Упругие волны

Распространение колебаний в упругой среде.

Поперечные и продольные волны

Волновой процесс (волна) – процесс распространения колебаний в среде (волны на поверхности жидкости, упругие волны, электромагнитные волны).

Основное свойство волны: перенос энергии без переноса вещества, т.к. при распространении волны частицы среды не двигаются вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия.

Упругие (механические) волны – механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

Тело называется упругим, а его деформации, вызываемые внешними воздействиями, называются упругими деформациями, если они полностью исчезают после прекращения этих воздействий.

Закон Гука: $F_{упр} = -kx.$

Газ, жидкость обладают только *объёмной упругостью*, т.е. способностью сопротивляться изменению объёма.

Твёрдое тело – объёмная упругость и *упругость формы*.

Звуковые (акустические) волны – упругие волны малой интенсивности.

$f = 16 \div 2 \cdot 10^4$ Гц – слышимый звук,

$f < 16$ Гц – инфразвук,

$f > 2 \cdot 10^4$ Гц – ультразвук,

$f > 10^9$ Гц – гиперзвук.

Интенсивность звука (сила звука) – величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой звуковой волной в единицу времени сквозь единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны:

$$I = \frac{W}{St}, \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right].$$

Интенсивность звука – объективная характеристика звуковой волны.

Чувствительность человеческого уха различна для различных частот, поэтому вводят субъективную характеристику звука, связанную с его интенсивностью, и зависящую от частоты: *громкость звука*.

Физиологический закон Вебера – Фехнера: с ростом интенсивности звука громкость возрастает по логарифмическому закону.

По измеренному значению интенсивности звука (объективная характеристика) вводят объективную оценку громкости звука (субъективная характеристика) – *уровень интенсивности звука*:

$$L = lg\frac{I}{I_0}, \quad [\text{бел} = 10 \cdot \text{децибел}],$$

I_0 – интенсивность звука на пределе слышимости, $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м2.

Продольные волны

Упругая волна называется *продольной*, если частицы среды колеблются в направлении распространении волны.

Продольные волны связаны с объёмной деформацией упругой среды, следовательно, могут распространяться в любой среде – твёрдой, жидкой, газообразной.

Поперечные волны

Упругая волна называется *поперечной*, если частицы среды колеблются, оставаясь в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волн.

Они связаны с деформацией сдвига упругой среды, следовательно, распространяются в средах, обладающих упругостью формы, т.е. твёрдых телах.

Поверхностные волны – волны, распространяющиеся вдоль свободной поверхности (жидкости). Возмущения этой поверхности возникают под влиянием внешних воздействий.

Бегущая волна

Бегущая волна – волна, которая в отличие от стоячих волн, переносит энергию в пространстве.

Луч – линия, касательная к которой в каждой её точке совпадает с направлением распространения волны.

Уравнение упругой волны – зависимость от координаты и времени скалярных или векторных величин, характеризующих колебания среды при прохождении в ней волны.

Бегущая волна

Механические возмущения распространяются в упругой среде с конечной скоростью v. Поэтому возмущение достигает произвольной точки среды через время

$$\Delta t = \frac{l}{v},$$

где l – расстояние от источника волны до точки. Следовательно, колебания в точке отстают по фазе от колебаний источника волн.

Бегущая волна

Волновой фронт – геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t.

Волновая поверхность – геометрическое место точек, в которых фаза колебаний имеет одно и то же значение (в простейшем случае плоская или сферическая).

