

Электромагнитные колебания

**Квазистационарные токи.
Процессы в колебательном
контуре**

Колебательный контур –

цепь состоящая из включенных последовательно катушки индуктивности L , конденсатора емкости C и резистора сопротивлением R .

Для простейшего колебательного контура $R=0$.

- Энергия электрического поля запасается между обкладками конденсатора C : $W_{эл.п.} = \frac{Q^2}{2C}$.
- Энергия магнитного поля сосредоточена в катушке L :

$$W_{м.п.} = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\dot{Q}^2}{2}.$$

Колебательный контур

Если $R \rightarrow 0$, тогда полная энергия:

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{L\dot{Q}^2}{2} = \text{const.}$$

При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора C в колебательном контуре возникают свободные колебания заряда конденсатора и тока в катушке.

Переменное электромагнитное поле

распространяется в пространстве

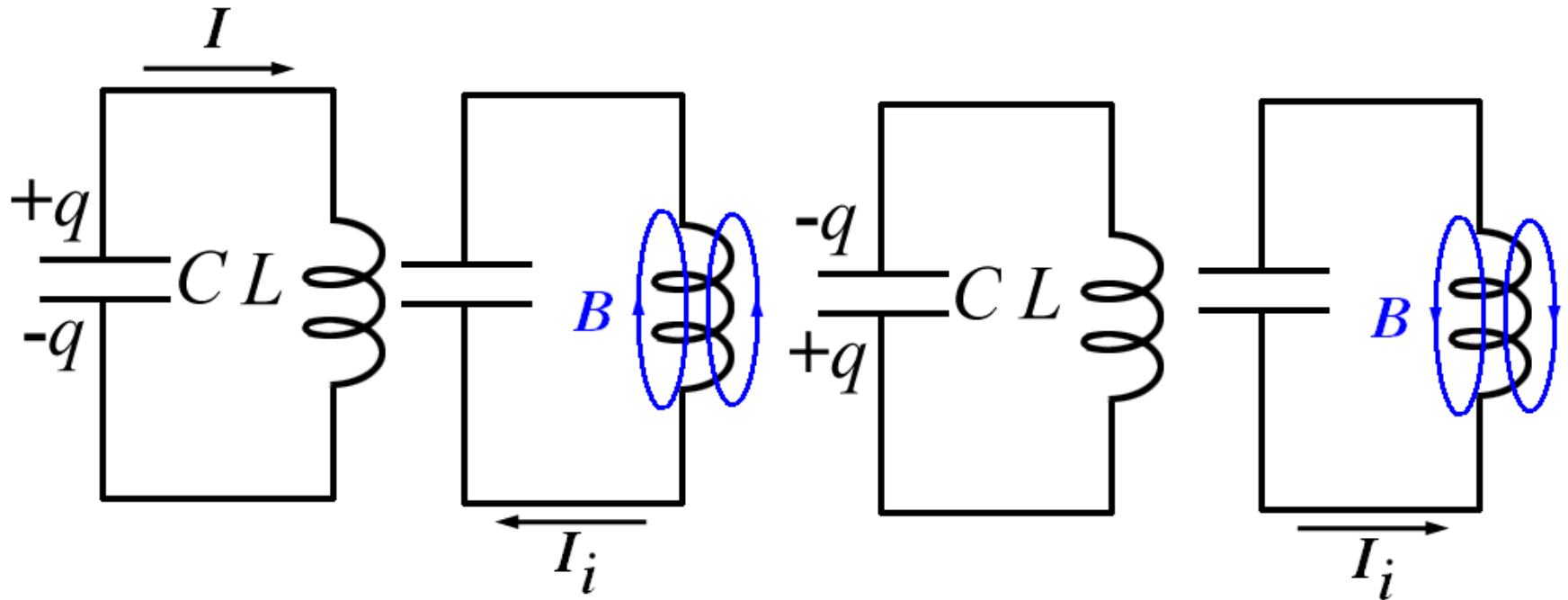
со скоростью равной скорости света

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Если l – линейные размеры контура не велики ($l \ll c / \nu$, ν – частота колебаний в контуре), то в каждый момент времени сила тока во всех частях контура одинакова.

