x-65)^2 + (y-65)^2 = 40^2,$ $0 \leq z \leq 90$
	Ф	$(x-80)^2 + (y-80)^2 + z^2 = 60^2,$ $0 \leq z \leq 70$
20	Г	$(x-80)^2 + (y-70)^2 - (z-50)^2 = 40^2$
	Ф	$(x-60)^2 + (y-84)^2 = 35^2,$ $0 \leq z \leq 110$
21	Г	$(x-80)^2 + (y-75)^2 - (50-0,5z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$
	Ф	$(x-100)^2 + (y-110)^2 = 30^2,$ $0 \leq z \leq 110$
22	Г	$(y-85)^2 + (z-55)^2 = 40^2,$ $25 \leq x \leq 135$
	Ф	$(x-80)^2 + (y-70)^2 = 40^2,$ $0 \leq z \leq 120$
23	Г	$(x-105)^2 + (z-40)^2 = 30^2,$ $40 \leq y \leq 160$
	Ф	$(x-80)^2 + (y-100)^2 - (56-0,7z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 80$
24	Г	$(x-95)^2 + (y-80)^2 + (z-50)^2 = 35^2$
	Ф	$(x-80)^2 + (y-80)^2 - (50-0,5z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$

25	Г	$(y - 65)^2 + (z - 60)^2 - (0,8x - 32)^2 = 0$ $40 \leq x \leq 140$
	Ф	$(x - 100)^2 + (y - 65)^2 = 35^2,$ $0 \leq z \leq 110$
26	Г	$(y - 70)^2 + (z - 60)^2 = 35^2,$ $30 \leq x \leq 170$
	Ф	$(x - 100)^2 + (y - 70)^2 + (z - 70)^2 = 40^2$
27	Г	$(y - 70)^2 + (z - 40)^2 = 30^2,$ $60 \leq x \leq 140$
	Ф	$(x - 88)^2 + (y - 70)^2 - (50 - 0,5z)^2 = 0,$ $0 \leq z \leq 100$
28	Г	$(y - 80)^2 + (z - 60)^2 = 40^2,$ $10 \leq x \leq 150$
	Ф	$(x - 80)^2 + (y - 80)^2 + (z - 80)^2 = 40^2$
29	Г	$(y - 60)^2 + (z - 35)^2 = 30^2,$ $80 \leq x \leq 150$
	Ф	$(x - 60)^2 + (y - 60)^2 - (50 - 0,5z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$
30	Г	$(y - 60)^2 + (z - 50)^2 - (202,5 - 0,45x)^2 = 0$ $45 \leq x \leq 145$
	Ф	$(x - 100)^2 + (y - 60)^2 - (30 - 0,3z)^2 = 0$ $0 \leq z \leq 100$

9.12. Контрольные вопросы

9.12.1. Назовите основные этапы решения обобщенной позиционной задачи.

9.12.2. Какие поверхности-посредники используют для нахождения точек пересечения прямой линии с поверхностью?

9.12.3. В чем суть способа плоскостей уровня?

9.12.4. По какой линии пересекаются между собой две соосные поверхности вращения?

9.12.5. В каком случае используют способ вращающейся плоскости?

9.12.6. Какой порядок имеет линия пересечения двух поверхностей вращения второго порядка?

10. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задача 1. Построить линию пересечения треугольников ABC и EDK , определить их видимость и натуральную величину треугольника ABC (рис.10.1).

Для построения линии пересечения двух плоскостей, которая будет являться прямой, достаточно построить две ее точки, то есть дважды решить первую позиционную задачу. В первой позиционной задаче находится точка пересечения прямой l и плоскости Δ и решается она по следующему алгоритму:

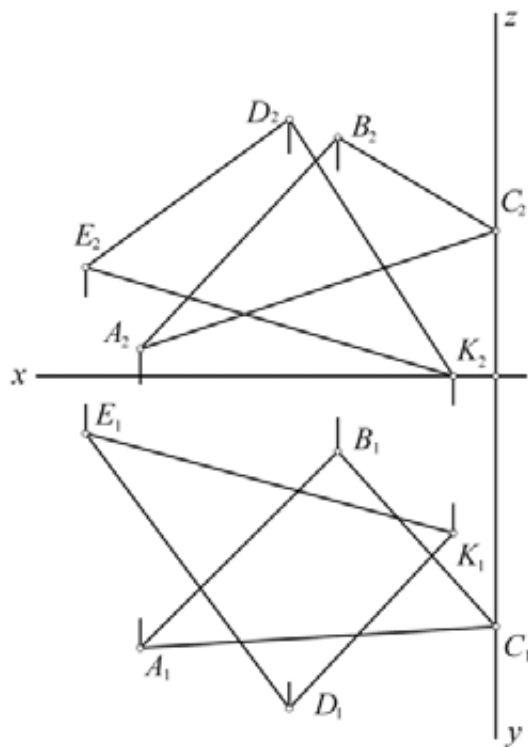


Рис. 10.1

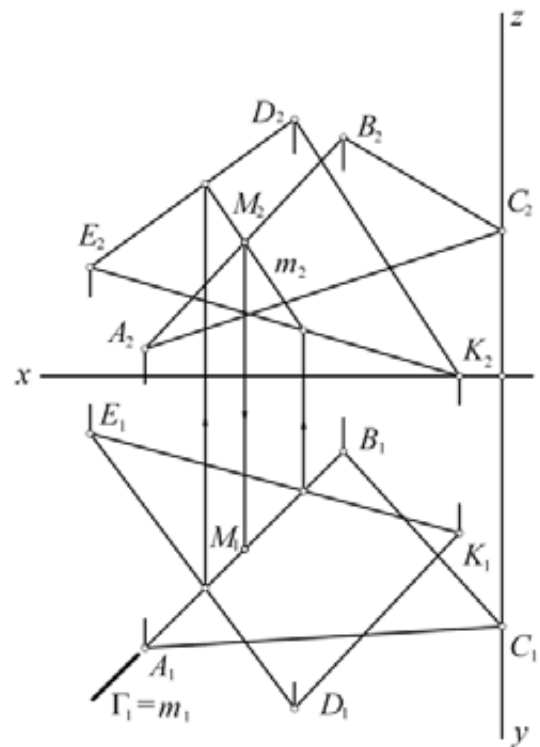


Рис. 10.2

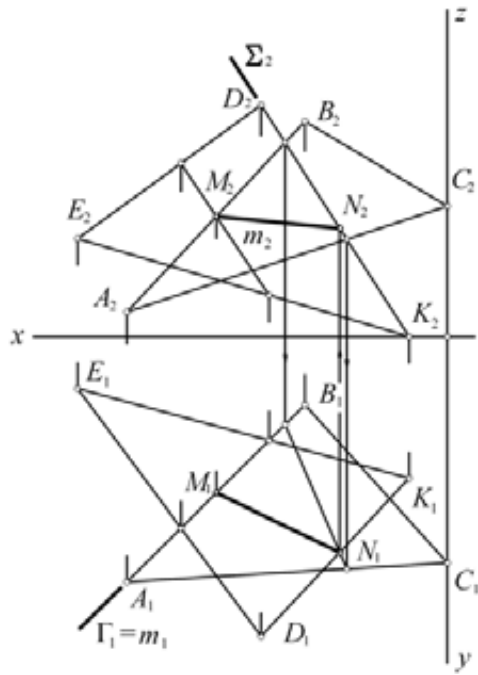


Рис. 10.3

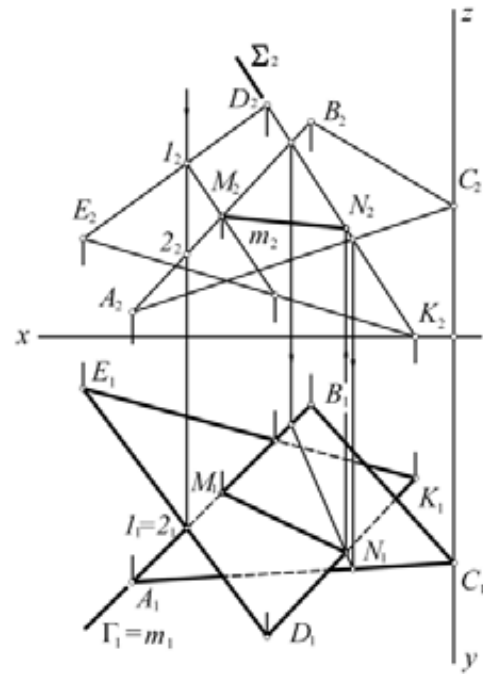


Рис. 10.4

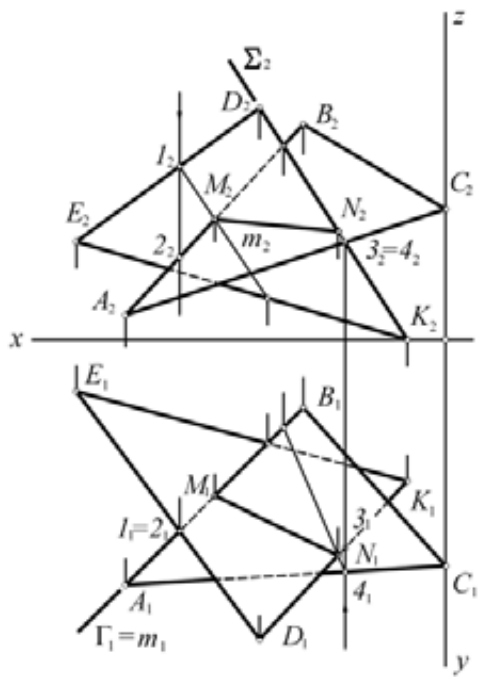


Рис. 10.5

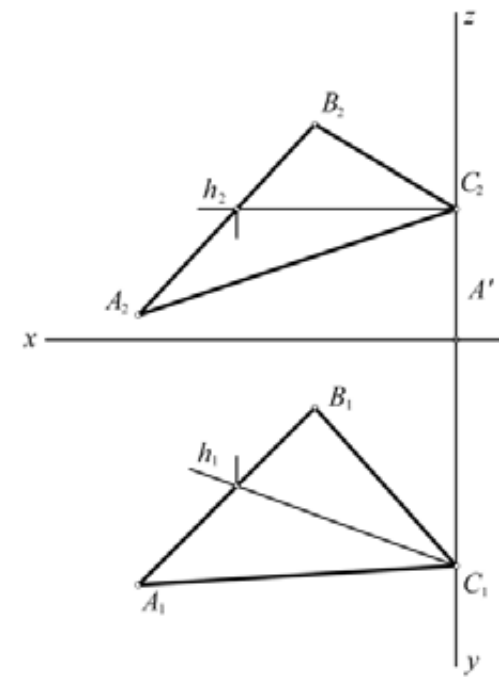


Рис. 10.6

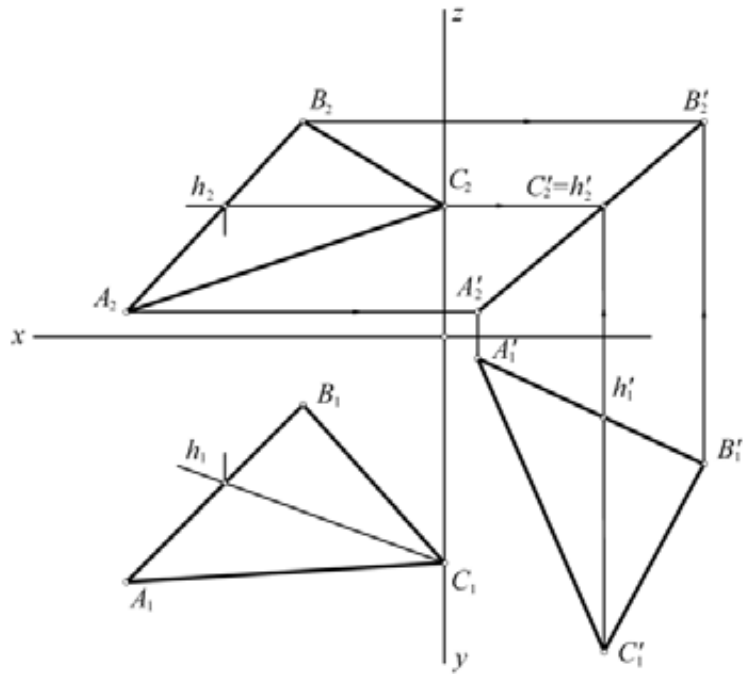


Рис. 10.7

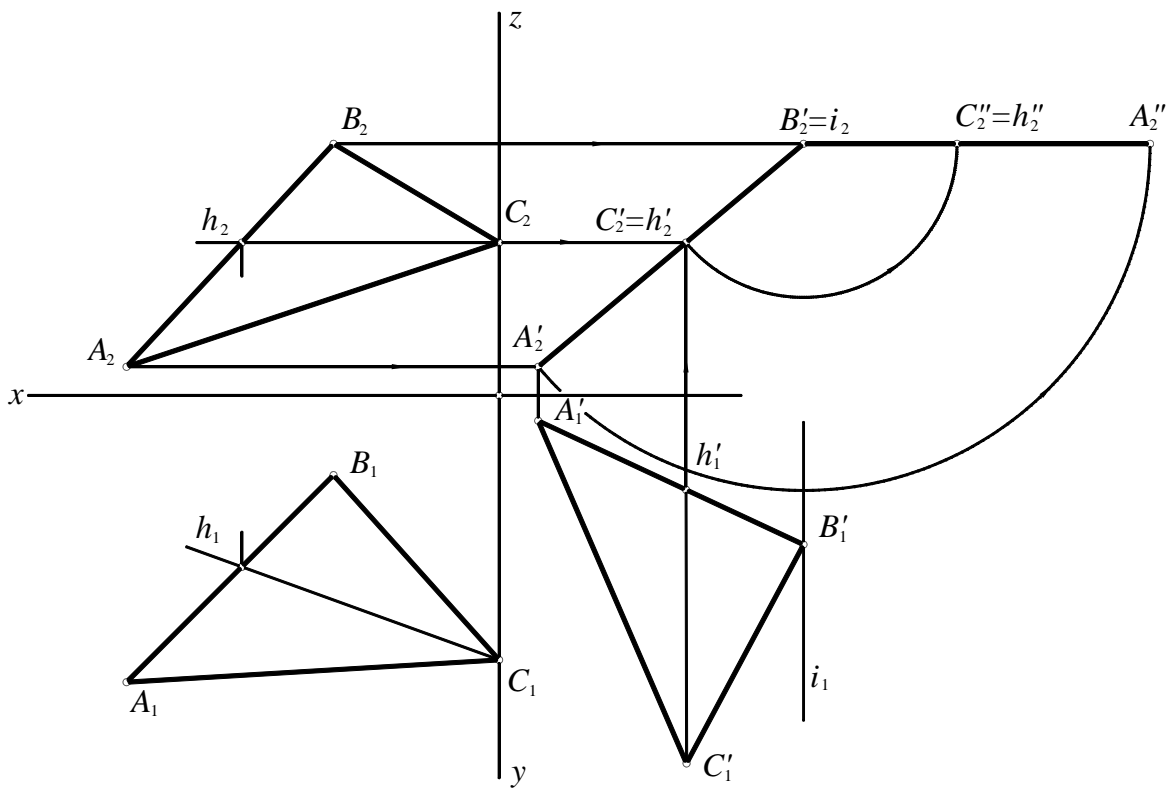


Рис. 10.8

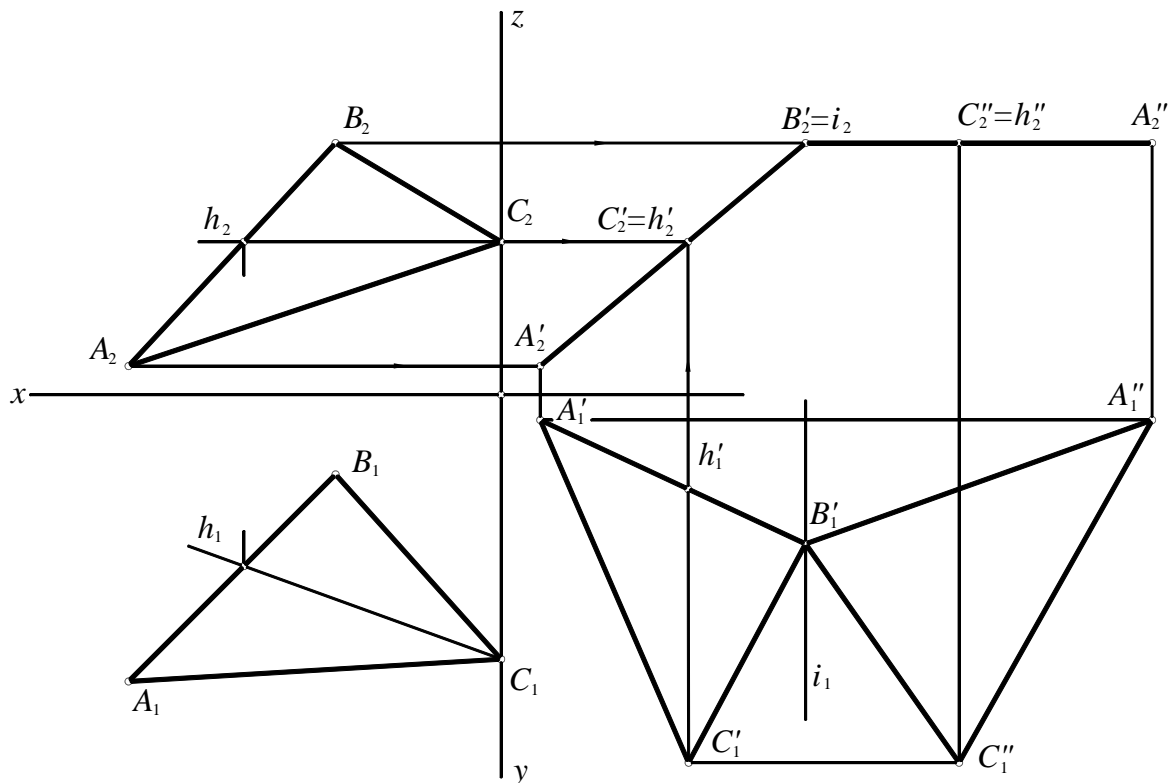


Рис. 10.9

-прямую l заключаем во вспомогательную проецирующую плоскость Γ ;

-находим линию m пересечения плоскостей Γ и Δ ;

-находим точку M пересечения прямых l и m .

Воспользуемся этим алгоритмом применительно к решению нашей задачи. Заключаем сторону AB треугольника ABC в горизонтально проецирующую плоскость Γ , то есть в плоскость, перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций. С плоскостью треугольника EDK вспомогательная плоскость пересекается по прямой m . Горизонтальная проекция m_1 этой прямой совпадает с A_1B_1 , а фронтальную получаем по двум точкам (на чертеже они изображены, но не обозначены), принадлежащим E_2D_2 и E_2K_2 . Далее находим точку M пересечения прямой m с AB . На горизонтальной проекции ее искать бесполезно, так как горизонтальные проекции этих двух прямых совпадают. А на фронтальной плоскости проекций сразу получаем M_2 . Горизонтальную проекцию M_1 находим с помощью линии связи, перпендикулярной оси Ox (рис.10.2). Найдем вторую точку N , принадлежащую линии пересечения. С этой целью сторону DK треугольника EDK заключаем во фронтально проецирующую плоскость Σ (рис.10.3). Причем вовсе не обязательно в проецирующие плоскости

заклучать стороны одного и того же треугольника. Алгоритм построения точки N тот же самый, что и для точки M . Таким образом, в нашем распоряжении две точки M и N , принадлежащие линии пересечения треугольников. Соединяя их, получаем искомую линию пересечения. Однако задача еще не решена. Если принять во внимание, что треугольники не прозрачные, то очевидно, что необходимо определить их видимость. Для этого используется метод конкурирующих точек. Поясним его суть (рис.10.10).

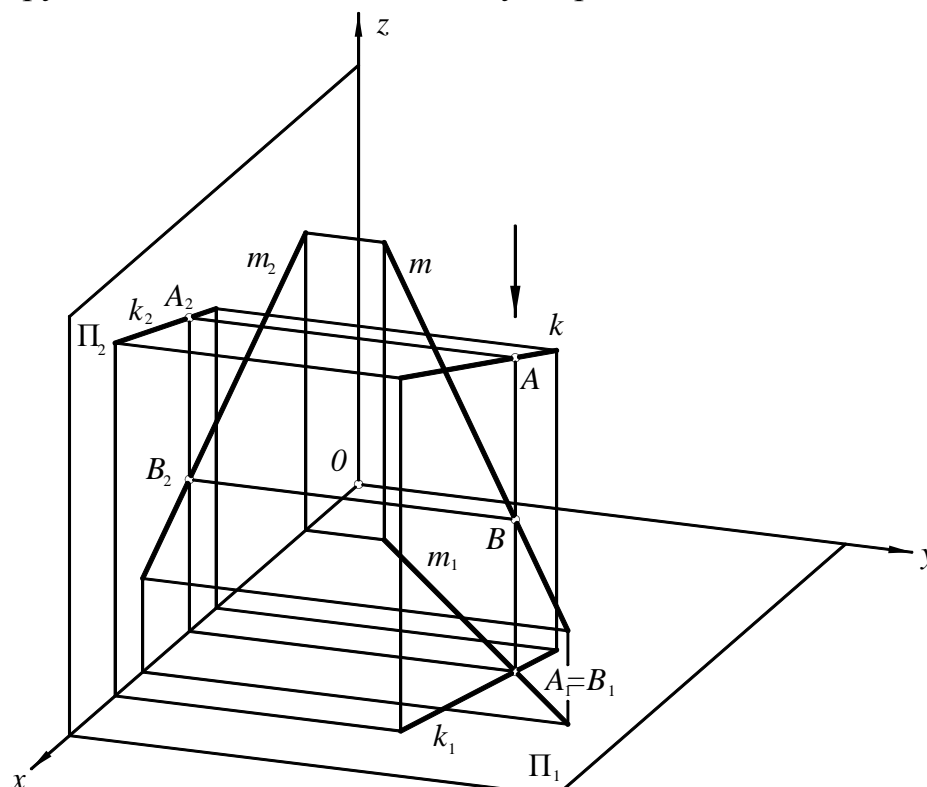


Рис. 10.10

Пусть заданы две прямые k и m и некоторая плоскость проекций, например, Π_1 . Наблюдателю, который находится сверху, кажется, что прямые k и m пересекаются, хотя на самом деле они скрещиваются. Точки A и B относительно плоскости Π_1 являются конкурирующими. Для наблюдателя видимой будет точка A , так как она расположена к нему ближе.

Теперь определим видимость треугольников. Сначала это сделаем на горизонтальной проекции (можно было бы начать и с фронтальной). Выбираем конкурирующие точки 1 и 2 (рис.10.4). Условимся, что точка 1 принадлежит прямой ED , а 2 – AB . Очевидно, что для наблюдателя, находящегося сверху, относительно горизонтальной плоскости проекций Π_1 точка 1 будет видимой, а 2 – невидимой. Следовательно,

сторона ED относительно Π_1 будет видимой, а AB – невидимой. А далее все становится очевидным. Необходимо лишь помнить о следующем:

-границей видимости (или невидимости) является линия MN пересечения треугольников;

-в одном и том же месте оба треугольника не могут быть одновременно видимыми.

Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций Π_2 выбираем конкурирующие точки 3 и 4 (рис.10.5). Относительно Π_2 видимой будет точка 4, принадлежащая AC , так как она ближе расположена к наблюдателю (ее горизонтальная проекция 4_1 удалена дальше от оси Ox). Таким образом, прямая AC будет видимой, а DK – невидимой. На участке DN прямая DK относительно Π_2 будет видимой, то есть она уже вышла из под треугольника. Дальнейшее определение видимости не вызывает затруднений.

Теперь определим натуральную величину треугольника ABC . Если бы плоскость треугольника ABC была бы параллельной одной из плоскостей проекций, то треугольник на эту плоскость проекций спроецировался бы в натуральную величину. К сожалению, плоскость треугольника занимает общее положение относительно плоскостей проекций, поэтому и появляется необходимость в определении натуральной величины. Воспользуемся способом плоскопараллельного перемещения. Плоскопараллельным перемещением фигуры относительно некоторой плоскости называется такое перемещение, в результате которого все точки фигуры перемещаются в плоскостях, параллельных заданной плоскости. Наш треугольник одним движением в положение, параллельное какой-либо плоскости проекций, привести не удастся. Задачу решим в два этапа. Сначала треугольник плоскопараллельным перемещением относительно Π_1 развернем так, чтобы его плоскость стала перпендикулярной фронтальной плоскости проекций. Затем плоскопараллельным движением относительно Π_2 треугольник приводим в положение, когда его плоскость будет параллельна Π_1 . В этом случае на горизонтальную плоскость проекций треугольник проецируется в натуральную величину. Плоскость треугольника ABC будет фронтально проецирующей, если горизонталь этой плоскости будет перпендикулярной плоскости Π_2 , то есть фронтально проецирующей прямой. Возьмем любую горизонталь, в нашем случае она проходит через вершину C (рис. 10.6). Так как при плоскопараллельном перемещении относительно Π_1 угол наклона данной плоскости к Π_1 не меняется, то горизонтальная проекция треугольника по величине также не изменится. Изменится лишь ее положение. Представьте себе, что эта проекция вырезана из бумаги, и

Вы перемещаете ее произвольно по полю чертежа (рис.10.7). Как только плоскость треугольника станет перпендикулярной Π_2 , горизонтальная проекция $A'_1 B'_1 C'_1$ займет такое положение, когда горизонтальная проекция $C'_1 F'_1$ горизонтали будет перпендикулярной оси Ox . При плоскопараллельном перемещении относительно Π_1 все точки треугольника перемещаются в плоскостях, параллельных Π_1 , которые на Π_2 изображаются прямыми, параллельными оси Ox . Исходя из этого, новая фронтальная проекция любой вершины, например, вершины A , получается как результат пересечения двух прямых.

$$A_2' = A_2 A_2' \cap A_1' A_2' \dots (A_2 A_2' // Ox, A_1' A_2' \perp Ox)$$

Если построения выполнены правильно, то новые проекции всех трех вершин должны расположиться на одной прямой.

Теперь остается сделать последний шаг к намеченной цели: плоскопараллельным движением относительно Π_2 повернуть треугольник в положение, параллельное Π_1 (рис.10.8). В нашем случае мы использовали частный случай плоскопараллельного перемещения – вращение вокруг фронтально проецирующей оси i , проходящей через вершину B . Новая фронтальная проекция $A_2'' B_2'' C_2''$ конгруэнтна $A_2' B_2' C_2'$ и параллельна оси Ox . Построение новой горизонтальной проекции $A_1'' B_1'' C_1''$ не вызывает особых затруднений и понятно из чертежа (рис.10.9). Еще раз отметим, что $A_1'' B_1'' C_1''$ является натуральной величиной треугольника ABC .

Задача 2. Построить проекции пирамиды, основанием которой является треугольник ABC , а ребро SA определяет высоту пирамиды h (рис.10.11).

Для того, чтобы построить ребро SA , перпендикулярное плоскости треугольника ABC , необходимо в плоскости задать две пересекающиеся прямые. В качестве таких прямых удобно задать горизонталь и фронталь. Задаем горизонталь h (рис.10.12) и сразу же строим горизонтальную проекцию n_1 перпендикуляра к плоскости. В силу теоремы о проецировании прямого угла горизонтальная проекция перпендикуляра к плоскости перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали. Далее задаем фронталь f плоскости (рис.10.13) и строим фронтальную проекцию n_2 перпендикуляра. Теперь необходимо на перпендикуляре найти точку S , если величина SA известна. Непосредственно на проекциях эту величину откладывать нельзя. Выберем произвольную точку K на перпендикуляре n (рис. 10.14) и

определим натуральную величину полученного отрезка. Наиболее удобно это сделать способом вращения, когда отрезок AK в результате вращения вокруг горизонтально проецирующей оси, проходящей через точку A , поворачивается до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций. При этом горизонтальная проекция отрезка перейдет в положение A_1K_1' , параллельное оси Ox , а фронтальная – в положение A_2K_2' . Очевидно, что A_2K_2' является натуральной величиной отрезка. Теперь на n_2' необходимо отложить высоту пирамиды $|A_2S_2'| = |AS|$ (рис.10.15). Построение фронтальной S_2 и горизонтальной S_1 проекций вершины S пирамиды понятно из чертежа. Далее вершину S соединяем с вершинами основания и получаем искомую пирамиду (рис.10.16). Видимость ребер относительно плоскостей проекций определяем методом конкурирующих точек (рис.10.17.). Например, относительно Π_2 конкурирующими точками будут точки 1 и 2. Очевидно, что точка 2, принадлежащая ребру SC будет видимой, так как она ближе расположена к наблюдателю (ее горизонтальная проекция 2_1 дальше удалена от оси Ox). Следовательно, относительно Π_2 ребро SC будет видимым, а AB –невидимым. Видимость относительно Π_1 определяем аналогично по точкам 3 и 4.

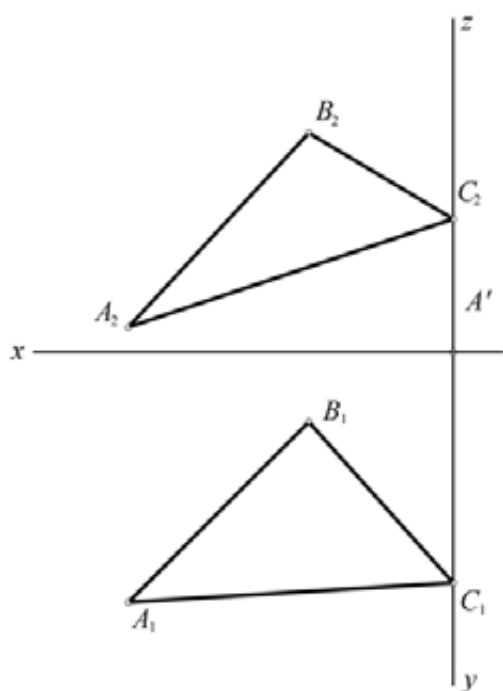


Рис. 10.11

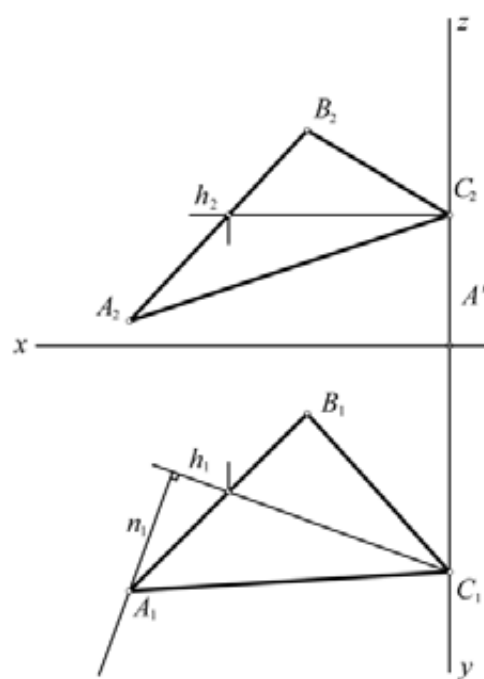


Рис. 10.12

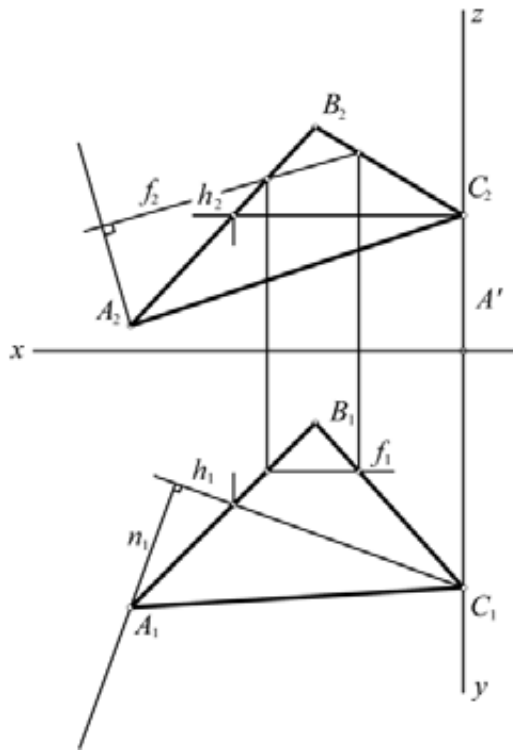


Рис. 10.13

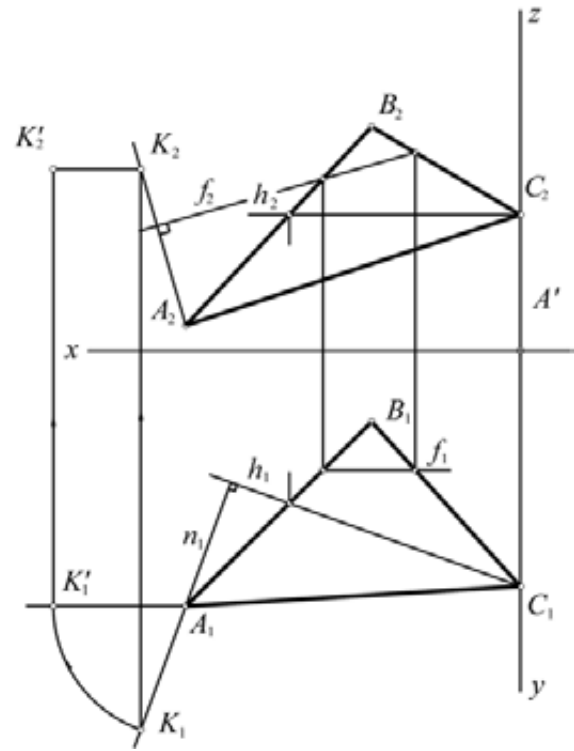


Рис. 10.14

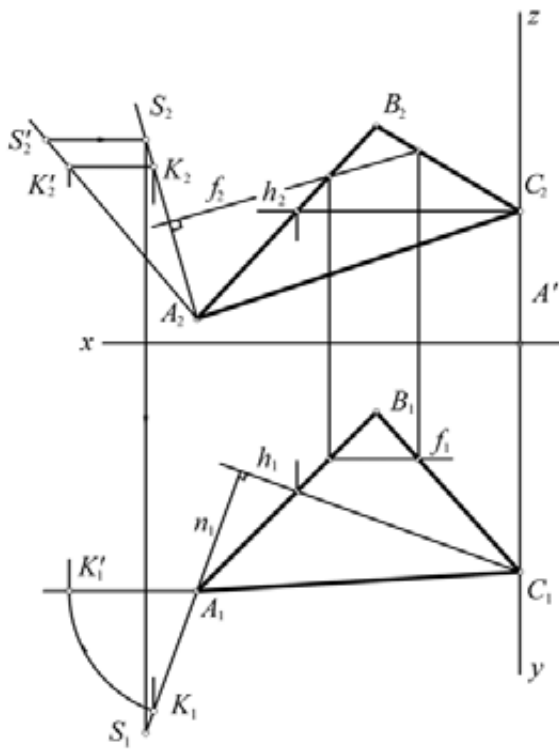


Рис. 10.15

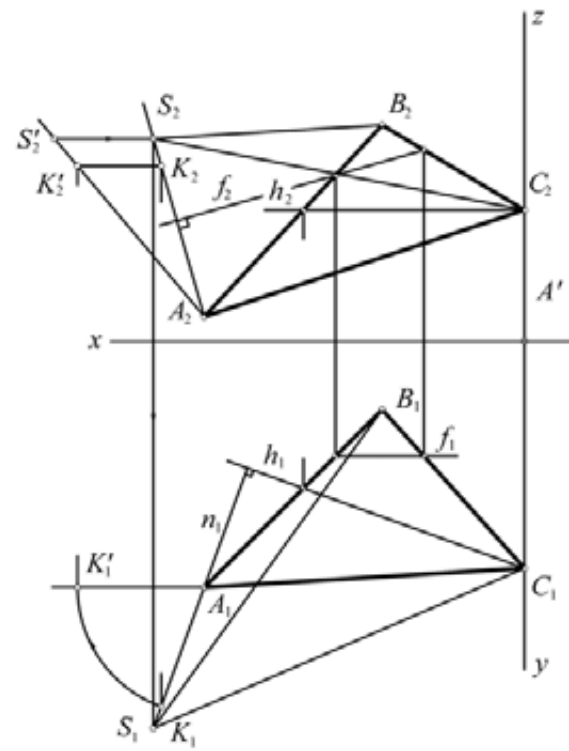


Рис. 10.16

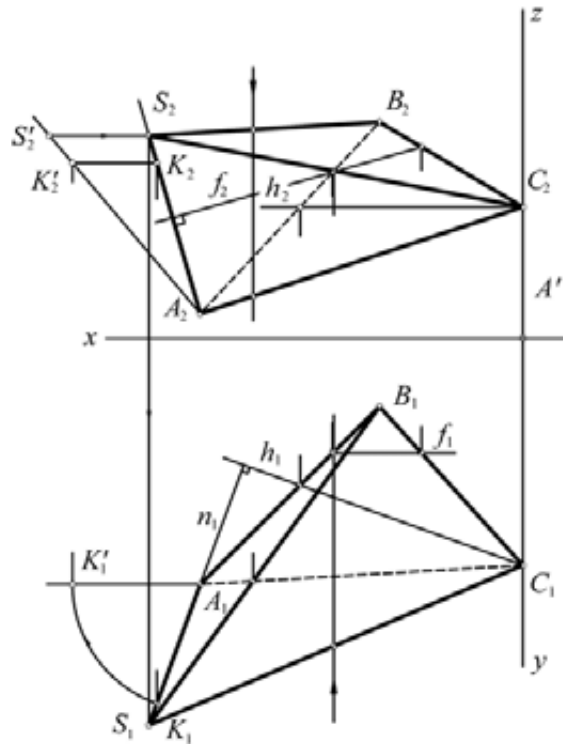


Рис. 10.17

Задача 3. Построить линию пересечения пирамиды с прямой призмой (рис.10.18).

Сначала найдем точки 1 и 4 пересечения ребра AD пирамиды с поверхностью призмы (рис.10.19). Находим горизонтальные проекции 1_1 и 4_1 , а затем, воспользовавшись линиями связи, фронтальные проекции 1_2 и 4_2 . Далее находим точки 2 и 5 пересечения ребра CD с поверхностью призмы. После этого находим точки 6 и 8 пересечения ребра E_2E_2' с поверхностью пирамиды (рис.10.20). Очевидно, что горизонтальные проекции 6_1 и 8_1 совпадают с E_1 . Для того, чтобы построить фронтальную проекцию 6_2 в грани $B_2C_2D_2$ через точку 6 проведем прямую F_2D_2 . Пересечение фронтальной проекции F_2D_2 с E_2E_2' дает фронтальную проекцию 6_2 точки 6. Аналогично находим фронтальную проекцию 8_2 точки 8. Для этого воспользуемся прямой D_2M_2 , проходящей через точку 8 и расположенной в грани $A_2B_2D_2$. Пересечение D_2M_2 с E_2E_2' дает 8_2 . И, наконец, находим точки 3 и 7 пересечения ребра BD пирамиды с поверхностью призмы (рис 10.21). Все необходимые точки найдены. Остается их только соединить в последовательности расположения их горизонтальных проекций, учитывая в какой из граней призмы они находятся (рис.10.22).

Задача 4. Построить развертки пересекающихся прямой призмы и пирамиды (см. задачу 3).

Развертку прямой призмы строим в следующей последовательности.

1. Проводим горизонтальную прямую, выбираем на ней произвольную точку G и откладываем отрезки GU , UE , EK , KG , равные длинам сторон оснований (рис.10.23) призмы, которые можно взять в задаче 3: $GU = G_1U_1$, $UE = U_1E_1$, $EK = E_1K_1$, $KG = K_1G_1$.

