Затухающие и вынужденные колебания

Затухающие колебания

Затухание колебаний – постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой.

Свободные колебания реальной системы всегда затухают. Причиной затухания

механических колебаний является трение,

электрических колебаний – тепловые потери в проводниках.

Затухающие колебания

Линейная система: параметры, характеризующие протекающие в системе процессы, не изменяются.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0, \quad (1)$$

$\delta = \mathrm{const}$ – коэффициент затухания,

ω_0 – собственная циклическая частота колебательной системы (т.е. в отсутствие потерь энергии, $\delta = 0$).

$$\frac{d^2S}{dt^2}+2\delta\frac{dS}{dt}+\omega_0^2S=0, \quad (1)$$

Решение уравнения рассмотрим в виде

$$S=e^{-\delta t}u(t). \quad (2)$$

$$\dot{S}=-\delta e^{-\delta t}u+e^{-\delta t}\dot{u}=\left(-\delta u+\dot{u}\right)e^{-\delta t},$$

$$\ddot{S}=-\delta\left(-\delta e^{-\delta t}u+e^{-\delta t}\dot{u}\right)-\delta e^{-\delta t}\dot{u}+e^{-\delta t}\ddot{u}=$$

$$=\delta^2e^{-\delta t}u-\delta e^{-\delta t}\dot{u}-\delta e^{-\delta t}\dot{u}+e^{-\delta t}\ddot{u}=$$

$$=\left(\delta^2u-2\delta\dot{u}+\ddot{u}\right)e^{-\delta t}.$$

Подставляем производные в уравнение (1):

$$\delta^2 u - 2\delta\dot{u} + \ddot{u} + 2\delta\left(-\delta u + \dot{u}\right) + \omega_0^2 u = 0,$$

$$\ddot{u} + \delta^2 u - 2\delta\dot{u} - 2\delta^2 u + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0,$$

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u - \delta^2 u = 0.$$

$$\ddot{u} + \underbrace{\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)}_{\omega^2} u = 0. \quad (3)$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - циклическая частота собственных затухающих колебаний.

Решение уравнения (3) зависит от знака ω^2.

● Малые затухающие колебания.

Решение уравнения (4) имеет вид

$$u = A_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

С учётом уравнения (2).

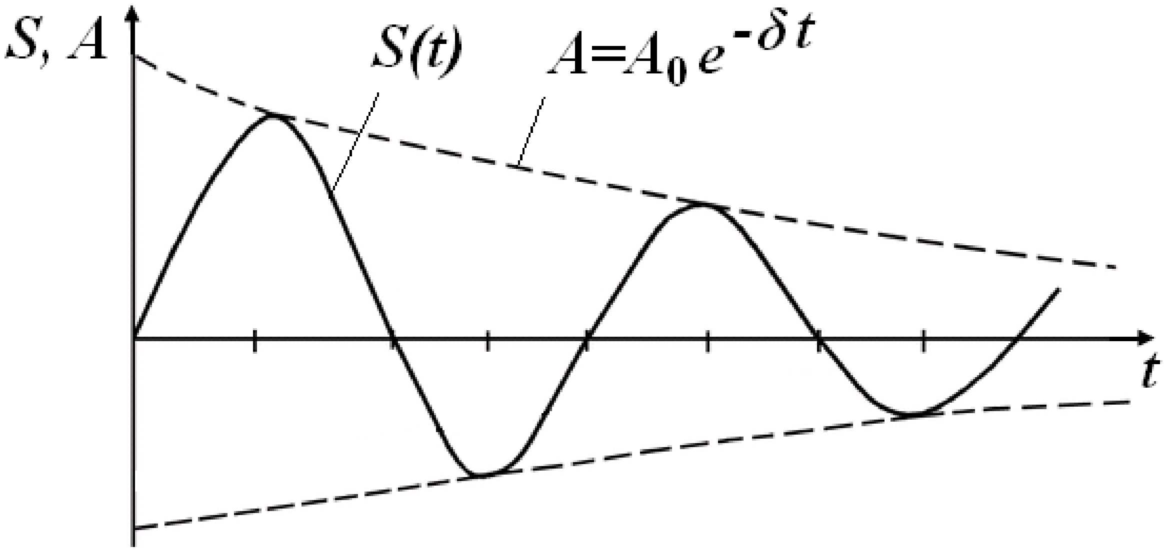
$$S = \underbrace{A_0 e^{-\delta t}}_{A} \cos(\omega t + \varphi),$$

A – амплитуда колебаний,

A_0 – амплитуда начального колебания,

$\tau = \dfrac{1}{\delta}$ – время релаксации

(A уменьшается в e раз).



$$S = \underbrace{A_0 e^{-\delta t}}_{A} \cos(\omega t + \varphi).$$

Затухание нарушает периодичность колебаний. Поэтому вводится определение *условный период* *T* – промежуток времени между двумя последующими *max* (*min*).