Такой переменный ток называется **квазистационарным**.

Процессы в колебательном контуре



Правило Ленца: индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им переменное магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот индукционный ток. Когда конденсатор C разрядился, а следовательно, энергия магнитного поля и ток в цепи максимальные, то в этот момент ток I начинает убывать. Следовательно, магнитное поле в катушке ослабевает, и в катушке возникает индукционный ток I_i , который препятствует уменьшению магнитного поля. Направление I_i совпадает с направлением первоначального тока, и положительные заряды продолжают идти в том же направлении, заряжая положительно другую обкладку конденсатора C .

Закон Ома для контура:

$$\underbrace{IR}_{U_R} + \underbrace{U_C}_{Q/C} = \underbrace{\mathcal{E}_S}_{-L \frac{dI}{dt}} . \quad (1)$$

- U_C - разность потенциалов (напряжение) на обкладках конденсатора C .
- $\mathcal{E}_S$ - э.д.с. самоиндукции.

Из закона сохранения заряда следует,
что сила квазистационарного тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}.$$

Уравнение (1): $L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0.$ 

$$\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta} \dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} Q = 0 \quad (2) \quad -$$

дифференциальное уравнение колебаний
заряда Q в контуре – дифференциальное
уравнение затухающих колебаний

• $R = 0 \rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad -$

дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Свободные электрические колебания в колебательном контуре являются *гармоническими*.

Уравнение гармонических колебаний:

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3)$$

Q_m - амплитуда заряда на конденсаторе C ,
 ω_0 - собственная частота гармонических колебаний.

Из уравнения $\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta} Q + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} Q = 0$ (2) следует

формула Томсона $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Уравнение гармонических колебаний:

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3)$$

$$I = \dot{Q} = -\underbrace{\omega_0 Q_m}_{I_m} \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

$$I_m = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}} \quad - \quad \text{амплитуда тока. } Q_m = I_m \sqrt{LC}.$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{\underbrace{C}_{U_m}} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (5)$$

$$\text{Амплитуда напряжения } U_m = \frac{Q_m}{C}. \quad \Rightarrow$$

$$Q_m = U_m C = I_m \sqrt{LC} \quad \Rightarrow$$

Из уравнения $Q_m = U_m C = I_m \sqrt{LC} \Rightarrow$

Амплитуда тока $I_m = \frac{U_m C}{\sqrt{LC}} = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U_m}{R_\epsilon},$

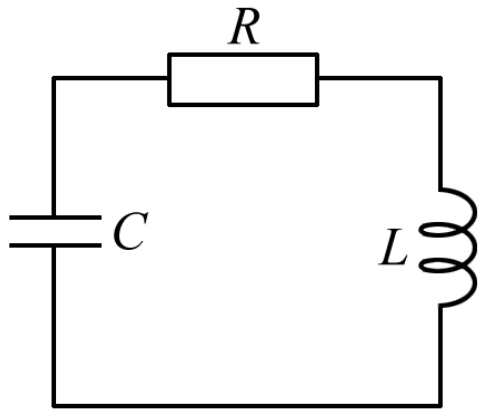
$R_\epsilon = \sqrt{\frac{L}{C}}$ - волновое сопротивление
колебательного контура.

Из уравнений (3), (4), (5) видно, что колебания I опережают колебания Q , U на $\pi/2$, т.е. когда I – max, $Q, U \rightarrow 0$.

При свободных гармонических колебаниях в
колебательном контуре

происходит периодическое
преобразование энергии
электрического поля конденсатора в
энергию магнитного поля катушки
индуктивности и наоборот.

Колебания, происходящие в
колебательном контуре, часто
называют **электромагнитными
колебаниями** в контуре.