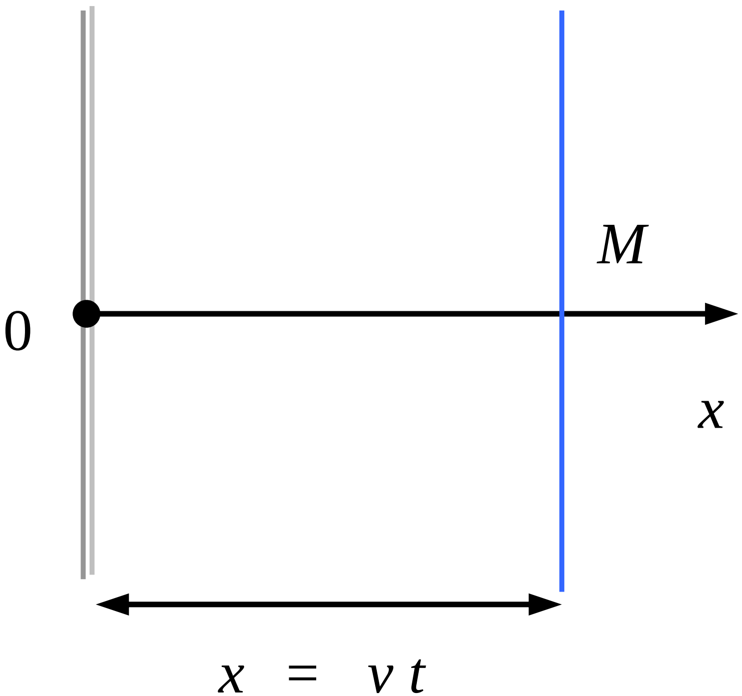
В однородной изотропной среде волновые поверхности ортогональны лучам.

Уравнение плоской волны

Волна называется *плоской*, если её волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x, поглощения нет.

Величина S, характеризующая колебательное движение среды, зависит только от времени t и координаты x.



Колебания в точке М отличаются от колебаний в точке 0 только тем, что они сдвинуты по времени на x/v. Следовательно, S является функцией $(t - x/v)$ и уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль $+ x$, принимает вид: .

$$S = f\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (1)$$

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль $-x$:

$$S = f\left(t + \frac{x}{v}\right). \quad (2)$$

Упругая волна называется *гармонической*, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль $+x$:

$$S = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right], \quad (3)$$

A = const – амплитуда колебаний (амплитуда волны

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота волны,

T – период колебаний,

φ_0 – начальная фаза колебаний при $t = 0$, $x = 0$.

Расстояние $\lambda = vT$, на которое распространяется волна за время равное периоду T, называется *длиной волны* – расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в одной фазе.

Для характеристики волн используется волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}. \quad (4)$$

С учётом (4) уравнение (3) принимает вид:

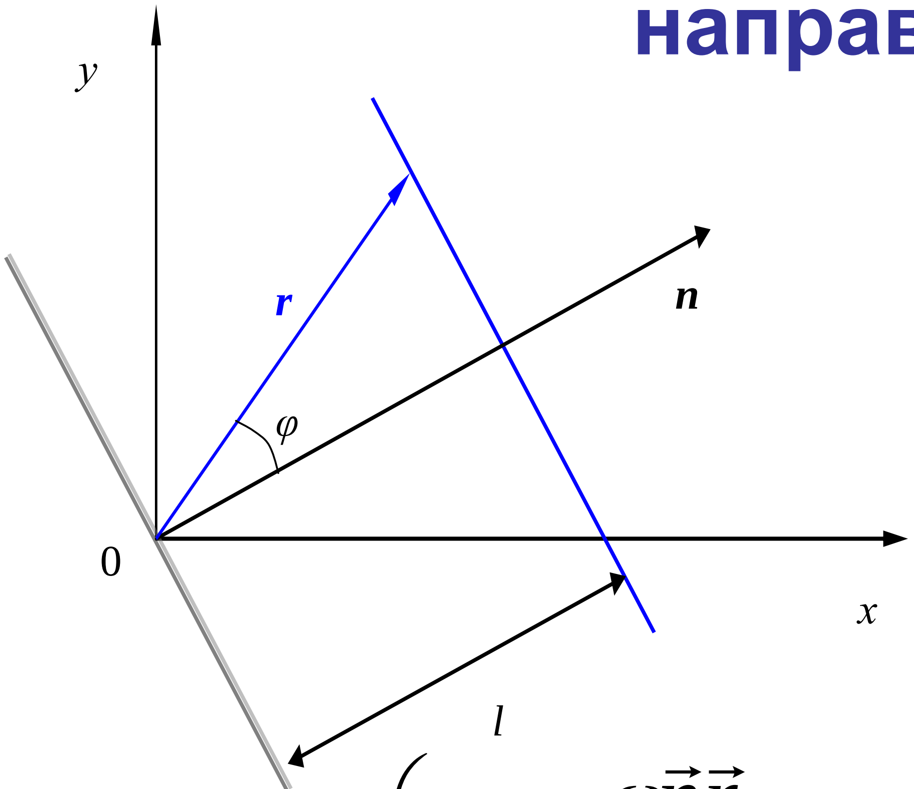
$$S = A\cos\left[\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right) + \varphi_0\right] = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Скорость распространения гармонической волны характеризуется *фазовой скоростью*. Она равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующих любому фиксированному значению фазы гармонической волны.