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Для характеристики затуханий вводят физические величины.

- *Декремент затухания* (безразмерная величина) – отношение
$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}.$$
- *Логарифмический декремент затухания* (безразмерная величина):
$$\Theta = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

Ne – число колебаний, совершаемых за время $t = \tau$, в течение которого амплитуда A уменьшается в *е* раз.

• *Добротность* колебательной системы (безразмерная величина):

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{затухания малы} \\ \delta^2 << \omega_0^2 \Rightarrow T \approx T_0 \end{array} \right) = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\pi}{\delta \dfrac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

Q равна с точностью до π числу колебаний N_e, совершаемых системой за время релаксации τ.

Q равна произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ колебательной системы в момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t + T$:

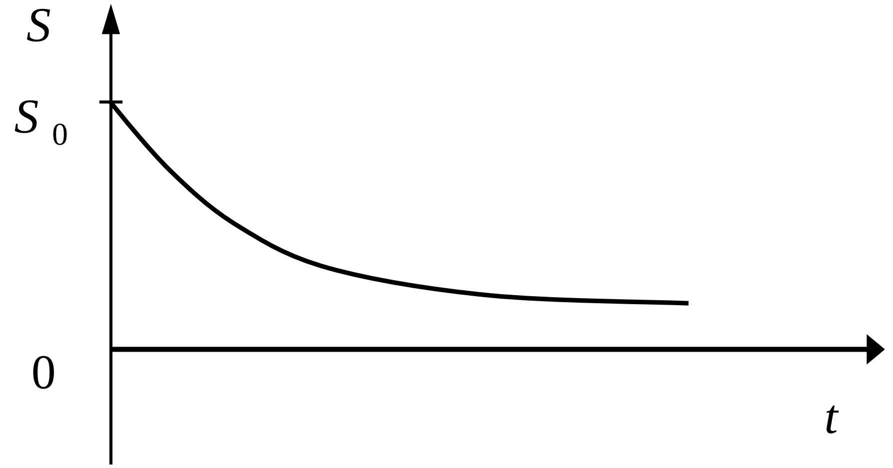
$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

- Затухающие колебания не малы.

Коэффициент затухания δ растёт, растёт и период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

При $\delta = \omega_0$ период колебаний $T \to \infty$, т.е. процесс перестаёт быть периодическим, и колеблющаяся величина стремится к нулю.



Следовательно, процесс становится *апериодическим*, не имеет колебательного характера.

Пример. Свободные затухающие колебания пружинного маятника под действием упругой силы $F = -kx$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v} = -r\dot{\vec{x}}$.

Затухания малы.

$$F = ma; \quad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = 0$$

дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Его решением является $x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}; \quad Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{r}{m}} = \frac{\sqrt{km}}{r}.$$

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания возникают под действием периодической силы, изменяющейся по гармоническому закону

$$X(t) = X_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Для механических колебаний роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Вынужденные колебания

Закон движения для пружинного маятника

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t, \quad (3)$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{X_0}\cos\omega t$$

дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

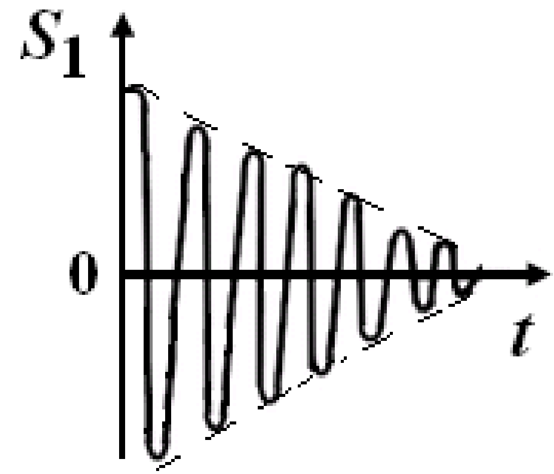
В общем виде $\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = X_0 \cos\omega t. \quad (4)$

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = X_0 \cos\omega t. \quad (4)$$

Решение этого уравнения равно сумме решений двух уравнений.

1. Общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0. \quad (5)$$



Решение

$$S_1 = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

соответствует свободным затухающим колебаниям, где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Этот процесс играет роль в начальной стадии колебаний при их установлении.