- *Затухающие электрические колебания.*

В реальном контуре $R \neq 0$, следовательно, есть потеря энергии и затухание колебаний, которое характеризуется коэффициентом

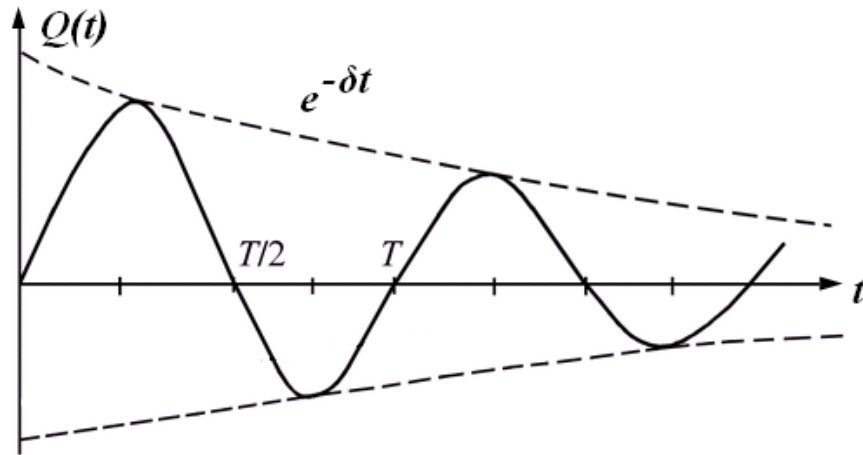
затухания $\delta = \frac{R}{2L}$.

$$\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta} \dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} Q = 0 \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \quad \bullet \text{ Решение}$$

$$Q = Q_m e^{-\delta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi),$$



$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

частота затухающих колебаний.

При $R = 0$ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$ собственной частоте контура.

Затухающие электрические колебания

Логарифмический декремент затухания:

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{\sqrt{LC} \frac{R}{L}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$W(t)$ - энергия колебательной системы в момент времени t ,

$W(t) - W(t+T)$ - убыль энергии за промежуток времени от t до $T+t$.

- *Вынужденные электрические колебания.*

Возникают в контуре при включении внешней

э.д.с. $U = U_m \cos \omega t. (1)$

Закон Ома: $IR + \underbrace{U_C}_{Q/C} = \underbrace{\mathcal{E}_S}_{-L \frac{dI}{dt}} + U. \quad (2) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} IR + U_C \\ \mathcal{E}_S \end{matrix}} \right\}$

$$\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta} \dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} Q = \underbrace{\frac{U_m}{L}}_{X_0} \cos \omega t \quad (3)$$

дифференциальное уравнение
вынужденных колебаний.

При **установившихся вынужденных колебаниях** заряд конденсатора колеблется гармонически с циклической частотой внешней э.д.с. – ω

$$Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha), \quad (4)$$

α – *сдвиг фаз между Q и внешней э.д.с.,*

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{U_m}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{4R^2}{4L^2} \omega^2}} = \\ &= \frac{U_m}{L \sqrt{\frac{\omega^2}{L^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \frac{\omega^2}{L^2} R^2}} = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$I = \dot{Q} = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = \underbrace{\omega Q_m}_{I_m} \cos \left(\underbrace{\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}}_{-\varphi} \right). \quad (6)$$

$$I_m = \omega Q_m. \quad (7)$$

Подставив уравнение (5) в уравнение (7), получим

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (8)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

полное сопротивление цепи

Из уравнения
для внешней
э.д.с.

$$U = U_m \cos \omega t \quad (1)$$

и уравнения $I = \underbrace{\omega Q_m}_{I_m} \cos \left(\omega t - \underbrace{\alpha + \frac{\pi}{2}}_{-\varphi} \right).$ (6) 

между током в контуре I
и внешней э.д.с. U есть сдвиг фаз $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}.$ (9)

Решение дифференциального уравнения
затухающих колебаний дает значение α .
Найдём $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \\
 &= \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2} = \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{\omega}{L} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Из уравнений (9), (10) следует

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (11)$$

ωL - реактивное индуктивное сопротивление,
 $\frac{1}{\omega C}$ - реактивное емкостное сопротивление.

