Гармонические колебания

Колебаниями называются процессы (движение или изменение состояния), в той или иной степени повторяющийся во времени.

- *механические колебания*
- *электромагнитные*
- *электромеханические*

- ***Свободные (собственные) колебания*** совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешнего воздействия на колебательную систему.
- ***Гармонические колебания*** – колеблющаяся величина изменяется со временем по закону *Sin* или *Cos*.
- ***Периодический процесс*** (процесс, повторяющийся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний.

Гармонические колебания величины *S* описываются уравнениями типа

$$S(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \textit{или} \quad S(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1)$$

A – максимальное значение колеблющейся величины, называется амплитудой колебаний,

ω_0 – круговая (циклическая) частота,

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебаний в момент времени *t*.

Период – время, за которое система возвращается в исходное состояние, фаза колебаний получает приращение 2π:

$$\left[\omega_0\left(t+T\right)+\varphi\right]=\left[\omega_0 t+\varphi\right]+2\pi \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (2)$$

$\upsilon=\dfrac{1}{T}$ – частота, число колебаний в единицу времени.

В системе СИ: $[\upsilon]$ = Гц – частота периодического процесса, при котором за 1 с совершается один цикл процесса.

Циклическая частота: $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\upsilon. \qquad (3)$

Первая и вторая производная по времени от гармонически колеблющейся величины $S(t)$ так же совершают гармонические колебания с той же циклической частотой.

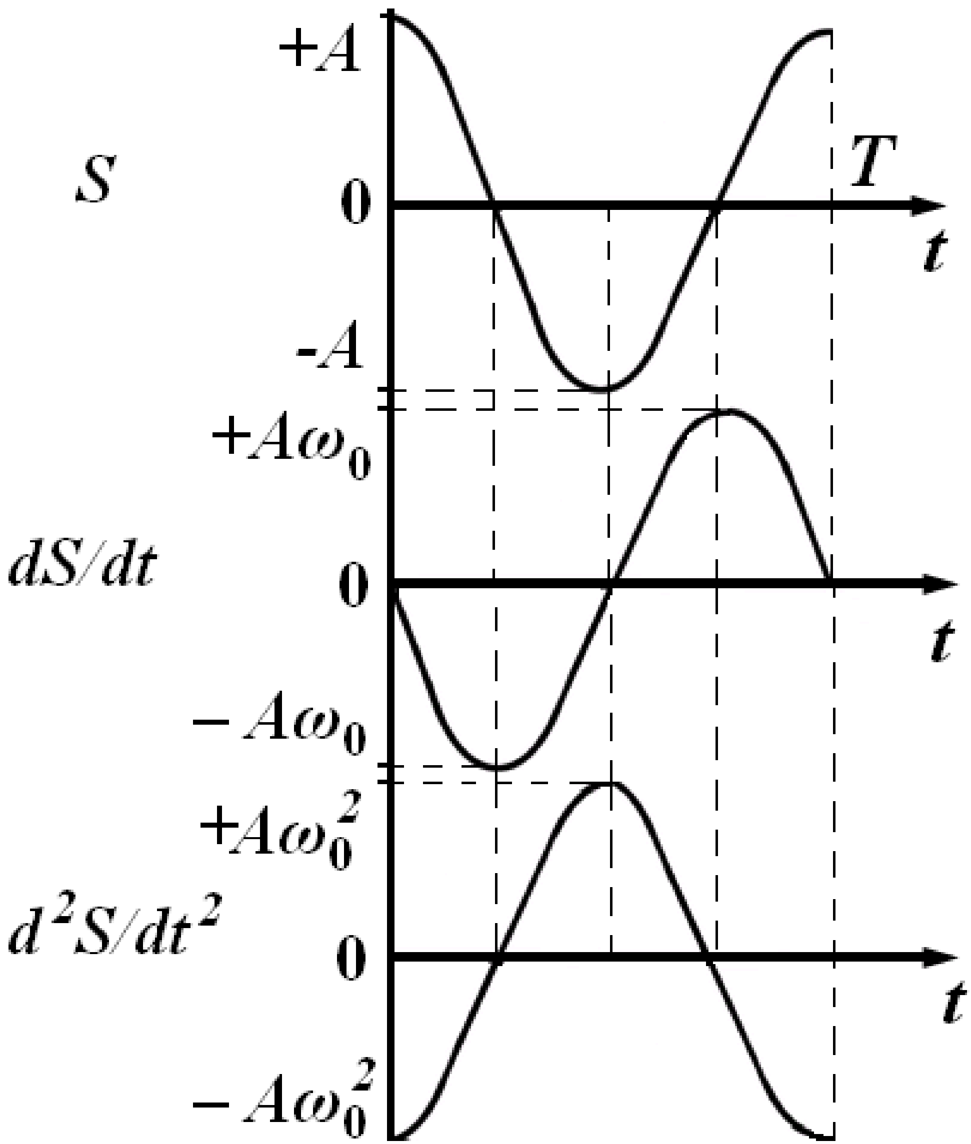
$$\frac{dS}{dt} = -A\omega_0 Sin(\omega_0 t + \varphi) = \underbrace{A\omega_0}_{A'} \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

Фаза dS/dt отличается от фазы S на $\pi/2$ – опережает.

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -A\omega_0{}^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0{}^2 \underbrace{A\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{S(t)} =$$

$$= \underbrace{A\omega_0{}^2}_{A''}\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \qquad (5)$$

Фаза d^2S/dt^2 отличается от фазы S на π – опережает.