2. Частного решения неоднородного дифференциального уравнения (4). Это решение соответствует незатухающим периодическим колебаниям.

Если возмущающая сила изменяется по гармоническому закону (1) $X(t) = X_0 \cos \omega t$,

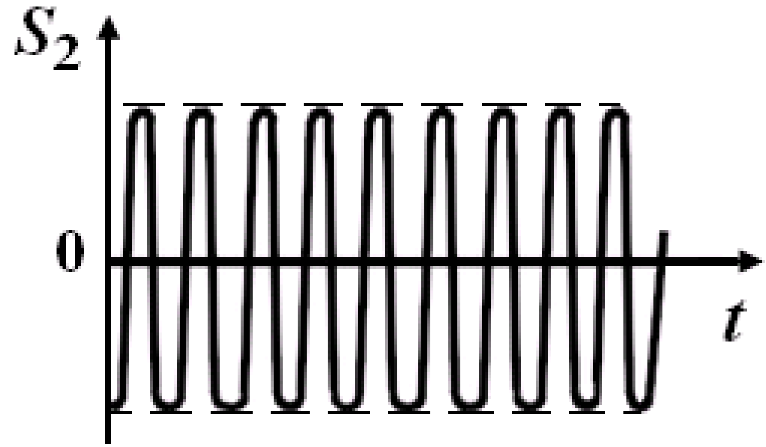
то установившиеся вынужденные колебания также гармонические с частотой ω вынуждающей силы.

$$S_2 = A\cos(\omega t - \varphi),$$

A – амплитуда вынужденных колебаний,

φ – сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой.

$$S_2 = A\cos(\omega t + \varphi).$$



A и φ зависят от соотношения между

ω – циклической частотой вынужденных колебаний и

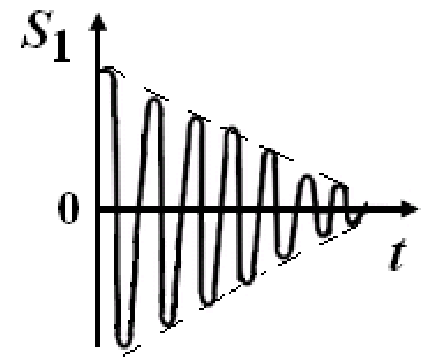
ω_0 – циклической частотой свободных незатухающих колебаний системы.

$$A = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \varphi = arctg\,\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = X_0 \cos\omega t. \quad (4)$$

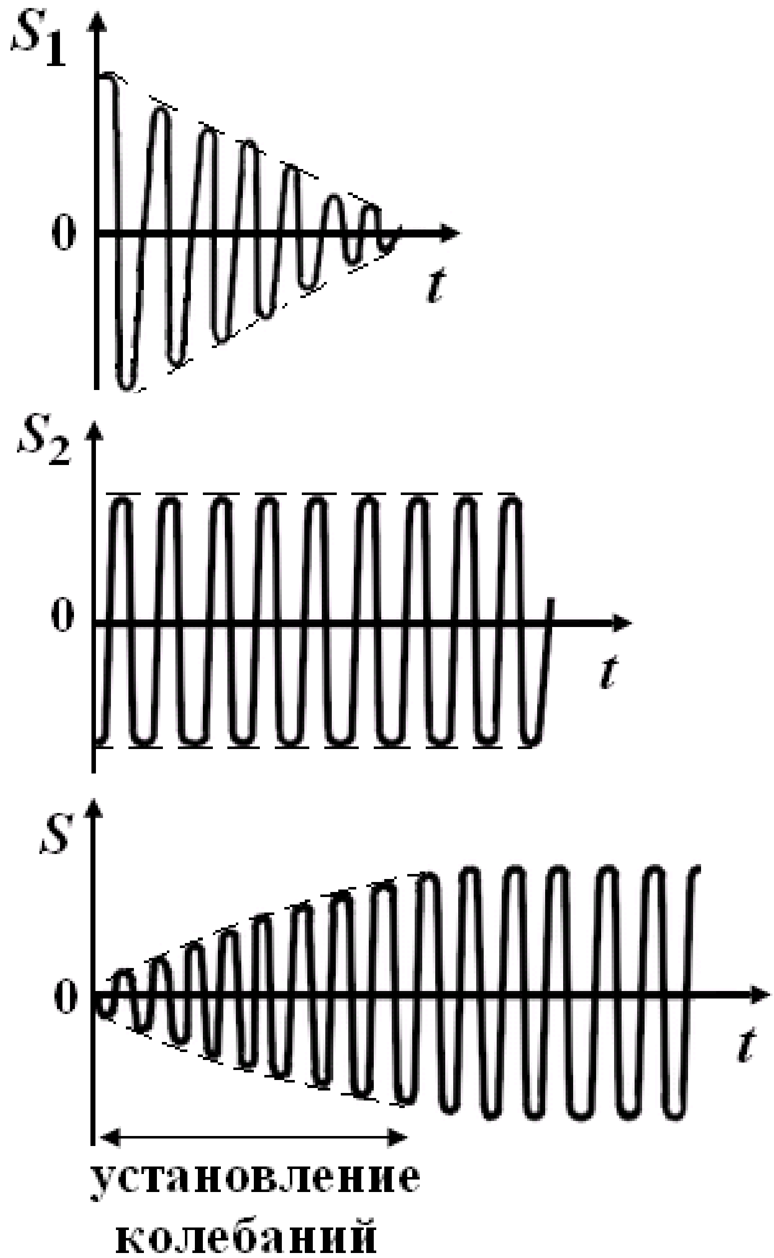
Общее решение уравнения (4): $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$.