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const} \Rightarrow x = \frac{\omega t}{k} + \text{const} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

Это скорость перемещения фазы волны, поэтому её и называют фазовой скоростью.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении



$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к волновой поверхности, $|\vec{n}| = 1.$

$$S = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{v}\right) + \varphi_0\right],$$

$$\vec{n}\cdot\vec{r} = 1\cdot r\cos\varphi = l.$$

$$S = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega\vec{n}\vec{r}}{v} + \varphi_0\right) = A\cos\left(\omega t - \underbrace{k\vec{n}}_{\vec{k}}\vec{r} + \varphi_0\right) =$$

$$= A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right).$$

$\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор.

$$S = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right).$$

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$

Физический смысл имеет только действительная часть комплексной функции $\tilde{S}$: $\mathrm{Re}\tilde{S} = A\cos\left(\omega t + \varphi\right).$

$$S = Ae^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)}.$$

Такая запись уравнения волны удобна для дифференцирования.

Распространение волн в однородной изотропной среде (физические свойства среды одинаковы во всех точках и во всех направлениях) описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое называется *волновым уравнением*:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad \text{или}$$

$$\Delta S=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2},$$

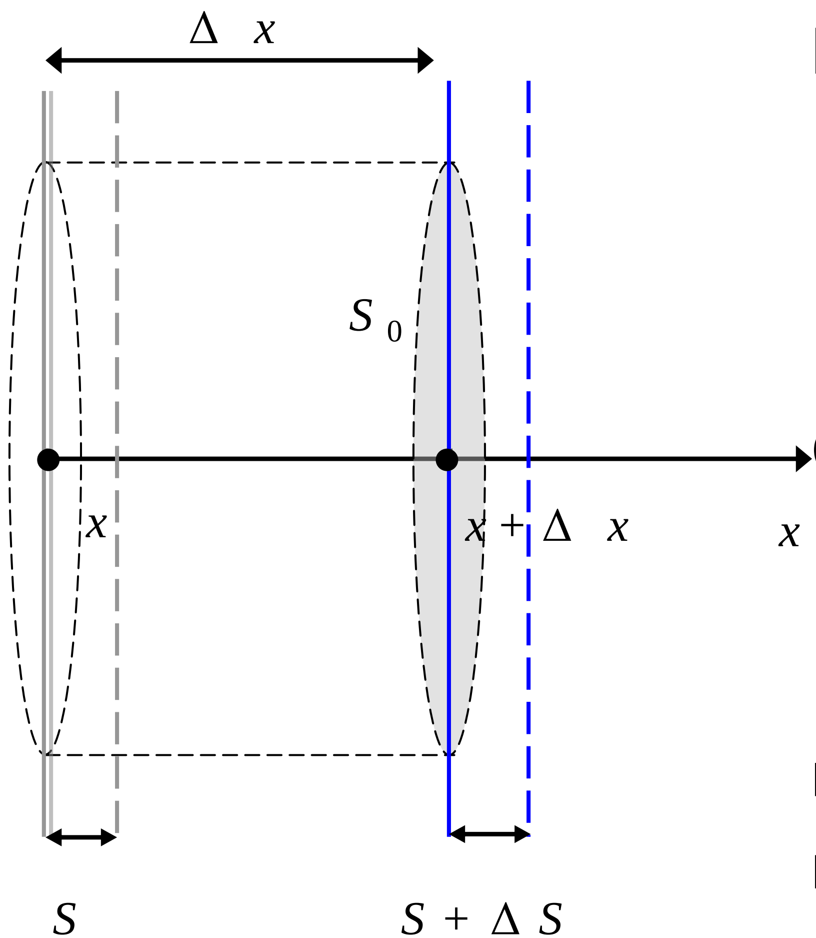
$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