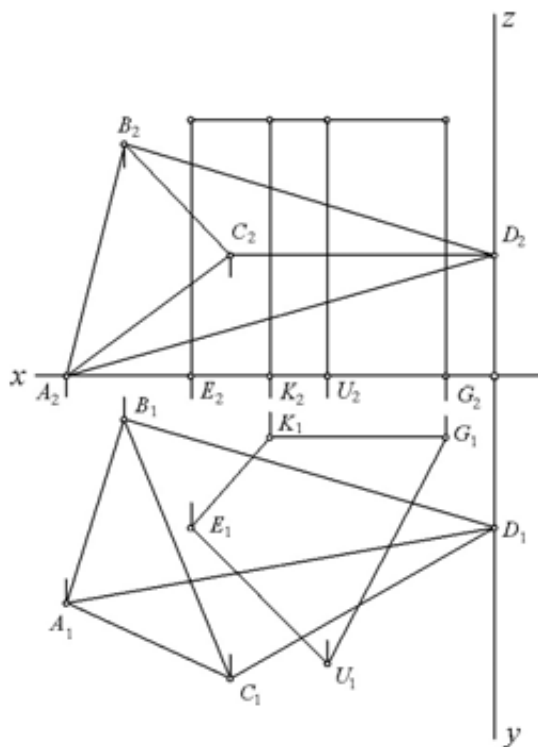


Рис. 10.18

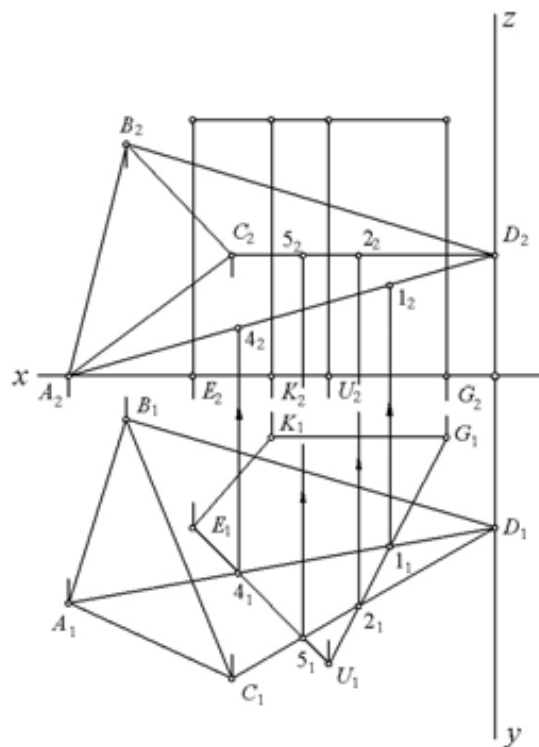


Рис. 10.19

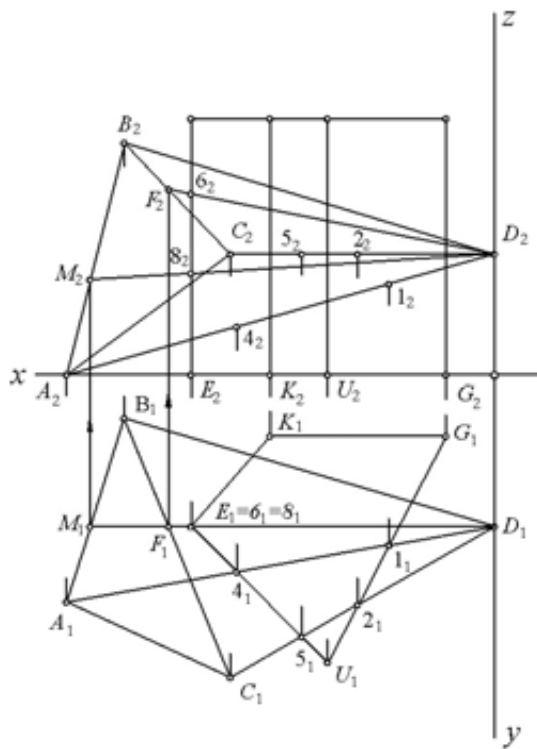


Рис. 10.20

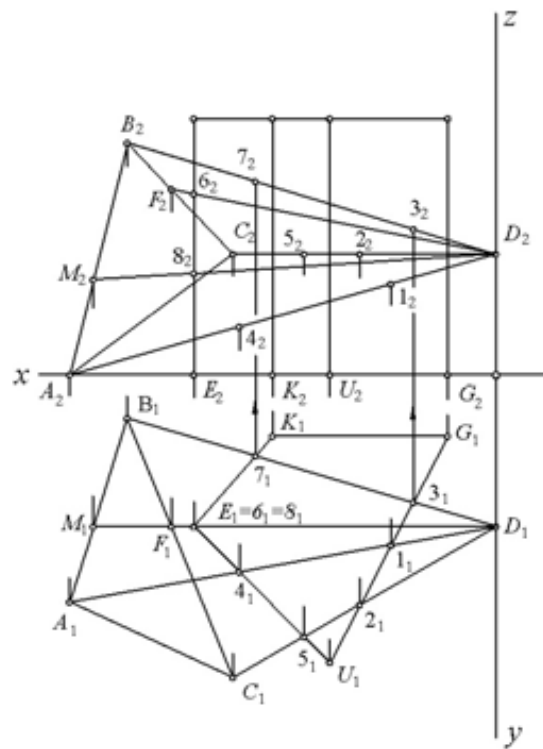


Рис. 10.21

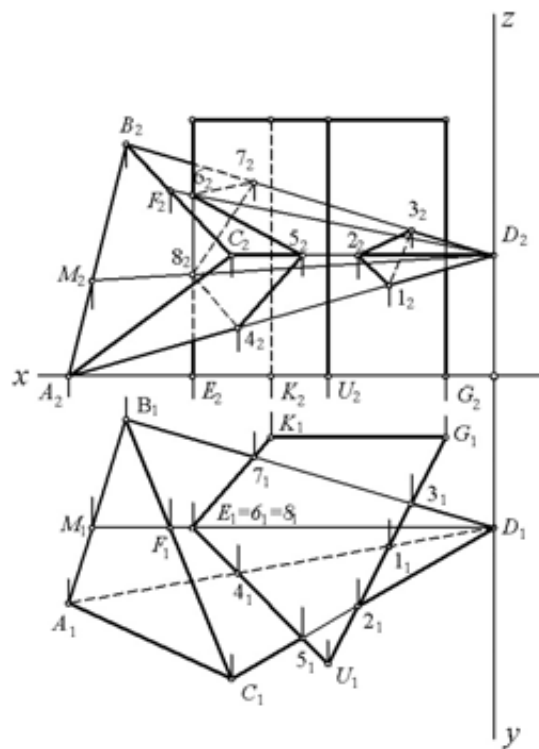


Рис. 10.22

2. Из точек G, U, E, K, G восстанавливаем перпендикуляры и на них откладываем отрезки, равные высоте призмы h . Полученные точки соединяем прямой. Прямоугольник является разверткой боковой поверхности призмы.

3. Для получения полной развертки поверхности призмы к развертке поверхности пристраиваем многоугольники ее оснований.

4. На развертке строим ломаные линии $1\ 2\ 3$ и $4\ 5\ 6\ 7\ 8$, являющиеся линиями пересечения призмы с пирамидой. Как это делается, рассмотрим на примере точки 1 . На отрезке GU от точки G вправо откладываем отрезок $GI_0 = GI = G_1I_1$. Из точки I_0 восстанавливаем перпендикуляр к отрезку GU и на нем откладываем аппликату точки 1 : $I_0I = I_xI_2$ (рис. 10.24). Аналогично строятся остальные точки линии пересечения призмы и пирамиды.

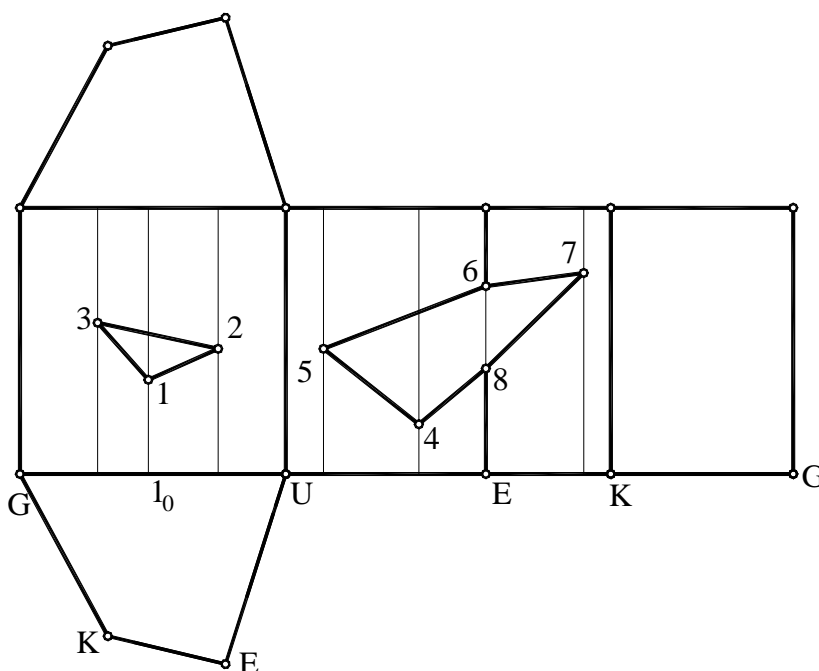


Рис. 10.23

Для построения развертки пирамиды необходимо найти натуральные величины ребер и граней пирамиды. Для этого целесообразно проекции каждого из ребер вместе с точками, принадлежащими линии пересечения призмы и пирамиды перенести на кальку и воспользоваться одним из известных способов (способ прямоугольного треугольника, способ вращения, способ плоскопараллельного перемещения) (рис.10.25). Далее строим развертку пирамиды. Для этого строим одно из ребер, например AB

(рис.10.26). Из точки A радиусом, равным длине ребра AD , а из точки B – длине ребра BD проводим дуги окружностей. На их пересечении получается точка D . Далее на ребре BD строим грань BCD (рис.10.27) и т.д. К одному из ребер, например к AB , пристраиваем основание пирамиды ABC (рис.10.28). Точки $1, 2, 3, 4, 5, 7$, принадлежащие линии пересечения призмы и пирамиды и расположенные на ребрах пирамиды, находим без труда, зная натуральные величины ребер (рис.10.29). Для того, чтобы найти точки 6 и 8 , расположенные в гранях ABD и BCD , необходимо найти натуральные величины этих граней. Делаем это так же, как и в задаче 1. Можно поступить несколько иначе. Например, для построения точки 6 ребро BC разделим точкой F в том же отношении, в каком точка F_1 делит проекцию $B_1 C_1$. Далее на прямой DF находим точку 6 из условия $\frac{D6}{6F} = \frac{D_1 6_1}{6_1 F_1}$. Соединяя точки $1, 2, 3, 1$ и $4, 8, 7, 6, 5, 4$ отрезками, получаем изображение на развертке линии пересечения пирамиды и призмы.

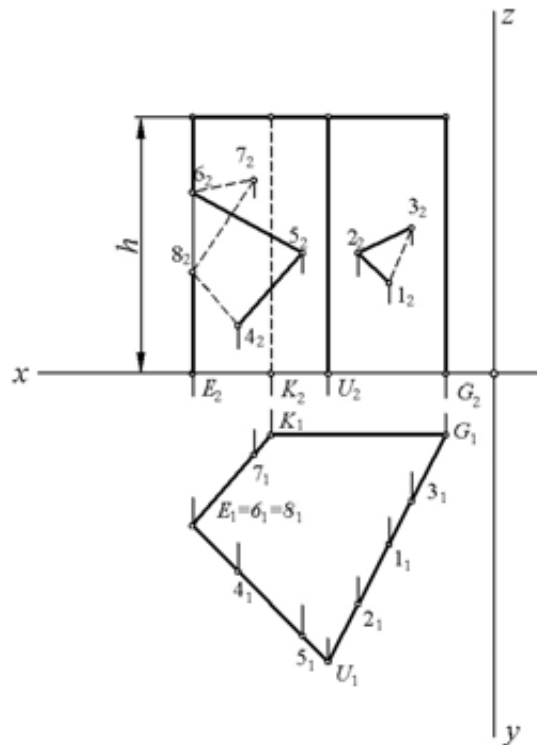


Рис. 10.24

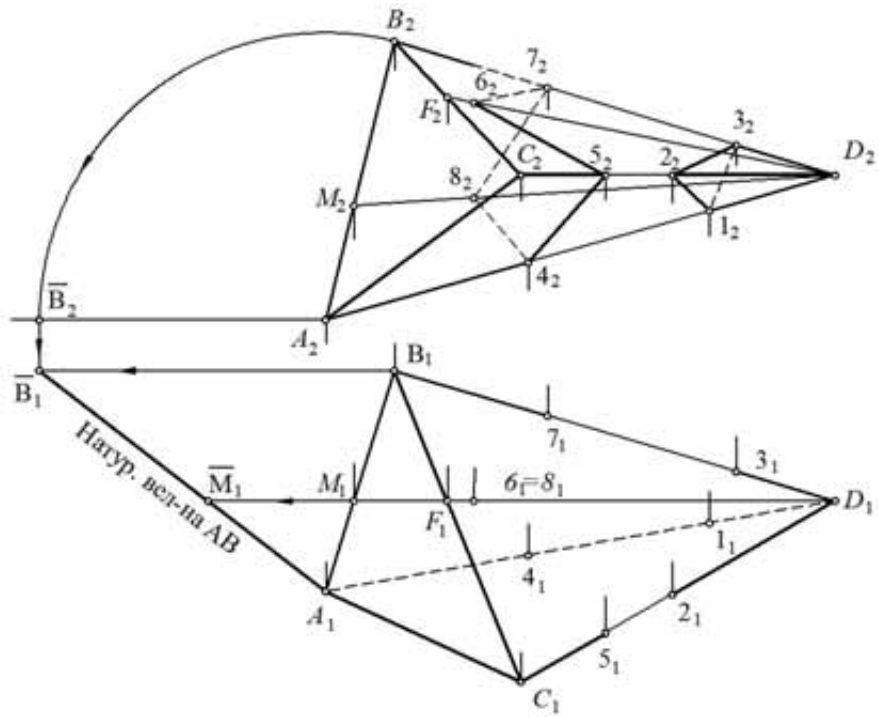


Рис. 10.25

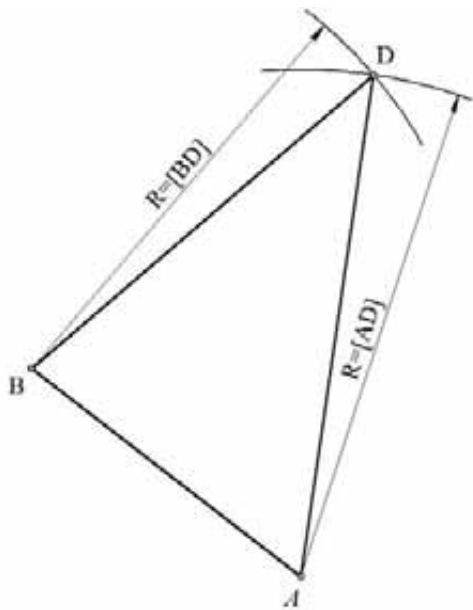


Рис. 10.26

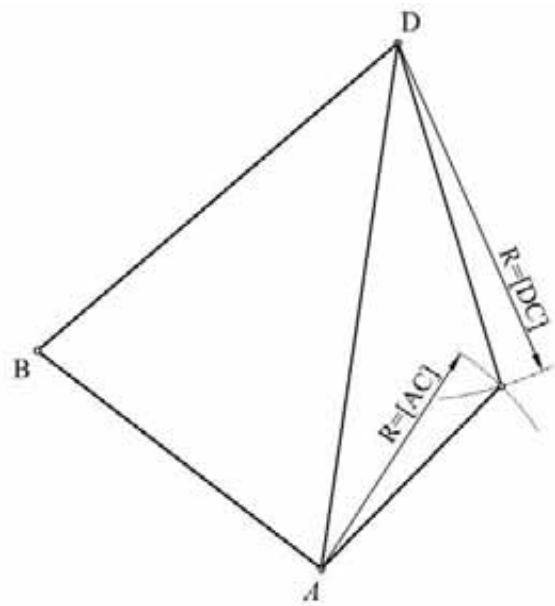


Рис. 10.27

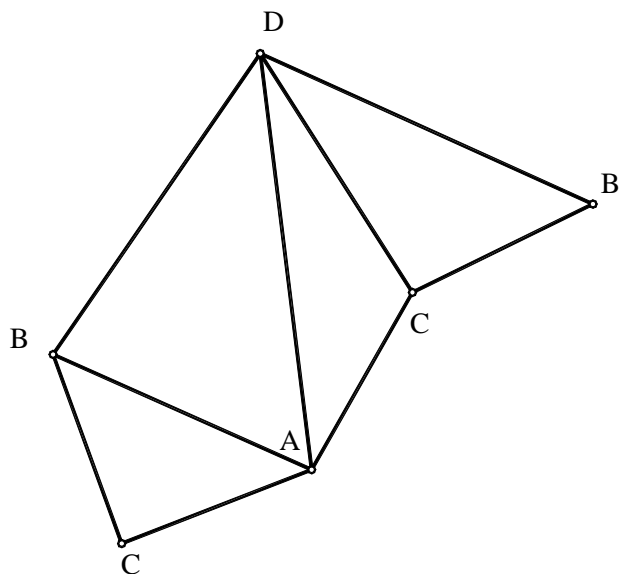


Рис. 10.28

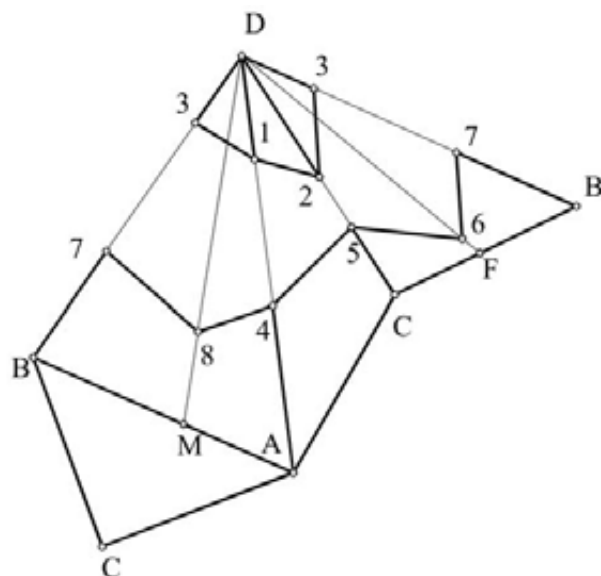


Рис. 10.29

Задача 5. В плоскости $\Gamma(ABC)$ построить проекции окружности заданного радиуса R с центром в точке A (рис. 10.30).

Поскольку плоскость является плоскостью общего положения, то окружность на Π_2 и Π_1 проецируется в эллипсы. Построим их. Большие оси эллипсов принадлежат прямым уровня, соответственно горизонтали AC и фронтонали AB , и по величине равны диаметру окружности. Поэтому большую ось 1_12_1 эллипса на Π_1 откладываем на горизонтальной проекции горизонтали A_1C_1 , а большую ось 3_24_2 эллипса на Π_2 – на

фронтальной проекции фронтали A_2B_2 . Вторые проекции $3_1, 4_1$ (рис. 10.31) и (рис. 10.32) точек 3,4.1,2. находим из условия их принадлежности фронтали и горизонтали.

Эллипс на Π_1 определен большой осью 1_12_1 и двумя точками 3_1 и 4_1 (рис. 10.33). Малая ось по величине неизвестна. Но мы знаем, что она перпендикулярна большой. Через точку 3_1 проводим прямую, параллельную малой оси, то есть перпендикулярно 1_12_1 до пересечения с окружностью радиуса R . Полученную точку пересечения соединяем с A_1 (рис.10.34). Из точки 3_1 проводим прямую, параллельную $1_1 2_1$., до пересечения с лучом, проходящим через точку A_1 (рис.10.35, 10.36). Точка пересечения $б_1$ определит малую ось эллипса. Далее используем способ построения эллипса по большой и малой осям.

Построение эллипса на Π_2 осуществляется аналогично изложенному (рис. 10.37).

Задача 6. На трехпроекционном чертеже построить недостающие проекции сквозного отверстия в сфере заданного радиуса R (рис.10.38).

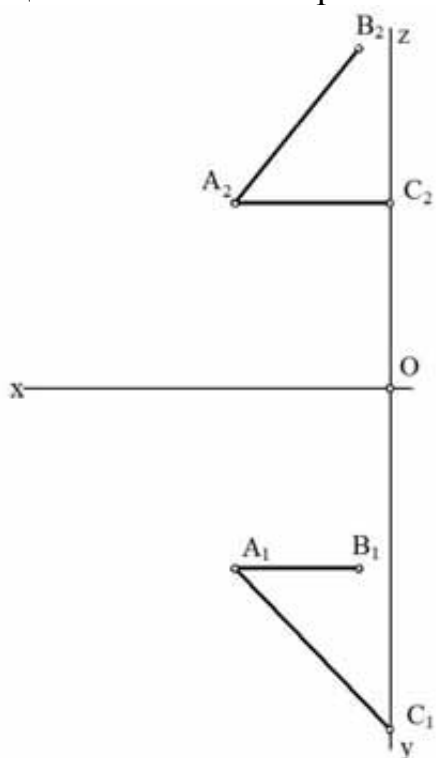


Рис. 10.30

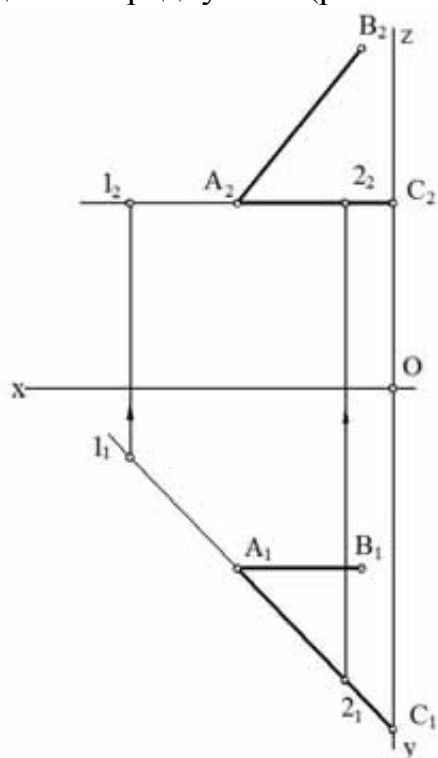


Рис. 10.31

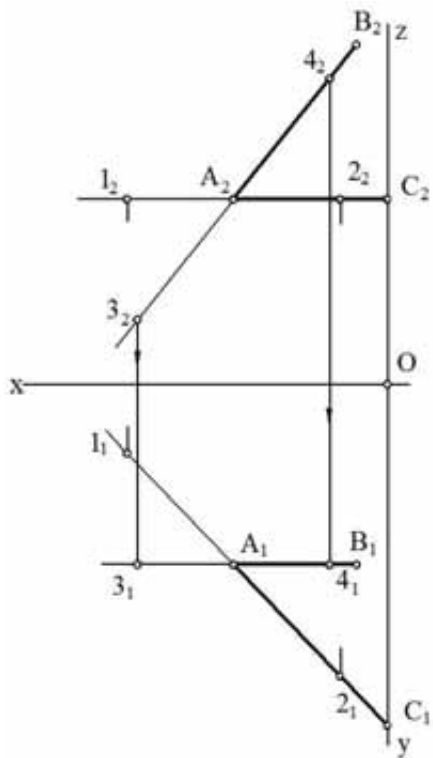


Рис. 10.32

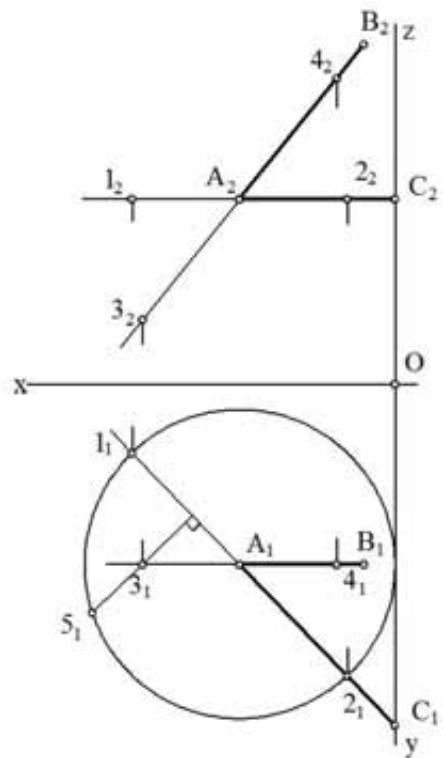


Рис. 10.33

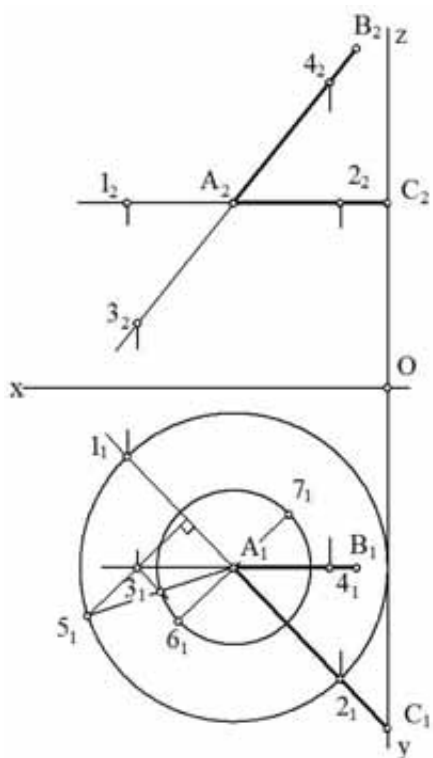


Рис. 10.34

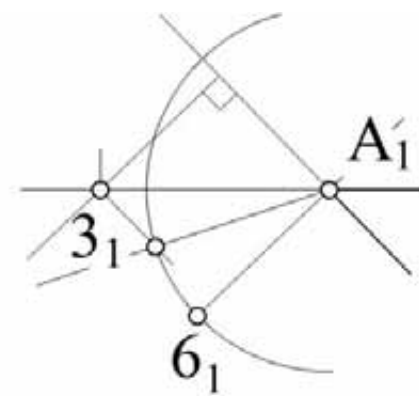


Рис. 10.35

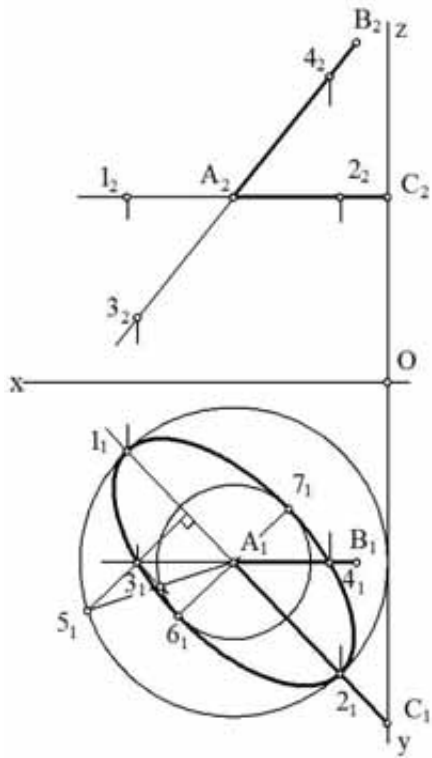


Рис. 10.36

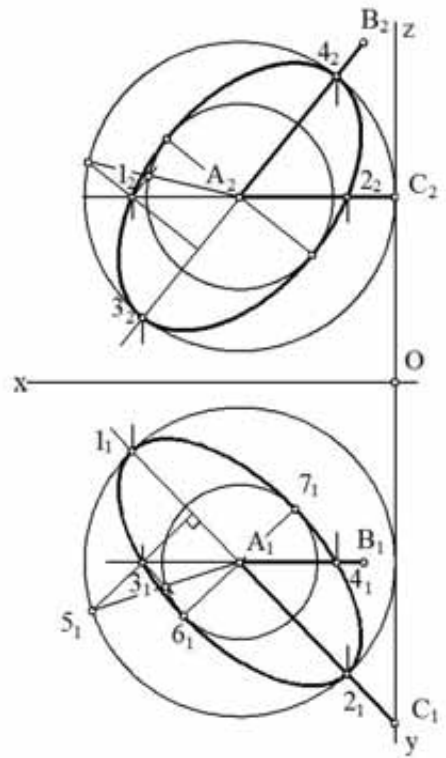


Рис. 10.37

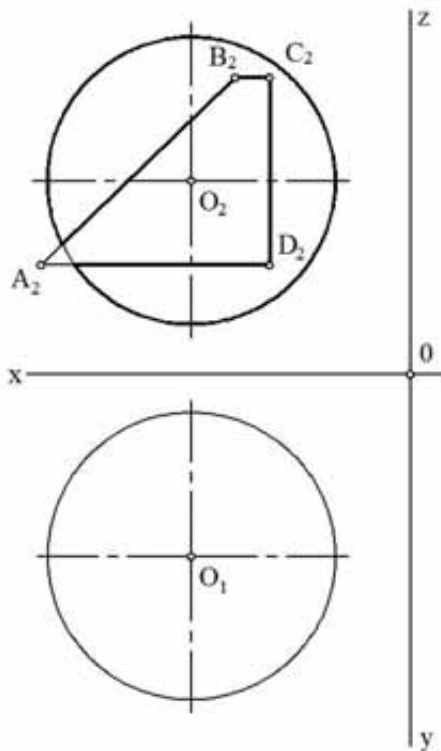


Рис. 10.38

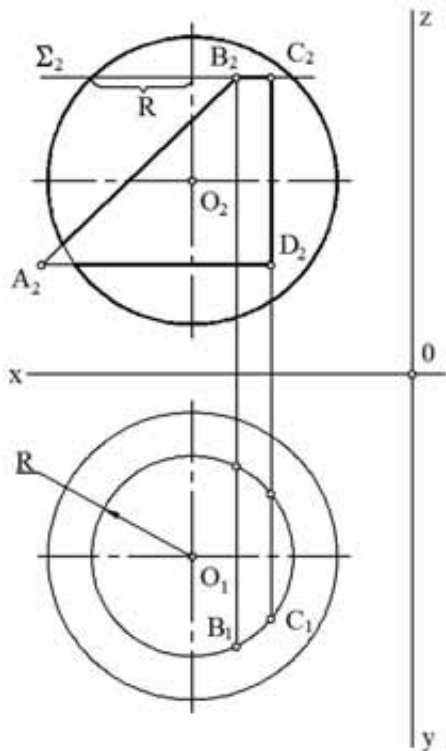


Рис. 10.39

Построим горизонтальную проекцию. Задача сводится к определению недостающих проекций точек, принадлежащих сфере. Для построения горизонтальных проекций B_1 и C_1 точек B и C возьмем горизонтальную плоскость уровня Σ , проходящую через эти точки (рис.10.39). Плоскость пересекает сферу по окружности m радиуса R . На Π_2 эта окружность проецируется в прямую, а на Π_1 – в натуральную величину, то есть в окружность радиуса R . Горизонтальные проекции B_1 и C_1 будут располагаться на этой окружности. Проекции A_1 и D_1 точек A и D располагаются на горизонтальной проекции окружности радиуса R' , получаемой в сечении сферы с горизонтальной плоскостью уровня, проходящей через точки A и D (рис. 10.40). Точки C и D , кроме того, расположены на окружности, плоскость которой параллельна профильной плоскости проекций. Поэтому на Π_1 и Π_2 эта окружность проецируется в отрезки прямых. Горизонтальная проекция k_1 окружности k , которая получается при пересечении сферы фронтально проецирующей плоскостью, проходящей через точки A и B , является эллипсом (рис. 10.41), который построим по точкам. Точка I расположена на экваторе сферы, поэтому ее горизонтальная проекция I_1 будет расположена на горизонтальной проекции экватора, то есть на очерке сферы (рис. 10.42). Большая полуось эллипса определяется точкой 3 . Фронтальная проекция 3_2 является основанием перпендикуляра, опущенного из O_2 на 2_2B_2 . Горизонтальная проекция 3_1 точки 3 располагается на горизонтальной проекции окружности радиуса R'' , которая получается при пересечении сферы горизонтальной плоскостью уровня, проходящей через точку 3 . Теперь мы имеем достаточное количество точек, чтобы построить горизонтальную проекцию k_1 окружности k (рис. 10.43) и горизонтальную проекцию сферы (рис. 10.44).

Построение профильной проекции сквозного отверстия осуществляется аналогично. В качестве вспомогательных плоскостей при этом используются профильные плоскости уровня (рис. 10.45 - 10.49).

Наглядное изображение сферы показано на рис. 10.50.

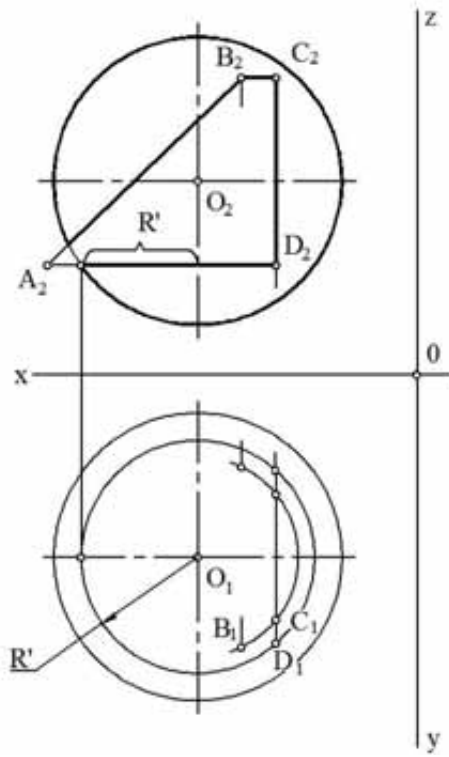


Рис. 10.40

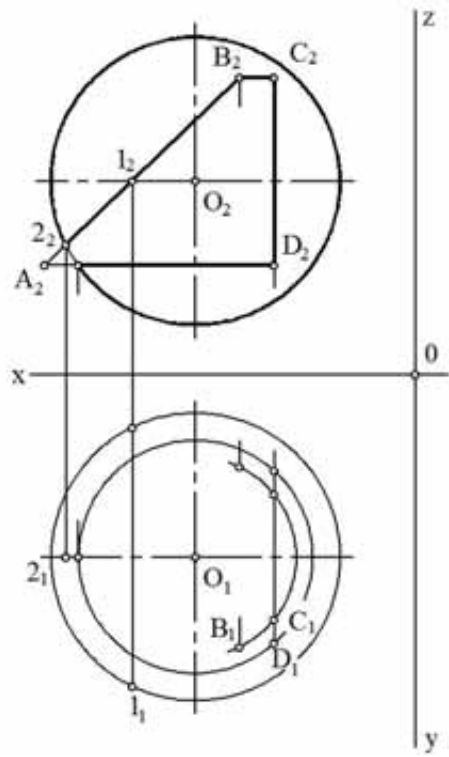


Рис. 10.41

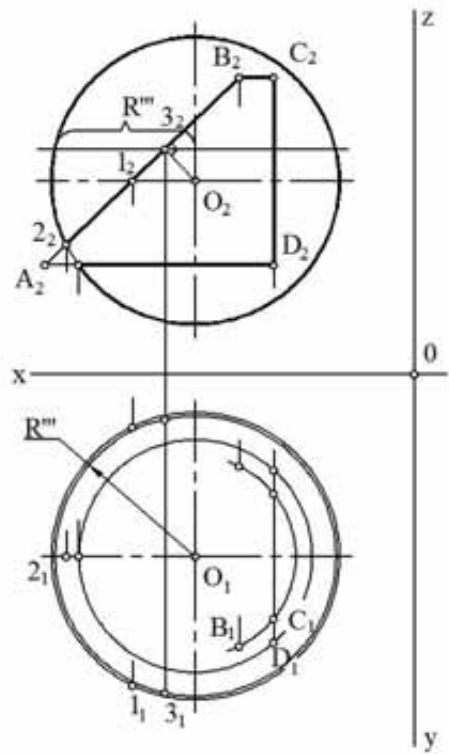


Рис. 10.42

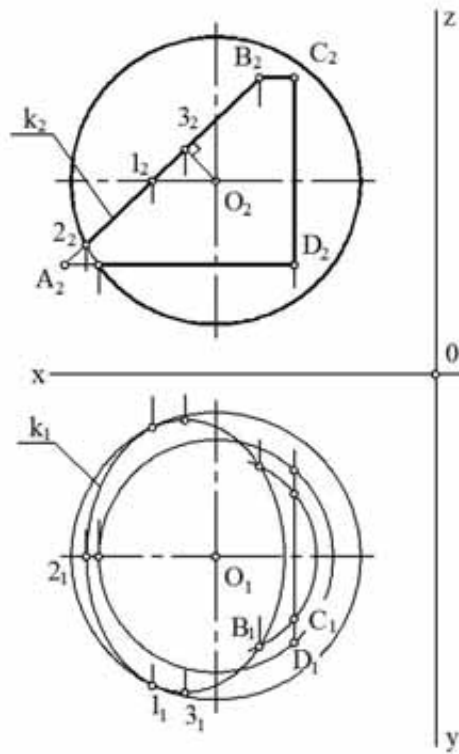


Рис. 10.43

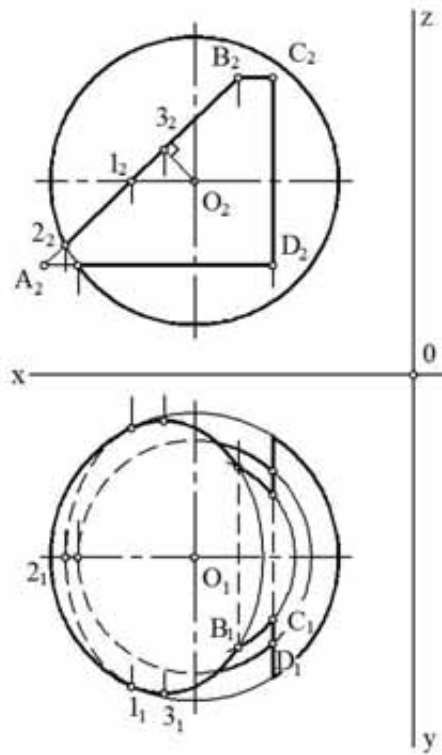


Рис. 10.44

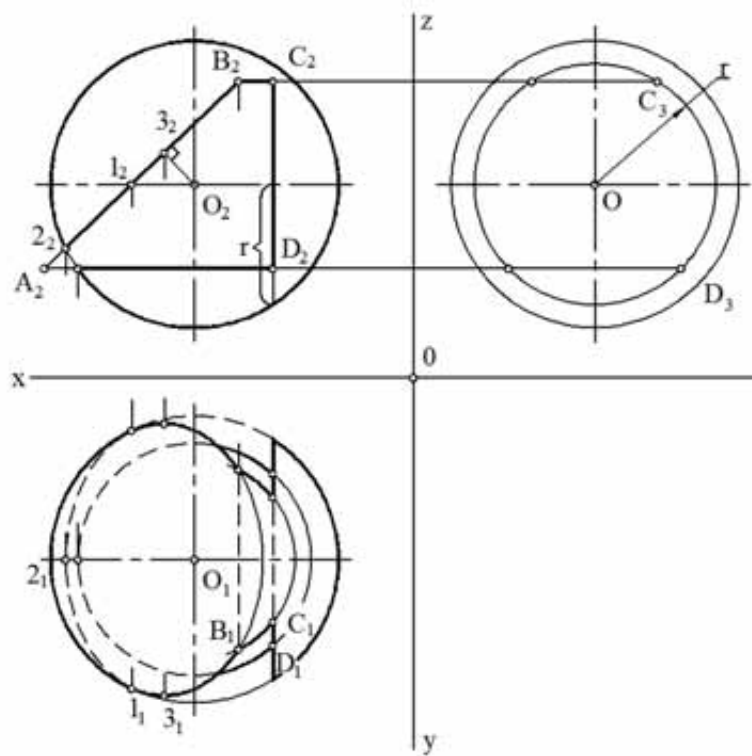


Рис. 10.45

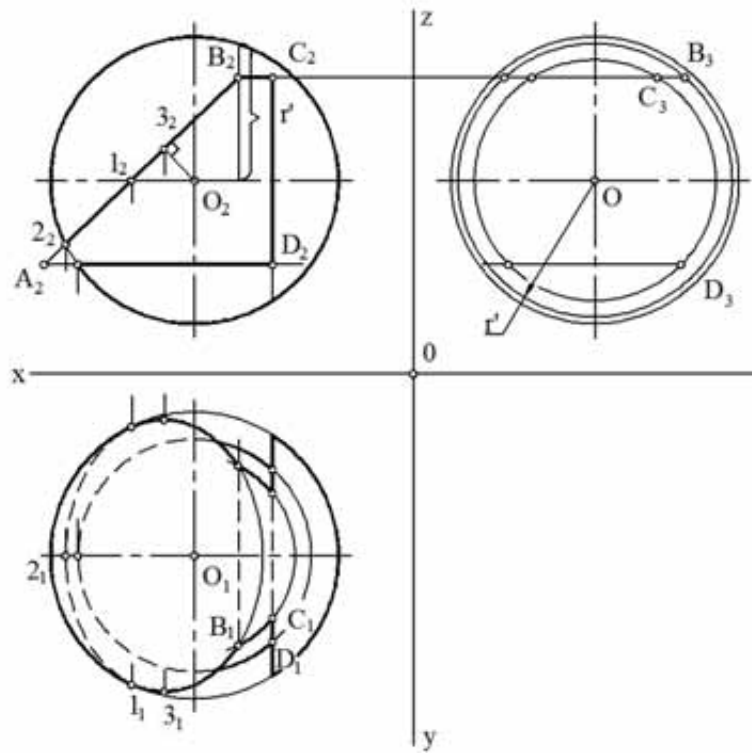


Рис. 10.46

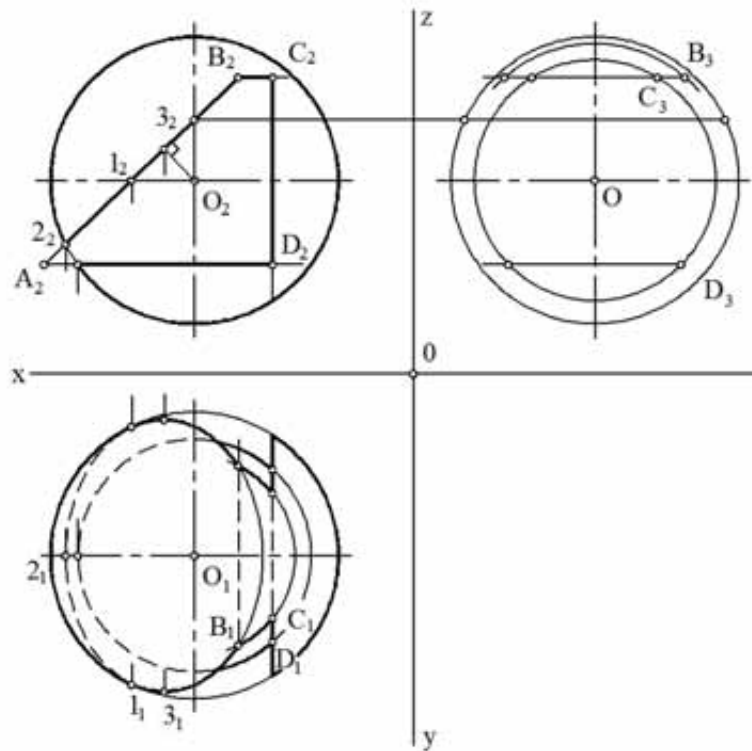


Рис. 10.47

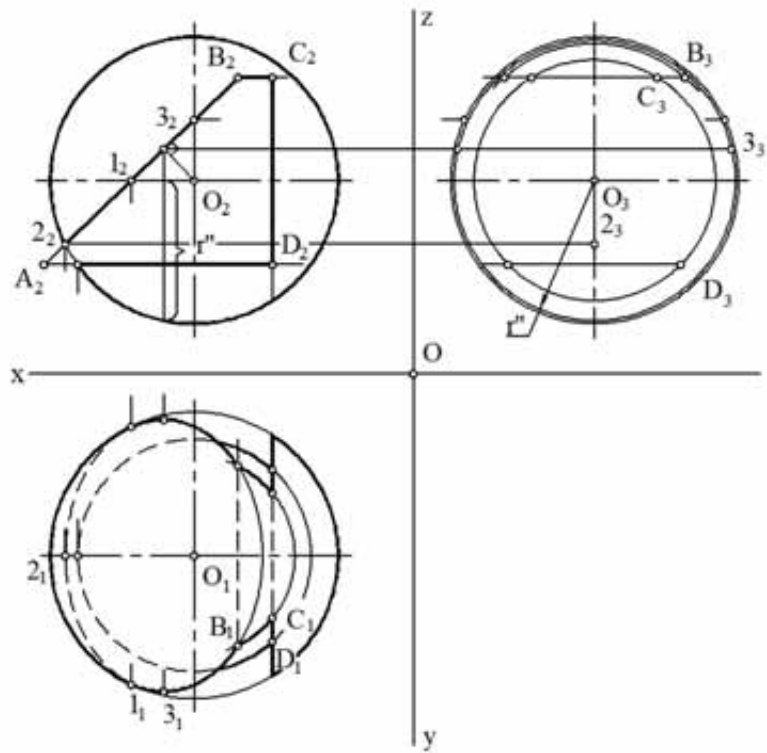


Рис. 10.48

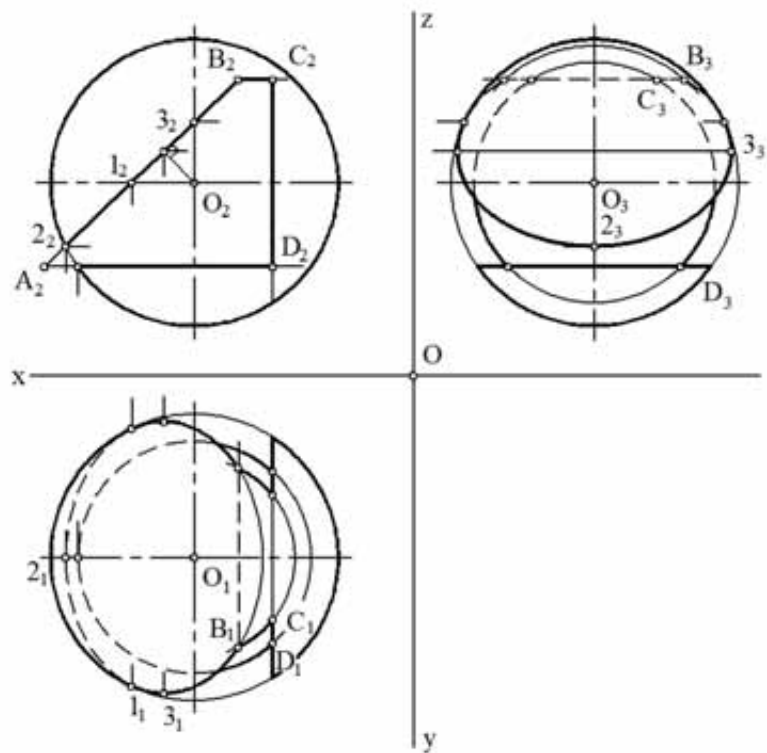
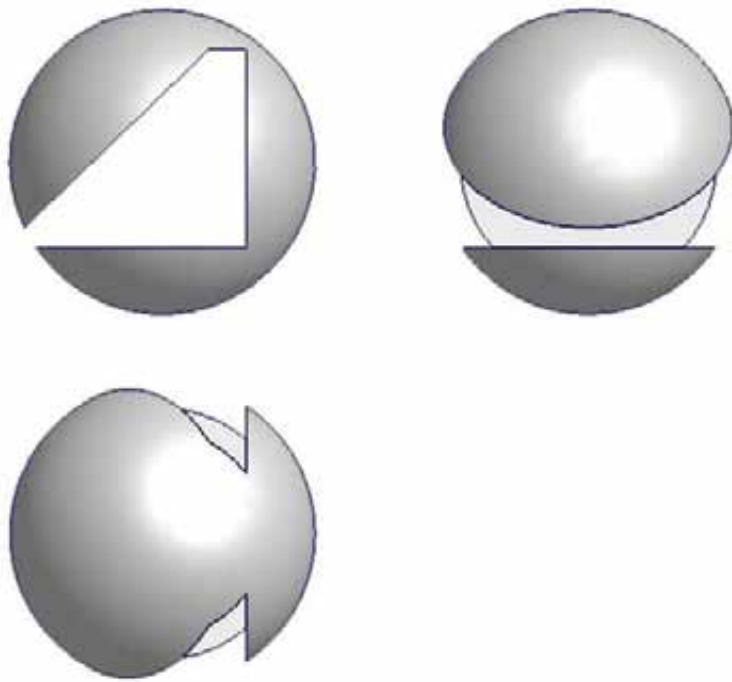


Рис. 10.49



а



б

Рис. 10.50



Задача 7. Построить линию пересечения конуса вращения плоскостью $\Gamma(ABC)$ (рис. 10.51).