Амплитуда $S_1(t)$ уменьшается после начала вынужденных колебаний, и через некоторое время τ (за $\tau \sim \tau_0 = \dfrac{4{,}6}{\delta}$ амплитуда уменьшается в 100 раз) свободные затухающие колебания практически прекращаются.



Следовательно, $S(t) \approx S_2(t)$ и система переходит в состояние установившихся вынужденных колебаний с амплитудой *A*, частотой ω и фазой φ.

Вынужденные колебания



$S_1(t)$ уменьшается.

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t).$$

Установившиеся вынужденные колебания.

Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

имеет максимум, когда выражение

$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2$ имеет минимум.

Продифференцируем последнее по ω и приравняем к нулю.

$$\frac{\partial\left(\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\delta^2\omega^2\right)}{\partial\omega} = 0 - 4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\delta^2\omega =$$

$$= -4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\delta^2\omega = 0 \Rightarrow$$

$$-4\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\omega+8\delta^2\omega=0 \Rightarrow \; \omega=0, \pm\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}\,.$$

Физический смысл имеет положительное значение частоты.

При $\omega=\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$ амплитуда колебаний A = *max*, т.е. это резонансная частота, и наблюдается явление

резонанса – резкого усиления амплитуды собственных колебаний при приближении циклической частоты ω возбуждающей силы к значению $\omega_{рез}$.

$$A_{max} = A(\omega_{рез}) = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2\right)^2 + 4\delta^2\left(\omega_0^2 - 2\delta^2\right)}} =$$

$$= \frac{X_0}{\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4}} = \frac{X_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{X_0}{2\delta\omega_1}.$$

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – циклическая частота свободных затухающих колебаний

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

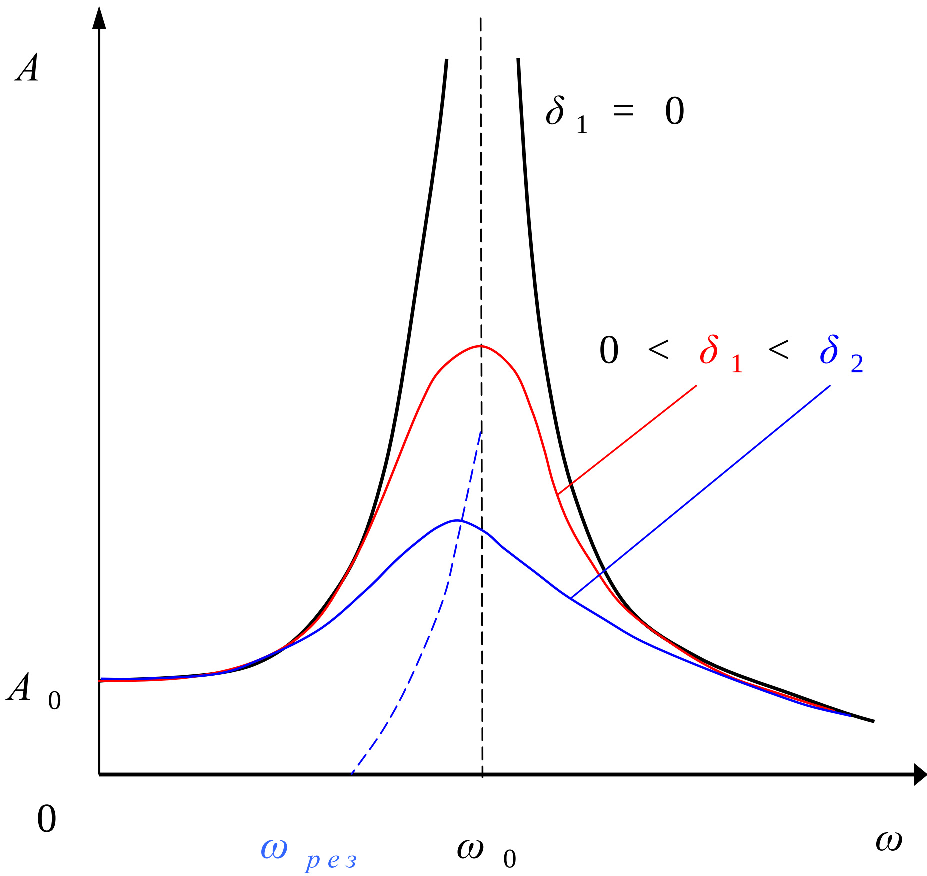
При малых затуханиях $\delta^2 << \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{рез} \approx \omega_0$ – собственной частоте колебательной системы и амплитуда резонансных колебаний