- Когда

$$S = 0, \qquad \frac{dS}{dt} = \max.$$

- Когда

$$S = -\max, \qquad \frac{d^2S}{dt^2} = +\max.$$

Из уравнения (5) $$\frac{d^2S}{dt^2} = -\omega_0^{\,2}\underbrace{A\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{S(t)}$$
следует, что гармонически колеблющаяся величина *S*(*t*) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -S\omega_0^{\,2} \Rightarrow \quad \frac{d^2S}{dt^2} + \omega_0^{\,2}S = 0 \qquad (6)$$

– дифференциальное уравнение гармонического колебания.

Общее решение диф. уравнения гармонического колебания имеет вид

$$S = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \qquad (7)$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные интегрирования, которые можно найти из начальных условии $t = 0$.

Подставляя $t = 0$ в уравнение (7), получаем

$$A_2 = S(0); \qquad A_1 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dS}{dt}\right)_{t=0}.$$

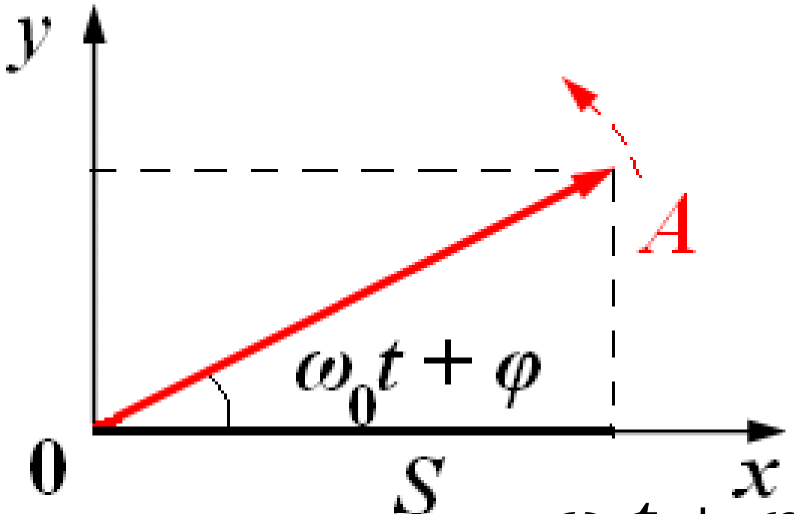
Общее решение можно привести к стандартному виду гармонических колебаний $S = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$,

$$A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2}, \qquad \varphi = arctg\,\frac{A_2}{A_1}.$$

Следовательно, величина *S*(*t*) совершает гармонические колебания только в том случае, если она удовлетворяет уравнению (6) – дифференциальному уравнению гармонических колебаний.

Метод векторных диаграмм

Гармонические колебания можно изобразить графически в виде вращающегося на плоскости вектора амплитуды



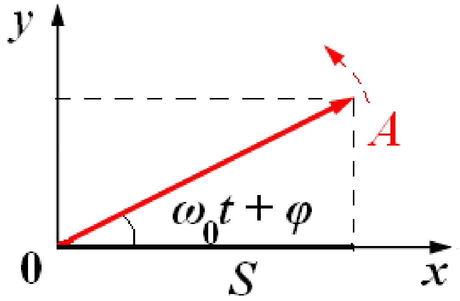
0 – начало координат.

Вектор ***A*** по модулю равен амплитуде гармонического колебания: $|\vec{A}| = A$.

Вектор ***A*** составляет с осью x угол равный

$\omega_0 t + \varphi$ – фаза колебаний в данный момент времени.

С течением времени этот угол увеличивается.



Метод векторных диаграмм

Вектор ***A*** равномерно вращается вокруг точки 0 с циклической частотой ω_0, а проекция вектора ***A*** на ось *x* совершает гармонические колебания

$$A_x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$A_y = A\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Метод используется, например, при сложении одинаково направленных гармонических колебаний.

Метод комплексных чисел

Колеблющаяся величина представляется комплексным числом.

Согласно формуле Эйлера для комплексных чисел:

$$e^{i\varphi} = cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi, \qquad i = \sqrt{-1} - мнимая \quad единица$$

Гармонические колебания можно записать в экспоненциальной (комплексной) форме: $\widetilde{S} = \widetilde{A}e^{i\omega_0 t} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}$,

где $\widetilde{A} = Ae^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда.

Метод комплексных чисел

Физический смысл имеет только действительная (вещественная) часть комплексной функции $\tilde{S}$, обозначаемая $\mathrm{Re}\,\tilde{S}$.

$\mathrm{Re}\,\tilde{S} = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = S$ – гармоническое колебание.

Механические гармонические колебания

Прямолинейные гармонические колебания материальной точки вдоль оси x около положения равновесия, совпадающего с началом координат $x = 0$.

Зависимость координаты *x* от времени *t*

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (1)$$

Скорость точки

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 Sin(\omega_0 t + \varphi). \qquad (2)$$

Механические гармонические колебания

Ускорение точки

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0{}^2\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (3)$$

Сила, действующая на точку массой m

$$F_x = ma_x = -mA\omega_0{}^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0{}^2 x. \qquad (4)$$

$$\vec{F} = -m\omega_0{}^2 x\vec{i}. \qquad (5)$$

Механические гармонические колебания

$$\vec{F} = -m\omega_0^{\ 2} x\vec{i}. \qquad (5)$$

Из уравнения (5) следует:

1) сила ***F*** пропорциональна смещению *x*;

2) сила ***F*** направлена в противоположную сторону от смещения,

что характерно для ***упругих сил***.