Плоскости, имеющие различные положения в пространстве, пересекают конус по кривым второго порядка. Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса – получается окружность, если плоскость параллельна оси, но не проходит через вершину – гипербола, если секущая плоскость параллельна одной из образующих – парабола, если секущая плоскость проходит через вершину конуса – кривая второго порядка, распавшаяся на две прямые, если секущая плоскость занимает положение, отличное от перечисленных, получается эллипс.

Нам предстоит построить сечение конуса вращения плоскостью, заданной двумя пересекающимися прямыми AB и BC . Прямая AB является горизонталью плоскости, так как ее фронтальная проекция A_2B_2 параллельна оси Ox . Эту задачу удобнее всего решать, используя способы преобразования чертежа, например, способ замены плоскостей проекций. Заменим фронтальную плоскость проекций Π_2 на новую фронтальную плоскость $\bar{\Pi}_2$, так чтобы она была перпендикулярна секущей плоскости. Для этого достаточно, чтобы одна из прямых заданной секущей плоскости была перпендикулярной Π_2' . В качестве такой прямой удобно выбрать горизонталь AB . Новая ось \bar{Ox} будет перпендикулярной A_1B_1 (рис. 10.52). Для построения фронтальных проекций конуса и секущей плоскости в системе $\Pi_1\bar{\Pi}_2'$ необходимо помнить, что аппликата любой точки остается той же самой, что и для системы $\Pi_1\Pi_2$. Для построения, например, новой проекции S_2' вершины S конуса из S_1 перпендикулярно \bar{Ox} проводим линию связи и на ней от оси \bar{Ox} откладываем $z_s = K_2S_2 = K_2'S_2'$. Аналогично строим новые фронтальные проекции точек A, B, C . В результате преобразования получаем тот случай, когда секущая плоскость является фронтально проецирующей, то есть перпендикулярной Π_2' , а следовательно, на Π_2' она проецируется в прямую линию. Линия пересечения конуса вращения заданной секущей плоскостью (в нашем случае – эллипс) на Π_2' проецируется в эту же самую прямую. Наша задача – построить проекции эллипса на исходных плоскостях проекций Π_2 и Π_1 . Большая ось определяется точками 1 и 2, проекции $1_2'$ и $2_2'$ которых находятся без дополнительных построений (рис. 10.53). Для построения 1_1 и 2_1 из $1_2'$ и $2_2'$ проводим линии связи, перпендикулярные

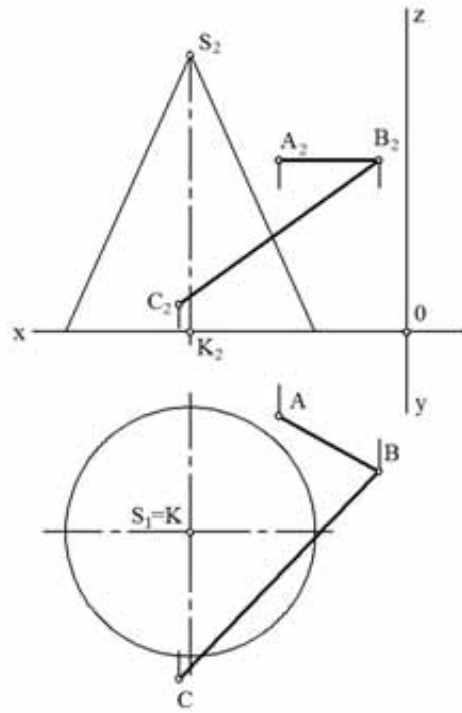


Рис. 10.51

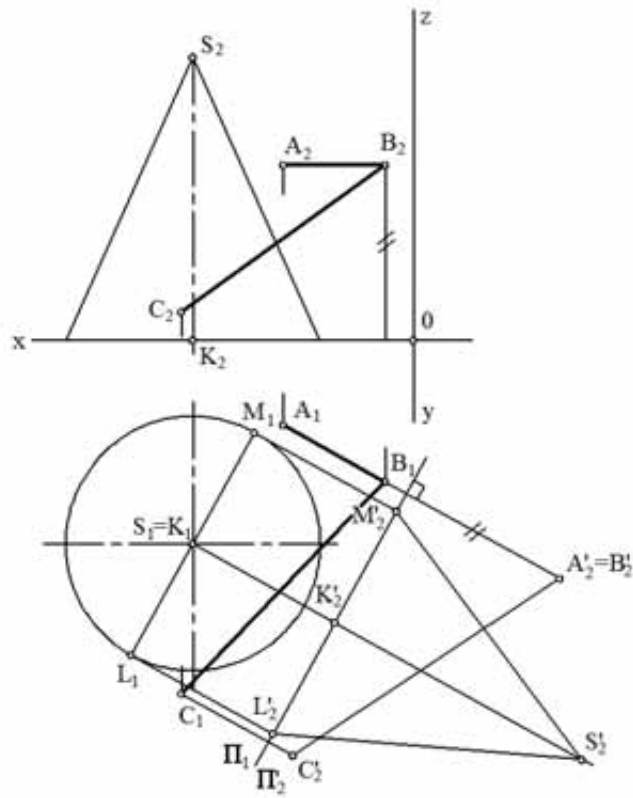


Рис. 10.52

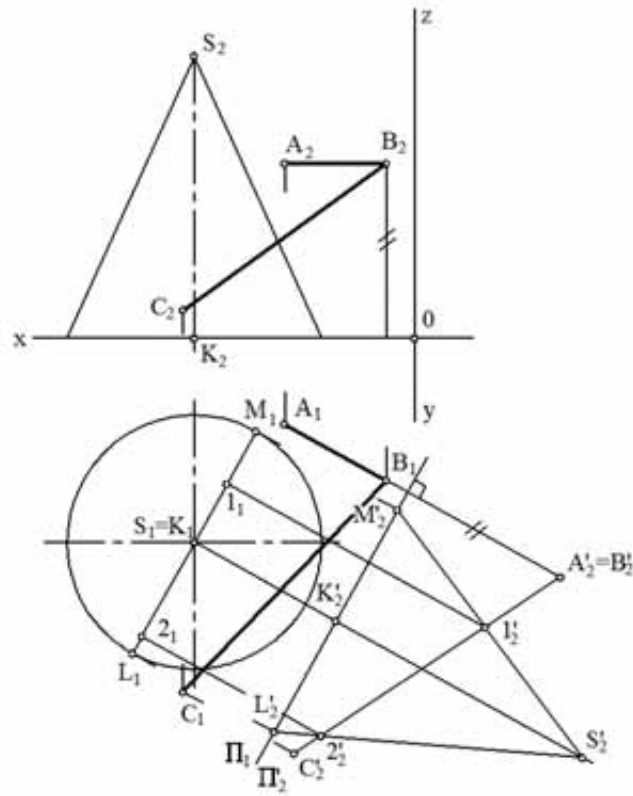


Рис. 10.53

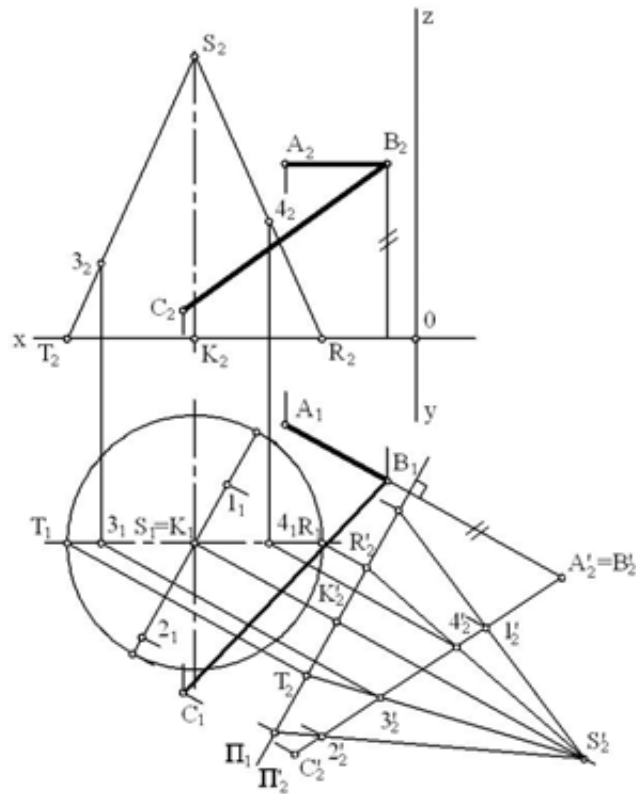


Рис. 10.54

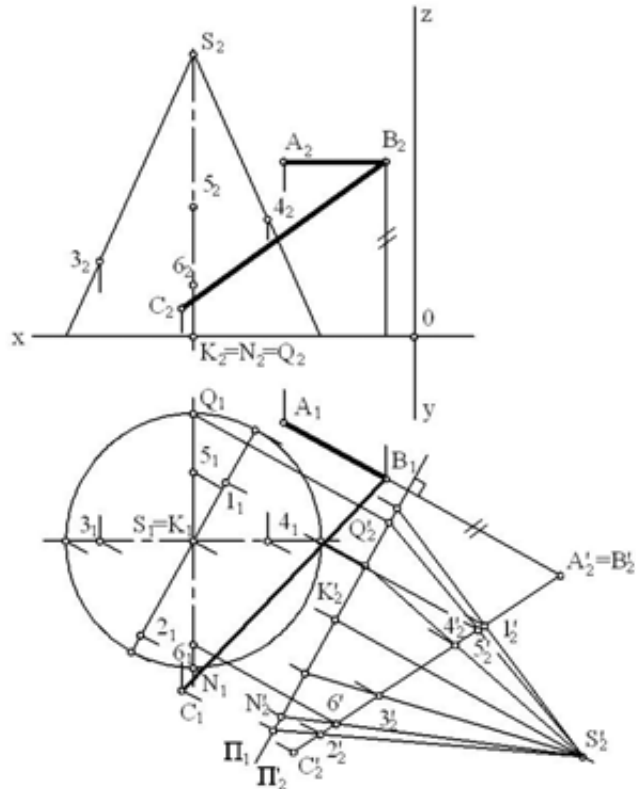


Рис.10.55

\overline{Ox} , до пересечения с горизонтальными проекциями S_1M_1 и S_1L_1 образующих SM и SL . Обращаем внимание на то, что S_1M_1 и S_1L_1 параллельны \overline{Ox} . Фронтальные проекции 1_2 и 2_2 расположены на соответствующих линиях связи, причем расстояния от 1_2 и 2_2 до оси Ox равны соответствующим расстояниям от $1'_2$ и $2'_2$ до оси \overline{Ox} .

Видимость эллипса относительно фронтальной плоскости проекций Π_2 определится точками 3 и 4 , расположенными на образующих SR и ST (рис. 10.54). Находим проекции $S'_2R'_2$ и $S'_2T'_2$ этих образующих на Π'_2 , воспользовавшись линиями связи, а затем проекции $3'_2$ и $4'_2$ как результат пересечения $S'_2R'_2$ и $S'_2T'_2$ с проекцией секущей плоскости. После этого находим проекции 3_1 и 4_1 , а затем уже 3_2 и 4_2 . Еще раз обращаем внимание на то, что расстояния от 3_2 и 4_2 до оси Ox равны расстояниям от $3'_2$ и $4'_2$ до оси \overline{Ox} .

Построение точек 5 и 6 , принадлежащих образующим SN и SQ осуществляется аналогично изложенному (рис. 10.55).

Найдем точки 7 и 8 , определяющие малую ось эллипса (рис. 10.56). Проекции $7'_2, 8'_2$ совпадают и делят отрезок $1'_22'_2$ пополам, так

как малая ось 78 проходит через середину большой оси 12 . Для построения горизонтальных проекций 7_1 и 8_1 точек 7 и 8 воспользуемся горизонтальной плоскостью уровня, проходящей через эти точки. Она пересекает конус по окружности, которая на Π'_2 проецируется отрезком прямой, а на Π_1 – в натуральную величину, то есть в окружность. В пересечении этой окружности с линией связи получаем точки 7_1 и 8_1 . Фронтальные проекции 7_2 и 8_2 находятся аналогично изложенному. Обращаем внимание лишь на то, что расстояния от проекций 7_2 и 8_2 до оси Ox равны.

Таким образом, мы получили проекции точек, принадлежащих искомому эллипсу. Соединяя их плавной кривой, получаем проекции эллипса. С учетом видимости проекции конуса имеют вид, представленный на рис. 10.57.

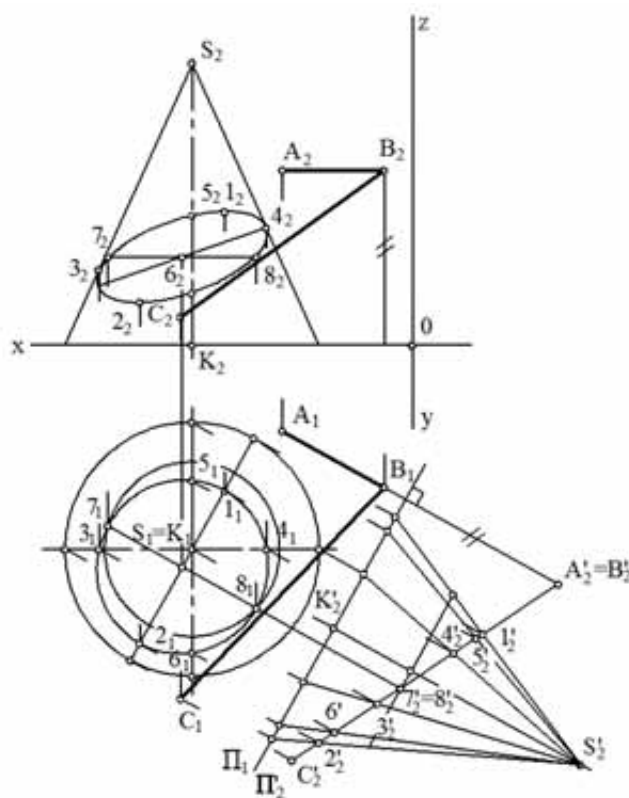


Рис. 10.56

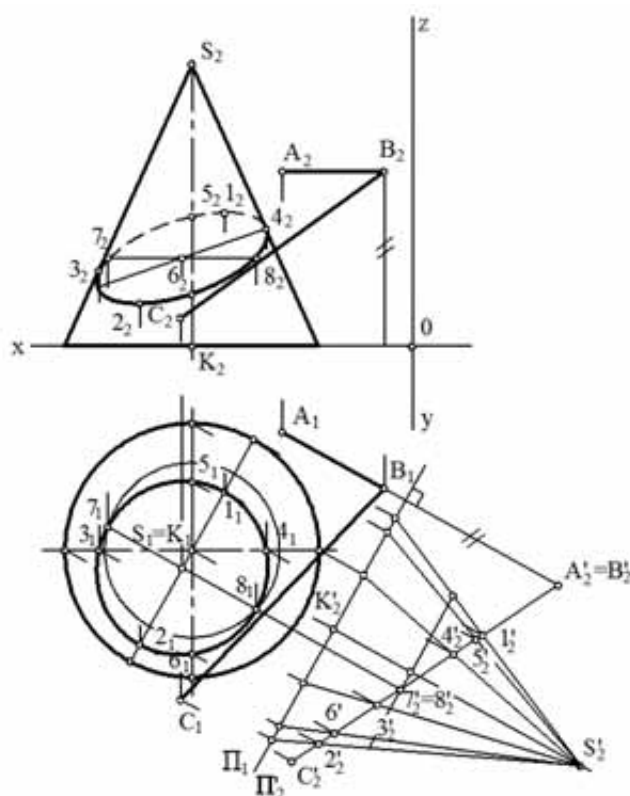


Рис. 10.57

Задача 8. Построить линию пересечения конуса вращения с цилиндром вращения (рис. 10.58).

Задачи на нахождение линии пересечения поверхностей представляют особый интерес как в теоретическом, так и в прикладном плане. При их решении наглядно демонстрируется преимущество методов начертательной геометрии перед методами аналитической геометрии.

При построении линии пересечения конуса и цилиндра вращения воспользуемся методом вспомогательных секущих плоскостей. Очевидно, что фронтальную проекцию линии пересечения строить не нужно: в связи с тем, что вся поверхность цилиндра проецируется в окружность, а линия пересечения расположена на поверхности цилиндра, то ее фронтальной проекцией будет дуга окружности. Остается только найти горизонтальные проекции точек пересечения. Горизонтальные проекции 1_1 и 6_1 точек 1 и 6 (фронтальные проекции 1_2 и 6_2 являются результатом пересечения очерков конуса и цилиндра) расположены на горизонтальной проекции главного меридиана конуса относительно Π_2 , которая совпадает с осевой линией (рис. 10.59). Далее найдем точки 3 и $\bar{3}$, являющиеся точками видимости относительно Π_1

(рис. 10.60). Для этого воспользуемся горизонтальной плоскостью Γ , проходящей через ось цилиндра. Относительно Π_1 она делит цилиндр на две части: видимую – верхнюю и невидимую – нижнюю. Цилиндр этой плоскостью пересекается по двум крайним образующим, проекции которых на Π_1 являются горизонтальным очерком цилиндра, а конус – по окружности радиуса r , которая на Π_2 проецируется отрезком прямой, а на Π_1 – в натуральную величину. На пересечении этой окружности с горизонтальными проекциями крайних образующих получаем горизонтальные проекции 3_1 и $\bar{3}_1$ точек 3 и $\bar{3}$. Фронтальные проекции 3_2 и $\bar{3}_2$ совпадают и расположены на фронтальном очерке цилиндра, то есть на окружности. После этого находим случайные точки линии пересечения. Покажем, как это делается на примере одной точки, например, 2 (рис. 10.61). Фронтальная проекция 2_2 выбрана на окружности произвольно (потому-то точки и называются случайными). Для построения горизонтальных проекций 2_1 и $\bar{2}_1$ воспользуемся горизонтальной плоскостью Δ . Эта плоскость пересекает цилиндр по двум образующим, которые на Π_2 проецируются в точки (одна из них – в точку 2_2), а на Π_1 – в прямые, перпендикулярные оси Ox (на чертеже изображены, но не обозначены). Конус пересекается по окружности радиуса R , которая опять же на Π_1 проецируется в натуральную величину. В пересечении горизонтальных проекций окружности и прямолинейных образующих (в данном случае – одной) получаем горизонтальные проекции 2_1 и $\bar{2}_1$ точек 2 и $\bar{2}$.

Аналогично находятся случайная точка 4 и наинизшая точка 5 (рис. 10.62).

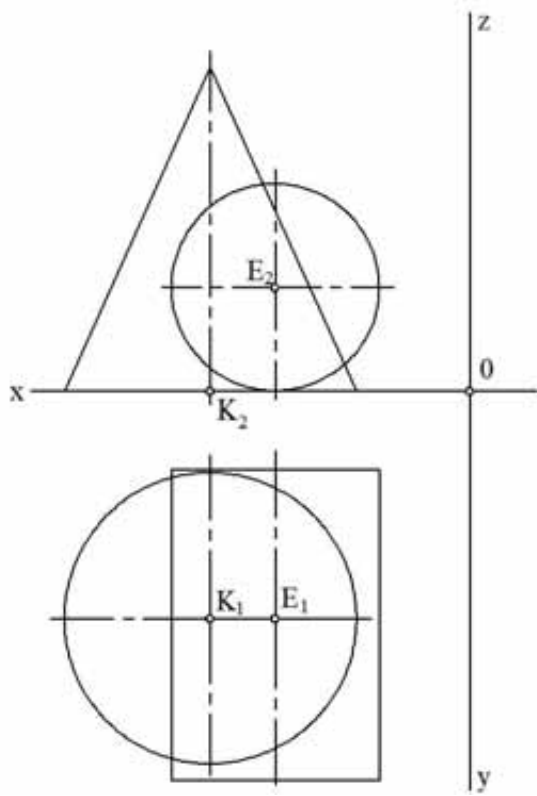


Рис. 10.58

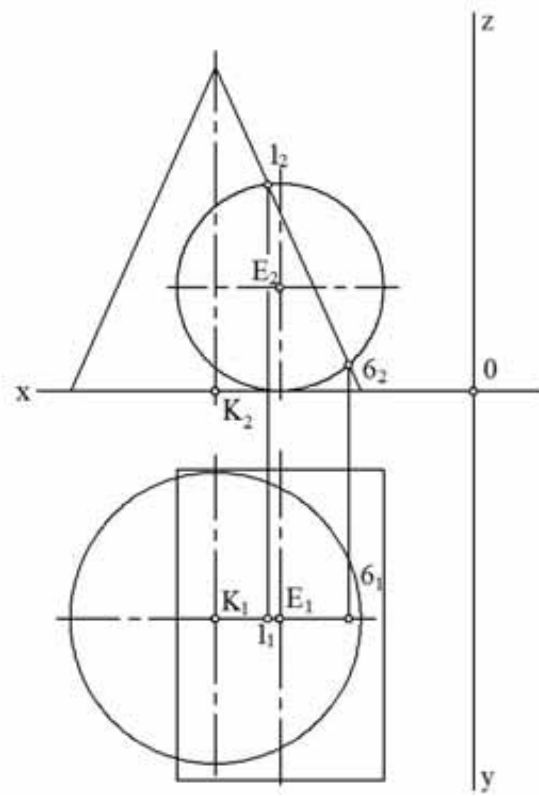


Рис. 10.59

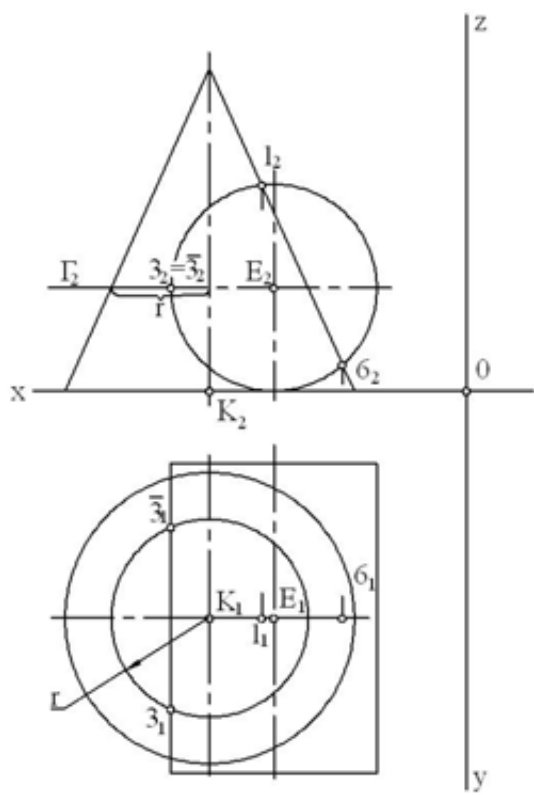


Рис. 10.60

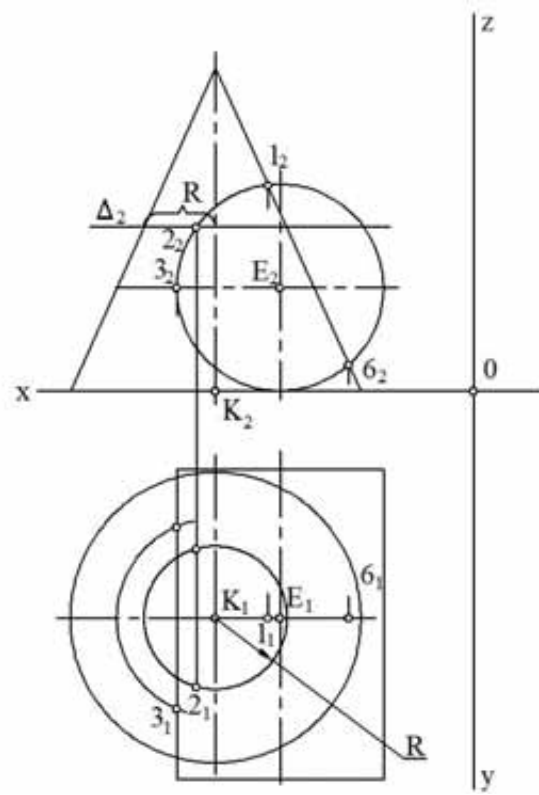


Рис. 10.61

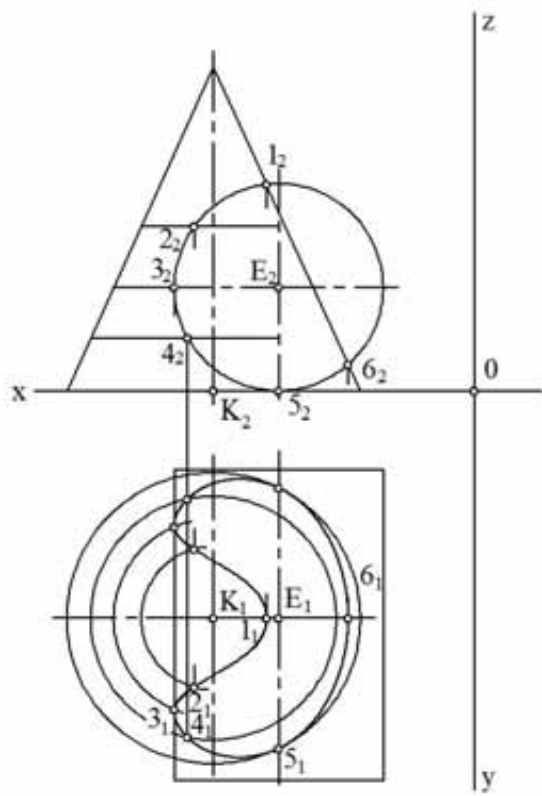


Рис. 10.62

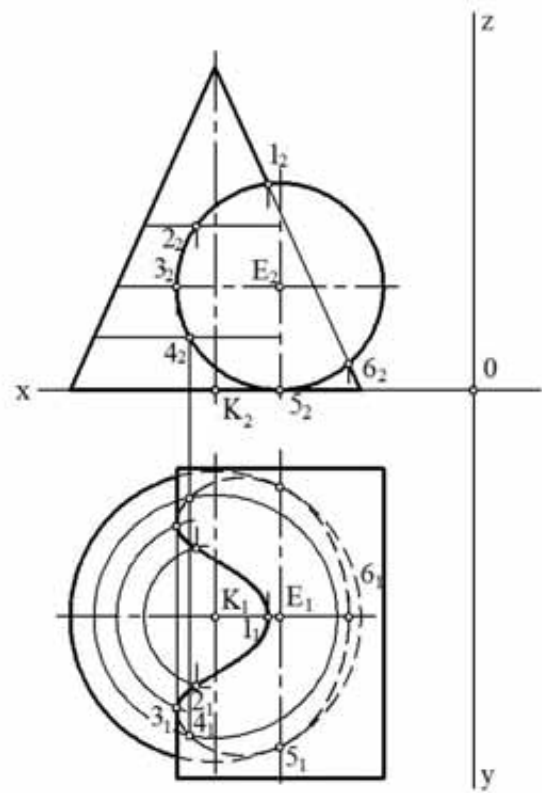


Рис. 10.63

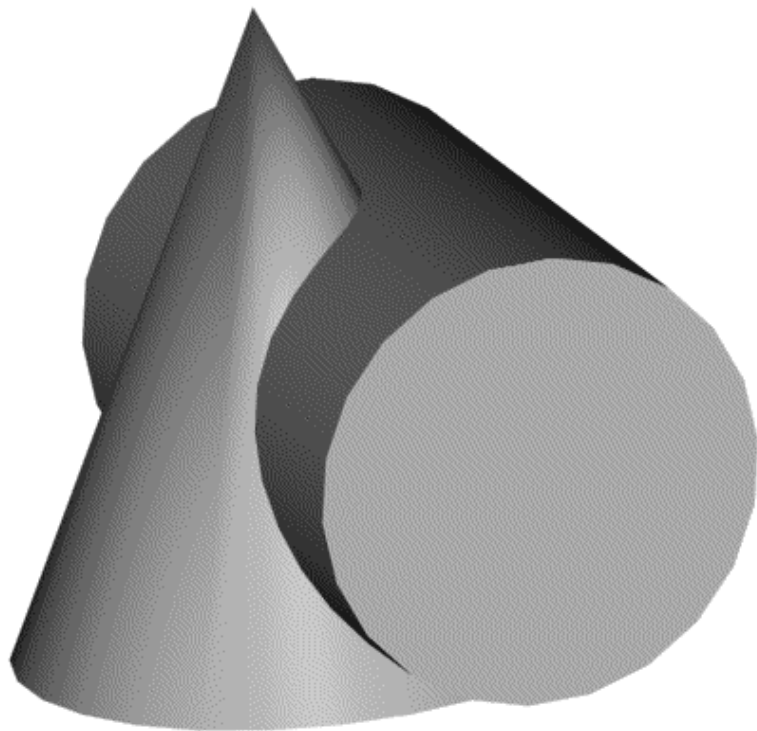


Рис. 10.64

Таким образом, точки найдены. Остается только соединить их плавной кривой (рис. 10.63). При этом нужно помнить, что точки 3 и $\bar{3}$ - точки видимости относительно Π_1 . Они делят линию пересечения на две части – видимую и невидимую.

Наглядное изображение представлено на рис. 10.64.

Задача 9. Построить развертки пересекающихся цилиндра вращения с конусом вращения (см. задачу 8).

Для построения развертки цилиндра вращения строим прямоугольник, длина которого будет равна длине окружности основания цилиндра $2\pi R_1$, а ширина – высоте цилиндра $3R_1$ (рис. 10.65).

Длину прямоугольника поделим пополам и из полученной точки проведем прямую, перпендикулярную основанию прямоугольника, которую будем считать соответствующей прямолинейной образующей цилиндра, проходящей через точки 5 линии пересечения конуса и цилиндра (рис. 10.66). Кроме того, для удобства построений проведем прямую MN , которая делит прямоугольник на две равные части. На развертке помечаем точки 5. Для этого по обе стороны от MN откладываем расстояния d' , равные $E_1 5_1$ (рис. 10.67). Построение всех остальных точек линии пересечения не вызовет затруднений. Например, для построения точек 4 поступаем следующим образом. Соединяем точку 4_2 с точкой E_2 (рис. 10.66). Измеряем угол $\alpha = \angle 4_2 E_2 5_2$.

По формуле $\cup 45 = \cup 4_2 5_2 = 2\pi R_1 \frac{\alpha}{2\pi} = R_1 \alpha$ находим расстояние от

образующей, на которой расположены точки 4, до образующей, на которой расположены точки 5 (рис. 10.68). Отмечаем эту образующую на развертке и на ней по обе стороны от средней линии откладываем отрезки d'' , равные $K_1 4_1$. Аналогичным образом строим все остальные точки линии пересечения и соединяем их плавной кривой (рис. 10.69). Для получения полной развертки цилиндра к развертке боковой поверхности пристраиваем окружности оснований радиусов R_1 .



Рис. 10.65

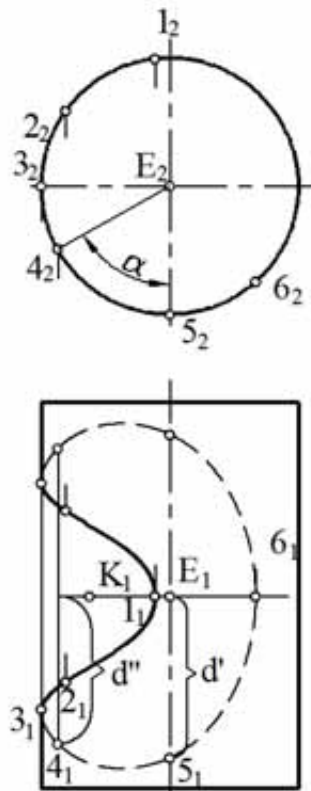


Рис. 10.66

Разверткой конуса вращения является круговой сектор с углом $\alpha = \frac{R}{L} 360^\circ$, где R – радиус окружности основания конуса вращения, L – длина образующей (рис. 10.70). Примем, что прямая,

делящая сектор пополам, соответствует прямолинейной образующей конуса ST , проходящей через точки 1 и 6 линии пересечения конуса и цилиндра (рис. 10.72). Так как эта образующая параллельна

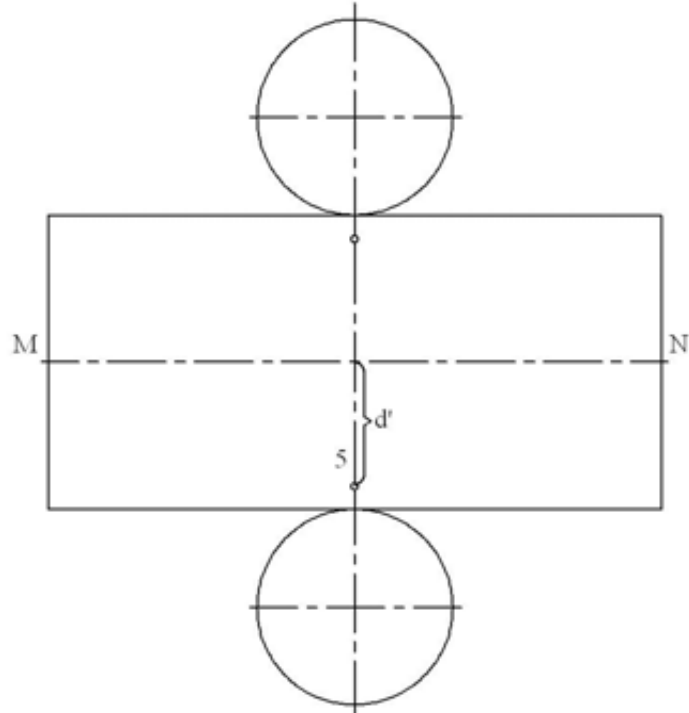


Рис. 10.67

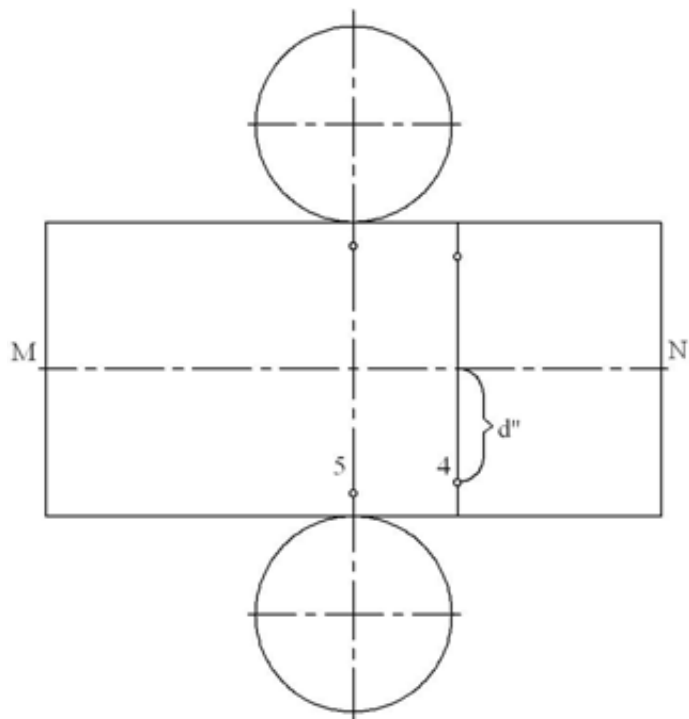


Рис. 10.68

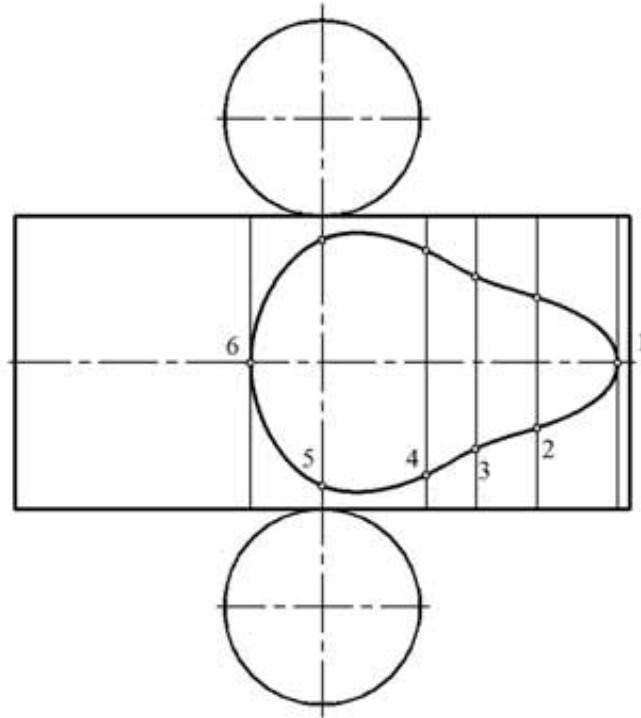


Рис. 10.69

фронтальной плоскости проекций Π_2 , то на Π_2 она проецируется в натуральную величину. Поэтому для того, чтобы точки 1 и 6 пометить на развертке, необходимо от вершины сектора на образующей отложить отрезки $S1$ и $S6$ (рис. 10.71). Построение других точек линии пересечения на развертке продемонстрируем на примере точек 3. Предварительно найдем на развертке те прямолинейные образующие, на которых расположены эти точки. Соединяя проекции точки 3 с проекциями вершины конуса S , получаем проекции этих образующих S_2Q_2 и S_1Q_1 , где Q – точки пересечения образующих с основанием конуса. Далее измерив угол $\phi = \angle T_1S_1Q_1$ (рис. 10.73), по формуле

$\lambda = \frac{\phi}{2\pi} \alpha$ вычисляем угол λ , который определяет положение

прямолинейных образующих SQ на развертке. Для того, чтобы найти положение точек 3, необходимо определить натуральную величину $S3$ (рис. 10.73). Для этого повернем образующую SQ до совмещения с образующей ST . Тогда новая фронтальная проекция $\bar{S}_2\bar{Q}_2$ совпадет с S_2T_2 , а фронтальная проекция точки 3 переместится в положение $\bar{3}_2$. Натуральная величина отрезка $S3$ равна $\bar{S}_2\bar{3}_2$. Откладывая эти отрезки на развертке на соответствующих образующих, получим точки 3 (рис. 10.74). Аналогично находим на развертке все остальные точки линии

пересечения конуса и цилиндра, а затем соединяем их плавной кривой (рис. 10.75). Для получения полной развертки конуса к развертке поверхности конуса пристраиваем окружность основания радиуса R .