В частности это уравнение описывает плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Энергия упругой волны. Вектор Умова

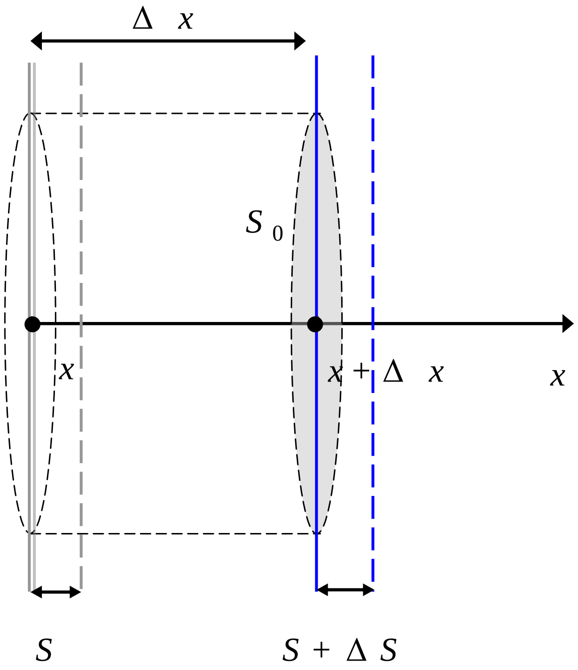


- Вдоль оси *x* распространяется продольная плоская волна. Выделим объём с основанием S_0 и высотой Δx.
- Смещения *S* частиц с разными координатами *x* в каждый момент времени *t* различные:

координата *x* – смещение *S*,

координата $x + \Delta x$ – смещение $S + \Delta S$.

Энергия упругой волны. Вектор Умова



Если Δ*x*→ 0, то относительное удлинение (деформация):

$$\varepsilon = \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (1)$$

Закон Гука для нормального напряжения:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial S}{\partial x}. \quad (2)$$

Проекция на ось *x* упругой силы, возникающая в среде (в выделенном цилиндре), равна произведению площади S_0 на разность нормальных напряжений в сечениях *x* и *x* + Δ*x*:

$$F_x = S_0 \Delta\sigma = S_0 E \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_x \right].$$

Для малых Δ*x* с большой точностью можно записать:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_x + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) \right]_x \cdot \Delta x = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \Delta x.$$

$$F_x = S_0 E \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \Delta x - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_x \right) = S_0 E \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \Delta x. \quad (3)$$

$$F_x = S_0 E \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \Delta x. \quad (3)$$

Второй закон Ньютона: $F_x = \Delta m a,$

Δm – масса цилиндра, $\Delta m = \rho S_0 \Delta x,$

a – проекция на ось x ускорения всех точек цилиндра (одна и та же при малых Δx).

$$S_0 E \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \Delta x = \rho S_0 \Delta x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (4) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\rho}{E}}_{1/v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad (5)$$

– волновое уравнение плоской волны.

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6)$$

– фазовая скорость плоской продольной волны.

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6)$$

– фазовая скорость плоской продольной волны.

Аналогично для поперечной волны:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

G – модуль сдвига.

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$S = A\cos\left(\omega_0 t - kx + \varphi_0\right).$$

Выделим $\Delta V \to 0$: скорость движения и деформация всех точек в ΔV одинакова.

Упругая среда, в которой распространяется механическая волна, обладает как энергией колебательного движения частиц, так и потенциальной энергией, обусловленной деформацией.