Из уравнения $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$. (11) следует

- если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то $\varphi > 0$,

т.е. ток I отстает по фазе от U ,

- если $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, то $\varphi < 0$,

т.е. ток I опережает по фазе U .

Уравнение (2) запишем в виде:

$$IR + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t \quad (12) \Rightarrow$$

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t. \quad (13)$$

Сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени внешней э.д.с.

$$\begin{aligned}
 U_R &= RI = R|\text{уравнение(6)}| = RI_m \cos \left(\underbrace{\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}}_{-\varphi} \right) = \\
 &= RI_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_C &= \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}|\text{уравнение(4)}| = \underbrace{\frac{Q_m}{C}}_{U_{Cm}} \cos \left(\omega t - \underbrace{\alpha}_{\varphi + \frac{\pi}{2}} \right) = \\
 &= U_{Cm} \cos \left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2} \right). \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$U_{Cm} = \frac{Q_m}{C} = \frac{1}{C} |\text{уравнение(5)}| = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} =$$

$$= \frac{I_m}{\omega C}. \quad (16)$$

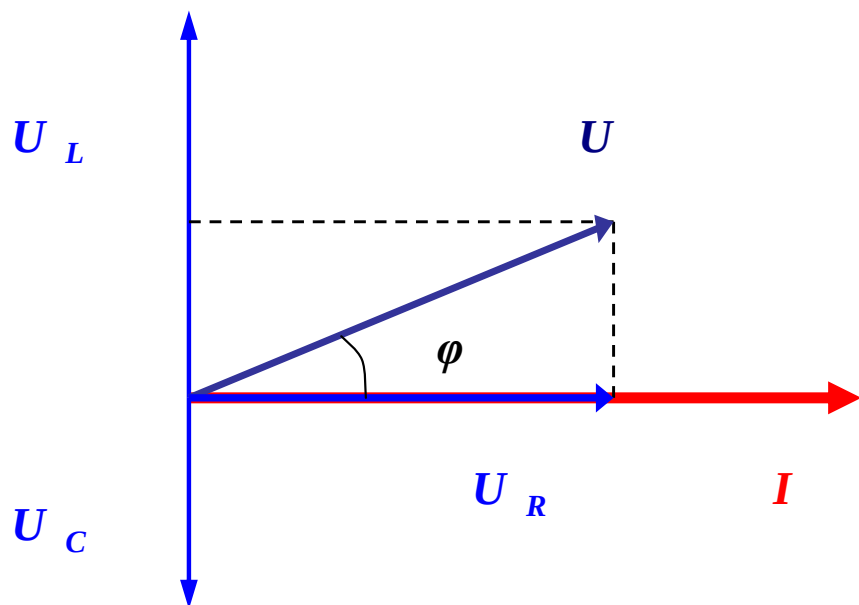
$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \left| \begin{array}{l} (14) \Rightarrow \\ I = I_m \cos(\omega t - \varphi) \end{array} \right| = - \underbrace{\omega L I_m}_{U_{Lm}} \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= U_{Lm} \cos \left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right). \quad (17)$$

Сравнивая формулы для I , U_R , U_C , U_L 

- U_R изменяется в фазе с I ,
- U_C отстает от I , U_R по фазе на $\frac{\pi}{2}$,
- U_L опережает I по фазе на $\frac{\pi}{2}$.