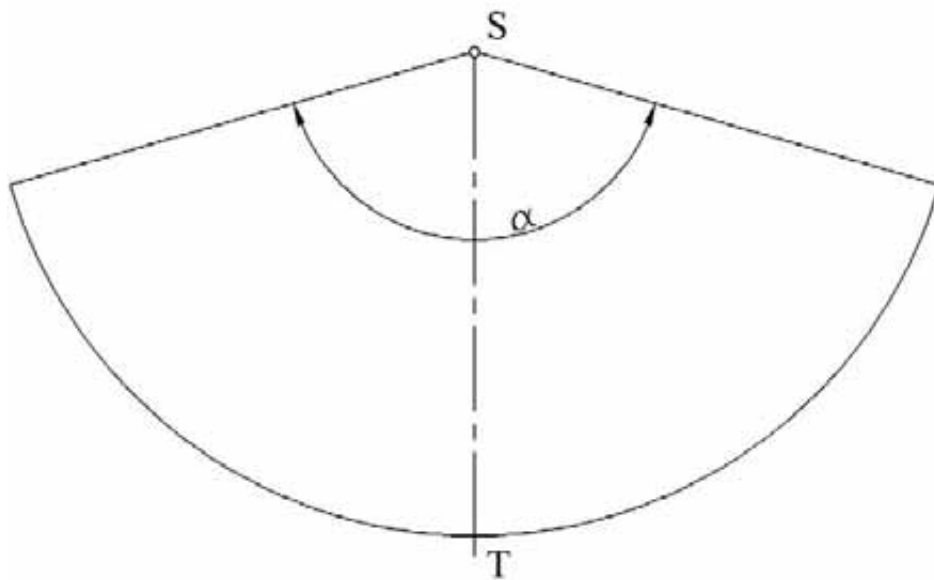


Рис. 10.70

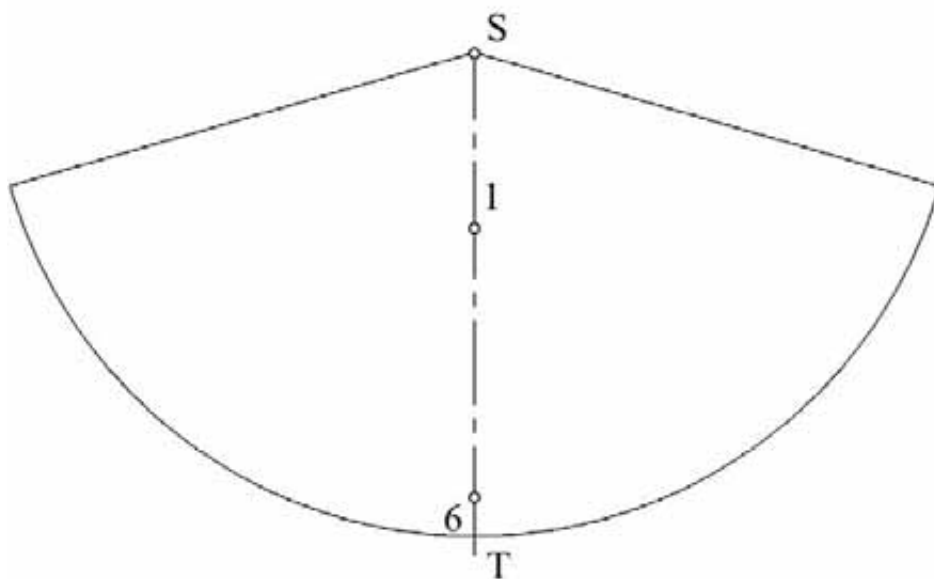


Рис. 10.71

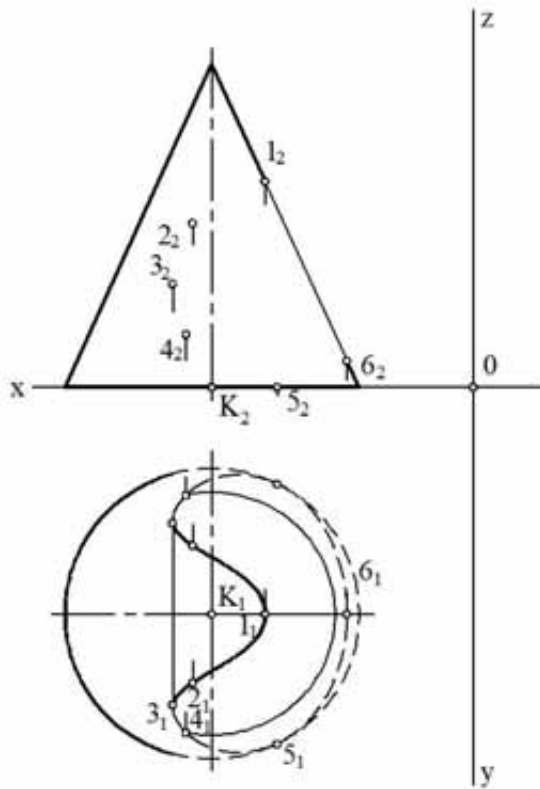


Рис. 10.72

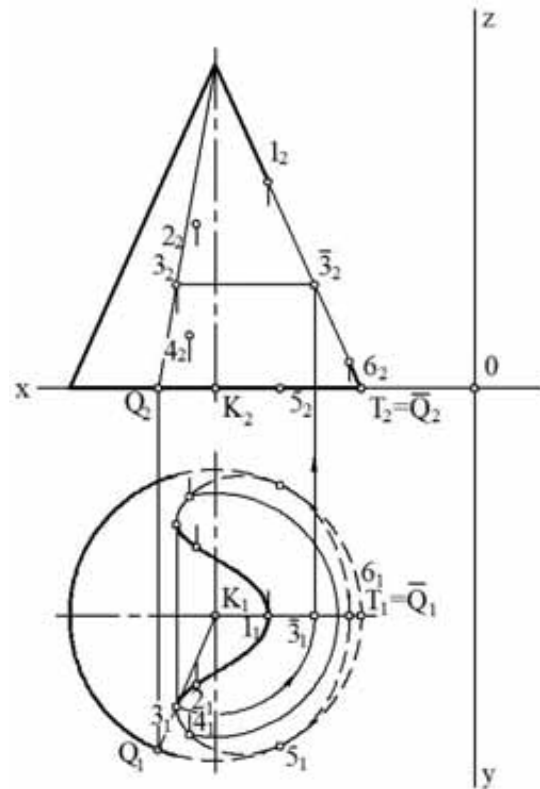


Рис. 10.73

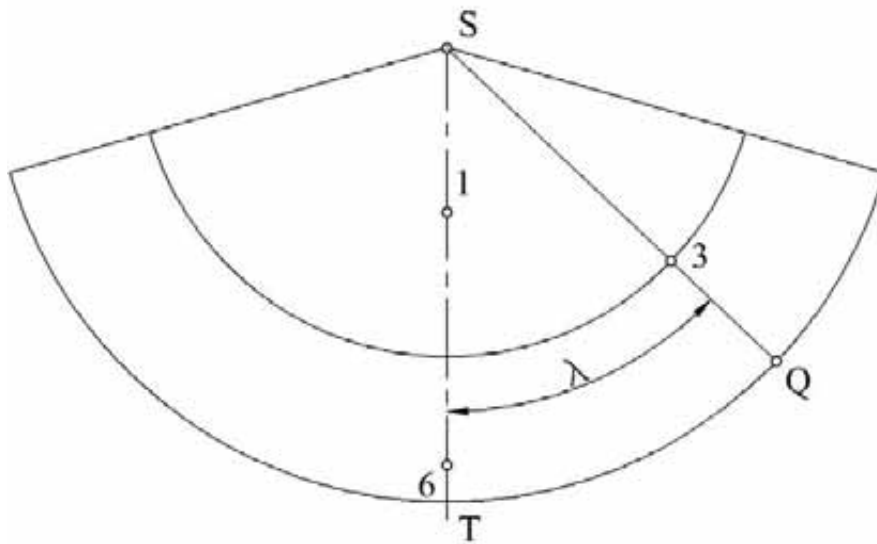


Рис. 10.74

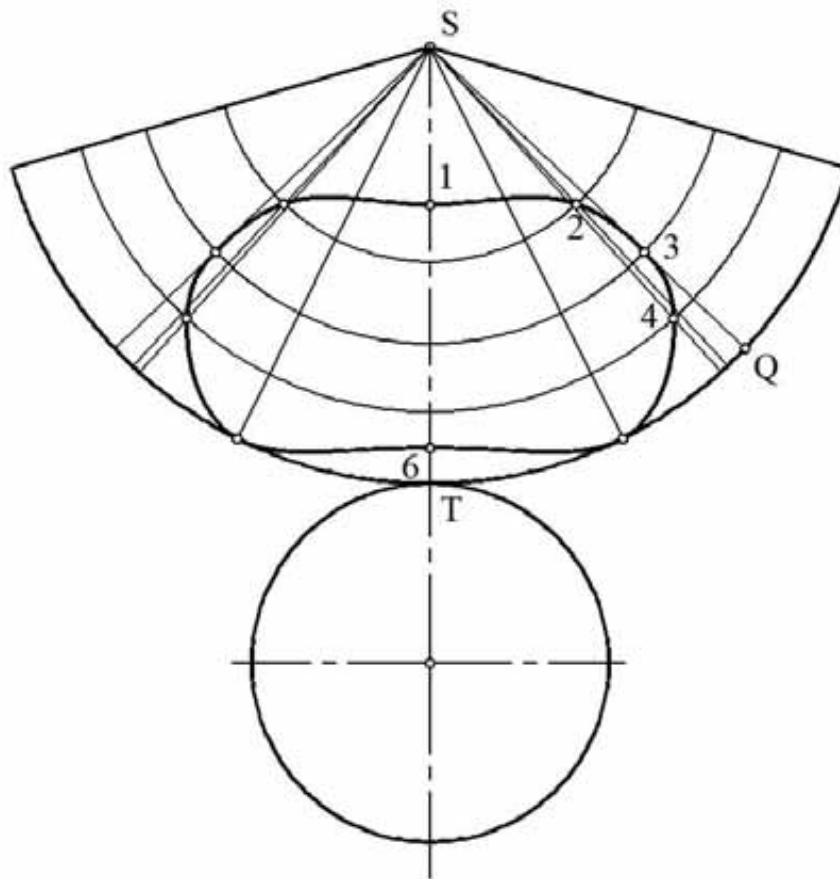


Рис. 10.75

Задача 10. Построить линию пересечения фронтально проецирующего цилиндра вращения с поверхностью тора (рис. 10.76).

Пусть в пространстве задана некоторая прямая, которую мы примем за ось вращения, и некоторая окружность, плоскость которой проходит через выбранную ось. Будем вращать окружность вокруг оси. Поверхность, которая получится при этом, называется торовой поверхностью.

Если окружность пересекает ось, то тор будет закрытым, если нет, то получается открытая торовая поверхность (кольцо). В пересечении тора с плоскостями, проходящими через ось, получают производящие окружности, а с плоскостями, перпендикулярными оси – две окружности. Цилиндр вращения, ось которого совпадает с осью тора, пересекает тор по окружностям.

Найдем линию пересечения тора с цилиндром вращения. При решении такого рода задач используются поверхности-посредники: плоскости, сферы и т.д. Воспользуемся фронтально проецирующими цилиндрами, соосными с заданным тором. Такие цилиндры с тором пересекаются по окружностям.

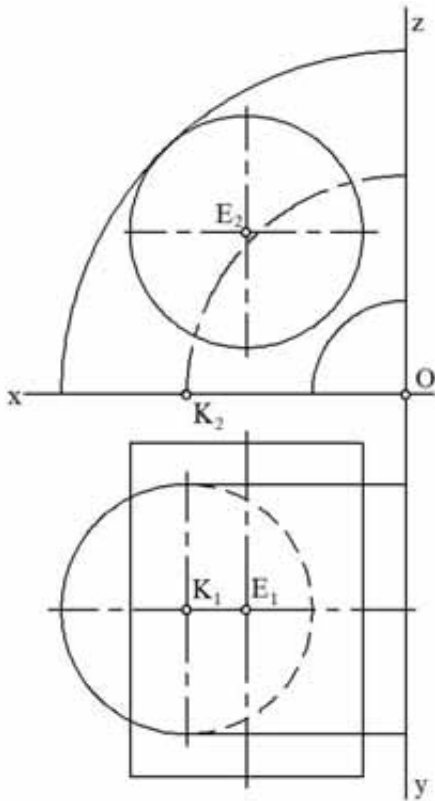


Рис. 10.76

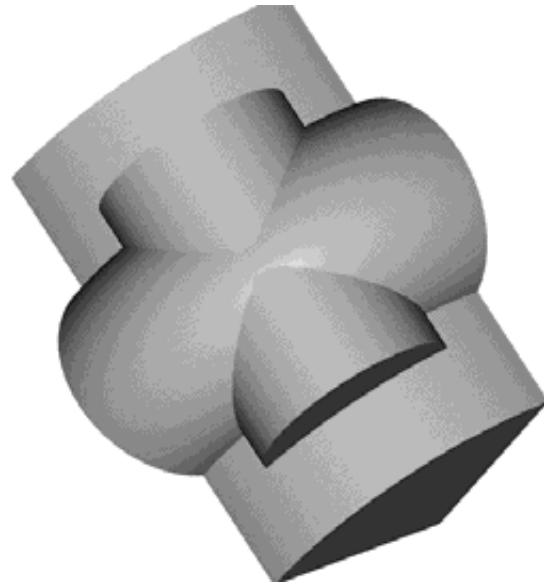


Рис. 10.77

Заданный цилиндр вспомогательным цилиндром пересекается по двум прямолинейным образующим (рис. 10.77).

Линию пересечения построим по точкам. Причем фронтальная проекция линии пересечения уже есть, она совпадает с фронтальной проекцией цилиндра. Остается построить лишь горизонтальную проекцию. Ограничимся построением небольшого количества точек и, в первую очередь, характерных. Построим точку 1 , расположенную на главном меридиане (рис. 10.80). Фронтальная проекция 1_2 этой точки является точкой касания очерков тора и цилиндра (она расположена на прямой E_2O). Горизонтальная проекция 1_1 расположена на горизонтальной проекции главного меридиана, которая совпадает с осевой линией. Найдем точки 2 и $\bar{2}$, которые для поверхности цилиндра относительно Π_1 являются точками видимости.

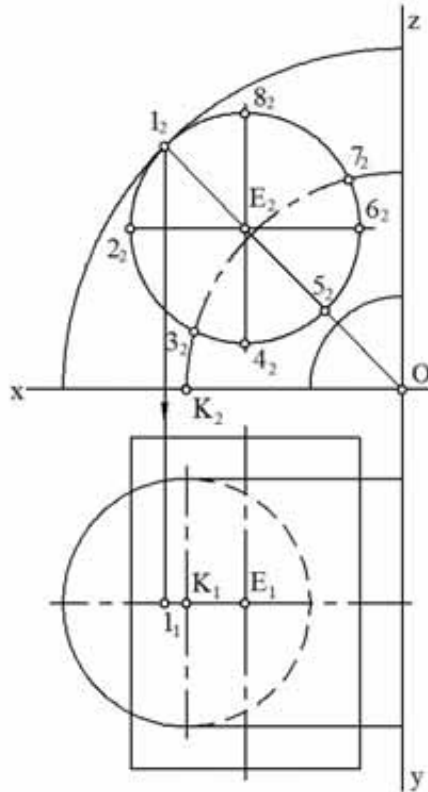


Рис. 10.78

Фронтальная проекция 2_2 этих точек расположена на горизонтальной центральной линии (рис. 10.79). Для этого воспользуемся вспомогательным цилиндром, соосным с тором. Фронтальный очерк этого цилиндра представляет собой окружность с центром O и проходящую через 2_2 . Вспомогательный цилиндр пересекает тор по двум окружностям, которые на Π_2 проецируются в натуральную величину и совпадают с фронтальным очерком вспомогательного цилиндра. Горизонтальные проекции этих окружностей – прямые, параллельные оси (на чертеже они не обозначены). Заданный цилиндр вспомогательным пересекается по двум прямолинейным образующим, которые на Π_2 проецируются в точки 2_2 и 8_2 , а на Π_1 – прямыми, перпендикулярными оси Ox . В пересечении этих прямых и получаем горизонтальные проекции $2_1, \bar{2}_1$ точек 2 и $\bar{2}$, а попутно и проекции $8_1, \bar{8}_1$ точек 8 и $\bar{8}$.

Найдем точки видимости $3, \bar{3}, 7, \bar{7}$ для поверхности тора относительно Π_1 (рис. 10.80). Для этого воспользуемся фронтально проецирующим вспомогательным цилиндром, фронтальный очерк которого представляет собой окружность, совпадающую с фронтальной

проекцией оси тора. Далее, действуя по той же схеме, находим горизонтальные проекции $3_1, \bar{3}_1, 7_1, \bar{7}_1$ точек $3, \bar{3}, 7, \bar{7}$.

Аналогично находим точки видимости $6, \bar{6}$ для цилиндра относительно Π_1 (а заодно и точки 4 и $\bar{4}$), а также точки 5 и $\bar{5}$, которые получаются с помощью цилиндра наименьшего радиуса $R_{min} = O5_2$ (рис. 10.80). Соединяя полученные точки плавной кривой, получаем искомую линию (рис. 10.81).

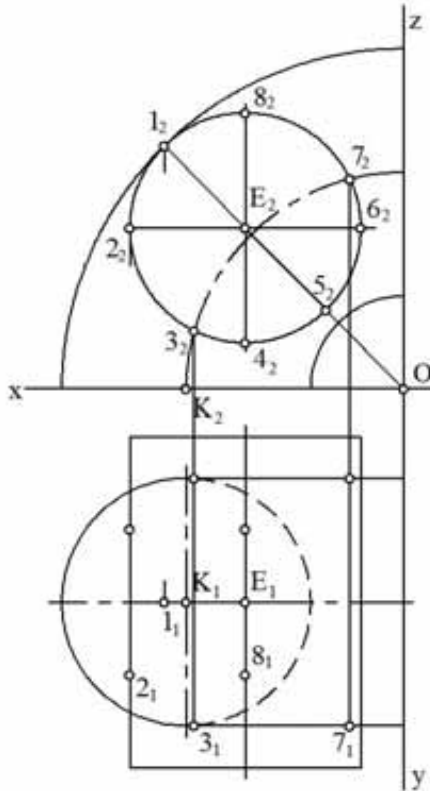


Рис. 10.79

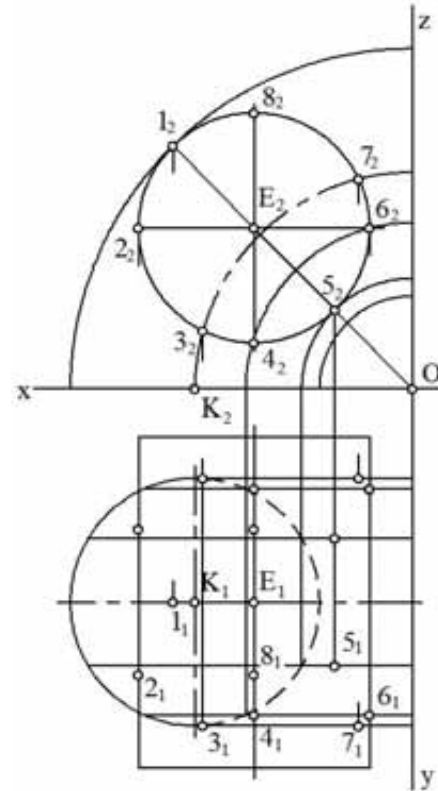


Рис. 10.80

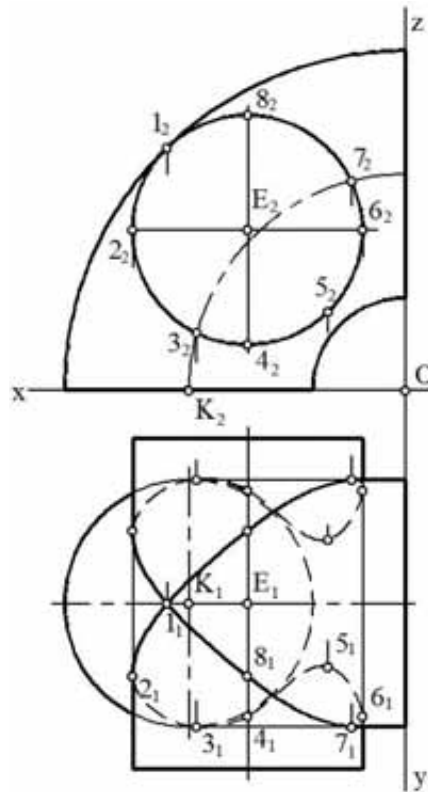


Рис. 10.81

Задача 11. Построить линию пересечения цилиндра вращения с поверхностью наклонного конуса (рис. 10.82)

Очевидно, что фронтальная проекция линии пересечения на чертеже уже есть. Она совпадает с дугой $I_2 5_2 9_2$ окружности, являющейся фронтальной проекцией цилиндра (рис. 10.83). Остается построить лишь горизонтальную проекцию. При ее построении будем исходить из принадлежности точек пересечения поверхности конуса. Найдем точки $1, 5, 9$, принадлежащие контурным линиям видимости относительно Π_2 . Этими линиями будут прямолинейные образующие SA и SB , причем их фронтальные проекции являются очерком поверхности конуса на Π_2 . Фронтальные проекции указанных точек являются точками пересечения очерка конуса с фронтальной проекцией цилиндра. Для того, чтобы найти горизонтальные проекции, предварительно находим горизонтальные проекции образующих SA и SB , а затем с помощью линий связи – $1_1, 5_1$ и 9_1 (рис. 10.84).

Найдем точки $2, 8, 3, 7$ линии пересечения, принадлежащие контурной линии видимости относительно горизонтальной плоскости проекций Π_1 (образующие SC и SD). Горизонтальные проекции этих образующих S_1C_1 и S_2D_2 являются очерком конуса на Π_1 и касаются проекции основания конуса (окружности). Фронтальные проекции 2_2 и

δ_2 точек 2 и 8 находим как результат пересечения S_2C_2 с окружностью – проекцией цилиндра вращения Π_2 . Горизонтальные проекции находим без труда на S_1C_1 . Аналогично строим точки 3 и 7, принадлежащие образующей SD (рис. 10.85).

Найдем точки b и b' , расположенные на образующей цилиндра, которая относительно горизонтальной плоскости проекций является контурной линией видимости (рис. 10.86). Следовательно, точки b и b' также являются точками видимости относительно Π_1 . Фронтальные проекции b_2 и b'_2 совпадают с фронтальной проекцией E_2F_2 образующей EF . Для нахождения горизонтальных проекций b_1 и b'_1 воспользуемся горизонтальной плоскостью уровня Δ , проходящей через точки b и b' . Эта плоскость пересекает конус по окружности m , которая на Π_2 проецируется отрезком прямой, а на Π_1 – в натуральную величину. В пересечении m_1 с E_1F_1 получаем точки b_1 и b'_1 .

Находим наивысшие точки 4 и $4'$ линии пересечения, которые расположены на образующей ML (на Π_2 эта образующая проецируется в точку) (рис. 10.87). Фронтальные проекции 4_2 и $4'_2$ точек 4 и $4'$ совпадают с фронтальной проекцией M_2L_2 образующей ML . Для нахождения горизонтальных проекций 4_1 и $4'_1$ воспользуемся вспомогательной горизонтальной плоскостью уровня Φ , проходящей через точки 4 и $4'$. Эта плоскость пересекает конус по окружности n , которая на Π_1 проецируется в натуральную величину. Горизонтальные проекции 4_1 и $4'_1$ расположены на пересечении n_1 и M_1L_1 .

Мы нашли достаточное количество точек, чтобы судить о поведении искомой кривой. Соединяя горизонтальные проекции найденных точек в той же последовательности, что и на Π_2 плавной кривой, получаем горизонтальную проекцию линии пересечения (рис. 10.88).

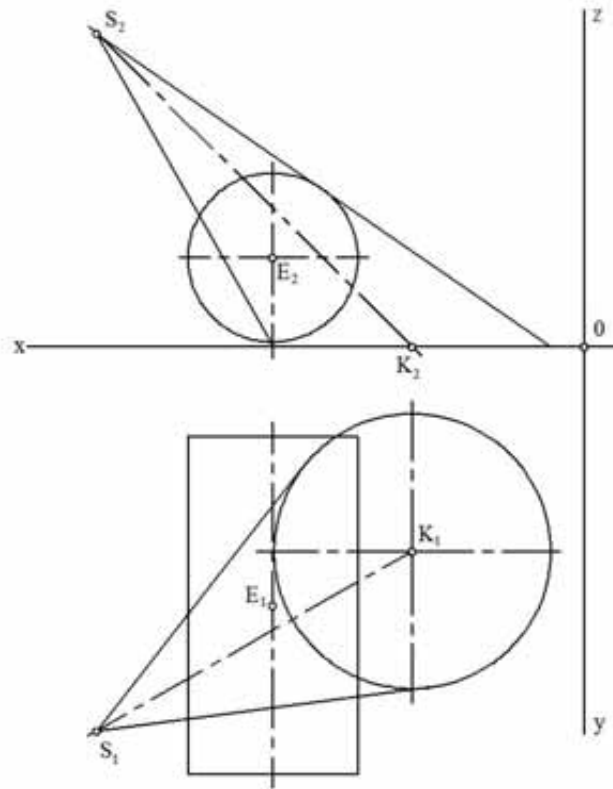


Рис. 10.82

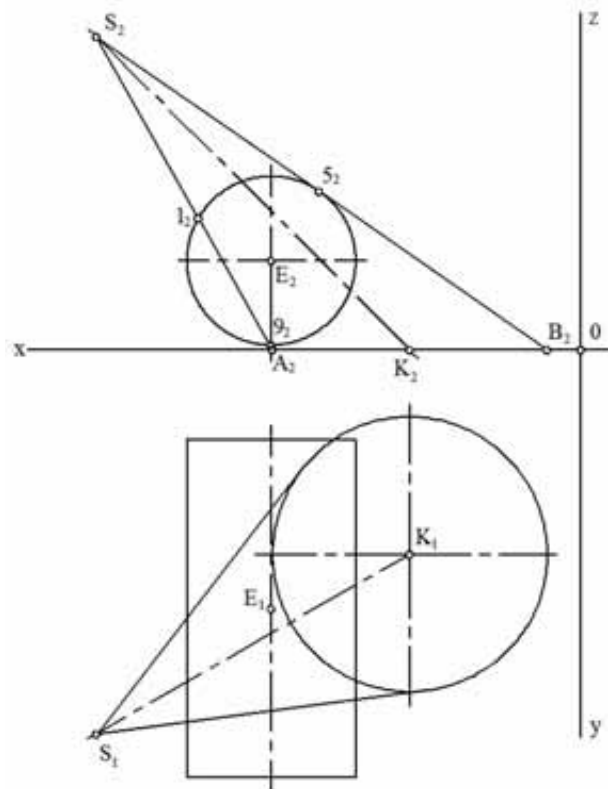


Рис. 10.83

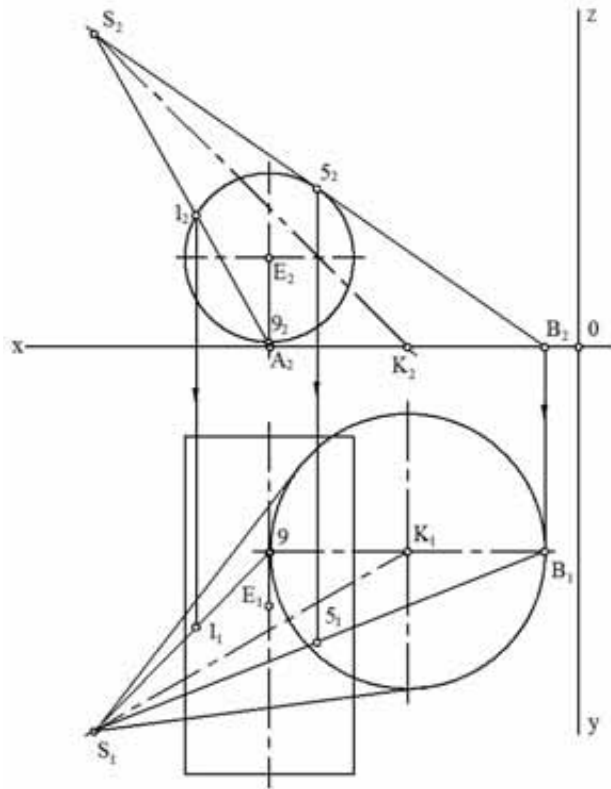


Рис. 10.84

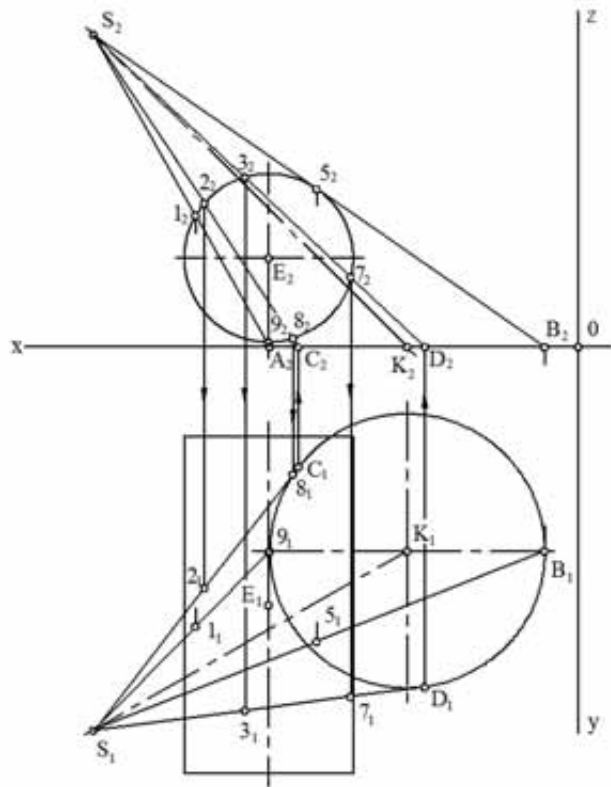


Рис. 10.85

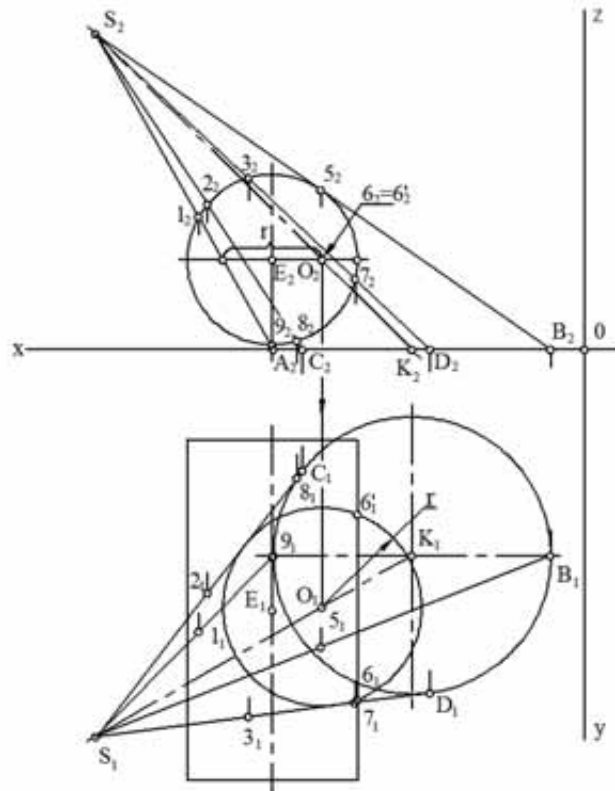


Рис. 10.86

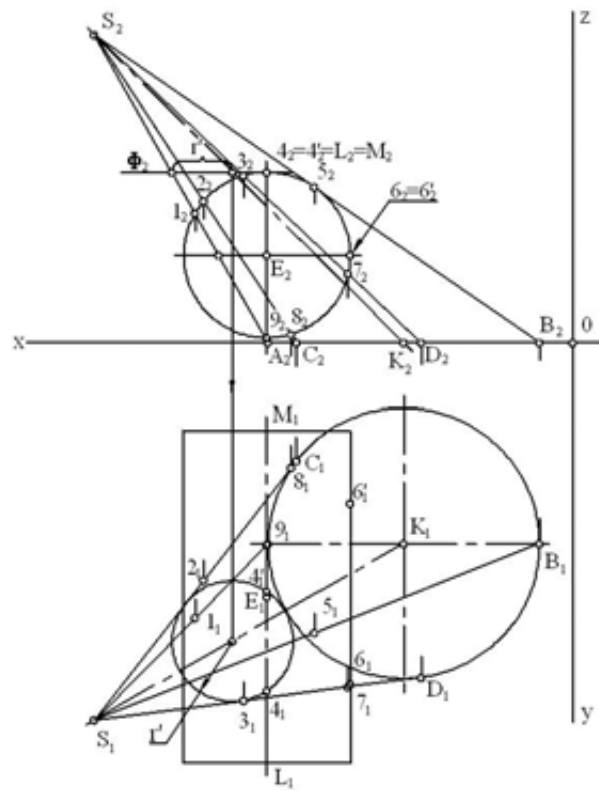


Рис. 10.87

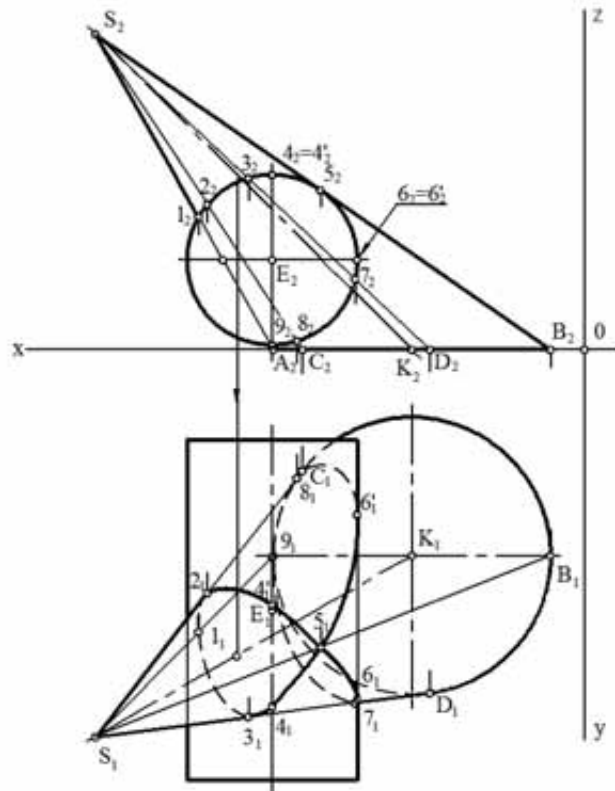


Рис. 10.88

Задача 12. Построить линию пересечения тора с поверхностью цилиндра вращения (рис. 10.89).

Точки 1 и 2 пересечения фронтальных меридианов заданных поверхностей вращения принадлежат искомой линии пересечения. Поэтому их фронтальные проекции 1_2 и 2_2 находятся без дополнительных построений. Горизонтальные проекции этих точек расположены на горизонтальной проекции общей плоскости симметрии обеих плоскостей. Этой проекцией является прямая, проходящая через K_1 и параллельная оси Ox (рис. 10.90).

Использование метода вспомогательных секущих плоскостей при решении данной задачи было бы затруднительно, так как и фронтальные, и горизонтальные плоскости уровня одну из заданных поверхностей пересекает по кривым, отличным от прямых и окружностей. Однако здесь возможно использование метода вспомогательных секущих сфер, так как выполняются следующие условия:

-пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения:

-оси поверхностей пересекаются и параллельны одной из плоскостей проекций, в данном случае фронтальной.

Задачу решим в следующей последовательности:

1. Находим центр сфер E как точку пересечения осей поверхностей.

2. Находим радиус минимальной сферы R_{min} . Из точки E_2 проводим нормали к очерковым линиям данных поверхностей: Большой из двух отрезков нормалей определяет R_{min} , то есть вспомогательная сфера Γ радиуса R_{min} будет касаться одной из поверхностей и пересекать другую (рис. 10.91).

3. Находим радиус максимальной сферы R_{max} . Им будет являться расстояние от точки E до наиболее удаленной точки линии пересечения поверхностей, то есть $R_{max} = E_2 2_2$.

4. Находим случайные точки линии пересечения поверхностей. Для этого воспользуемся вспомогательными секущими сферами $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots$, радиусы которых отвечают условию $R_{min} \leq R \leq R_{max}$. Алгоритм построения точек линии пересечения рассмотрим на примере точек 3 и $3'$, 4 и $4'$ (рис. 10.92). Вспомогательная сфера Δ^1 пересекает тор по окружностям m и k , а цилиндр – по окружности q . Эти окружности на Π_2 проецируются отрезками прямых. Точки 3 и $3'$, 4 и $4'$ пересечения этих окружностей принадлежат искомой кривой. Для построения горизонтальных проекций точек воспользуемся тем, что на Π_1 окружности m и k , инцидентные этим точкам, проецируются без искажения.