Объёмная плотность кинетической энергии:

$$\omega_k = \frac{dW_k}{dV} = \frac{\frac{1}{2} dmv^2}{dV} = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 . (7)$$

Объёмная плотность потенциальной энергии:

$$\omega_p = \frac{dW_p}{dV} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 . (8)$$

Из уравнения (6) модуль Юнга $E = \rho v^2 . (9)$

Уравнение (9) подставим в (8):

$$\omega_p = \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 . (10)$$

Объёмная плотность энергии плоской волны:

$$\omega = \omega_k + \omega_p = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right]. \quad (11)$$

Продифференцируем уравнение плоской волны $S(x,t)$ по x и t:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t - kx + \varphi_0),$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = A\underbrace{k}_{\omega_0/v}\sin(\omega_0 t - kx + \varphi_0) = A\frac{\omega_0}{v}\sin(\omega_0 t - kx + \varphi_0).$$

$$\omega = \frac{1}{2}\rho\left[A^2\omega_0{}^2\sin^2\left(\omega_0 t - kx + \varphi_0\right) + v^2 A^2\frac{\omega_0^2}{v^2}\sin^2\left(\omega_0 t - kx + \varphi_0\right)\right] =$$

$$= \rho A^2\omega_0{}^2\sin^2\left(\omega_0 t - kx + \varphi_0\right) = \frac{1}{2}\rho A^2\omega_0^2\left(1 - \underbrace{\cos 2\left(\omega_0 t - kx + \varphi_0\right)}_{\text{срднее значение}=0}\right). \quad (12)$$

Плотность энергии в каждый момент времени *t* и в различных точках *x* различна.

Среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды

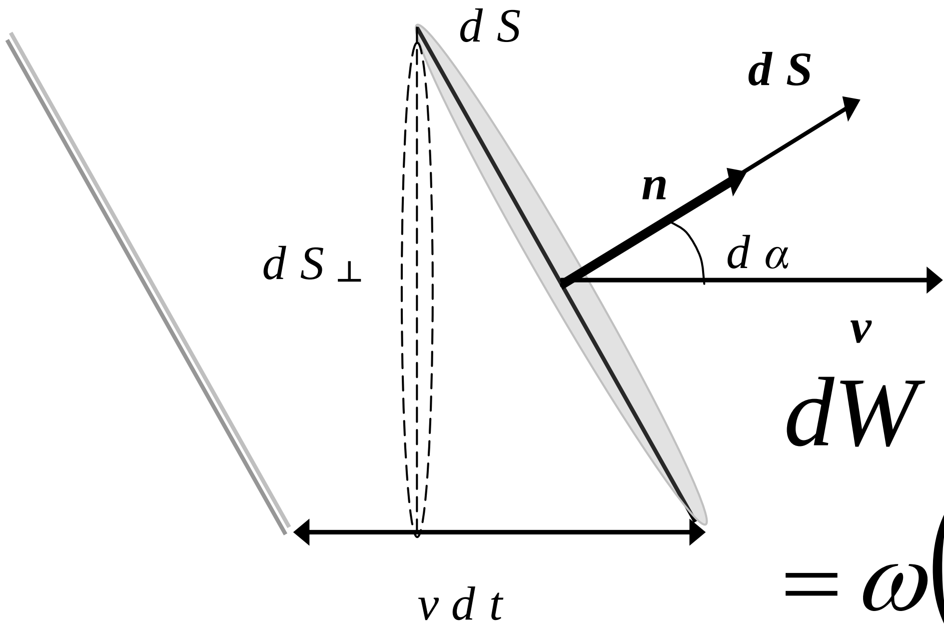
$$\langle\omega\rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega_0^2. \quad (13)$$

Скорость переноса энергии волной равна скорости перемещения в пространстве поверхности, соответствующей максимальному значению объёмной плотности волны ω.

Для гармонической волны эта скорость равна фазовой скорости.