Силы иной физической природы, удовлетворяющие тому же виду зависимости, называются ***квазиупругими***.

Механические гармонические колебания

Кинетическая энергия:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0{}^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0{}^2}{4}\left(1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right). \qquad (6)$$

$E_к$ изменяется с циклической частотой

$$\omega = 2\omega_0$$

Механические гармонические колебания

Потенциальная энергия:

$$E_p = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0{}^2 x^2}{2} = \left\{k = m\omega_0{}^2\right\} = \frac{kx^2}{2} =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0{}^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0{}^2}{4}\left(1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right). \quad (7)$$

E_p изменяется с циклической частотой

$$\omega = 2\omega_0$$

Механические гармонические колебания

Полная энергия

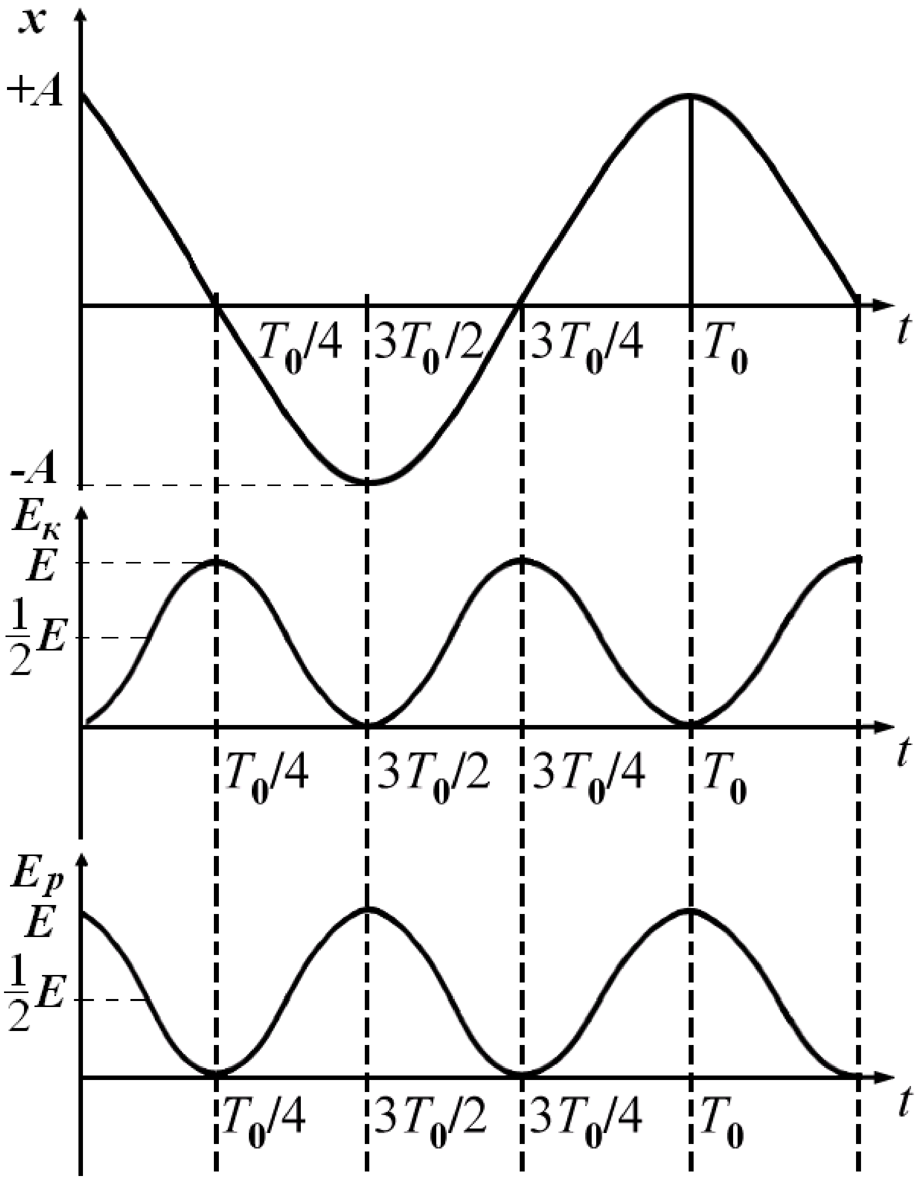
$$E = E_к + E_p =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\underbrace{\left(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\right)}_{1} =$$

$$= \frac{kA^2}{2} = const. \qquad (8)$$

Уравнение (8) следует из закона сохранения механической энергии, который справедлив для упругих сил (консервативных сил).

Механические гармонические колебания



Колебания $E_к$ и E_p совершаются со сдвигом по фазе на π.