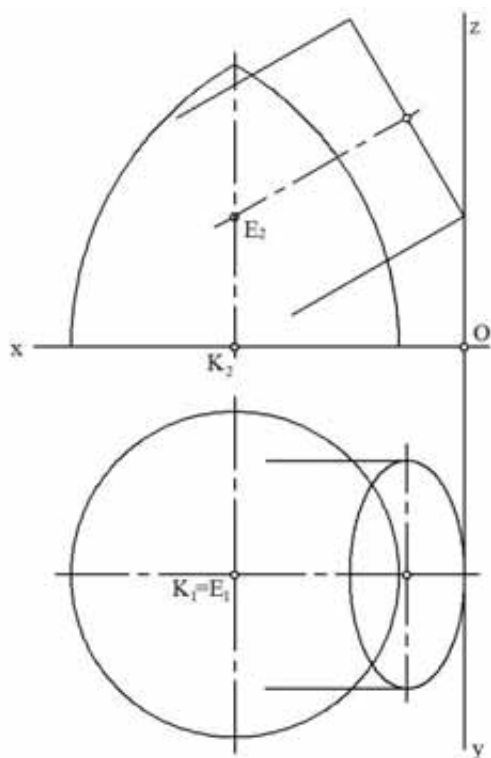


Рис. 10.89

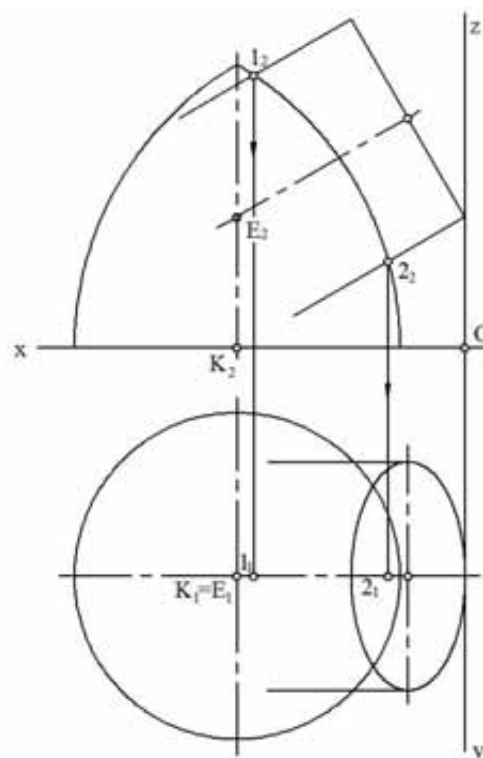


Рис. 10.90

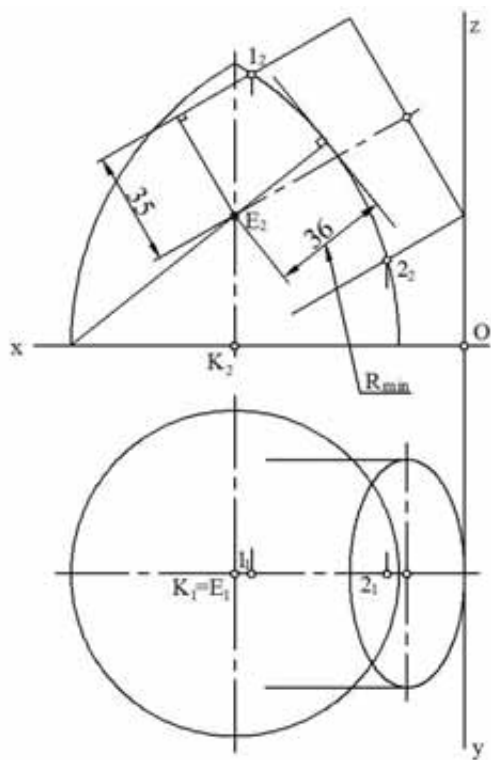


Рис. 10.91

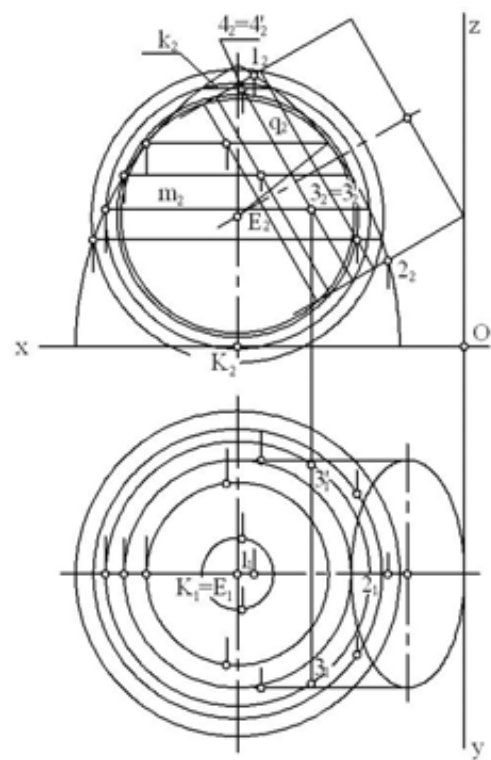


Рис. 10.92

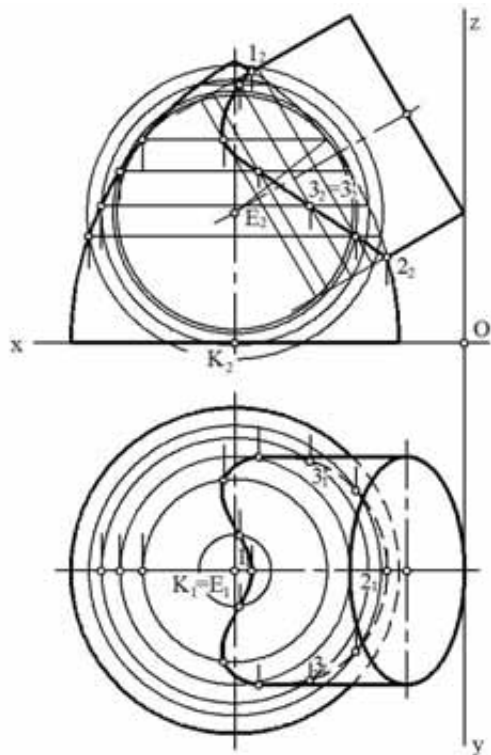


Рис. 10.93

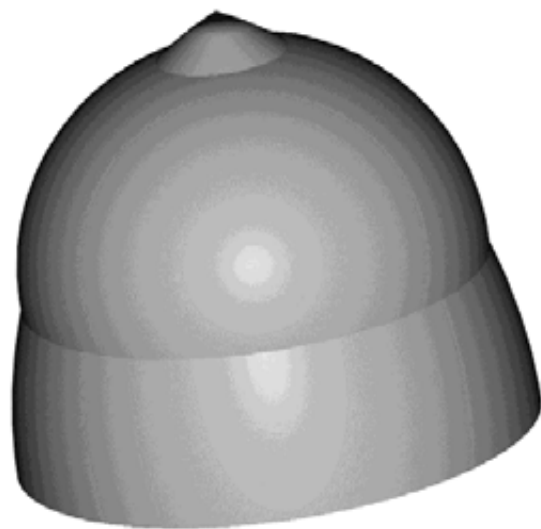


Рис. 10.94

5. Полученные точки соединяем плавной кривой и получаем искомую линию пересечения поверхностей (рис. 10.93). На рис. 10.94 показано наглядное изображение пересечений заданных поверхностей.

Задача 13. Построить линию пересечения конуса с поверхностью открытого тора (рис. 10.95).

Способ эксцентрических сфер применяется для построения линии m пересечения поверхностей Φ^1, Φ^2 при следующих условиях:

1) одна из данных поверхностей Φ^1 –циклическая, другая – вращения, в частном случае обе поверхности Φ^1, Φ^2 являются поверхностями вращения;

2) поверхности Φ^1, Φ^2 содержат общую плоскость Σ симметрии, которая должна быть плоскостью уровня.

Рассмотрим возможности использования способа эксцентрических сфер на примере построения линии пересечения с поверхностью открытого тора.

Опорные точки A и B верхнюю и нижнюю точки линии m пересечения – определяем с помощью общей плоскости Σ симметрии, которая пересекает поверхности Φ^1, Φ^2 по очерковым линиям f^1, f^2 на Π_2 (рис. 10.96). Горизонтальные проекции этих точек построим из условия принадлежности плоскости Σ . Точки A, B являются точками видимости на Π_2 , так как принадлежат очерковым линиям поверхностей конуса и тора.

Промежуточные точки M^1, \bar{M}^1 определяем следующим образом. Выделяем на циклической поверхности Φ^1 с помощью вспомогательной плоскости Δ^1 окружность l^1 с центром C^1 ($l^1 = \Phi^1 \cap \Delta^1$), расположенную между опорными точками. Затем находим центр O^1 сферы-посредника Γ^1 на пересечении оси j конуса вращения Φ^2 и перпендикуляра t^1 к плоскости окружности l^1 , проходящего через центр C^1 (рис. 10.100). Из центра O^1 через окружность l^1 проводим сферу-посредник Γ^1 : $\Gamma^1 \subset l^1$ (рис. 10.97). Она пересечет поверхность конуса Φ^2 по окружности k^1 : $k^1 = \Gamma^1 \cap \Phi^2$. Окружности l^1, k^1 , пересекаясь между собой, определяют точки M^1, \bar{M}^1 искомой линии пересечения m (рис. 10.98). Точки M^2, \bar{M}^2 определяются аналогично точкам M^1, \bar{M}^1 . Горизонтальные проекции точек $M^1, \bar{M}^1, M^2, \bar{M}^2$ построены из условия принадлежности окружностям k^1, k^2 соответственно (рис.10.99). Аналогично находятся другие точки линии пересечения

(рис. 10.100). Соединяя полученные точки плавной кривой, получим искомую линию t пересечения поверхностей (рис. 10.101).

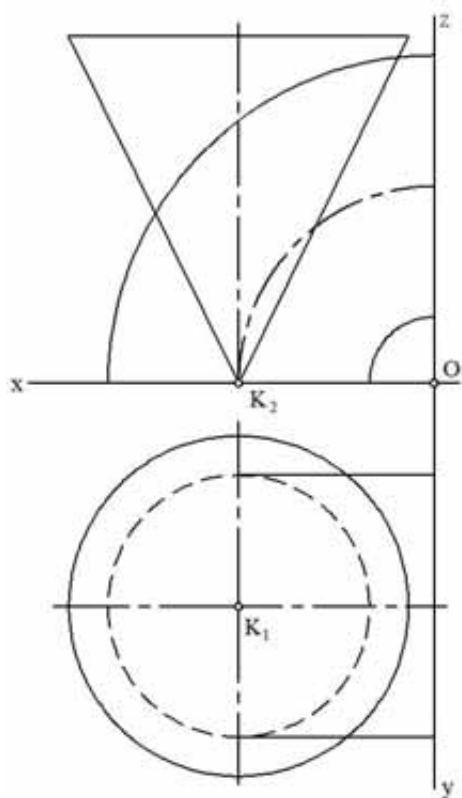


Рис. 10.95

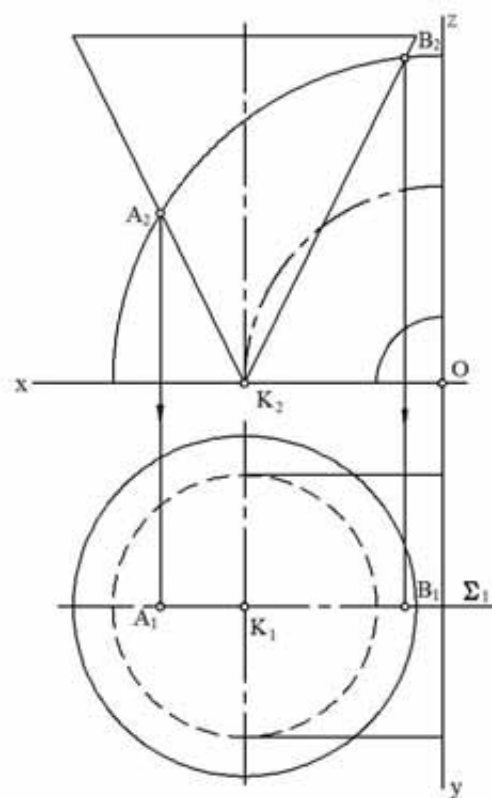


Рис. 10.96

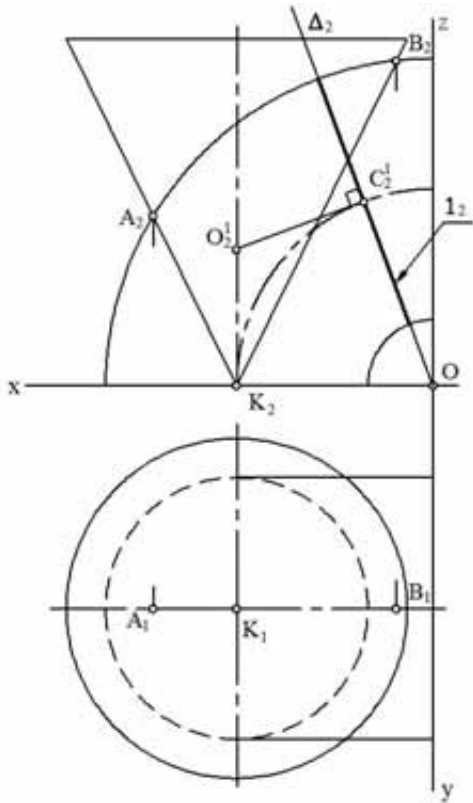


Рис. 10.97

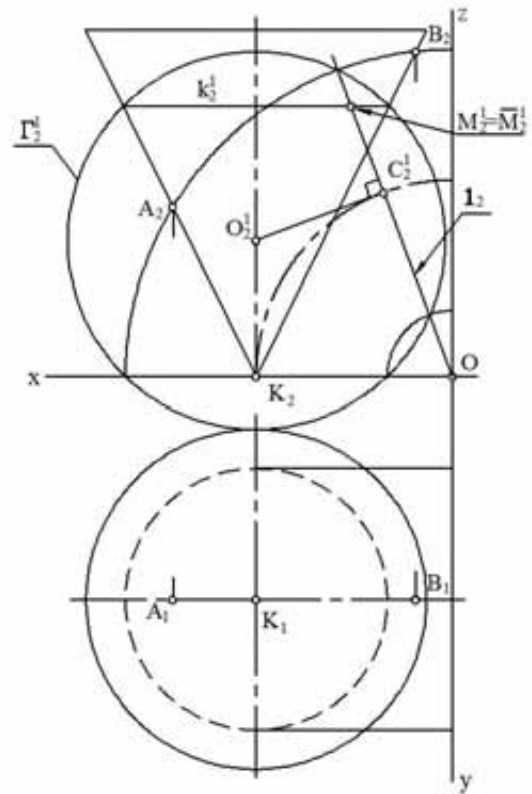


Рис. 10.98

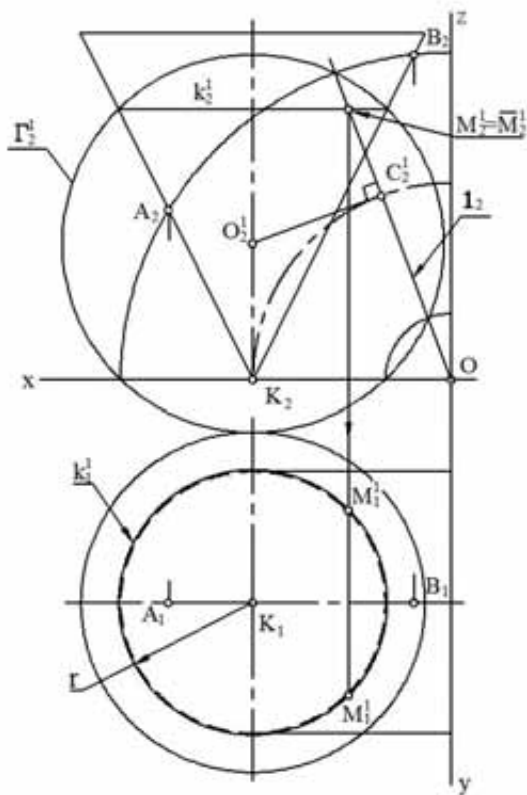


Рис. 10.99

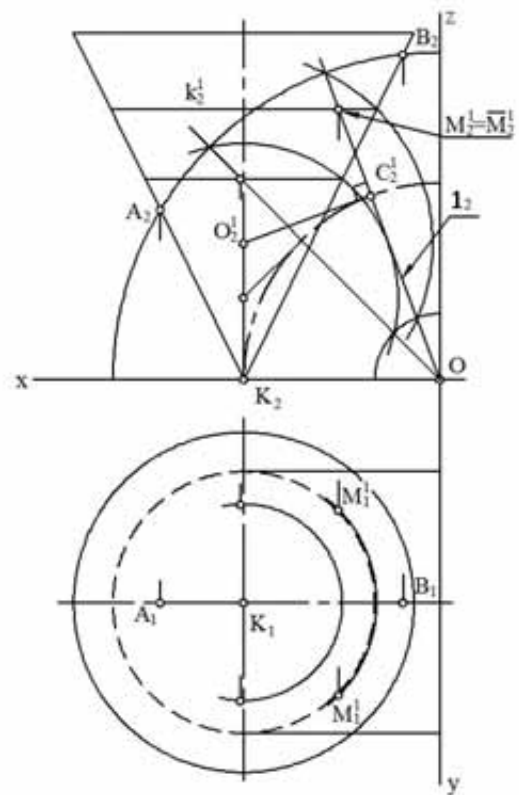


Рис. 10.100

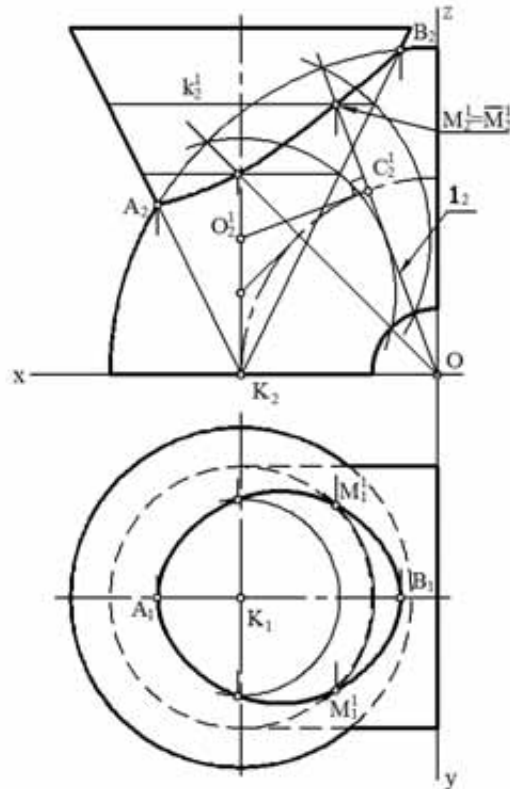


Рис. 10.101

Задача 14. Построить в аксонометрии линию пересечения конуса вращения, с пирамидой. Заданы вершина конуса $S(x_S, y_S, z_S)$, радиус основания конуса R , вершина пирамиды $K(x_K, y_K, z_K)$, вершины основания пирамиды $A(0, y_A, z_A)$, $B(0, y_B, z_B)$, $C(0, y_C, z_C)$, $D(0, y_D, z_D)$. Основание конуса расположено в плоскости Oxy .

Задачи, которые мы решали до сих пор, были связаны с ортогональным чертежом. При всех своих преимуществах такие чертежи имеют существенный недостаток: они ненаглядны. И нужно иметь достаточно развитое представление, чтобы их читать. Поэтому иногда возникает необходимость в использовании аксонометрических проекций: чертежей, на которых предмет изображается наглядно. Мы не будем подробно рассматривать теорию аксонометрических проекций. Существует достаточно много учебников, где этот вопрос освещается хорошо и доходчиво. Данную задачу решим в прямоугольной диметрической проекции. Очевидно, что предварительно необходимо построить аксонометрические проекции конуса вращения и пирамиды.

Напомним, что аксонометрические оси $O'x'$ и $O'y'$ с горизонтальным направлением составляют соответственно углы $7^\circ 10'$ и $41^\circ 25'$. Ось $O'z'$ располагается вертикально (рис. 10.102).

Основанием конуса вращения является окружность, которая в аксонометрии изображается эллипсом. Большая ось эллипса перпендикулярна той аксонометрической оси, которая в данной плоскости отсутствует: в нашем случае оси $O'z'$. По величине она равна $1,06 D$, где D – диаметр основания конуса. Малая ось перпендикулярна большой и равна $0,35 D$. Построение эллипса по большой и малой осям не представляет особых трудностей. Отметим, что центр эллипса совпадает с вторичной горизонтальной аксонометрической проекцией S'_1 вершины конуса S . Для построения аксонометрической проекции S' вершины S из S'_1 проводим прямую, параллельную оси $O'z'$ и откладываем на ней отрезок $S'_1S = z_s$ (рис. 10.103). В дальнейшем нам будет нужна вторичная профильная аксонометрическая проекция S'_3 . Для ее построения из S'_1 проводим прямую, параллельную оси $O'x'$ до пересечения с осью $O'y'$. От точки пересечения параллельно оси $O'z'$ откладываем отрезок $S'_1S'_3 = z_s$.

Построение аксонометрической проекции пирамиды не вызывает сложностей (рис. 10.104). Аксонометрическая проекция $A'D'C'D'$ основания $ABCD$ совпадает с вторичной профильной аксонометрической проекцией. При построении прямоугольной диметрии с приведенными показателями искажения размеры по оси $O'y'$ уменьшаются в 2 раза.

Приступим к построению линии пересечения заданных поверхностей. Поскольку поверхность пирамиды есть ничто иное, как совокупность плоских граней, то линия пересечения конуса вращения и пирамиды представляет собой совокупность кривых второго порядка (в каждой грани по одной кривой: эллипс, парабола или гипербола). Задачу удобно решать способом вспомогательных секущих плоскостей, проходящих через вершины обеих поверхностей, то есть через прямую KS . Такие конусы конус и пирамиду будут пересекать по прямым, построение которых на чертеже не вызовет затруднений. Найдем горизонтальный и профильный следы F и T прямой KS , вернее их аксонометрические проекции. Очевидно, что $P' = K'S' \cap K'_1S'_1$, $T' = K'S' \cap K'_3S'_3$ (рис. 10.105). Какую бы секущую вспомогательную плоскость, проходящую через SK мы не взяли, ее горизонтальный и профильный следы всегда будут проходить через F и T соответственно.

Теперь приступим непосредственно к нахождению точек линии пересечения. Выберем такую секущую плоскость, проходящую через KS , чтобы она коснулась конуса по прямой SE (рис. 10.106). Очевидно, что ее горизонтальный след касается основания конуса. Поверхность

пирамиды эта плоскость пересекает по двум прямым KF и KG . Точки пересечения этих прямых, то есть точки $1 = SE \cap KF$, $2 = SE \cap KG$ будут искомыми точками линии пересечения.

Далее найдем точки 3 и 4 пересечения ребра KC с поверхностью конуса (рис. 10.107). Для этого возьмем плоскость, инцидентную ребру KC . Поверхность конуса пересекается по образующим SL и SM , а поверхность пирамиды по ребру KC и еще одной прямой, которую мы во внимание не берем и на рисунке не показываем. Точки 3 и 4 получаются как результат пересечения образующих конуса SL и SM с ребром KC . Кроме точек 2 , 3 и 4 , расположенных на грани KCD можно получить сколь угодно много точек. Но мы ограничимся этими и тремя. Соединив их плавно, получаем аксонометрическую проекцию дуги кривой (параболы), по которой поверхность конуса пересекается гранью KCD .

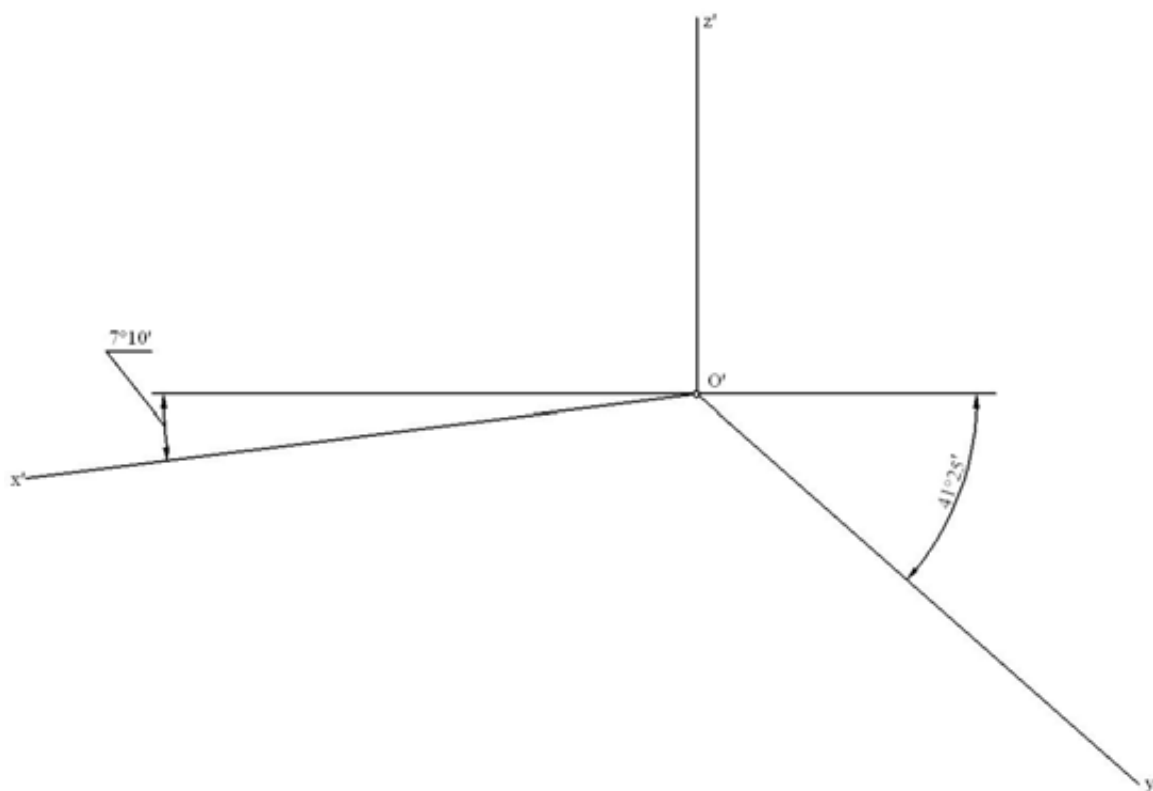


Рис. 10.102

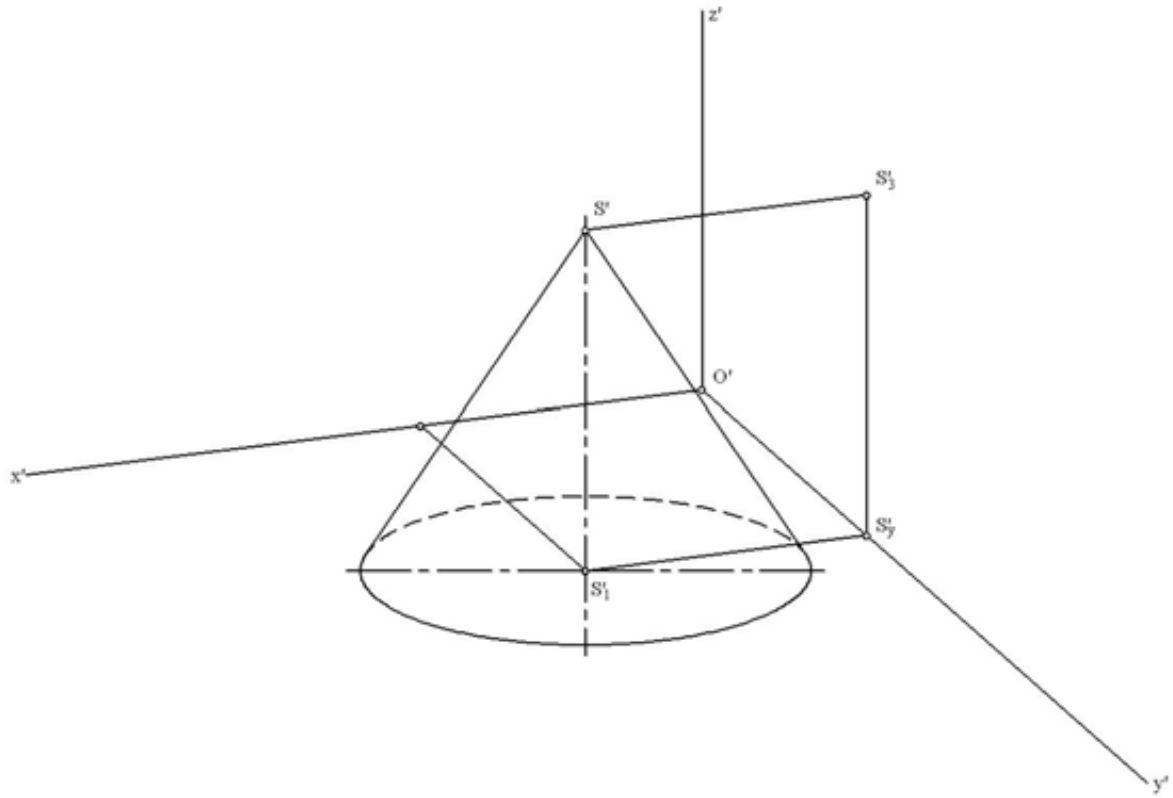


Рис. 10.103

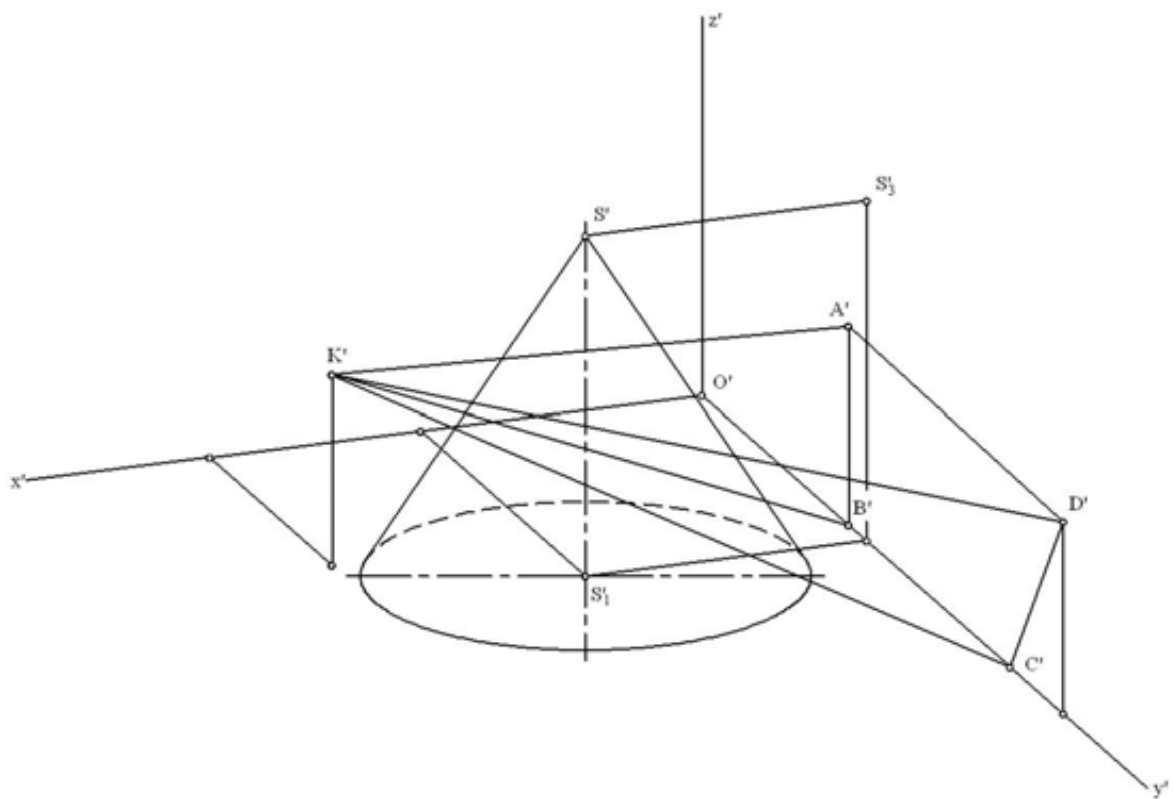


Рис. 10.104

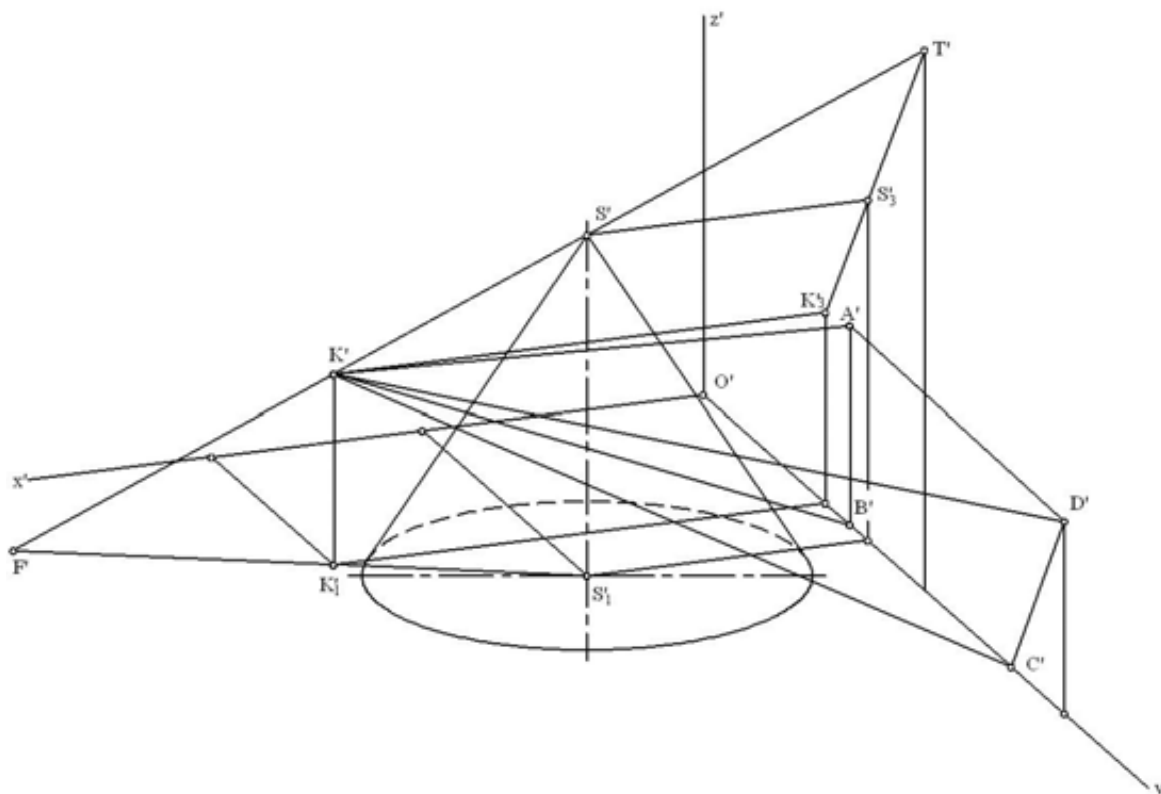


Рис. 10.105

Найдем точки 5 и 6 линии пересечения, расположенные на контурной образующей конуса SR (рис. 10.108). Вспомогательная плоскость проходит через SR и пересекает конус по двум образующим, одной из которых является SR (другую во внимание не берем из тех соображений, чтобы не затемнять чертеж большим количеством построений). Поверхность пирамиды вспомогательной плоскостью пересекается по двум прямым, которые в пересечении с образующей SR дают точки 5 и 6. Аналогично находим точки 7 и 8, расположенные на контурной образующей SN (рис. 10.109).

Для нахождения точек 9 и 10, расположенных на ребре KB , выбираем вспомогательную плоскость, проходящую через ребро KB (рис. 10.110). Дальнейшие рассуждения и построения аналогичны изложенным выше.

Таким образом, точки линии пересечения найдены. Остается соединить их, учитывая последовательность расположения точек в соответствующих гранях и видимость. Полученная линия пересечения составлена из дуг кривых второго порядка. Причем в этой задаче представлены все возможные случаи: в грани AKD получается дуга окружности, в грани ABK – гиперболы, в грани BCK – эллипса, в грани KCD – параболы (рис. 10.110, 10.111).