Поток энергии $d\Phi_\omega$ сквозь малую площадку dS – отношение энергии dW, передаваемой через эту площадку за малый промежуток времени dt, к его величине dt:

$$d\Phi_\omega = \frac{dW}{dt}. \quad (14)$$



Через площадку dS будет перенесена энергия

$$dW = \omega dV = \omega v dt dS \cos\alpha =$$

$$= \omega\left(\vec{v} d\vec{S}\right)dt. \quad (15)$$

Поток $$d\Phi_\omega = \frac{dW}{dt} = \omega\left(\vec{v} d\vec{S}\right) = \vec{j} d\vec{S}, \quad (16)$$

где $\vec{j} = \omega\vec{v} \quad (17)$ – вектор плотности потока энергии (вектор Умова),

$$j = \frac{d\Phi_\omega}{dS_\perp}.$$

$$\left\langle \vec{j} \right\rangle = \langle \omega \rangle \vec{v} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega_0^2 \vec{v}. \quad (18)$$

Интенсивность волны – среднее значение плотности потока энергии, переносимой волной (среднее значение вектора Умова).

Преобразование энергии волны в другие виды энергии, происходящее при распространении волны в среде, называется *поглощением волн*.

$$A(x) = A_0 e^{-\alpha x},$$

α – линейный коэффициент поглощения, зависит от свойств среды и частоты волн.

Дисперсия волн – зависимость фазовой скорости гармонической волны в среде от их частоты.

Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость

В линейной среде (между воздействием и возмущением – линейная зависимость) волны распространяются независимо друг от друга. Следовательно, результирующее возмущение в какой-либо точке среды при одновременном распространении в ней нескольких волн равно сумме возмущений, соответствующих каждой из этих волн по отдельности

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i .$$

Основываясь на принципе суперпозиции и разложении в ряд Фурье, можно заменить любую негармоническую волну эквивалентной ей системой гармонических волн, т.е. представить в виде группы волн или волнового пакета.

Простейшей группой волн является квазигармоническая волна, получающаяся в результате наложения двух распространяющихся вдоль оси 0*x* плоских волн с одинаковыми амплитудами A_0 и близкими по значению частотами и волновыми числами:

$$S = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] =$$

$$= \underbrace{2A_0 \cos\frac{td\omega - xdk}{2}}_{A(x,t)} \cos(\omega t - kx).$$

$$S = \underbrace{2A_0 \cos\frac{td\omega - xdk}{2}}_{A(x,t)} \cos(\omega t - kx).$$

$A(x,t)$ – функция координаты *x* и времени *t*.

За скорость распространения этой волны принимают скорость *u* перемещения точки *M*, в которой амплитуда имеет какое-либо фиксированное значение (например, $A = 0$ или $A = 2A_0$). Следовательно, точка *M* движется по закону $td\omega - xdk = \mathrm{const.} \Rightarrow$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

– групповая скорость (скорость переноса энергии негармонической волной).

Фазовая скорость $v=\dfrac{\omega}{k},\;\; k=\dfrac{2\pi}{\lambda}.$

$$u=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\left(vk\right)}{dk}=v+k\frac{dv}{dk}=v+k\left(\frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}\right)=$$

$$v+k\left(\frac{dv}{d\lambda}\frac{1}{\dfrac{d\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)}{d\lambda}}\right)=v+k\left(\frac{dv}{d\lambda}\cdot\frac{1}{\dfrac{-2\pi}{\lambda^2}}\right)=$$

$$=v-k\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{dv}{d\lambda}=v-\lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Всегда $u \le c$ – скорости света в вакууме.