Гармонический осциллятор –

система, совершающая гармонические колебания под действием упругой силы $\vec{F} = -kx\vec{i}$, её колебания описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$$

В общем виде $\ddot{S} + \omega_0{}^2 S = 0.$ (9)

Пружинный маятник –

груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$; k – жёсткость пружины.

$$F = ma = m\ddot{x} = -kx. \qquad \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0{}^2} x = 0. \qquad (10)$$

- дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

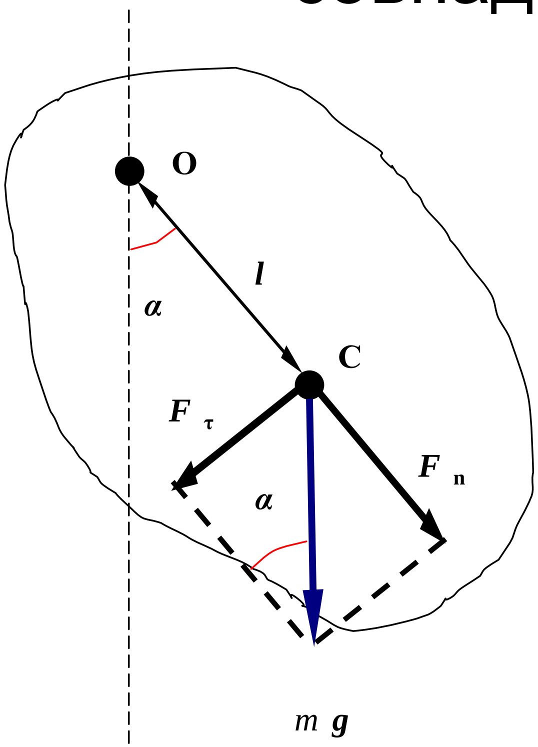
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.(11) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.(12) \qquad E_p = \frac{kx^2}{2}.$$

Математический маятник –

идеализированная система, состоящая из материальной точки массой *m*, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Физический маятник – твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром тяжести C.

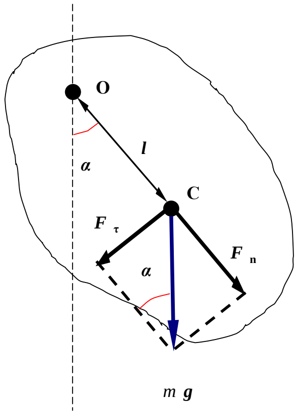


Маятник вращается под действием момента возвращающей силы

$$\vec{F}_\tau = -m\vec{g}\sin\alpha \approx -mg\vec{\alpha}. \qquad (1)$$

Знак минус показывает, что вектор $\boldsymbol{F\tau}$ и α имеют противоположное направления.

Физический маятник



$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_\tau l =$$

$$= -mg\sin\alpha l \approx -mgl\alpha. \qquad (2)$$

J – момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса O.

l – расстояние между точкой O и центром масс C.

$$(2) \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0. \quad (3) \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{\alpha} + \underbrace{\frac{mgl}{J}}_{\omega_0^2}\alpha = 0 \qquad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0.$$

Физический маятник

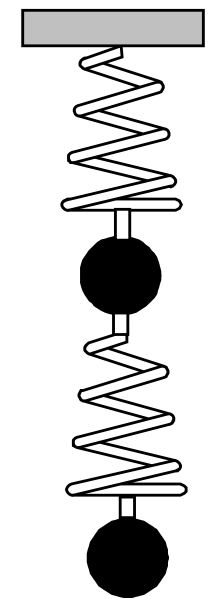
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

$$L = \frac{J}{ml}$$

- приведенная длина физического маятника (длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний).

Сложение гармонических колебаний

Сложение колебаний – это нахождение закона результирующих колебаний системы в тех случаях, когда эта система участвует одновременно в нескольких колебательных процессах.



Два предельных случая:

- сложение колебаний одинакового направления,
- сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Сложение колебаний одинакового направления

- *Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты* $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$:

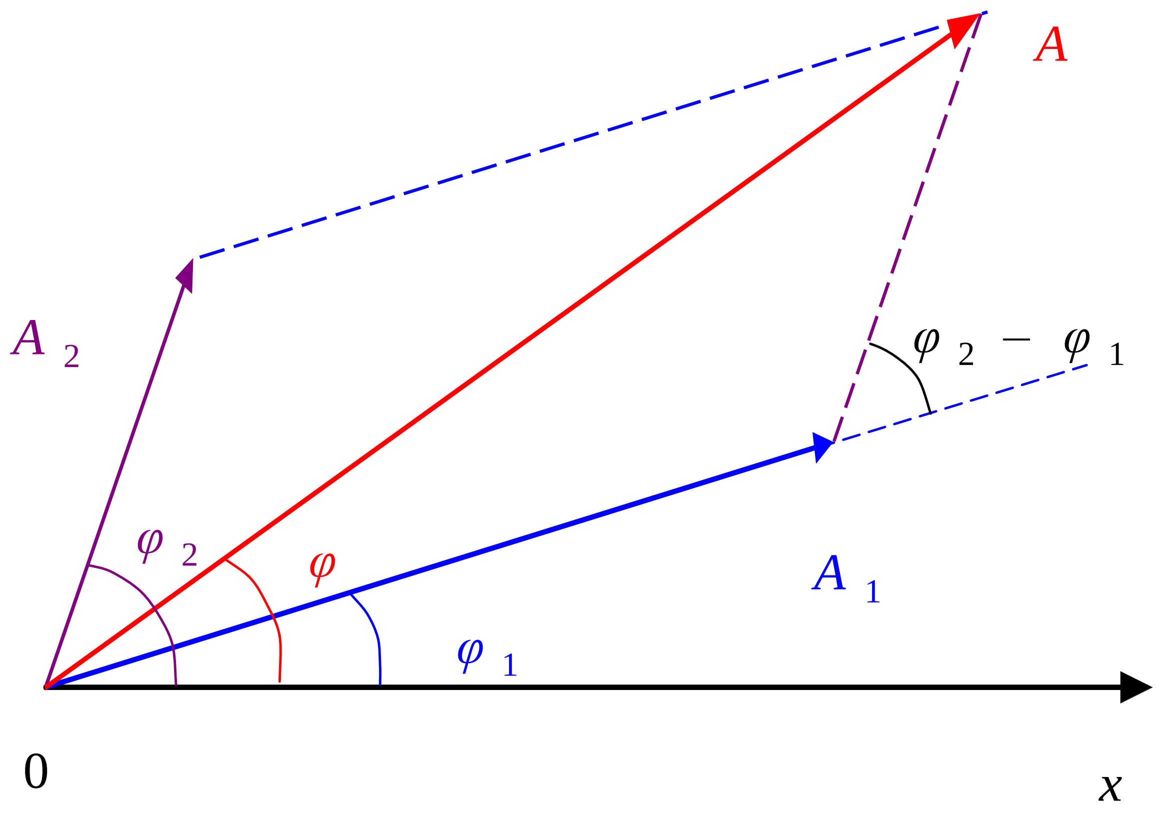
$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad (1)$$