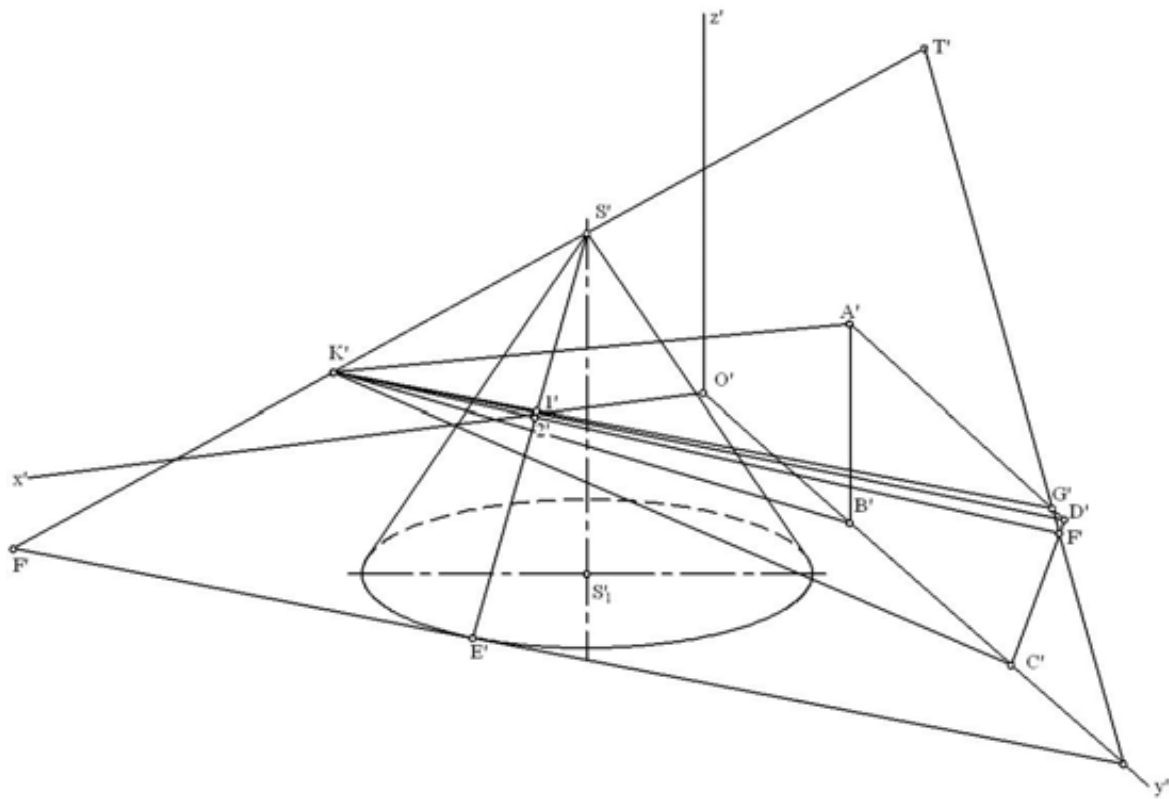


Рис. 10.106

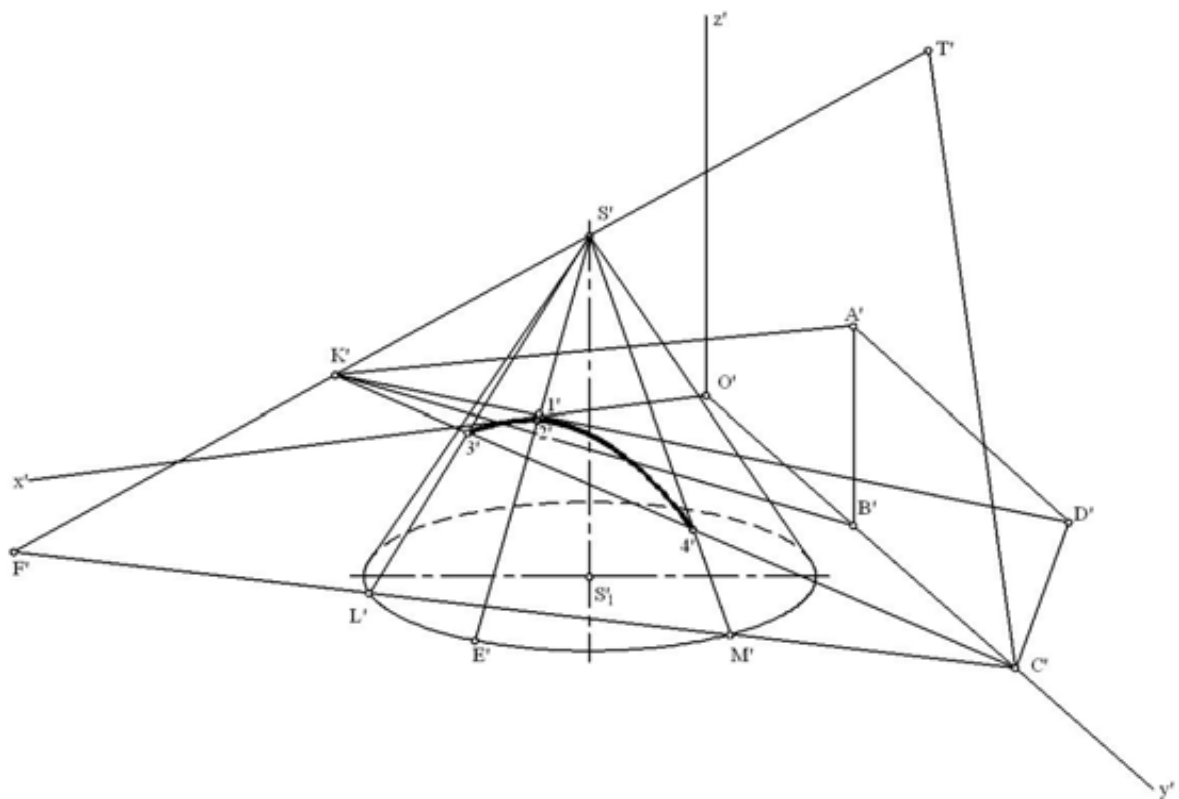


Рис. 10.107

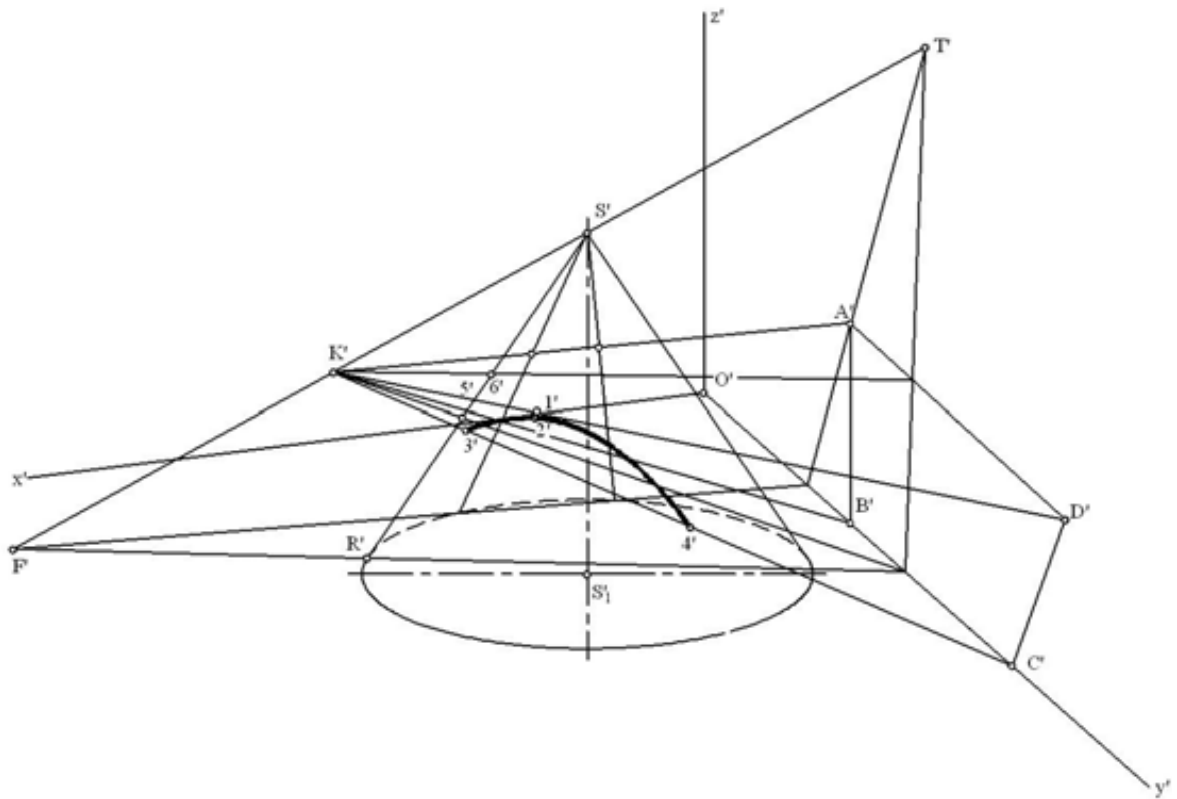


Рис. 10.108

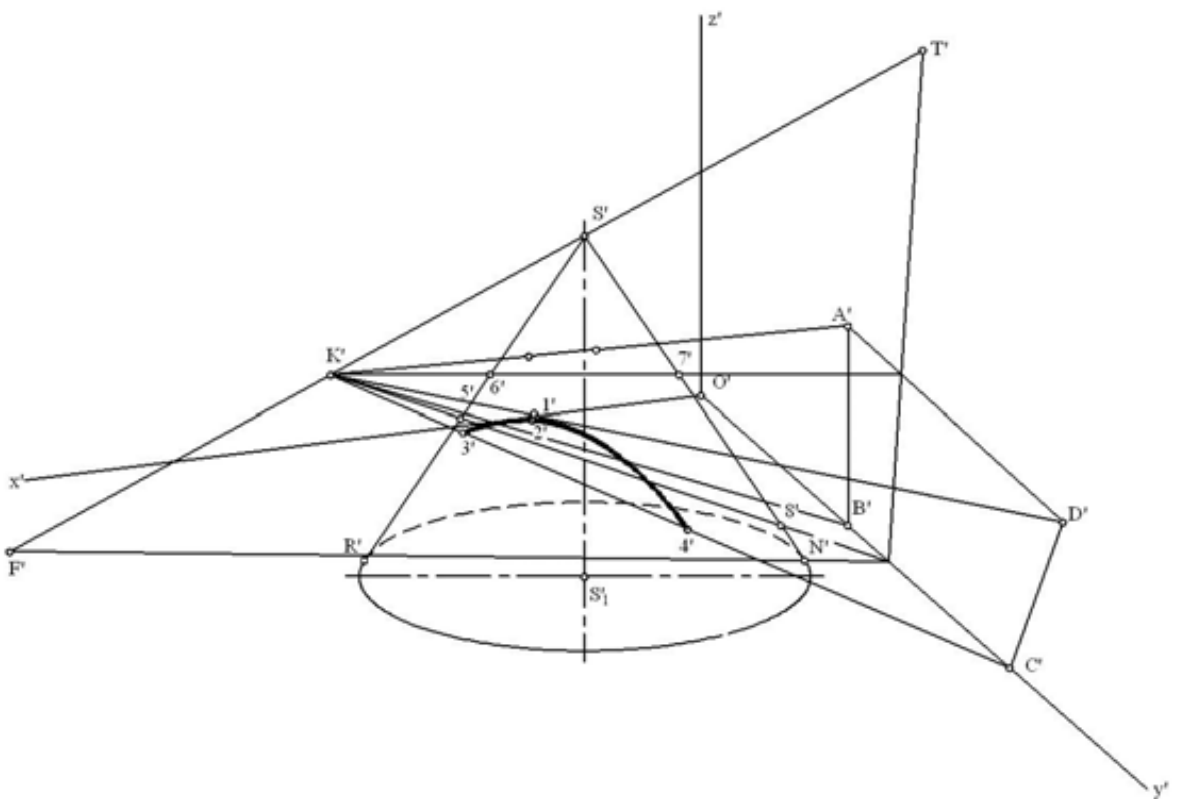


Рис. 10.109

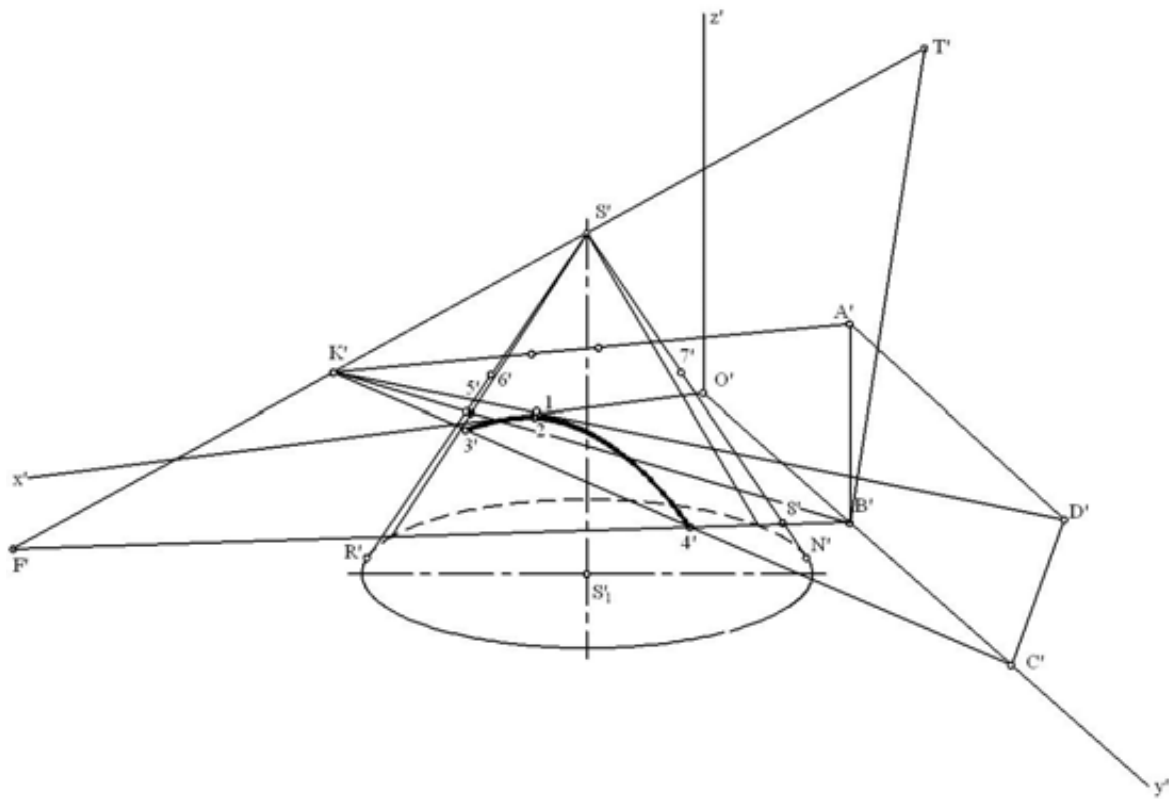


Рис. 10.110

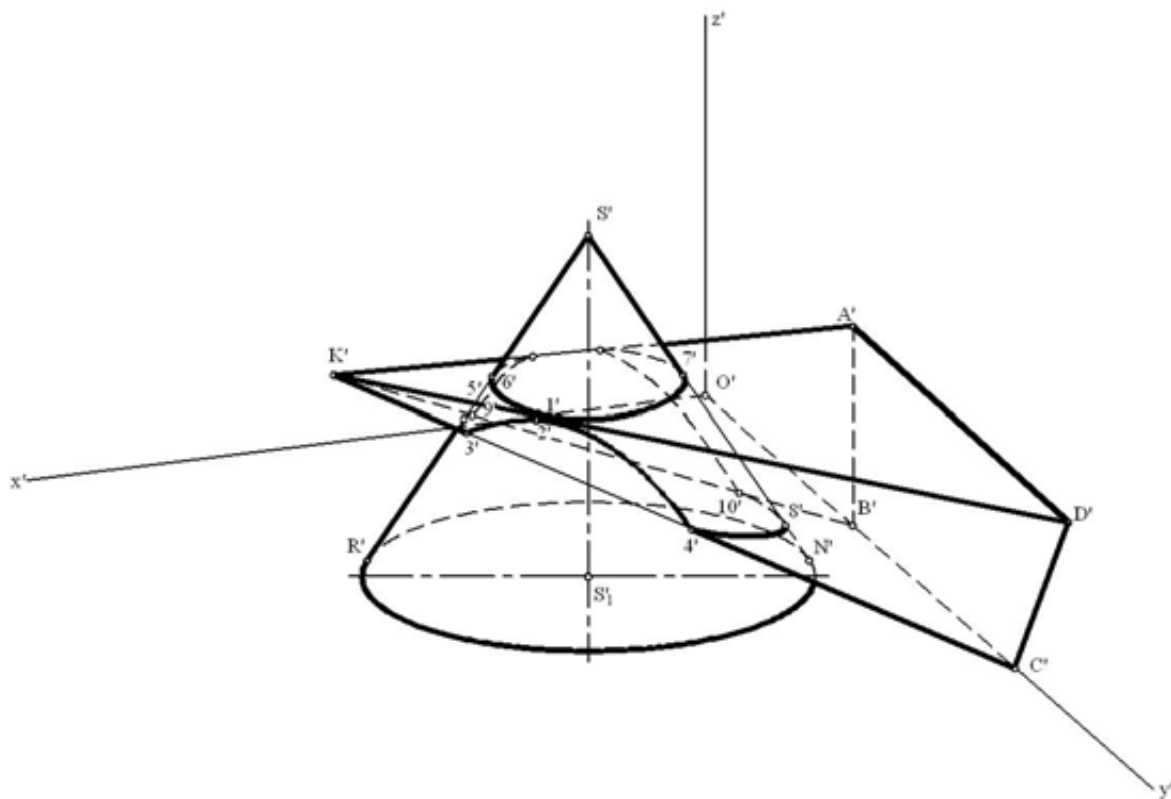


Рис. 10.110

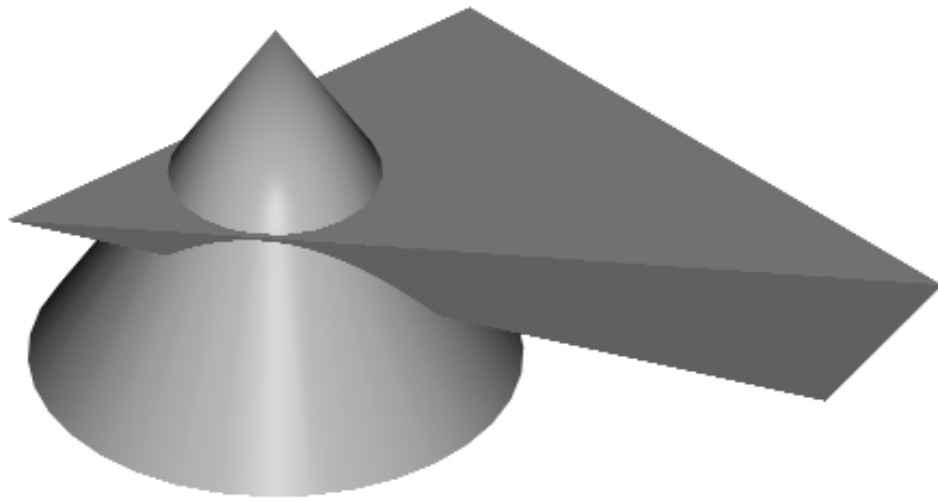


Рис. 10.111

11. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ГОРНОМ ДЕЛЕ И КОНСТРУИРОВАНИИ ГОРНОШАХТНОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Методы начертательной геометрии используются как при конструировании горношахтного оборудования, а так и при решении задач, связанных с горным делом. Объекты горного производства (горные выработки, системы разработки и др) являются сложными геометрическими формами. Воспроизведение формы залежи вследствие различных тектонических нарушений (сдвигов, разрывов, смятий, смещений, антиклинальных и синклиналиных проявлений) зачастую без использования геометрических методов затруднено. Методы геометрического моделирования, в частности методы начертательной геометрии, широко используются при конструировании оборудования для горношахтных работ. Это объясняется достаточно высокой степенью сложности оборудования (рис 11.1).



Рис. 11.1

Практически все изучаемые в начертательной геометрии геометрические образы используются при решении задач, связанных с горным делом и конструированием горношахтного оборудования (табл.11.1). Поэтому уже на первом курсе студент должен осознать важность графических методов в решении прикладных задач. Достижению данной цели и служит предлагаемый раздел.

Таблица 11.1

Геометрический образ	Применение в горном деле
Кривые	Всевозможные пересечения горных выработок, контуры горных выработок.
Плоскости	Границы систем разработки, пласты.
Гранные поверхности	Шахтный ствол, восстающий, слепой ствол, рудоспуск, бремсберг, уклон, гезенк, подземная камера, совокупная форма системы разработки.
Криволинейные поверхности вращения	Шахтный ствол, восстающий, слепой ствол, рудоспуск, бремсберг, уклон, гезенк, подземная камера, аппроксимация рудных тел, боковые поверхности сдвижения.
Линейчатые поверхности	Подземные камеры, границы систем разработки, аппроксимация рудных тел.
Винтовые поверхности	Шнеки, боковые поверхности сдвижения, буры.
Циклические поверхности	Трубопроводы.

11.1. Некоторые специальные термины

Бремсберг – подземная наклонная выработка, не имеющая выхода на поверхность, предназначенная для спуска грузов с вышележащего на нижележащий горизонт при помощи механических устройств.

Гезенк – вертикальная или наклонная подземная горная выработка, не имеющая непосредственного выхода на земную поверхность и служащая в основном для спуска грузов с одного горизонта на другой, передвижения людей, проветривания.

Дучка – короткая вертикальная (наклонная) горная выработка, для выпуска отбитой руды из подземной очистной выработки на нижележащий транспортный горизонт.

Забой (при подземной разработке) – поверхность, ограничивающая горную выработку и перемещающаяся в результате горных работ.

Квершлаг – горизонтальная, реже наклонная подземная горная выработка, не имеющая непосредственно выхода на земную поверхность, проводимая в шахтах по породам под прямым углом к

линии простирания пластов горных пород. Служит для откатки грузов, передвижения людей, вентиляции и др.

Мульда – форма залегания слоев горных пород в виде чаши или вытянутого, неправильного по форме корытообразного прогиба.

Пласт – форма залегания осадочных и многих метаморфических горных пород.

Репер – особый знак, вделанный в стену каменного сооружения или в грунт.

Рудоспуск – вертикальная или наклонная выработка (иногда часть выработанного пространства), предназначенная для перепуска руды под действием собственного веса с верхнего горизонта на нижний.

Скважина – горная выработка круглого сечения глубиной от нескольких метров до 10 км и диаметром обычно 75-300 мм.

Шахта – вертикальная горная выработка с небольшими поперечными размерами при значительной глубине.

Штольня – горизонтальная или наклонная поземная выработка с непосредственным выходом на земную поверхность. Различают штольни разведочные и эксплуатационные (откаточные, вентиляционные, водоотливные).

Штрек – горизонтальная выработка по простиранию ископаемого и не имеющая выхода на дневную поверхность.

11.2. Задание геометрических образов на комплексном чертеже

11.2.1. Ось прямолинейной скважины, соединяющей реперную точку дневной поверхности с оконтуренным рудным телом описывается уравнением $\frac{x-30}{70} = \frac{y-55}{60} = \frac{z-35}{80}$. Задать скважину на трехкартинном чертеже.

11.2.2. Пласт угля задан двумя пересекающимися прямыми a и b , уравнения которых соответственно имеют вид

$$\frac{x-85}{4} = \frac{y-35}{2} = \frac{z-100}{7}, \quad \frac{x-85}{7} = \frac{y-35}{-5} = \frac{z-100}{0}.$$

Задать пласт на двухкартинном чертеже.

11.2.3. Рудное тело аппроксимировано сферой с центром $S(120, 40, -50)$, проходящей через точку $A(50, 60, -20)$. Задать фронтальный и горизонтальный очерки сферы.

11.2.4. Купол, образовавшийся в поддерживаемом пространстве комплексно-механизированного очистного забоя, имеет форму конуса вращения, описываемого уравнением $x^2 + y^2 = (h - z)^2 \frac{a^2}{h^2}$, где h – высота конуса, a – радиус основания. Построить фронтальный и горизонтальный очерки купола.

11.2.5. Сечение купола, образовавшегося в поддерживаемом пространстве комплексно-механизированного очистного забоя, имеет арочную форму. Купол ограничен параболическим цилиндром $4 - z = y^2$ и плоскостями $x = -1$, $x = 1$, $z = 0$ (рис. 11.2). Построить фронтальный, горизонтальный и профильный очерки купола.

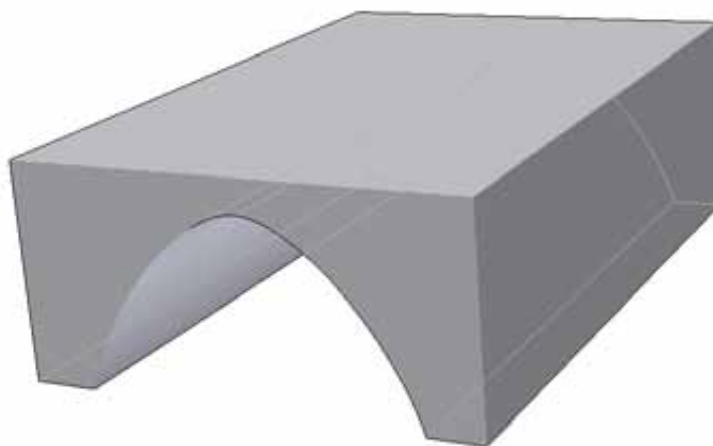


Рис. 11.2

11.2.6. Построить отсек наклонного геликоида, ограничивающего инструмент для вращательного бурения (рис. 11.3а). Недостающие размеры взять с рисунка. Угол наклона прямолинейной образующей к оси вращения – 75° .

11.2.7. Построить участок прямого геликоида, ограничивающего инструмент для вращательного бурения (рис. 11.3б). Недостающие размеры взять с рисунка.



а



б

Рис. 11.3

11.3. Позиционные задачи

11.3.1. Три вертикальные шахты AB, CD и EF пересекают угольный пласт в точках $B(150, 20, -40)$, $D(80, 80, -60)$ и $F(10, 40, 10)$. Определить глубину четвертой шахты DK до ее встречи с тем же пластом.

11.3.2. Четыре скважины, пробуренные с дневной поверхности, пересекли залежь полезного ископаемого. Точки пересечения с залежью известны (рис.11.4). Определить, имеет ли эта залежь пластообразную форму.

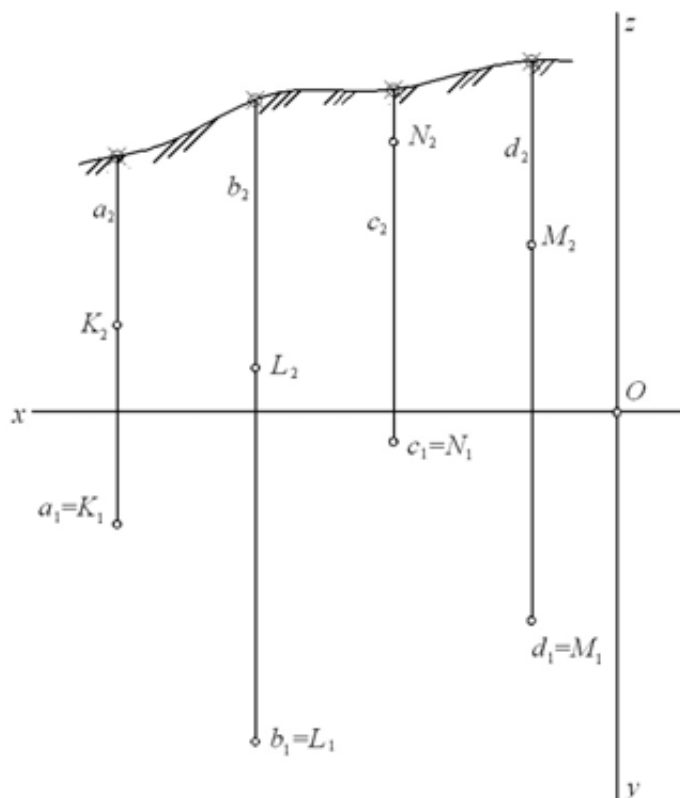


Рис. 11.4

11.3.3. Рудное тело аппроксимировано сферой, инцидентной четырем точкам $A(100, 20, -60)$, $B(80, 60, -10)$, $C(10, 30, -100)$, $D(40, 90, -40)$. Найти центр и радиусы сферы.

11.3.4. Построить линию пересечения вертикального ствола шахты, представляющего собой цилиндр вращения, с квершлагом трапецидального сечения (рис.11.5).

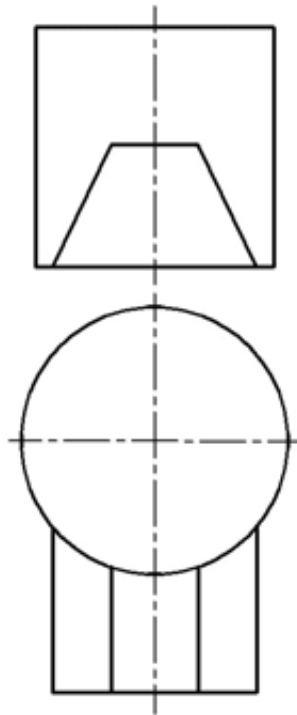


Рис. 11.5

11.3.5. Построить линию пересечения наклонной дучки круглого сечения с вертикальным рудоспуском круглого сечения (рис. 11.6).

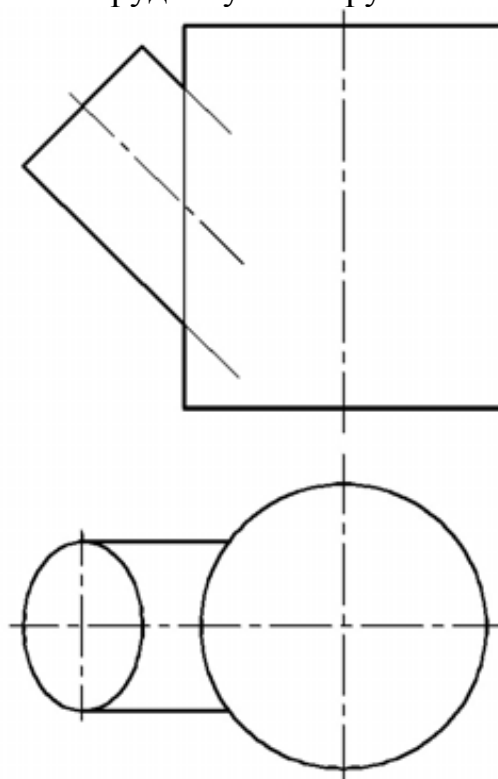


Рис. 11.6

11.3.6. Построить линию взаимного пересечения горных выработок трапецидальной формы, расположенных перпендикулярно (рис.11.7)

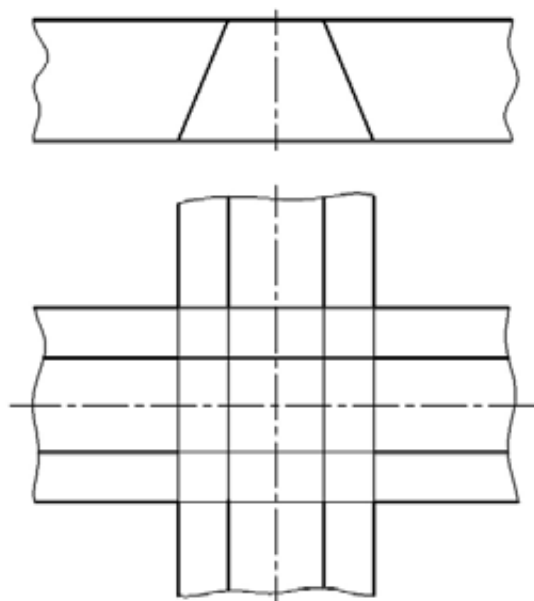


Рис. 11.7

11.3.7. Задан блок залежи полезного ископаемого случайной формы. Из точки A , лежащей на дневной поверхности, пробурена скважина l , имеющая траекторию пространственной кривой. Требуется определить точки пересечения скважины с залежью (рис. 11.8).

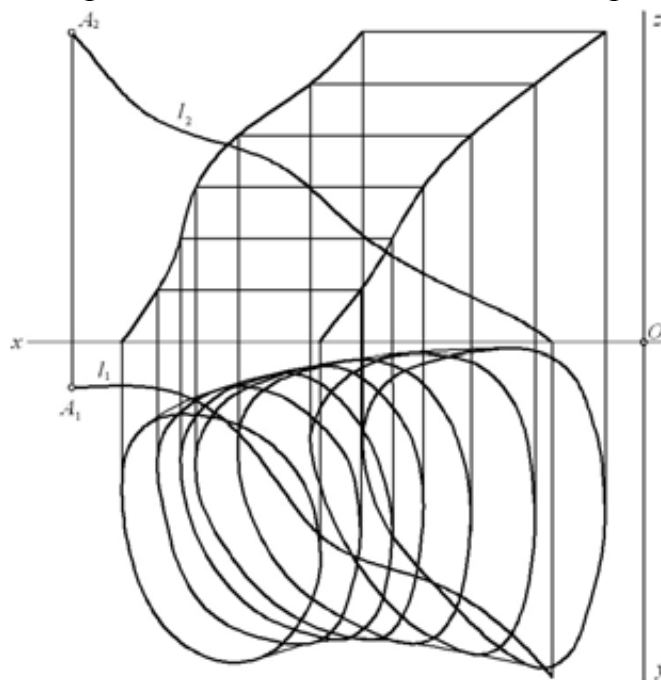


Рис. 11.8

11.3.8. Задан некоторый блок залежи полезного ископаемого случайной формы. Из точки A пробурена скважина l , имеющая траекторию плоской кривой. Требуется определить точки пересечения скважины с залежью (рис. 11.9).

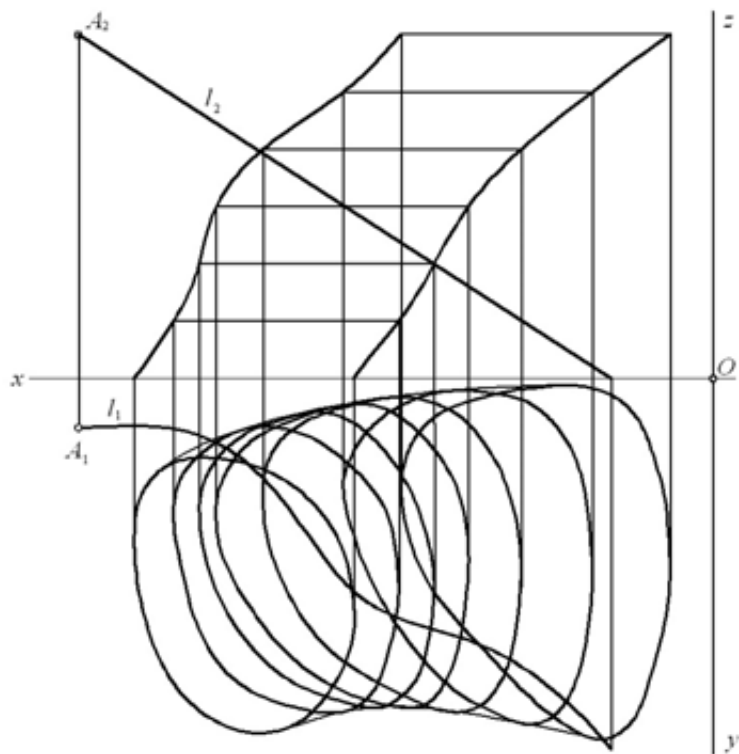


Рис. 11.9

11.3.9. Задан блок залежи полезного ископаемого случайной формы. Из точки A , лежащей на дневной поверхности, пробурена скважина l , имеющая траекторию прямой. Требуется определить точки пересечения скважины с залежью (рис. 11.10).

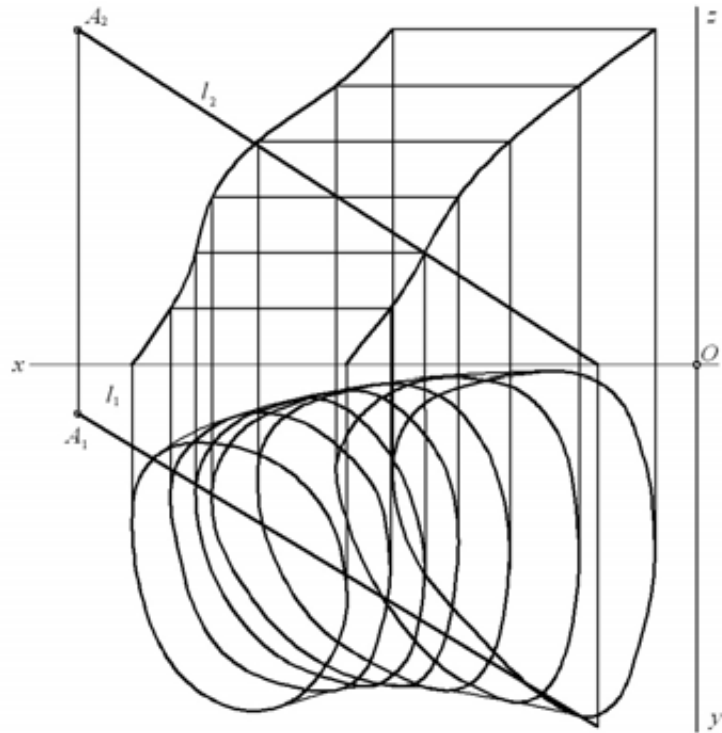


Рис. 11.10

11.4. Метрические задачи

11.4.1. Между точками $A(150, 30, -50)$ и $B(80, 50, -20)$ проложен прямолинейный тоннель AB , который продолжен по тому же направлению до поверхности земли в точке C . Определить длины участков AB, BC тоннеля, величину уклона AC и координаты точки C .

11.4.2. Определить истинную длину оси подземного перехода между точками $A(100, -20, -20)$ и $B(-20, 60, -10)$ и угол наклона этой оси к горизонтальной плоскости.

11.4.3. Определить суммарную длину трубопровода сжатого воздуха от компрессорной на дневной поверхности до очистного забоя(рис.11.11)

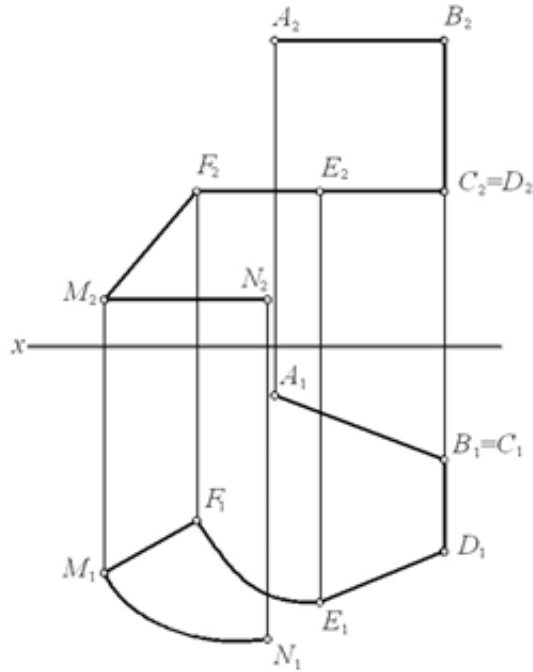


Рис. 11.11

11.4.4. От поверхности земли вглубь идут две шахты AB и CD . Глубина первой шахты 20 м, второй 50 м. Абсцисса первой шахты на 60 м больше, чем у второй, а ордината – на 25 м меньше. Концы шахт соединены штольней BD . Определить длину штольни и угол наклона ее к горизонтальной плоскости проекций.

11.4.5. Найти кратчайшее расстояние между бремсбергами AB и CD (рис. 11.12.).

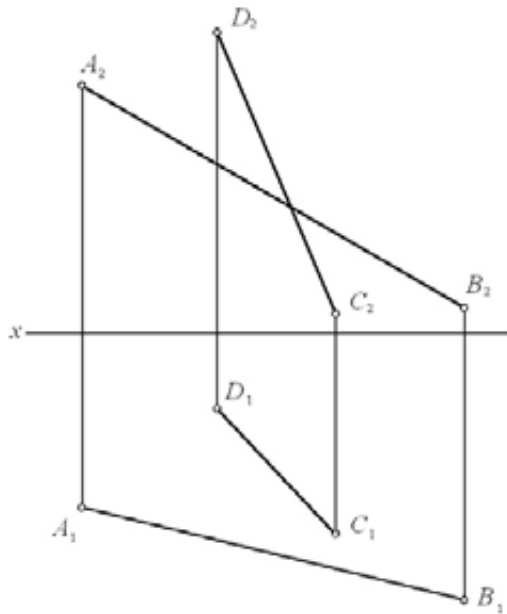


Рис. 11.12

11.4.6. Определить ось скважины, соединяющей реперную точку дневной поверхности к оконтуренному рудному телу (рис. 11.13)

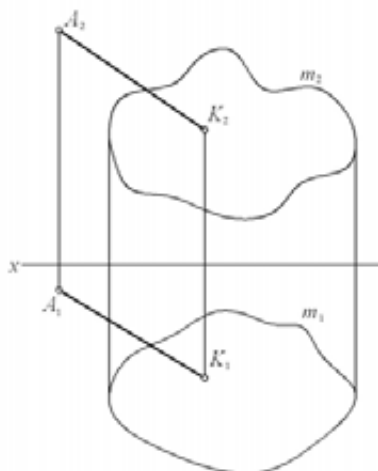


Рис. 11.13

11.4.7. Из точки $A(70, 70, 0)$, лежащей на поверхности земли идет подземный переход к тоннелю KL : $K(150, 80, 30)$, $L(70, 0, 50)$. Определить кратчайшее расстояние от точки A до оси KL , точку пересечения этого перехода с осью KL , уклон оси перехода AB к горизонтальной плоскости.

11.4.8. От поверхности земли вглубь идут три шахты AB , CD и EF до встречи с пластом угля в точках B , D и F . Определить угол наклона плоскости этого пласта к горизонтальной плоскости, если заданы точки $A(150, 20, 0)$, $C(80, 80, 0)$, $E(10, 40, 0)$, а глубины шахт соответственно равны 40м, 60м, 10 м.

11.4.9. Определить кратчайшее расстояние от точки A до подземной камеры, имеющей форму параллелепипеда (рис. 11.14)

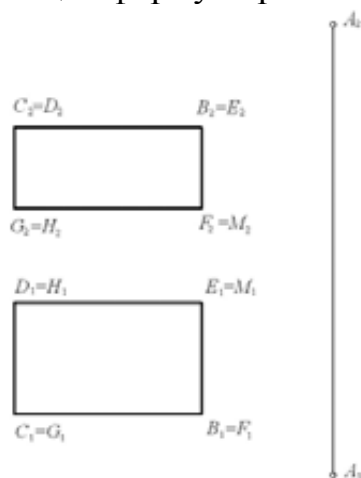


Рис. 11.14

11.4.10. Определить кратчайшее расстояние от точки A до подземной камеры, верхняя часть которой имеет сферическую форму, о борта камеры – усеченного конуса (рис. 11.15).

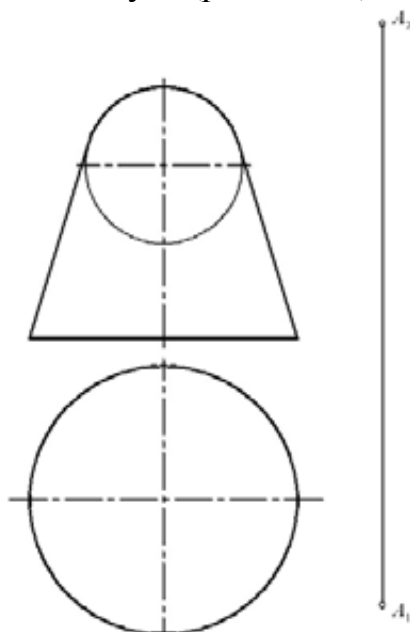


Рис. 11.15

11.4.11. Определить объем рудного тела, аппроксимировав его форму к закономерной (рис.11.16).

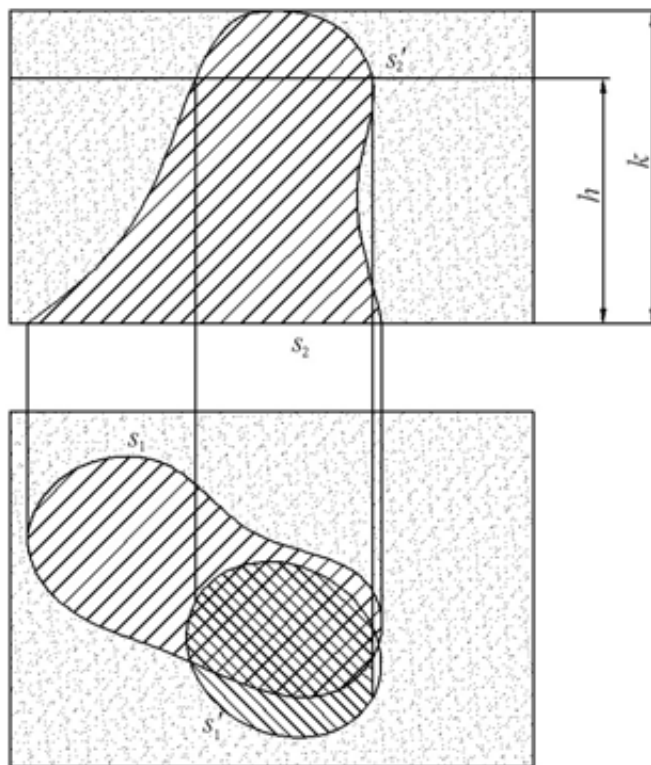


Рис. 11.16

11.4.12. Определить центр залежи случайной формы, приняв залежь полезного ископаемого за изотропную среду (рис.11.17).

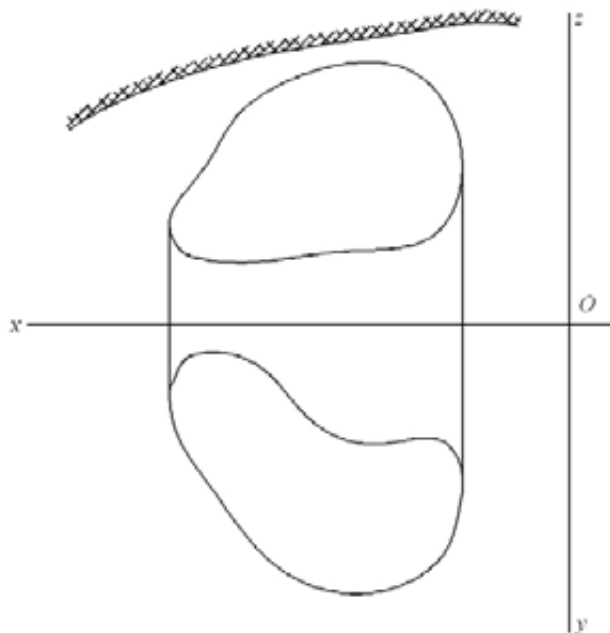


Рис. 11.17

11.4.13. Участок гористой местности аппроксимирован незамкнутой гранной поверхностью (рис.11.18). Найти кратчайшее расстояние между точками M и N , принадлежащих этой поверхности.