Фазовые соотношения представляются векторной диаграммой



$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C + \vec{U}_L.$$

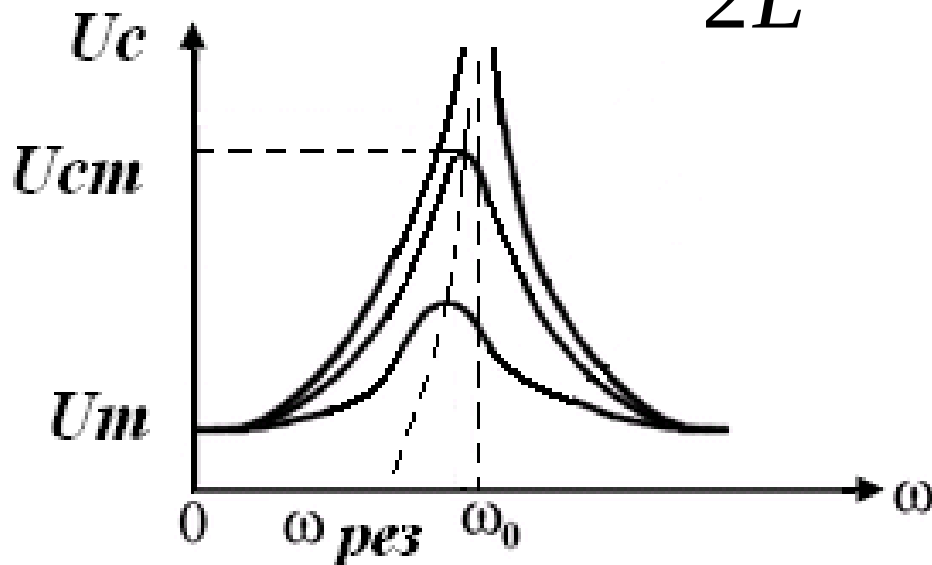
Резонансная частота для заряда Q и напряжения U_C

$$\omega_Q = \omega_{U_C} = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0.$$

Резонансные кривые для напряжения U_C

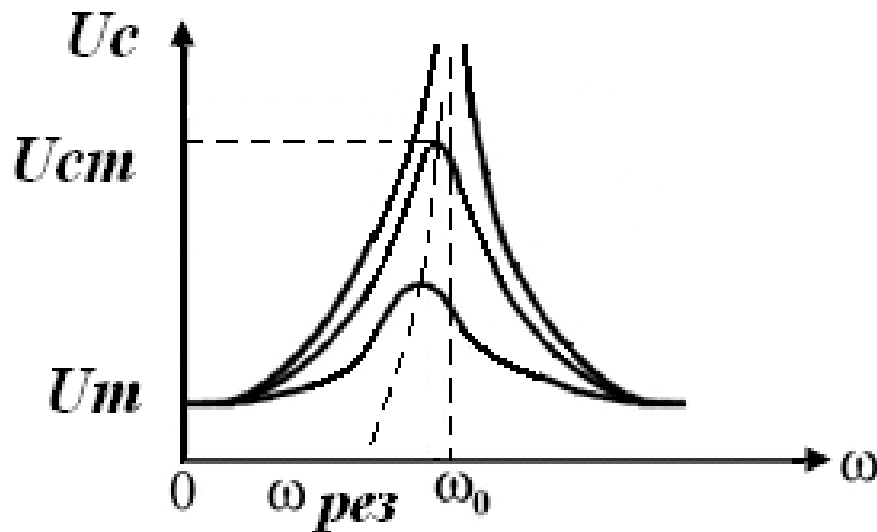
$\delta = \frac{R}{2L}$ коэффициент затухания.

Чем меньше R и
больше L ,
тем выше и острее
максимум
при резонансе.



Резонансная частота для заряда Q и напряжения U_C

$$U_{cm} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$



U_m – напряжение на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения U_m .

Резонанс для тока

возникает при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$.