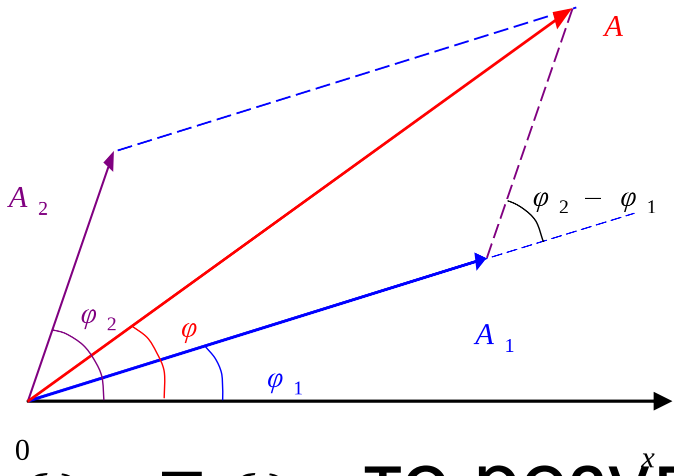
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \quad (2)$$

Разность фаз этих колебаний не зависит от времени t, т.е. $(\varphi_1 - \varphi_2) = \mathrm{const}$, такие колебания называются *когерентными* $(\omega_{01} = \omega_{02})$.

Сложение колебаний одинакового направления

Для нахождения результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм.





Т.к. $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, то результирующее колебание имеет вид

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3) \quad где$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \quad (5)$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3) \quad где$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует, что результирующее колебание *гармоническое* с той же частотой ω_0 и в том же направлении, что и складываемые колебания.

Из уравнения (4) следует, что амплитуда A результирующего колебания зависит от разности начальных фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4)$$

Если колебания *синфазны*: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, следовательно, $A = A_1 + A_2$, происходит усиление результирующего колебания.

Если колебания в *противофазе*:

$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$, следовательно,

$A = |A_1 - A_2|$, происходит ослабление результирующего колебания.

Сложение колебаний одинакового направления

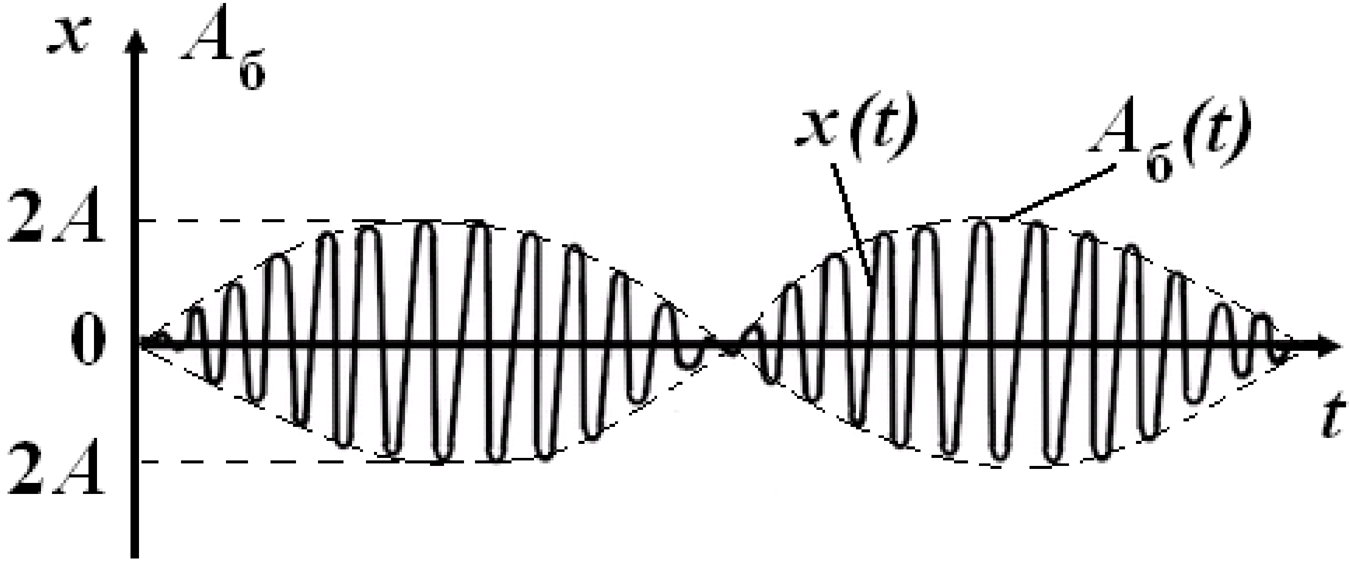
- *Некогерентные колебания*: $\omega_{01} \neq \omega_{02}$, т.е. разность фаз колебаний

$$(\omega_{01} t + \varphi_1 - \omega_{02} t - \varphi_2) \neq \text{const}$$

и изменяется с течением времени *t*.