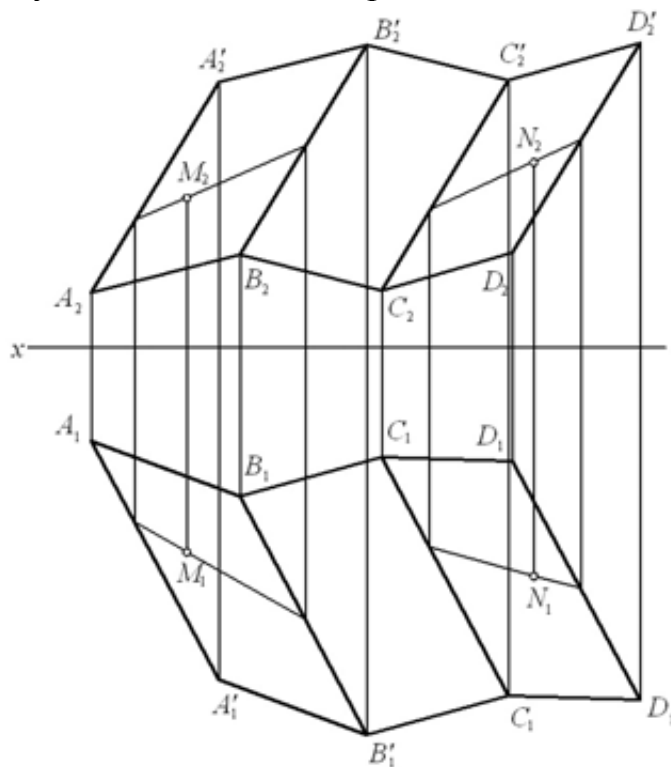


Рис. 11.18

11.4.14. Определить углы наклона к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций оси тангенциального поворотного резца, принадлежащему шнековому исполнительному органу уборочного комбайна (рис. 11.19), проходящей через точку A винтовой линии шнека (рис. 11.20).

11.4.15. Определить натуральную величину угла между двумя положениями оси тангенциального поворотного резца: в точке A и точке A' , через которую будет проходить ось, после поворота шнека на угол в 210° (рис. 11.20).



Рис. 11.19

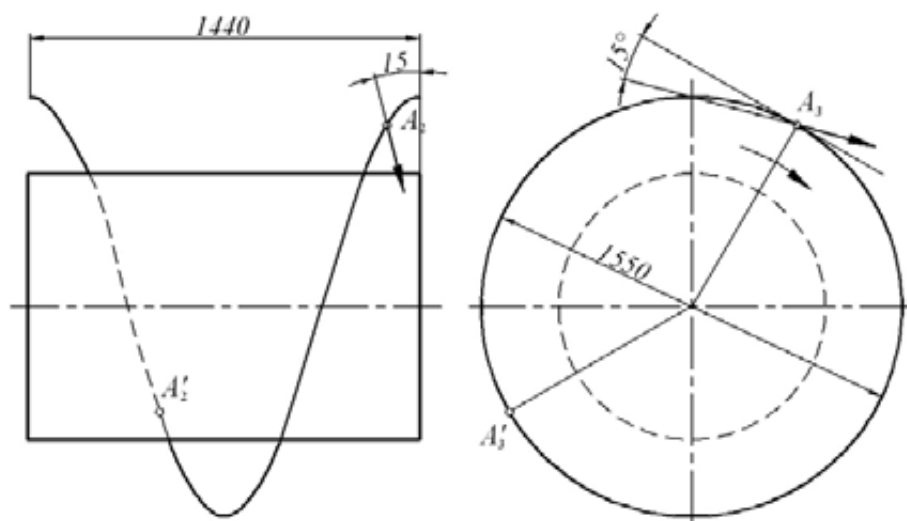


Рис. 11.20

11.4.16. Построить горизонтальную и фронтальную проекции центральной оси исполнительного органа проходческого комбайна, когда ось расположена в крайнем верхнем и крайнем правом положениях (рис. 11.21).

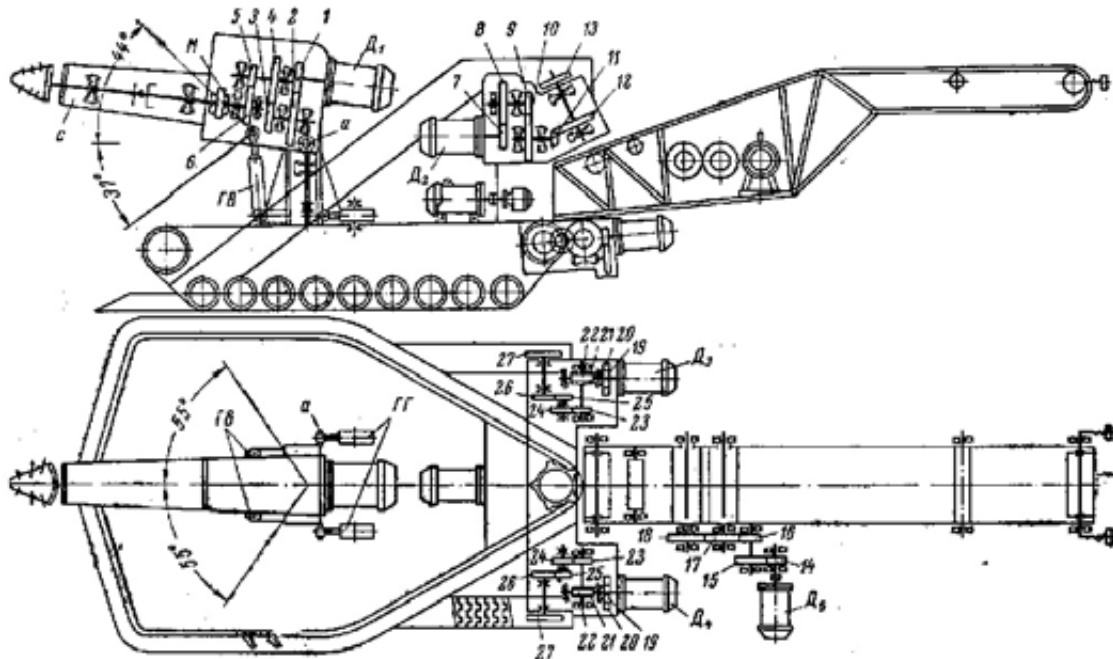


Рис. 11.21

11.4.17. Определить углы наклона гидравлической стойки 6 к плоскостям проекций при совмещении перекрытия 3 со сводом шахты. Размеры взять с рисунка 11.22.

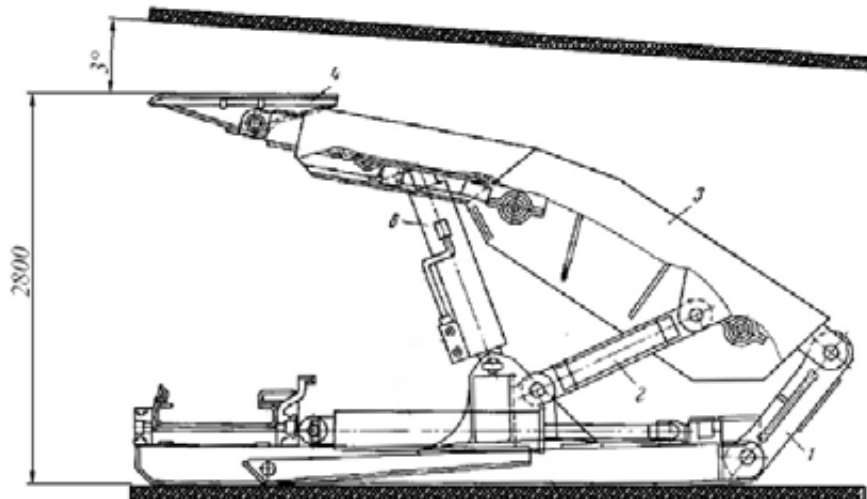


Рис. 11.22

11.4.18. Определить наибольшее количество резцов на поверхности конуса ограничивающего буровую головку (рис. 11.23), если известно, что оси резцов пересекаются с поверхностью конуса по конической винтовой линии. Шаг между осями резцов 150 мм.

11.4.19 Определить угол между осями двух смежных резцов, расположенных на поверхности конуса буровой головки (рис. 11.23). Оси резцов пересекаются с поверхностью конуса по конической винтовой линии. Шаг между осями резцов 150 мм. Угол между осью резца и образующей конуса 80° .

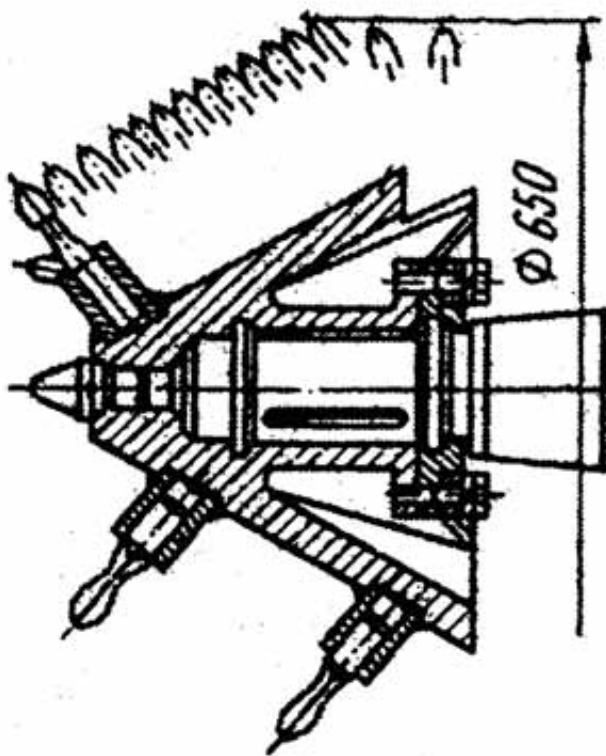


Рис. 11.23

11.4.20. Определить натуральную величину угла боковой поверхностью 1 и передней плоскостью 2 резца очистного комбайна (рис. 11.24). Наглядное изображение резца показано на рис. 11.25.

11.4.21. Определить натуральную величину боковой поверхности резца (рис. 11.24)

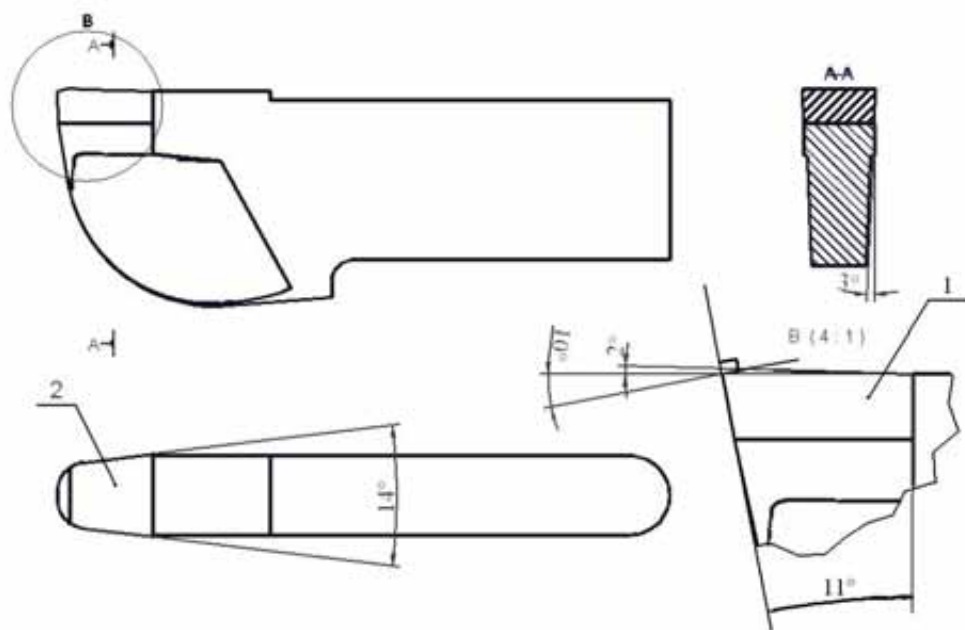


Рис. 11.24

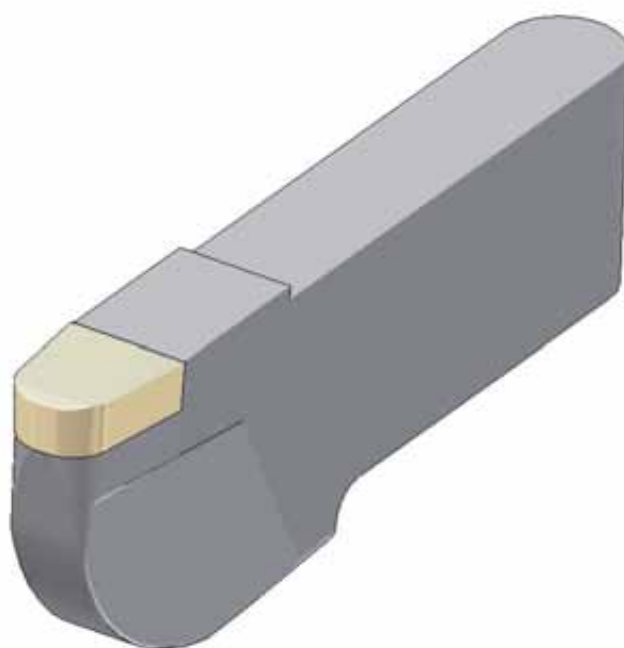


Рис. 11.25

12. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Предлагаемые тесты рассчитаны на использование контролирующего микропроцессорного устройства «Символ», разработанного лабораторией информационно–дидактических систем кафедры высшей математики Томского университета систем управления и радиоэлектроники. Применение данного устройства позволяет:

- осуществлять оперативный контроль знаний;
- осуществлять самоконтроль;
- обеспечивать комфортные условия обучения;
- существенно снизить затраты на приобретение компьютерной техники;

-отказаться от разработки программного обеспечения вычислительной техники.

Устройство достаточно просто в применении (рис.12.1). Ответ на вопрос может быть введен в любой форме – знаковой, символьной, числовой, словесной. При работе с устройством предполагается обязательный ввод кода вопроса, который приводится после формулировки вопроса в скобках. Низкая стоимость и небольшие габариты позволяют обеспечить устройством не только кафедры, но и студентов. Создаются идеальные условия для самоконтроля усвоения разделов курса, а также правильности выполнения домашних заданий и расчетно-графических работ. В результате этого студент становится субъектом собственного развития, который не только усваивает содержание учебного материала, но и самостоятельно контролирует, оценивает и корректирует свою познавательную деятельность. Это соответствует современной концепции образования.

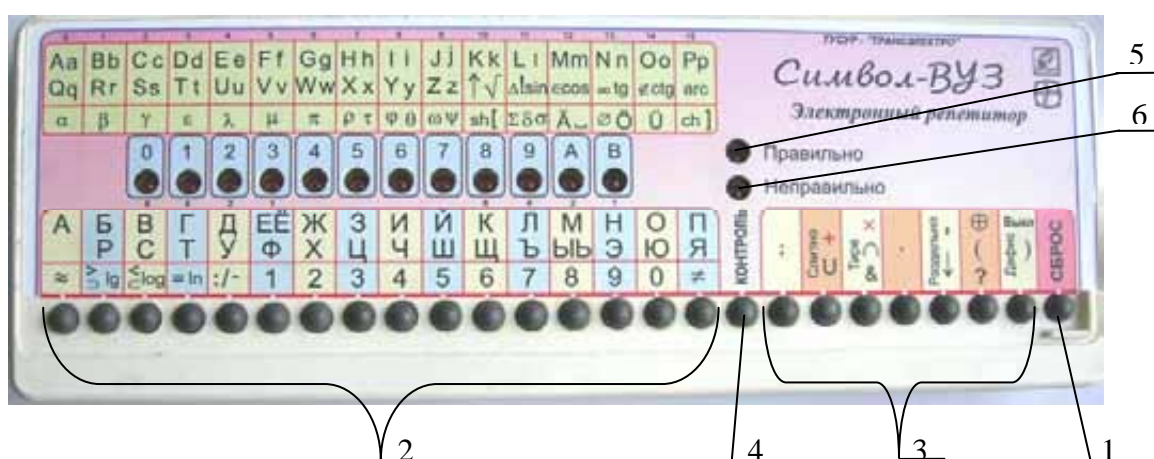
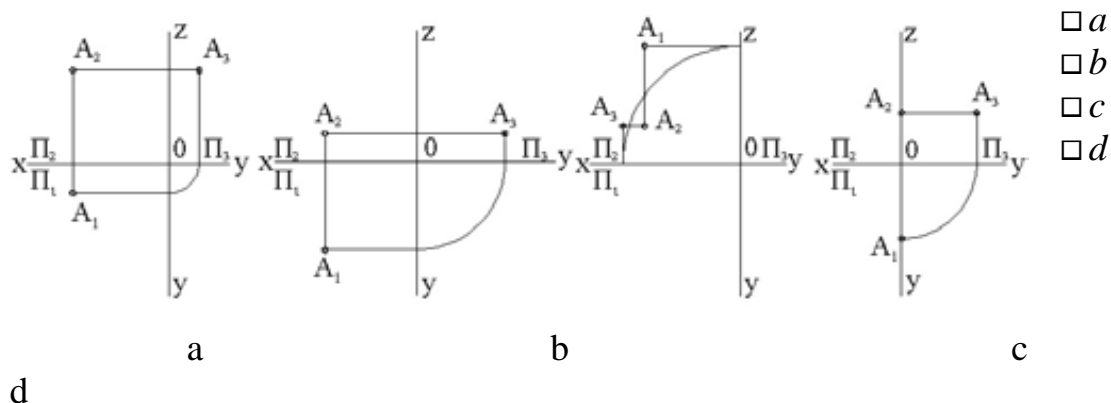


Рис.12.1

Внедрение предлагаемой системы контроля знаний по начертательной геометрии с использованием устройства «Символ» позволяет выявить уровень усвоения темы как отдельным студентом, так и группой. Диагностика уровня усвоения дает возможность индивидуализировать обучение, наметить для каждого студента максимальные, реально достижимые результаты обучения. Участие в тестировании подключает студента к анализу и самооценке его собственной учебной деятельности. Знание результатов тестирования по отдельным темам дисциплины позволяет студентам спрогнозировать свою возможную итоговую оценку и, при желании, предпринять усилия для ее повышения. Ответы на тестовые задания открывают перед преподавателем и студентом развернутую картину усвоения курса.

12.1. Комплексные чертежи точек, прямых и плоскостей

12.1.1. На каком чертеже точка A наиболее удалена от горизонтальной плоскости проекций Π_1 ? (АА)



12.1.2. Какая точка принадлежит оси проекций Oy ? (АК)

$A(30, 10, 40), B(0, 40, 20), C(50, 0, 5), D(0, 30, 0)$

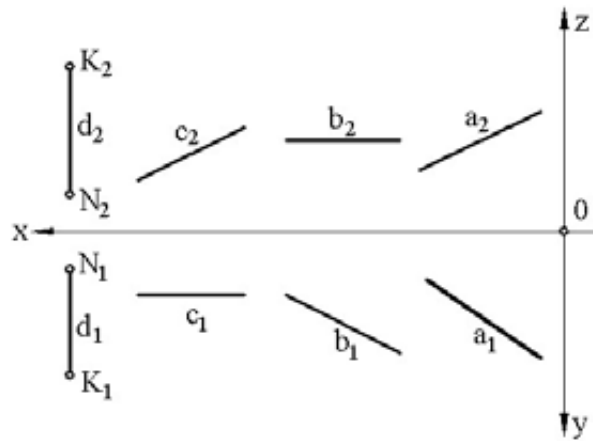
- A
 B
 C
 D

12.1.3. Какая точка принадлежит горизонтальной плоскости проекций Π_1 ? (АИ)

$A(15, 30, 10) B(30, 30, 20), C(40, 20, 0), D(0, 20, 30)$

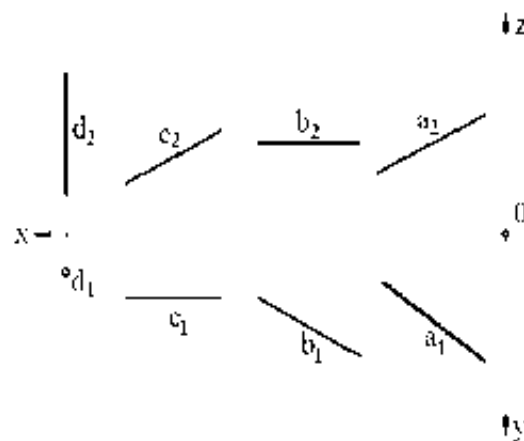
- A
 B
 C
 D

12.1.4. Какая из изображенных на комплексном чертеже прямых является горизонталью? (АВ)



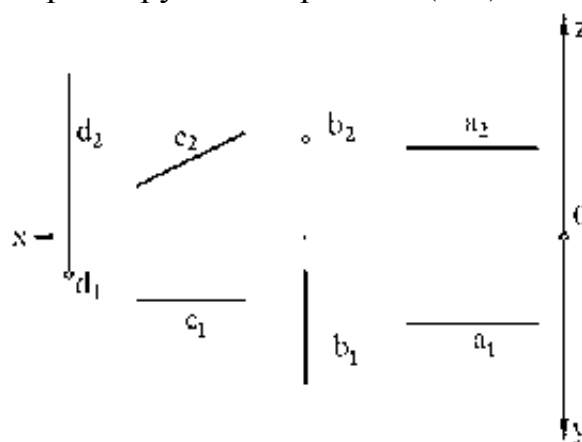
- a
- b
- c
- d

12.1.5. Какая из изображенных на комплексном чертеже прямых является фронталью? (А4)



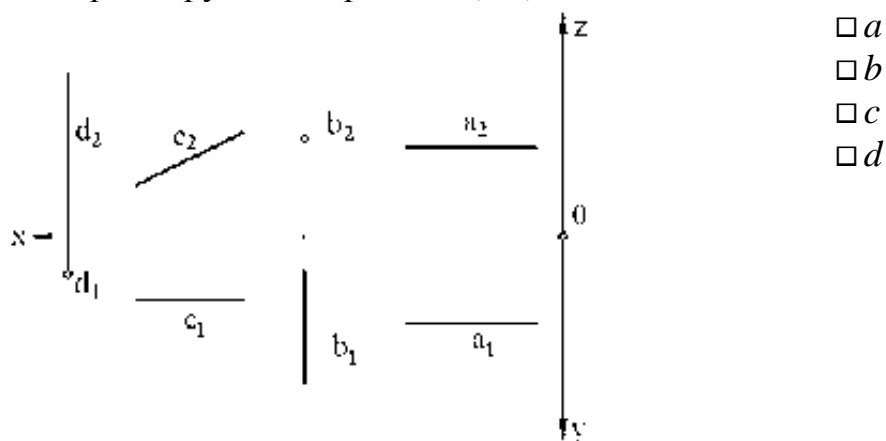
- a
- b
- c
- d

12.1.6. Какая из изображенных на комплексном чертеже прямых является фронтально проецирующей прямой? (АС)

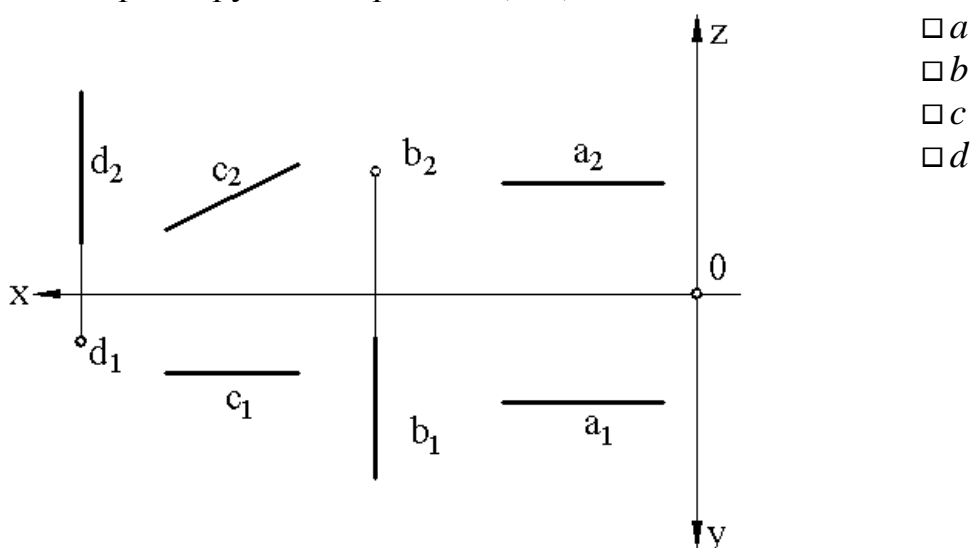


- a
- b
- c
- d

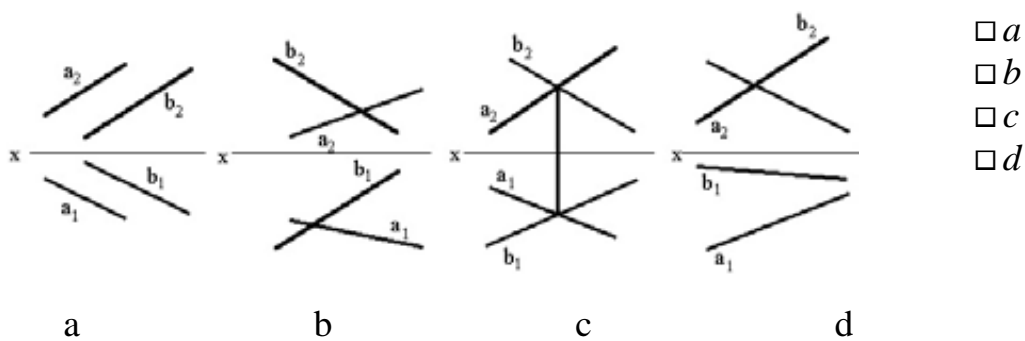
12.1.7. Какая из изображенных на комплексном чертеже прямых является горизонтально проецирующей прямой? (А6)



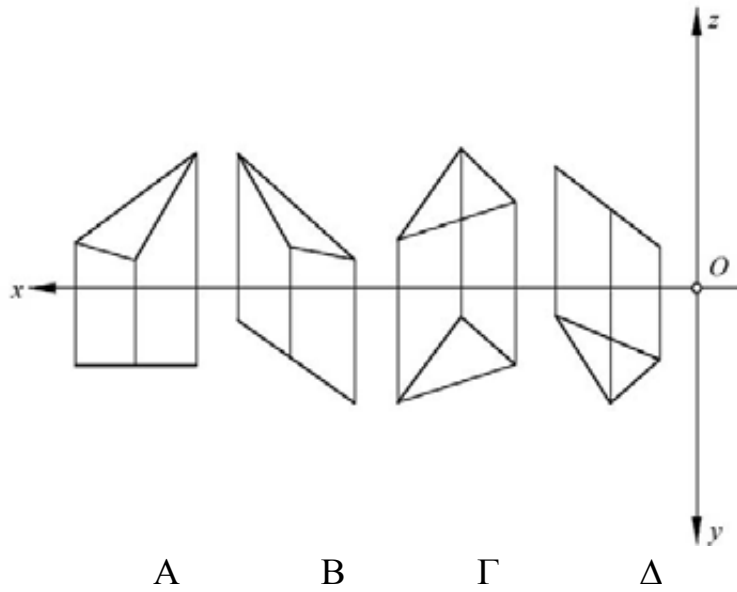
12.1.8. Какая из изображенных на комплексном чертеже прямых является профильно проецирующей прямой? (АА)



12.1.9. Укажите, на каких чертежах заданы пересекающиеся прямые. (А4)



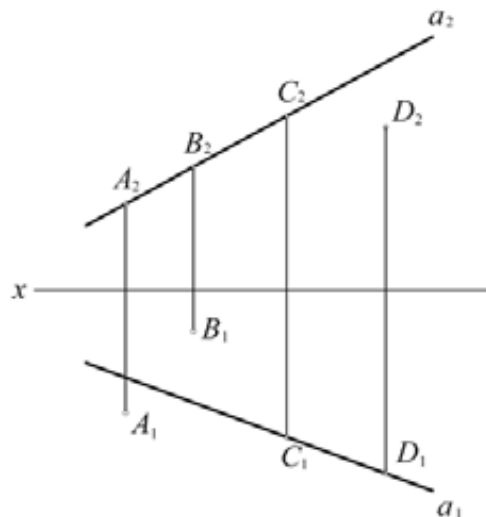
12.1.10. Какая из плоскостей А, В, Г, Δ является фронтальной плоскостью уровня? (АА)



- А
- В
- С
- Δ

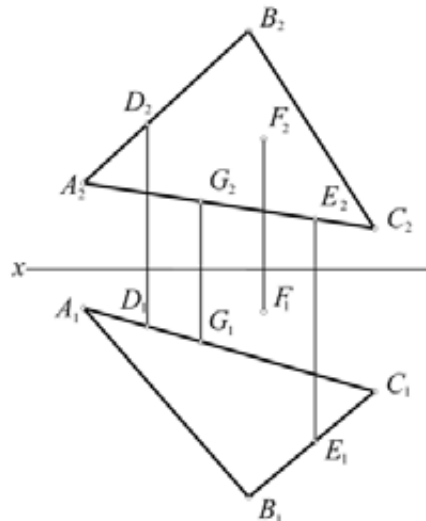
12.2. Позиционные задачи

12.2.1. Какая из точек А, В, С, D принадлежит прямой а? (АЧ)



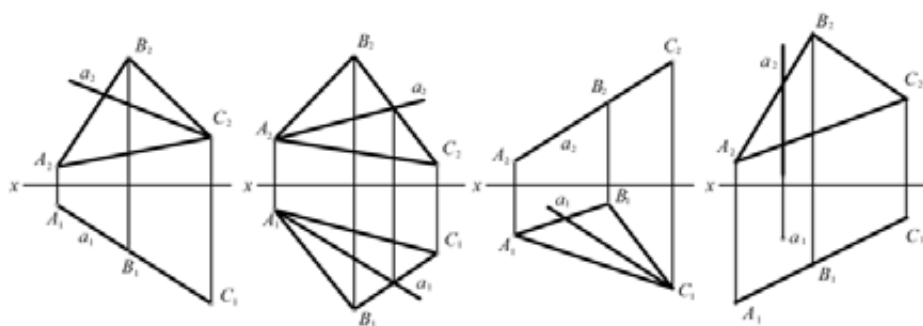
- А
- В
- С
- D

12.2.2. Какая из точек D, E, F, G принадлежит плоскости $\Gamma(A, B, C)$? (ВИ)



- D
- E
- F
- G

12.2.3. На каком чертеже изображена прямая, не принадлежащая плоскости? (ИА)



- 1
- 2
- 3
- 4

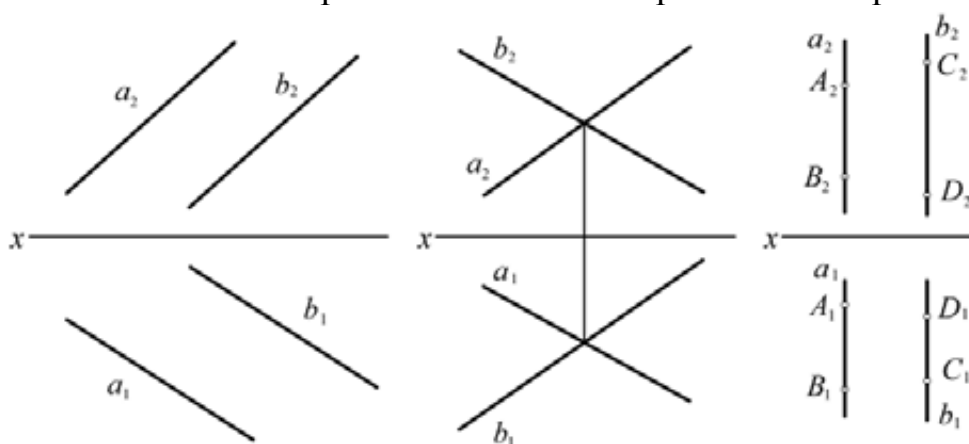
1

2

3

4

12.2.4. На каком чертеже показаны непараллельные прямые a и b ? (ЗК)



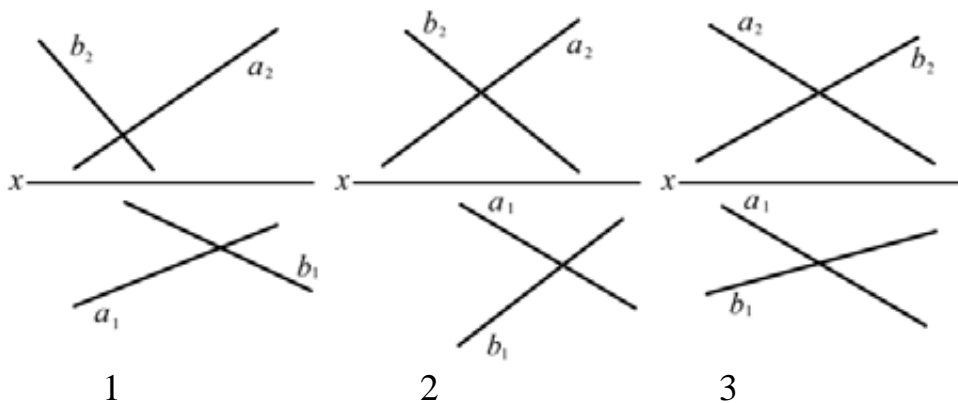
- 1
- 2
- 3

1

2

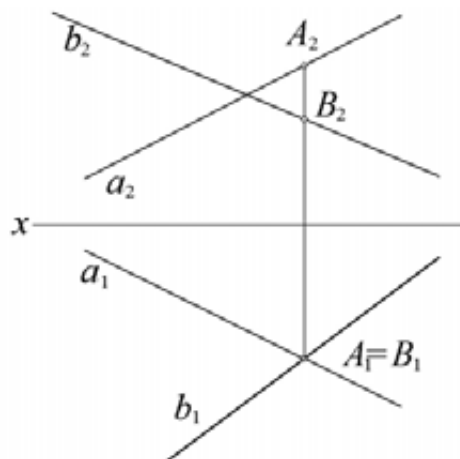
3

12.2.5. На каком чертеже заданы скрещивающиеся прямые? (XM)



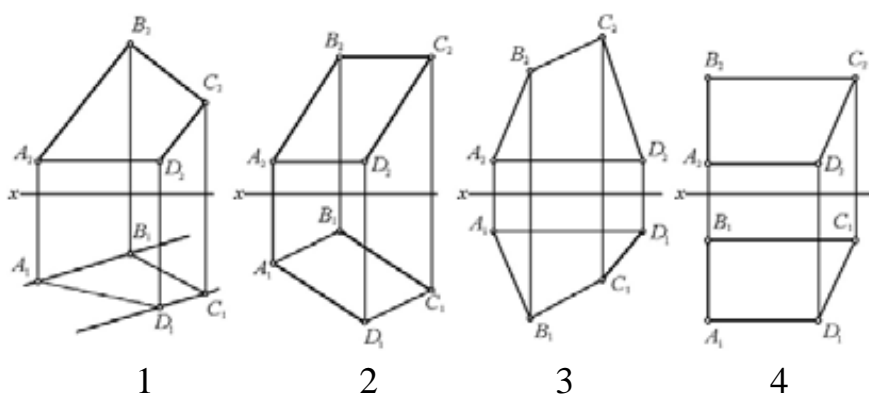
- 1
- 2
- 3

12.2.6. Какая из двух точек A или B относительно горизонтальной плоскости проекций Π_1 будет невидимой? (AC)



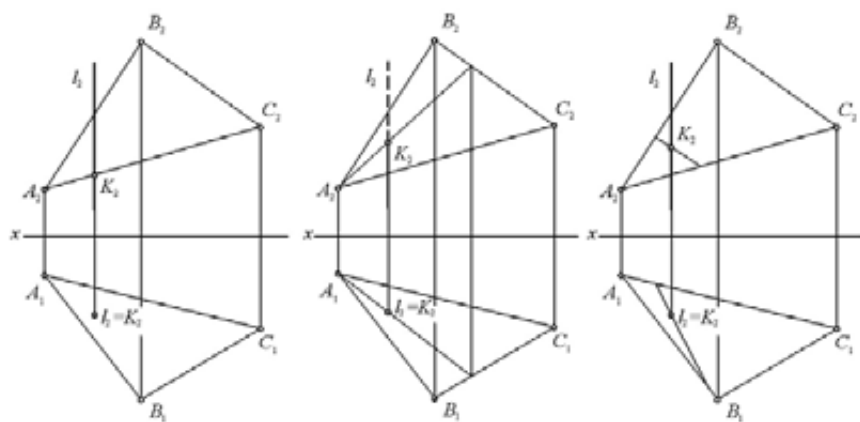
- A
- B

12.2.7. Определить, на каком чертеже задан четырехугольник $ABCD$, не являющийся плоским? (BK)



- 1
- 2
- 3
- 4

12.2.8. Указать чертеж, на котором точка K пересечения прямой l с плоскостью $\Gamma(A, B, C)$ найдена правильно? (СИ)



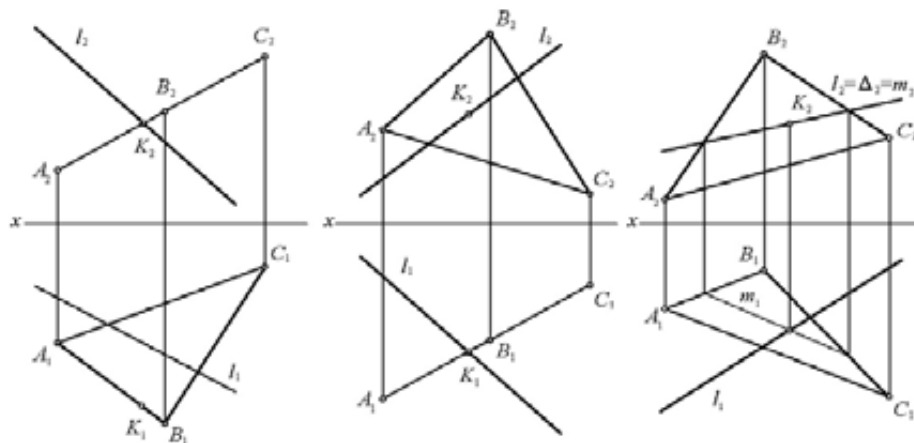
- 1
- 2
- 3

1

2

3

12.2.9. На каком чертеже точка K пересечения прямой l с плоскостью $\Gamma(A, B, C)$ найдена неправильно? (BC)



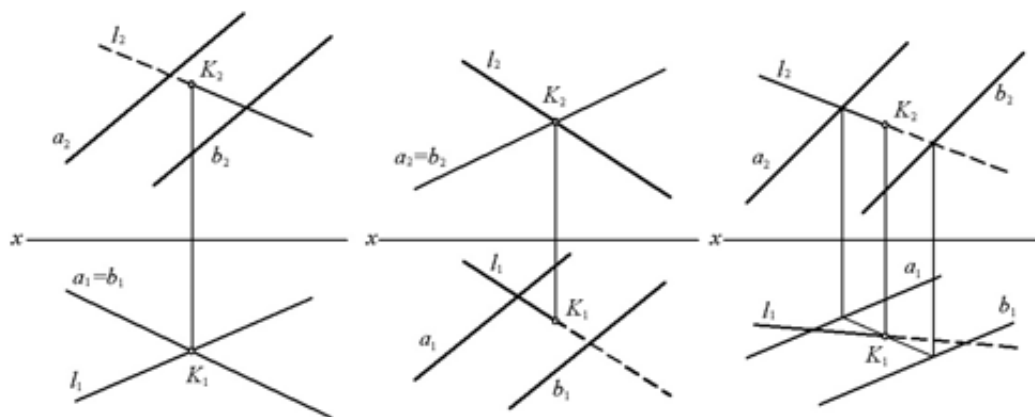
- 1
- 2
- 3

1

2

3

12.2.10. На каком чертеже видимость прямой l , пересекающейся с плоскостью $\Gamma(a \parallel b)$ показана неправильно? (BB)