В недиспергирующей среде

$$v \ne f(\upsilon, \lambda) \Rightarrow \frac{dv}{d\lambda} = 0 \Rightarrow u = v$$

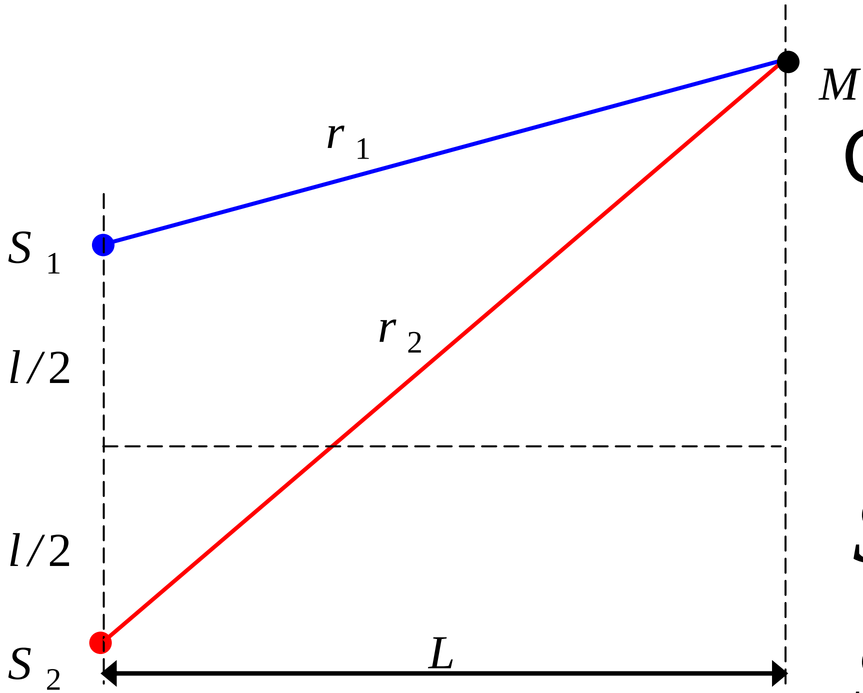
групповая и фазовая скорости равны.

Интерференция волн.
Стоячие волны

Две волны называются *когерентными*, если разность их фаз не зависит от t.

Интерференция волн – явление наложения волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усилие в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

Интерференция волн



Сферические волны, возбуждаемые точечными когерентными источниками:

$$S_1 = A_1 \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1),$$

$$S_2 = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2).$$

Амплитуда результирующей волны в точке *M*:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left[k\left(r_1 - r_2\right) - \left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right].$$

Для когерентных источников разность начальных фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathrm{const}$, следовательно, амплитуда *A* результирующей волны зависит от разности хода волн $\Delta = r_1 - r_2$

$$k\left(r_1 - r_2\right) - \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \pm 2m\pi,$$

$m = 0, 1, 2\ldots$ – интерференционный максимум $A = A_1 + A_2$.

$$k\left(r_1 - r_2\right) - \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \pm\left(2m + 1\right)\pi$$

– интерференционный минимум $A = A_1 - A_2$.

Стоячие волны

Частным случаем интерференции волн являются *стоячие волны* – волны, образующиеся в результате наложения 2-х бегущих гармонических волн, которые распространяются навстречу друг другу и имеют одинаковые *A* и *ω*.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= A\cos(\omega t - kx), \\ S_2 &= A\cos(\omega t + kx). \end{aligned}\right\}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2A\cos kx \cos\omega t =$$

$$= \underbrace{2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}}_{A_{cm}}\cos\omega t.$$

$$S = \underbrace{2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}}_{A_{cm}}\cos\omega t.$$

$A_{cm}(x)$ – амплитуда стоячей волны, в отличие от амплитуды бегущей волны, является функцией только координаты

$$A_{cm} = \left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|.$$

$$A_{ст} = \left| 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda} \right|.$$

Точки среды, где $\dfrac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi, \quad A_{ст} = 2A - \max,$

называются *пучностями*.

Точки среды, где $\dfrac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\pi, \quad A_{ст} = 0 - \min,$

называются *узлами*.