При наложении таких колебаний получаются *негармоническое* результирующее колебание.

Если колебания мало отличаются по частоте $\Delta\omega = \omega_{02} - \omega_{01} << \omega_{01}$, то в результате наложения колебаний возникают негармонические колебания, называемые *биениями* – периодические изменения амплитуды $A_б$ результирующего колебания.



Пусть $\varphi_2 = \varphi_1 = 0, \quad A_1 = A_2 = A, \omega_{01} = \omega,$ уравнения колебаний имеют вид

$$x_1 = A\cos\omega t,$$

$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Уравнение результирующего колебания

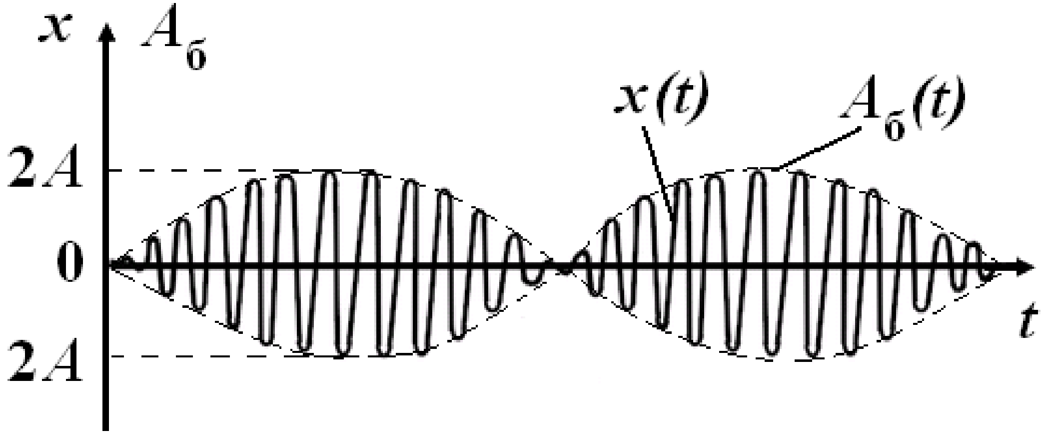
$$x = x_1 + x_2 = A\left(\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t\right) =$$

$$= 2\mathrm{A}\cos\left(\frac{2\omega}{2}t + \underbrace{\frac{\Delta\omega}{2}}_{<<\omega}t\right) \cdot \cos\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) = \underbrace{2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t}_{A_б} \cdot \cos\omega t.$$

Амплитуда биений берётся по модулю,

$$A_б = \left| 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right|$$

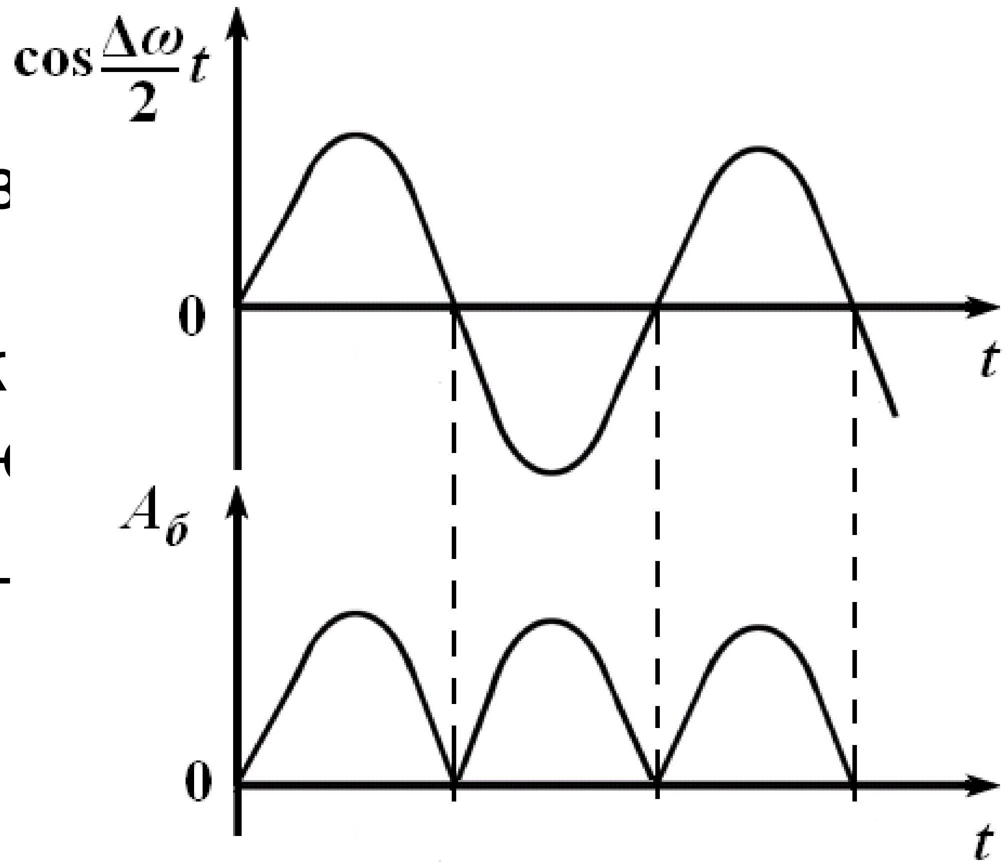
т.к. амплитуда не может быть меньше нуля.