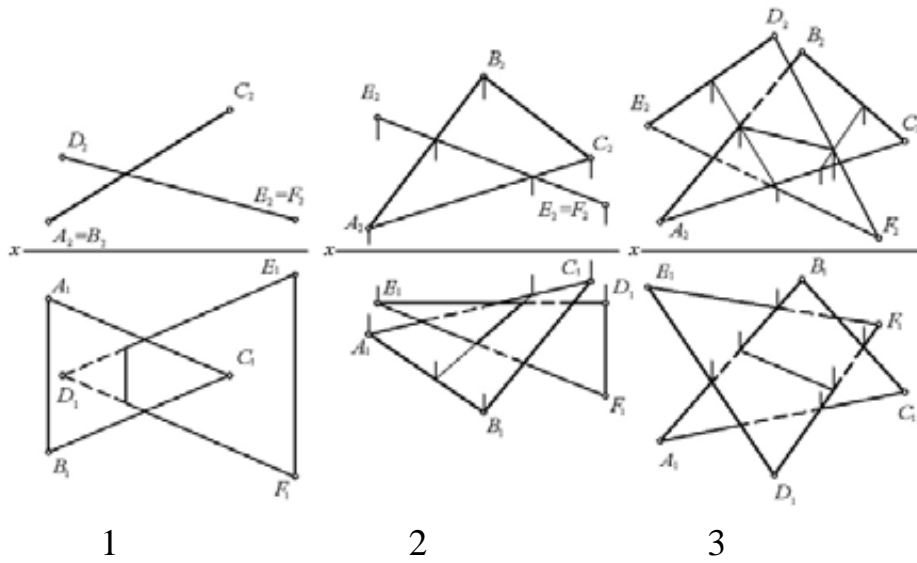
- 1
- 2
- 3

1

2

3

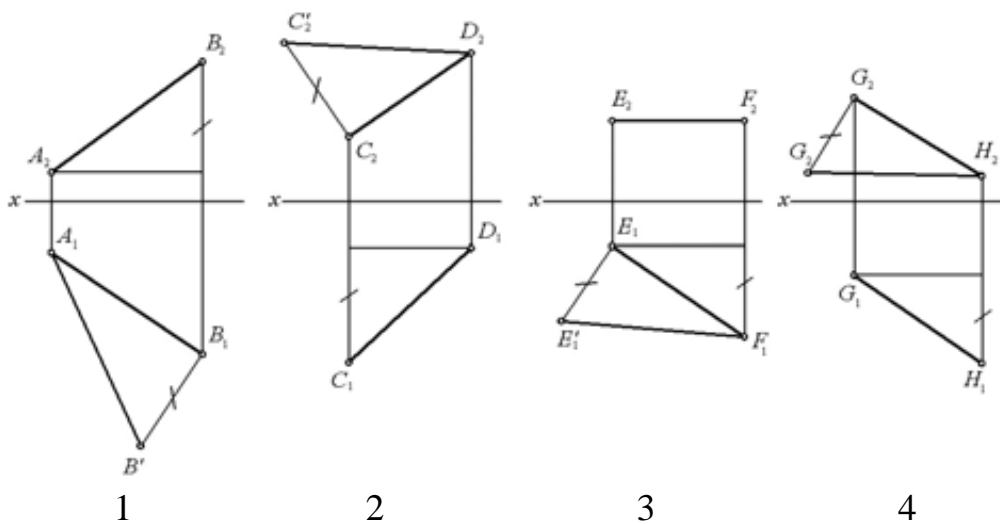
12.2.11. На каком чертеже видимость пересекающихся плоскостей показана неправильно? (SS)



- 1
- 2
- 3

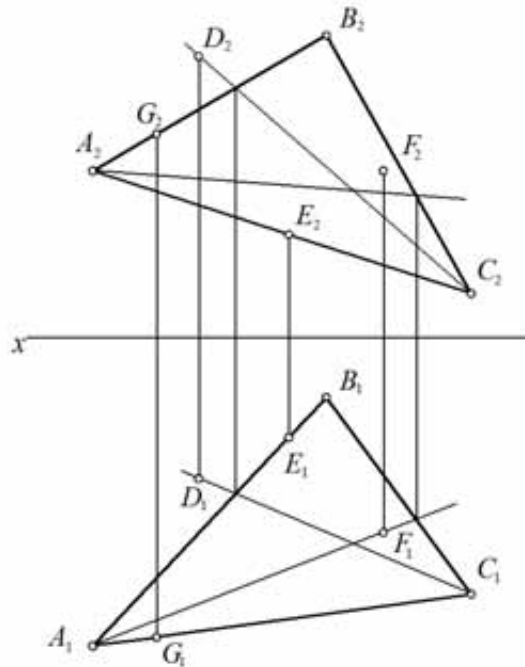
12.3. Метрические задачи

12.3.1. На каком чертеже натуральная величина отрезка определена неправильно? (ВЦ)



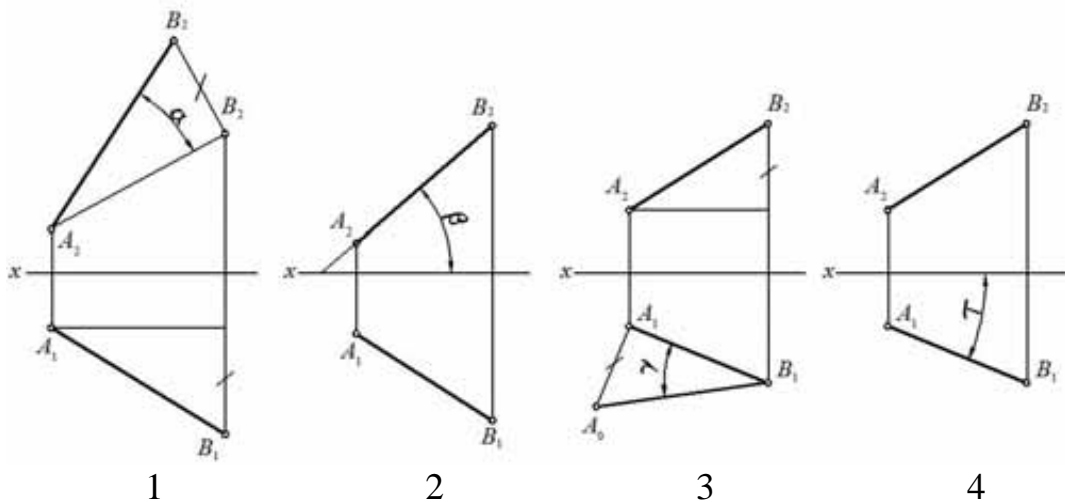
- 1
- 2
- 3
- 4

12.3.2. Какая из точек D, E, F, G принадлежит плоскости $\Gamma(A, B, C)$? (АК)



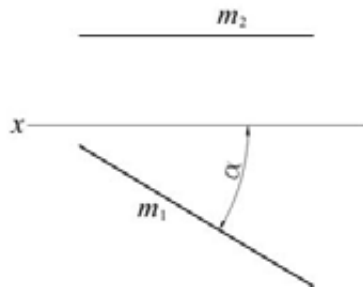
- D
- E
- F
- G

12.3.3. Какой из углов является углом наклона прямой AB к горизонтальной плоскости проекций? (ВК)



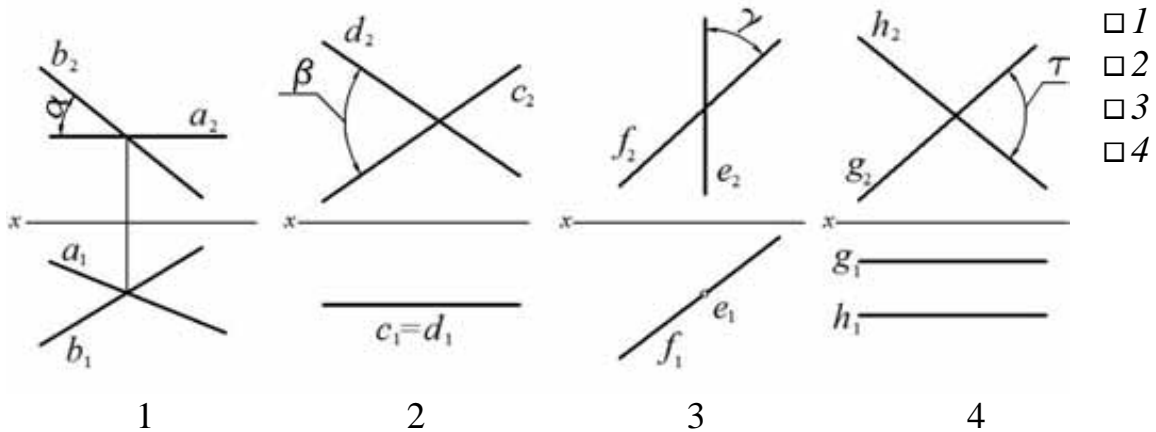
- 1
- 2
- 3
- 4

12.3.4. К какой из плоскостей проекций прямая t наклонена под углом α ? (ЗА)



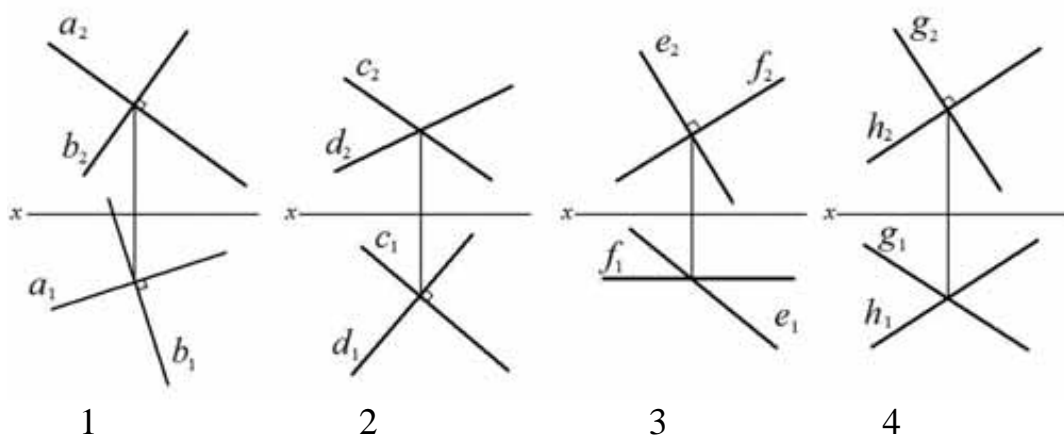
- Π_1
- Π_2
- Π_3

12.3.5. Какой из углов является натуральной величиной угла между пересекающимися прямыми? (ВИ)



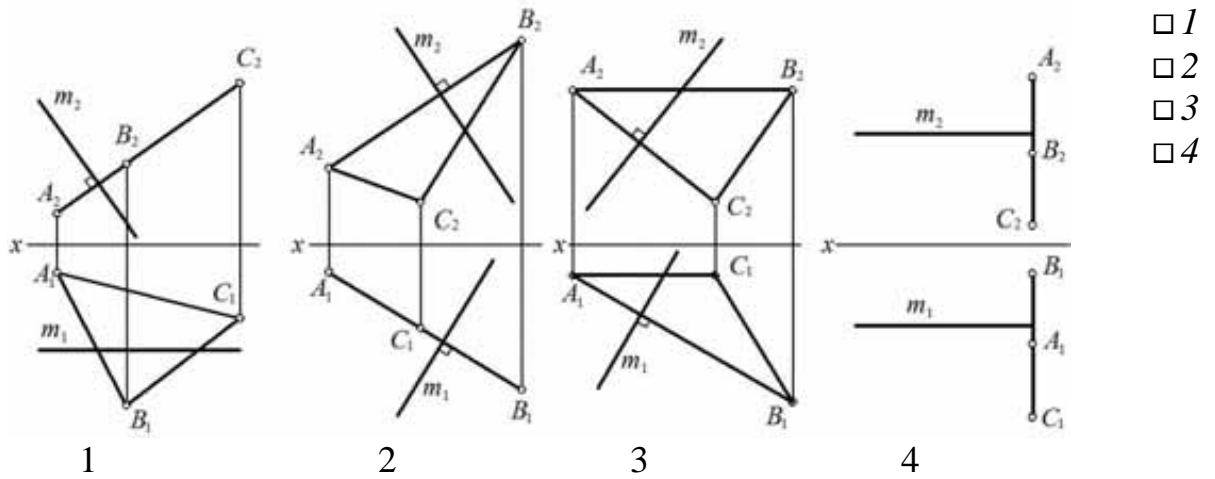
- 1
- 2
- 3
- 4

12.3.6. На каком чертеже заданы две взаимно перпендикулярные прямые? (В6)



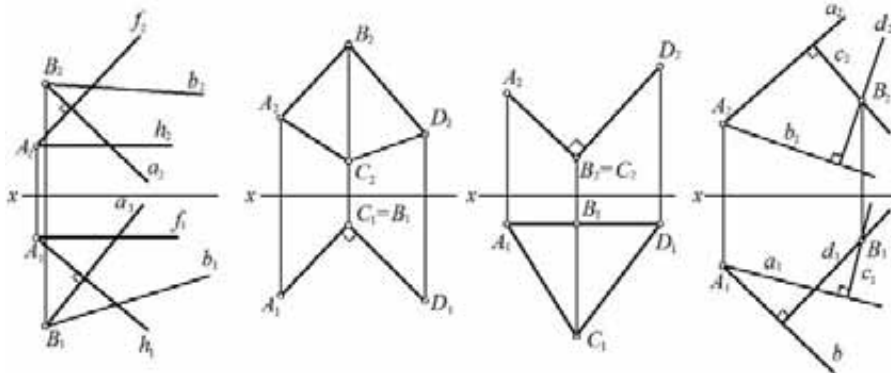
- 1
- 2
- 3
- 4

12.3.7. На каком чертеже прямая m не перпендикулярна плоскости $\Gamma(A, B, C)$? (В4)



- 1
- 2
- 3
- 4

11.3.8. На каком чертеже заданы неперпендикулярные плоскости? (ИА)



- 1
- 2
- 3
- 4

$\Gamma(f \cap h)$
 $\Delta(a \cap b)$

$\Gamma(A, B, C)$
 $\Delta(B, C, D)$

$\Gamma(A, B, C)$
 $\Delta(B, C, D)$

$\Gamma(a \cap b)$
 $\Delta(c \cap d)$

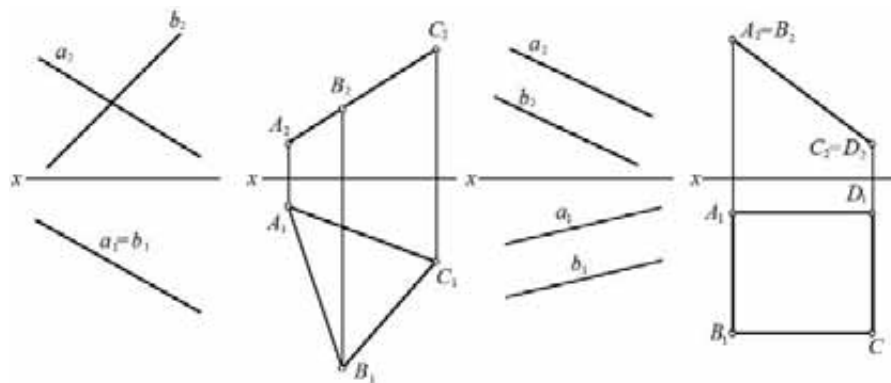
1

2

3

4

12.3.9. На каком чертеже угол между фронтальной плоскостью проекций Π_2 и заданной плоскостью изображен в натуральную величину? (ВС)



- 1
- 2
- 3
- 4

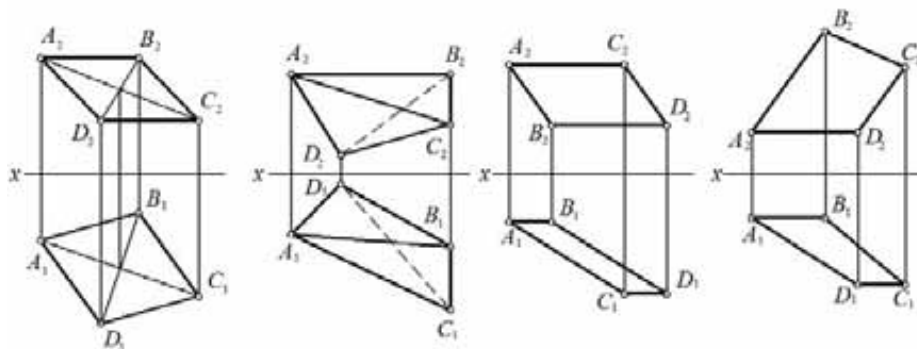
1

2

3

4

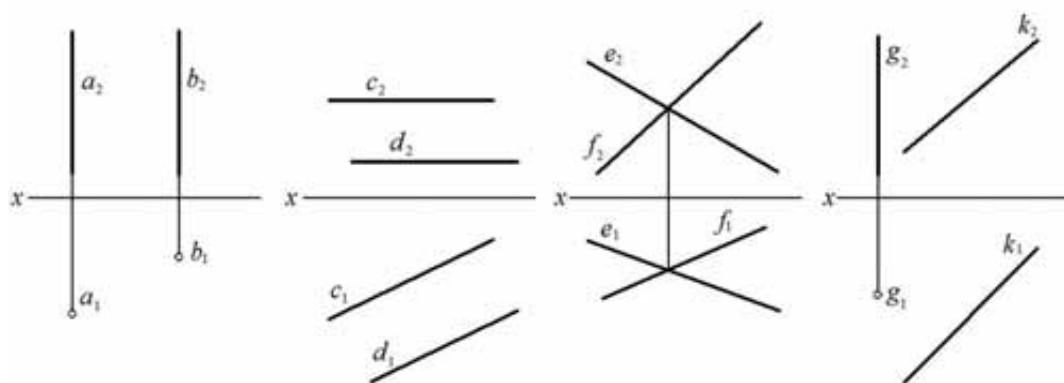
12.3.10. На каком чертеже наибольшее число сторон плоского четырехугольника проецируется в натуральную величину? (СК)



- 1
- 2
- 3
- 4

1 2 3 4

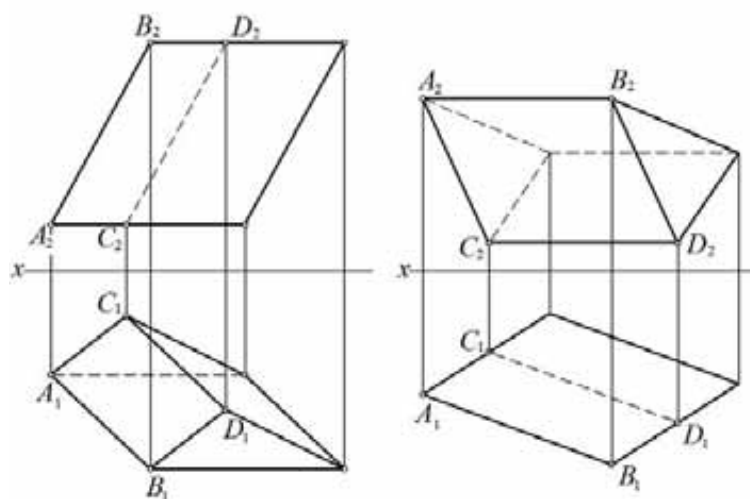
12.3.11. На каком чертеже кратчайшее расстояние между двумя прямыми не проецируется в натуральную величину? (СЧ)



- 1
- 2
- 3
- 4

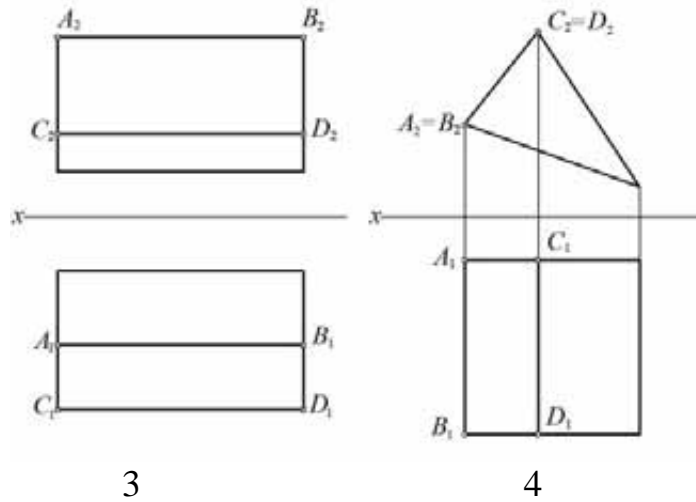
1 2 3 4

12.3.12. На каком чертеже расстояние между параллельными ребрами AB и CD призмы проецируется в натуральную величину? (4А)

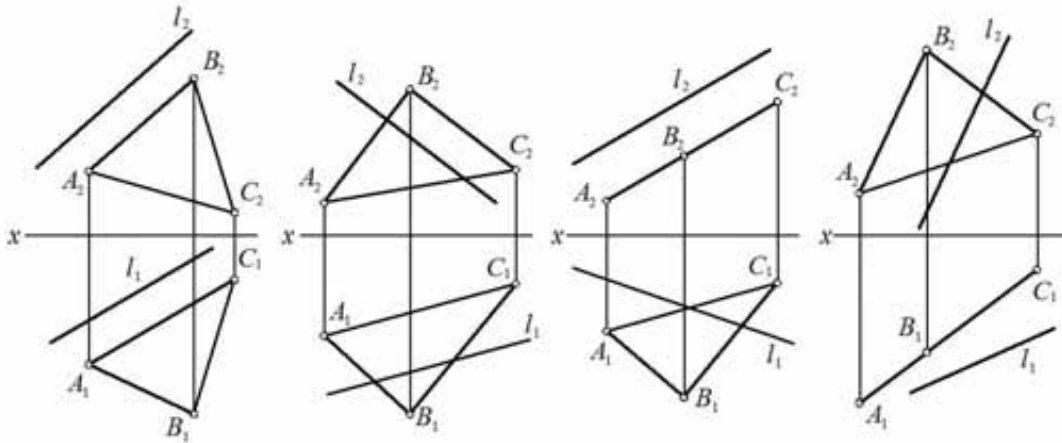


- 1
- 2
- 3
- 4

1 2

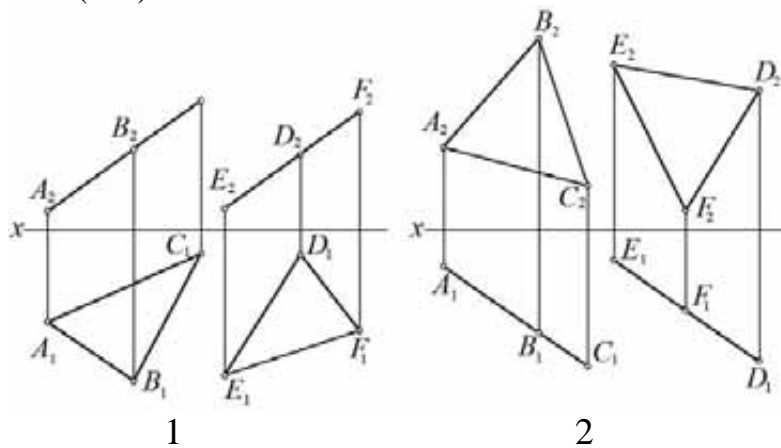


12.3.13. На каком чертеже задана прямая l , параллельная плоскости $\Gamma(A, B, C)$? (BK)

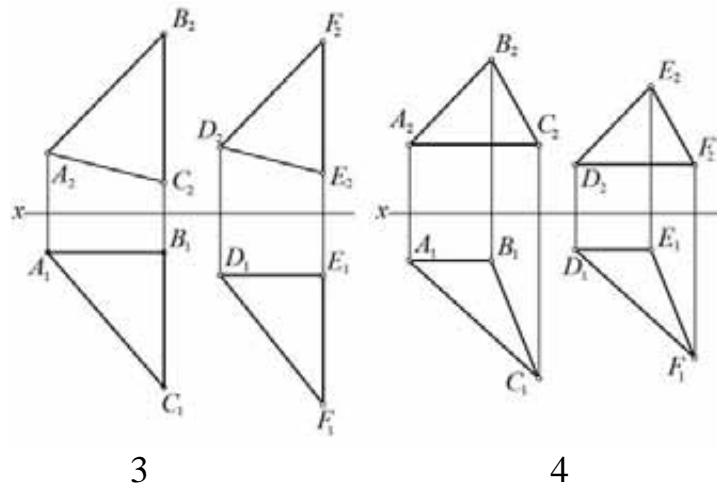


- 1
- 2
- 3
- 4

12.3.14. На каком чертеже изображены две непараллельные между собой плоскости? (СК)

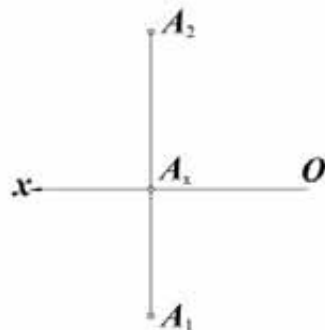


- 1
- 2
- 3
- 4



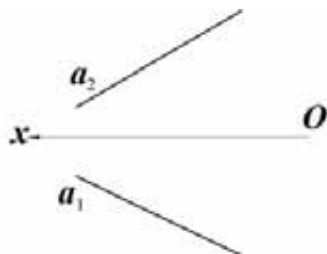
12.4. Способы преобразования чертежа

12.4.1. Каким должно быть расстояние от новой проекции \bar{A}_2 точки A до новой оси проекций $\bar{O}\bar{x}$ при замене фронтальной плоскости проекций Π_2 на новую фронтальную плоскость $\bar{\Pi}_2$? (BC)



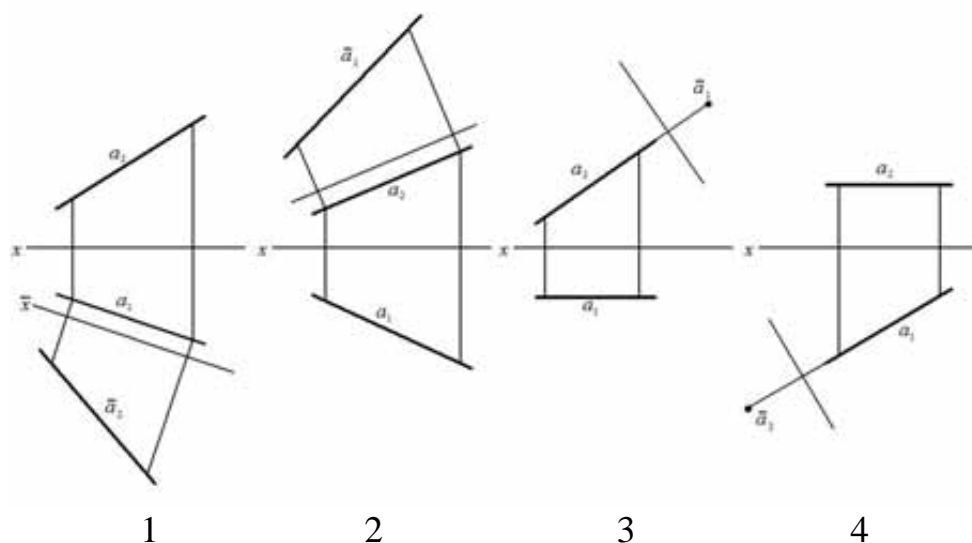
- A_2A_x (1)
- A_1A_x (2)
- A_2A_1 (3)
- OA_x (4)

12.4.2. Как нужно расположить новую ось $\bar{O}\bar{x}$, чтобы прямая a стала фронтальной прямой уровня? (



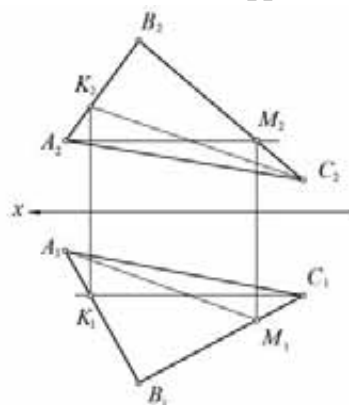
- Перпендикулярно a_2 (1)
- Перпендикулярно a_1 (2)
- Параллельно a_1 (3)
- Параллельно a_2 (4)
- Перпендикулярно Ox (5)

12.4.3. На каком чертеже изображена прямая, которая в результате преобразования стала горизонтально проецирующей? (СЦ)



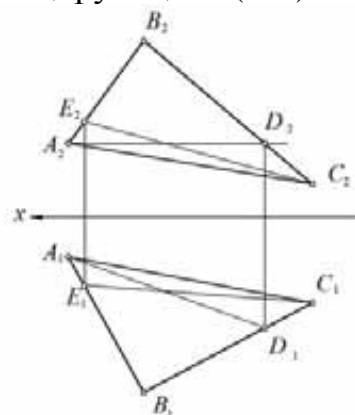
- 1
- 2
- 3
- 4

12.4.4. Какую прямую следует преобразовать в проецирующую, чтобы плоскость $\Gamma(A, B, C)$ стала фронтально проецирующей? (КА)



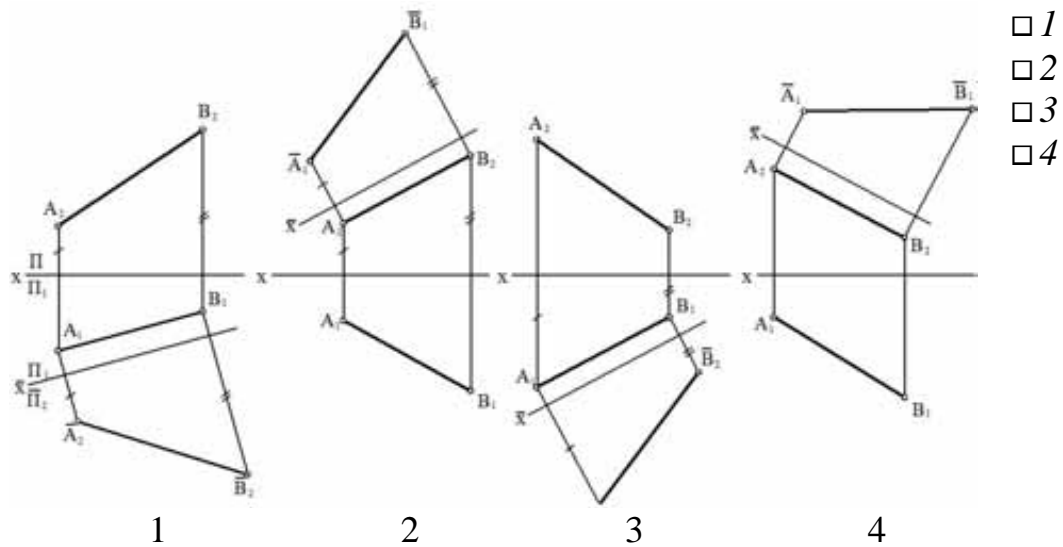
- AB
- AC
- AM
- CK
- BC

12.4.5. Какой прямой должна быть перпендикулярна новая плоскость проекций, чтобы в новой системе плоскостей проекций заданная плоскость была проецирующей? (АК)



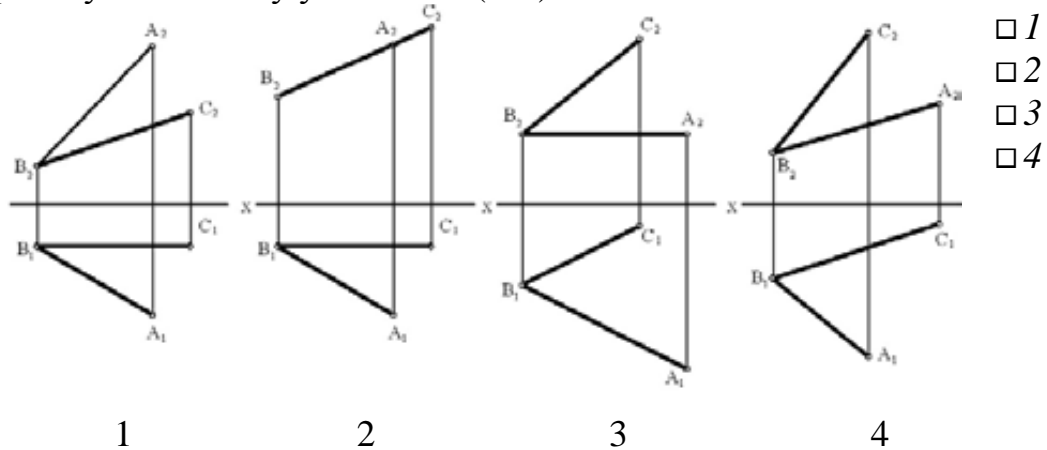
- AB
- AC
- BC
- EC
- AD

12.4.6. На каком чертеже натуральная величина отрезка правильно определена с помощью способа замены плоскостей проекций? (ВВ)



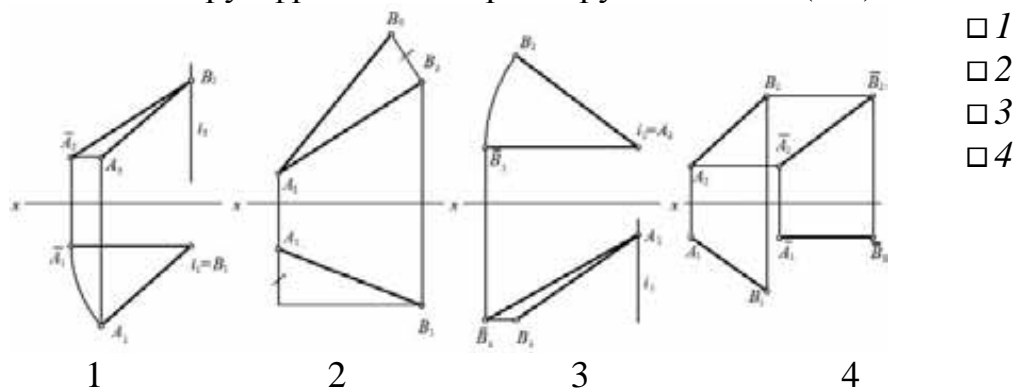
- 1
- 2
- 3
- 4

12.4.7. На каком из чертежей нужно выполнить минимальное количество замен плоскостей проекций для того, чтобы определить натуральную величину угла ABC ? (ВИ)



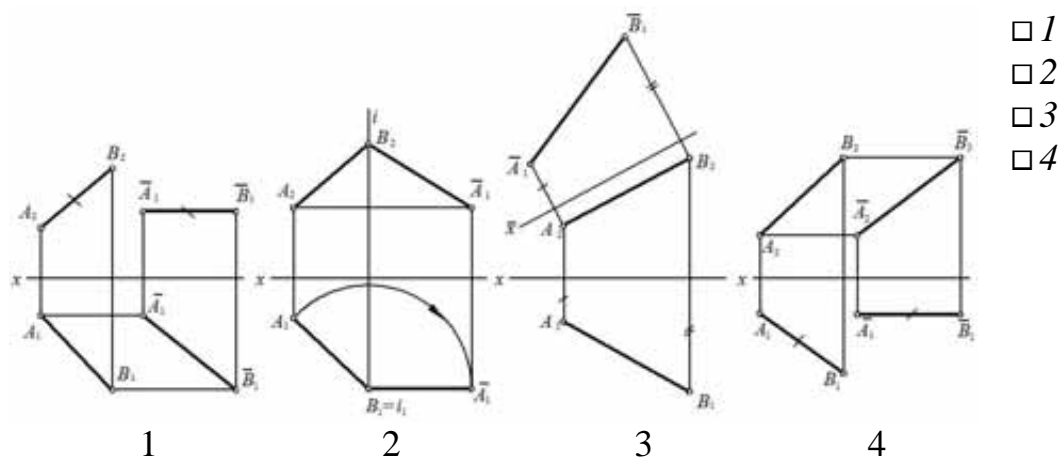
- 1
- 2
- 3
- 4

12.4.8. На каком чертеже натуральная величина отрезка найдена вращением вокруг фронтально проецирующей оси? (ВК)



- 1
- 2
- 3
- 4

12.4.9. На каком чертеже натуральная величина отрезка найдена в результате плоскопараллельного перемещения относительно фронтальной плоскости проекций Π_2 ? (ИА)



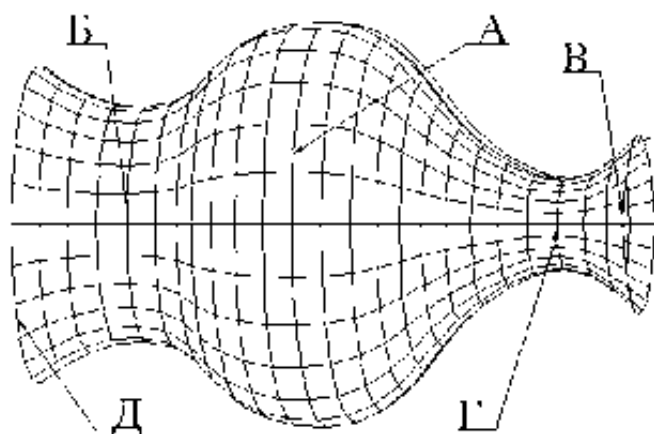
- 1
- 2
- 3
- 4

12.5. Поверхности

12.5.1. Как называются сечения поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными ее оси? (МЛ)

- Меридианы
- Параллели
- Экваторы
- Образующие

12.5.2. Укажите экватор и горловину поверхности вращения. (АО)



- Экватор
- А
- Б
- В
- Г
- Д
- Горловина
- А
- Б
- В
- Г
- Д

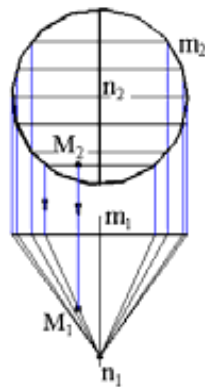
12.5.3. Как определяется порядок поверхности вращения Φ , если образующая k является алгебраической кривой n -го порядка, не имеющей плоскости симметрии? (ЯВ)

- n
- $2n$
- $n - 1$

12.5.4. Сколько направляющих линий имеет линейчатая поверхность общего вида? (СЦ)

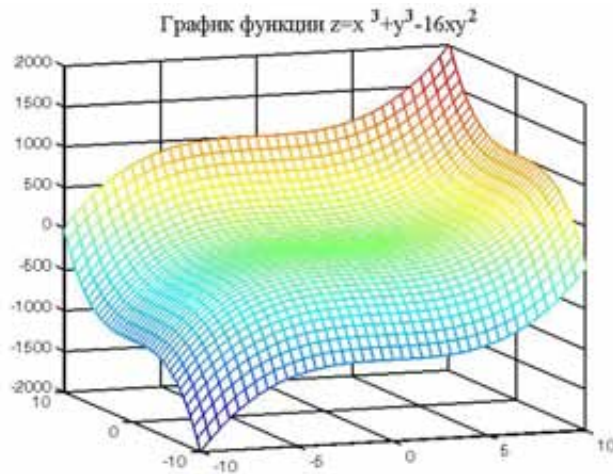
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

12.5.5. Как называется заданная на чертеже поверхность? (АН)



- Цилиндроид
- Коноид
- Конус
- Косая плоскость

11.1.6. Какой порядок имеет алгебраическая поверхность, описываемая уравнением $z = x^3 + y^3 - 16xy^2$?



- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

Список литературы

1. Боровиков И.Ф., Щербинин С.В. Руководство к выполнению контрольных работ по начертательной геометрии. – Томск, ТПУ, 2001. – 70 с.
2. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. – М.: Высш. школа, 1985. – 288 с.
3. Горные машины и комплексы / Топчиев А.В. и др. – М.: Недра, 1971. – 560 с.
4. Гуриев Т.С., Дзугкоев Р.М., Македонова Л.Н. Приложение приемов начертательной геометрии в горном деле и геологии: Справочное пособие. – М.: Недра, 1993. – 251 с.
5. Иванов Г.С. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1995. – 224 с.
6. Иванов Г.С., Желонкин Е.И. Сборник задач по начертательной геометрии. – Йошкар-Ола, 1992. – 112 с.
7. Курс начертательной геометрии на базе ЭВМ / Тевлин А.М., Иванов Г.С. и др. – М.: Высш. школа, 1983. – 175 с.
8. Левицкий В.С. Машиностроительное черчение. – М.: Высш. школа, 1994. – 383 с.
9. Политехнический словарь / Под ред. А.Ю. Ишлинского. – 2-е изд. – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 656 с.
10. Рождерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
11. Траутман Н.Ф. Сборник задач по начертательной геометрии в применении к различным областям науки и техники. – М.: Машгиз, 1953. – 280 с.
12. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
13. Щербинин С.В., Макаров А.В., Потапова Л.А. Поверхности [Электронный ресурс]— [Б. м.], 1998. — 1 электрон, опт. диск (CD-ROM) : зв., цв. ; 12 см. — Систем. требования: PC 486 DX-33 ; 8 Мб RAM ; 15 Мб HDD ; Windows 3.1 или Windows 95 ; 2-скоростной дисковод ; 256 цв. SVGA дисплей ; зв. карта ; мышь. — Загл. с контейнера.
14. Якунин В.И. Методологические вопросы геометрического проектирования и конструирования сложных поверхностей. – М.: МАИ, 1990. – 76 с.

Предметный указатель

- Гиперболоид 178
- Горловина 169
- Задачи
 - позиционные 50
 - на принадлежность 50
 - метрические 82
- Касательная 133
- Кривизна 143
- Линии
 - наибольшего наклона 88
 - кривые 131
 - алгебраические 131
 - пространственные 136
 - на поверхности 194
- Масштабы 11
- Меридиан 170
- Метод
 - прямоугольного треугольника 82
- Нормаль 133
- Обвод 154
- Параболоид 177
- Параллель 169
- Плоскость 31
 - общего положения 32
 - частного положения 32
 - проецирующая 33
 - уровня 33
- Поверхности
 - многогранные 34
 - кинематические 165
 - определитель 166
 - алгебраические 167
 - вращения 168
 - линейчатые 180
 - конические 181
 - цилиндрические 181
 - торсовые 183
 - Каталана 184
 - винтовые 189
 - циклические 193
- Порядок
 - кривой 132
 - поверхности 168
- Проекция 23
 - аксонометрическая 42
 - изометрическая 44
 - диметрическая 45
 - окружности 144
- Проецирование
 - центральное 21
 - параллельное 21
 - прямоугольное 23
- Прямая
 - общего положения 27
 - частного положения 27
 - горизонталь 27
 - фронталь 27
 - профильная уровня 28
- Способ
 - преобразования чертежа 107
 - замены плоскостей 108
 - плоскопараллельного движения 110
 - вращения 111
- Сфера 175
- Типы линий 11
- Тор 174
- Точка
 - конкурирующая 22
 - обыкновенная 135
 - специальная 135
 - перегиба 135
 - особая 135
- Форматы 8
- Шрифты чертежные 13
- Эллипсоид 177

Иван Федорович Боровиков
Сергей Васильевич Щербинин
Андрей Борисович Ефременков

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ
ГОРНОГО И МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА**

Учебное пособие

Редактор
Корректор
Верстка
К-ОКП ОК-005-93, код продукции 954240

Изд. лиц. ИД № от . Подписано к печати