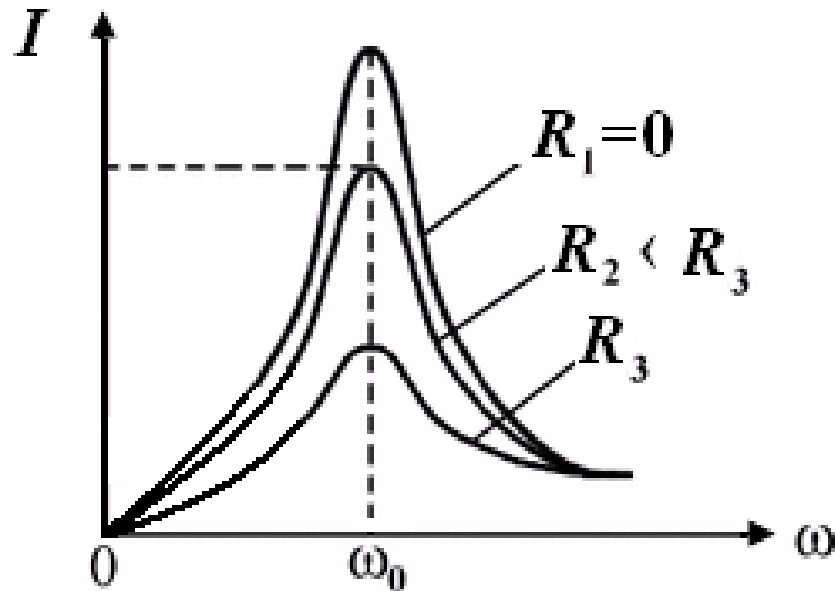
В этом случае угол сдвига фаз между током и напряжением $\varphi = 0$ ($\operatorname{tg} \varphi = 0$), изменение тока и напряжения происходит синфазно.

$$\omega_I = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Полное сопротивление цепи Z становится минимальным ($Z = R$), а ток становится максимальным.

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}_{\rightarrow 0}}}.$$

Резонанс для тока



Резонансные кривые для тока сходятся в 0, т.к. при постоянном напряжении ($\omega = 0$) ток в цепи, содержащей конденсатор, не течет.

Резонанс напряжений

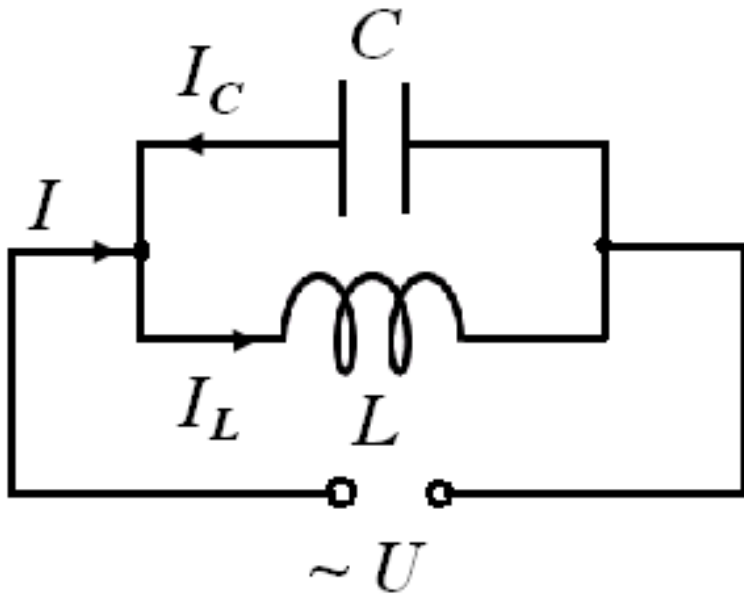
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}_{\rightarrow 0}}}.$$

- Ток в цепи определяется активным сопротивлением R и принимает максимально возможное при данном U_m значение. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи $U_R = U$, а падение напряжения на конденсаторе U_C и катушке индуктивности U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется *резонансом напряжений* или *последовательным резонансом*.

Резонанс напряжений

- Явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определённой частоты (для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура – радиоприёмник).
- Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчёте изоляции электрических цепей (линий), содержащих C и L с целью предотвращения её пробоя.

Резонанс токов (параллельный резонанс)