$$A_б = \left| 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right|$$

Частота $A_б$ в два раз
больше частоты
изменения cos, т.к
берётся по модулк

$\omega_б = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ –
циклическая
частота биений.



Сложение колебаний одинакового направления

- *Гармонические колебания* совпадают по направлению и имеют *кратные циклические частоты* $\omega, 2\omega, 3\omega$ и т.д. В результате их сложения получаются периодические негармонические колебания с периодом $T = 2\pi / \omega$.

В свою очередь, любое сложное периодическое колебание $S = f(t)$ можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными *основной* циклической частоте $\omega_0 = 2\pi / T$,

где T – период колебаний:

$$S = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) +$$

$$\ldots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n),$$

A_n и φ_n – амплитуда и начальная фаза n – колебания, соответственно.

Такое представление периодической функции $f(t)$ называется *разложением функции в ряд Фурье* или гармоническим анализом сложного периодического колебания.

Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с циклическими частотами ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$ … называются *первой (основной)*, *второй*, *третьей* и т.д. *гармониками* сложного периодического колебания $S = f(t)$.

Совокупность этих гармоник образуют *спектр колебаний* $S = f(t)$.
В простейших случаях спектр может состоять из небольшого числа гармоник.
Часто под спектром колебаний понимают спектр (совокупность) его частот.

- *Непериодические колебания*, как правило, имеют непрерывный (сплошной) спектр частот, т.е. их можно представить, как результат наложения множества гармонических колебаний, частоты которых в общем случае принимают значения от 0 до ∞.

Модуляция колебаний – изменение по определённому закону какого-либо из параметров периодических колебаний (A или ω), осуществляемое за время, значительно большее, чем период колебаний T.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

- Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.

Пусть точка одновременно движется вдоль осей *x* и *y*:

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

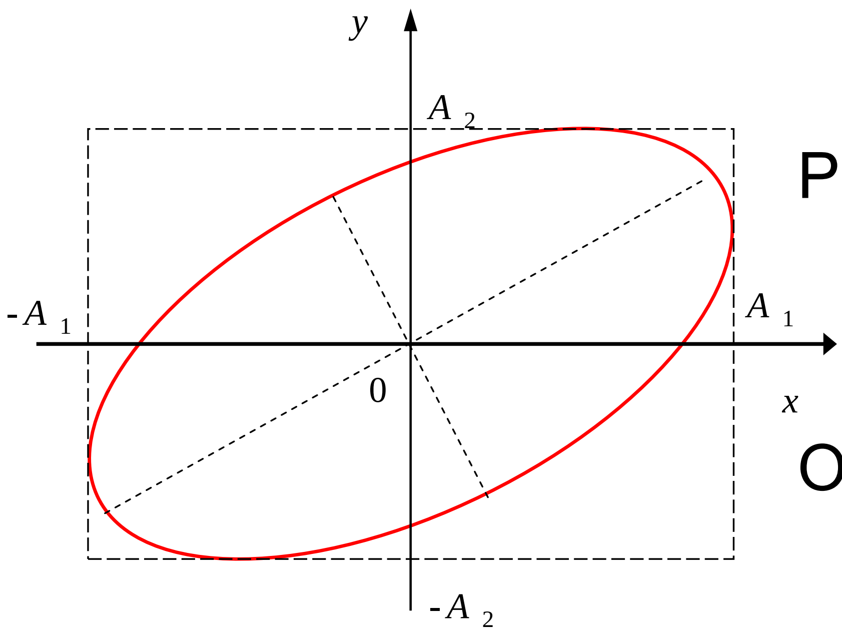
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Уравнение траектории результирующего движения точки в плоскости *xy* можно найти, исключив из выражений для *x* и *y* параметр *t*.

Получается:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1).$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний



Траектория имеет форму эллипса, причём точка описывает эллипс за время $t = T = 2\pi/\omega$.

Результирующее движение называется *эллиптически поляризованными колебаниями*.