$$A_{рез} = \frac{X_0}{2\delta\omega_0} = \underbrace{\frac{\omega_0}{2\delta}}_{Q} \cdot \frac{X_0}{\omega_0^2} = Q\frac{X_0}{\omega_0^2},$$

$Q -$ *добротность*.

График зависимости амплитуды колебаний A от частоты ω вынуждающей силы называется *резонансными кривыми*.

$$A = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \qquad \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$



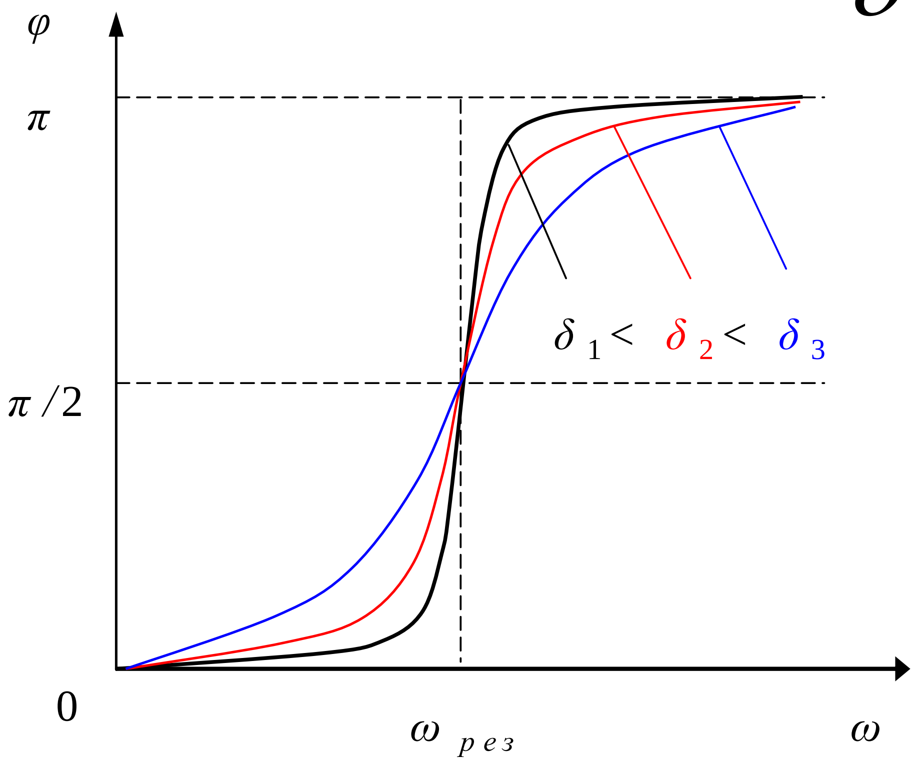
По мере роста коэффициента затухания δ пики на резонансных кривых сглаживаются, а $\omega_{рез}$ уменьшается.

$$A_0 = \frac{X_0}{\omega_0^2} = \frac{F}{m\omega_0^2} -$$

статическое отклонение, найдено из уравнения для A при $\omega = 0$.

Зависимость фазы колебаний φ от частоты ω вынуждающей силы называется *фазовыми резонансными кривыми*.

$$tg\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$



Затухания отсутствуют:

$$\delta = 0 \Rightarrow tg\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0,$$

т.е. колебания и вынуждающая сила в фазе.

В остальных случаях

$$\delta \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq 0.$$