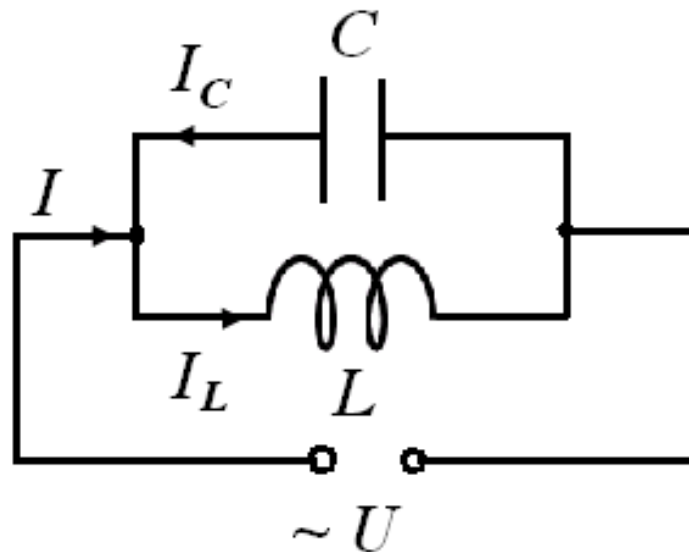


наблюдается в цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные конденсатор C и катушку индуктивности L , при приближении частоты приложенного напряжения к резонансной частоте

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Резонанс токов

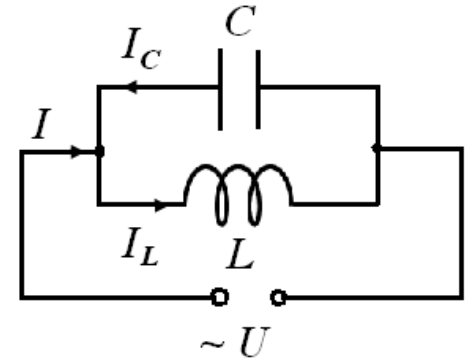
В этом случае разность фаз токов I_C и I_L в параллельных ветвях $\Delta\varphi = \pi$, т.е. токи в ветвях противоположны по фазе, а амплитуда тока $I = I_m = I_{Cm} + I_{Lm}$ во внешней (неразветвлённой) цепи равно нулю.



Резонанс токов

При активном сопротивлении цепей $R \neq 0$ разность фаз токов $\Delta\varphi \neq \pi$ амплитуда силы тока $I_m \neq 0$, но будет иметь наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов токи I_C и I_L компенсируются, а сила тока I в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через R . Может оказаться, что сила тока $I \ll I_C$ и I_L .

Резонанс токов



- Такой контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к $\omega_{рез}$.
- Используется в резонансных усилителях; индукционных печах, в которых C и L подбирают таким образом, чтобы при частоте генератора сила тока через нагревательную катушку была гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

Переменный ток

Установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей R , L , C , переменного тока, обусловленного переменным напряжением $U = U_m \cos \omega t$. (1)

Этот ток изменяется по закону $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. (2)

$$I_m(U_m, C, L, R, \omega) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (3)$$

Ток I отстает по фазе от напряжения U на φ , определяемую выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (4)$$

Полное электрическое сопротивление
(импеданс)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (5)$$

Переменный ток, текущий через R ($L \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$)

Закон Ома: $IR = U = U_m \cos \omega t$.

Из уравнения (3) следует: $I_m = \frac{U_m}{R}$.

Следовательно, ток изменяется в фазе с напряжением и $\varphi = 0$.

Переменный ток, текущий через L ($R \rightarrow 0, C \rightarrow 0$)

Из уравнений (3), (4) следует: $I_m = \frac{U_m}{\omega L},$

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_L = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad I_L \text{ отстает от } U_L \text{ на } \frac{\pi}{2}.$$

$R_L = \omega L$ - реактивное индуктивное
сопротивление.

R_L растет с ростом частоты ω .

Постоянному току ($\omega = 0$) индуктивность не оказывает сопротивление.

Переменный ток, текущий через C ($R \rightarrow 0, L \rightarrow 0$)

Из уравнений (3), (4) следует: $I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}},$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

$$I_C = I_m \cos\left(\omega t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), I_C \text{ опережает } U_C \text{ на } \frac{\pi}{2}.$$

$$R_C = \frac{1}{\omega C} - \text{реактивное емкостное сопротивление.}$$

При $R = 0$

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = R_L - R_C$ реактивное
сопротивление.