Координаты пучностей $$x_п = \pm m\frac{\lambda}{2}.$$

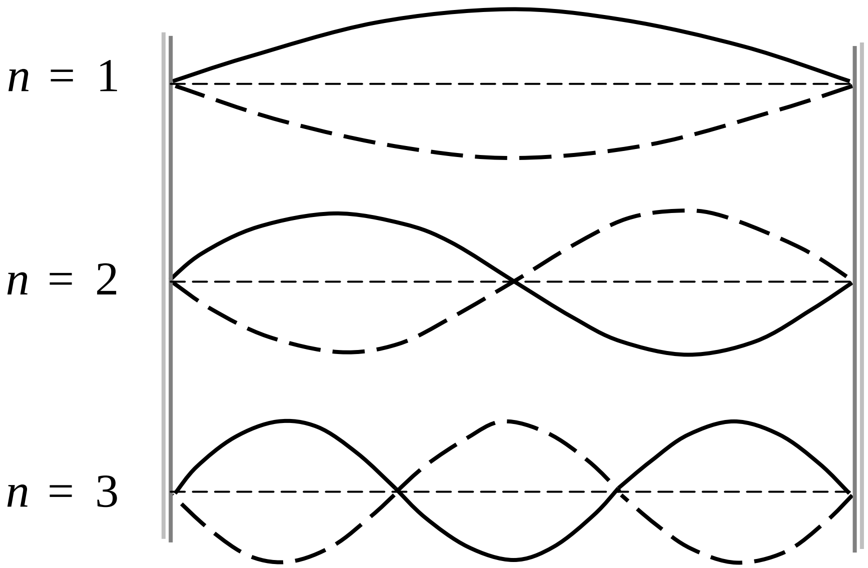
Координаты узлов $$x_{узл} = \pm\left(m \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Расстояние между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковое и равно $\lambda/2$.

Стоячие волны

В отличие от бегущей волны у стоячей волны все точки между двумя узлами колеблются с различными A, но с одинаковыми фазами, т.е. *синфазно*.

Колебание струны



В закреплённой с обоих концов струне устанавливаются стоячие волны. В местах закрепления струны – узлы.

Следовательно, в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только колебания, полуволна которых ($\lambda/2$) укладывается на длине струны целое число раз.

$$l = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1,2\ldots$$

Колебание струны

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6)$$

v – фазовая скорость волны; определяется силой натяжения и линейной плотностью струны.

$$\upsilon_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n$$

– собственные частоты, им соответствуют собственные колебания – *гармоники*.

$$\upsilon_1 = \frac{v}{2l}$$

– основная частота.

Эффект Доплера в акустике

Эффект Доплера – изменение частоты волн, регистрируемых приёмником, при движении источника волн и приёмника друг относительно друга.

(При приближении поезда тон его звука становится выше, при удалении – ниже.)

Эффект Доплера в акустике

1. *Источник и приёмник покоятся*

$v_{ист} = v_{пр} = 0.$

Длина волны $$\lambda_0 = vT = \frac{v}{\upsilon_0},$$

v – скорость звука в среде (фазовая скорость).

Частота волн, регистрируемых приёмником,

2. *Приёмник приближается к источнику*

$v_{пр} > 0, v_{ист} = 0.$

Длина волны в среде $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{v}{\upsilon_0}.$

Скорость распространения волн относительно приёмника равна $v + v_{пр}$

$$\upsilon = \frac{v + v_{пр}}{\lambda_0} = \frac{v + v_{пр}}{vT} = \frac{v + v_{пр}}{v}\upsilon_0 =$$

$$= \upsilon_0\left(1 + \frac{v_{пр}}{v}\right) > \upsilon_0.$$

3. *Источник приближается к приёмнику*

$v_{пр} = 0, v_{ист} > 0.$

$$\lambda = \lambda_0 - v_{ист}T = \left(v - v_{ист}\right)T.$$

$$\upsilon = \frac{v + v_{пр}}{\lambda} = \frac{v}{\left(v - v_{ист}\right)T} =$$

$$= \frac{v}{v - v_{ист}}\upsilon_0 > \upsilon_0.$$

4. В общем случае: *источник и приёмник движутся относительно друг друга*.

$$\upsilon = \frac{v \pm v_{пр}}{v \mp v_{пр}} \upsilon_0,$$

$\frac{+}{-}$ сближение; $\frac{-}{+}$ удаление.