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - полное сопротивление

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}.$$

Мгновенное значение мощности

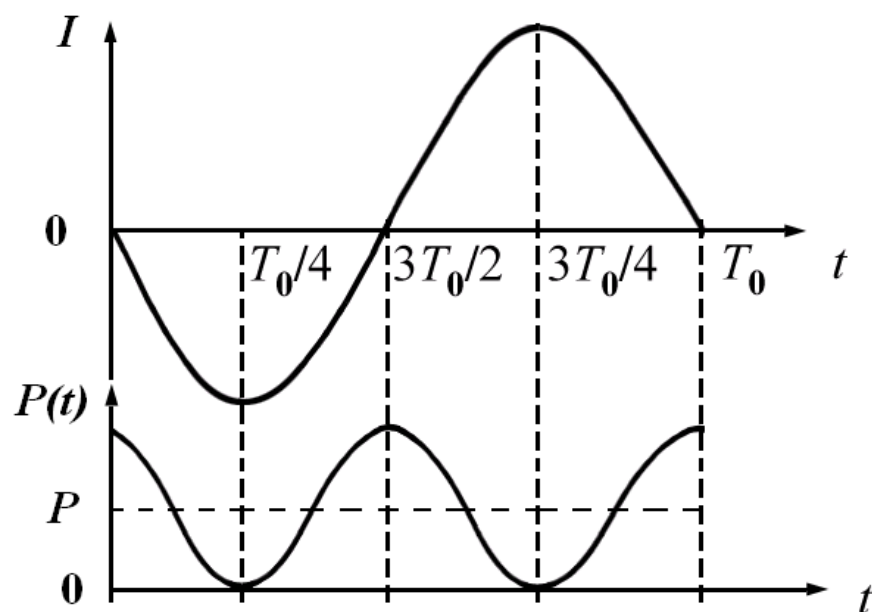
равно произведению мгновенных значений $U(t)$ и $I(t)$

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_m \cos \omega t I_m \cos(\omega t - \varphi).$$
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta). \end{aligned} \right\}$$
$$P(t) = \underbrace{\frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi}_{\text{сред.знач.}} + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi).$$

Среднее значение $\langle \cos(2\omega t - \varphi) \rangle = 0.$

Практическое значение представляет **среднее значение мощности**

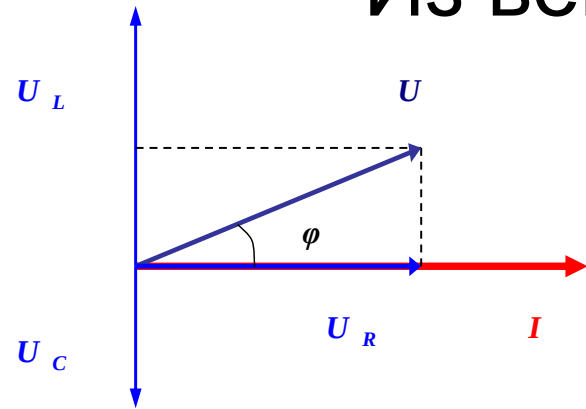
$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi.$$



$$P(t) \sim \cos 2\omega t, \text{ т.е.}$$

МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ
колеблется около
среднего значения с
частотой в 2 раза
превышающей частоту
тока.

Из векторной диаграммы видно, что



$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \frac{R}{Z}.$$

Подставляем это выражение в формулу для среднего значения мощности:

$$P = \frac{1}{2} \frac{U_m I_m R}{Z} = \frac{1}{2} \frac{U_m}{\underbrace{Z}_{I_m}} I_m R = \frac{R I_m^2}{2}.$$

Среднего значения мощности $P = \frac{RI_m^2}{2}$.

Такую же мощность развивает
постоянный ток, сила которого равна

$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ - действующее (эффективное)
значение силы тока.

Аналогично, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ - действующее
значение напряжения.

Уравнение средней мощности можно
записать в виде

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

$\cos \varphi$ называется *коэффициент мощности*.

В технике стремятся сделать максимальным.

Если $\cos \varphi$ мал, то для выделения в цепи
требуемой мощности надо иметь большой
ток, что приводит к росту потерь в проводах.

Для промышленных установок $\cos \varphi \geq 0,85$.