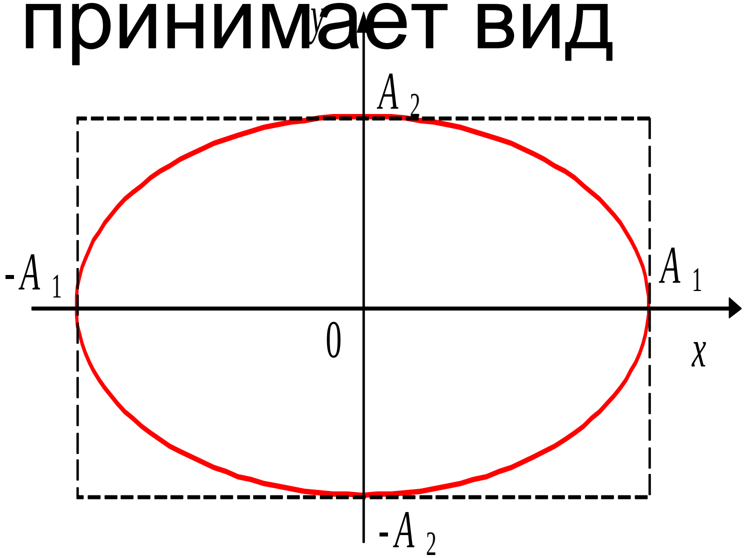
Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд A_1, A_2 складываемых колебаний и разности их начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$,

то оси эллипса совпадают с осями *x* и *y*, а размеры его полуосей равны A_1 и A_2, соответственно, уравнение движения принимает вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

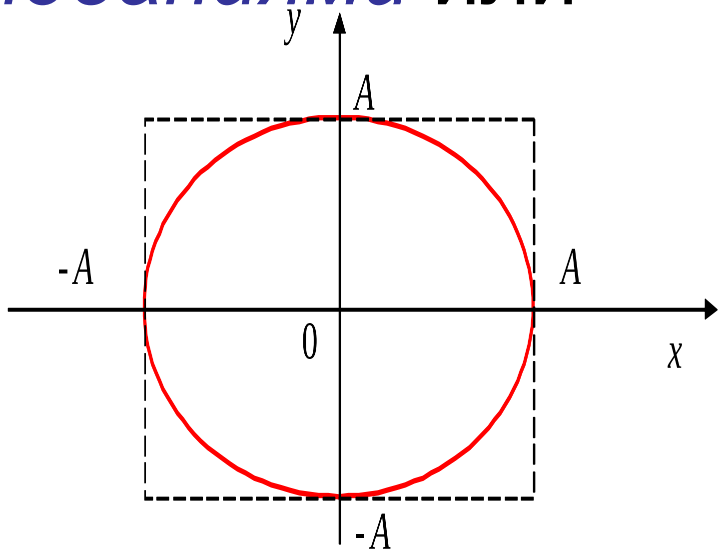


Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Если $A_1 = A_2$, тогда траектория результирующего колебания – окружность, а само колебание называется *циркулярно поляризованными колебаниями* или колебаниями,

поляризованными

по кругу.



Сложение взаимно перпендикулярных колебаний различных частот

$$x = A_1 \cos(p\omega t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(k\omega t + \varphi_2).$$

Значения координат *x* и *y* колеблющейся точки М одновременно повторяются через одинаковые промежутки времени T_0, равные общему наименьшему кратному

$$T_1 = \frac{2\pi}{p\omega} \text{ и } T_2 = \frac{2\pi}{k\omega}.$$

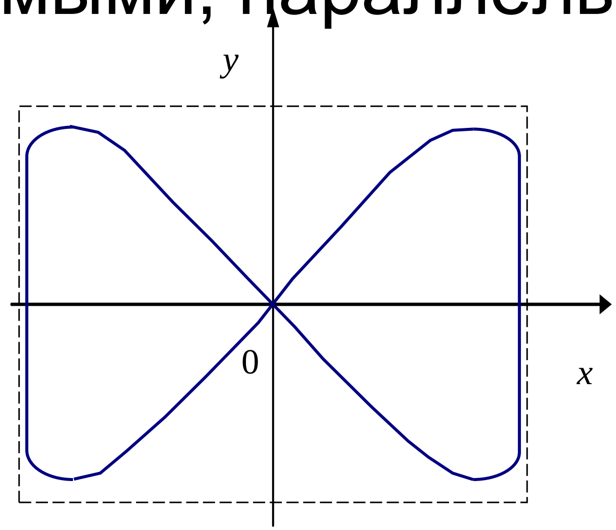
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний различных частот

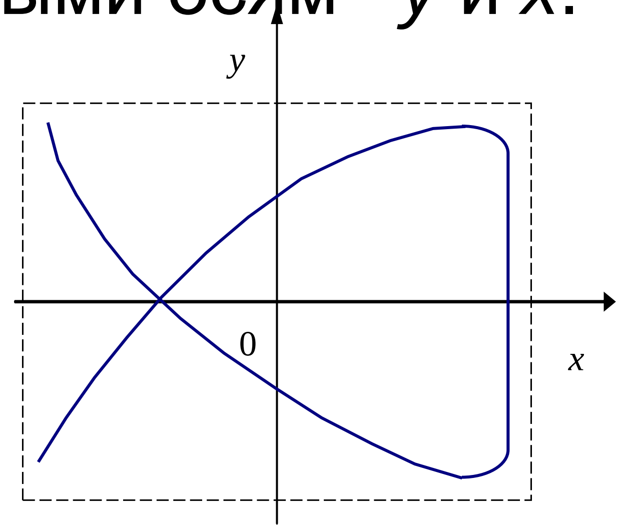
Следовательно, траектория точки М – замкнутая кривая, форма которой зависит от соотношения амплитуд $\frac{A_1}{A_2}$, частот $\frac{k\omega}{p\omega}$

и начальных фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$ складываемых колебаний. Такие замкнутые траектории точки, одновременно совершающей гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, называются *фигурами Лиссажу*.

Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат.

Отношение частот $\frac{p\omega}{k\omega}$ равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям *y* и *x*.



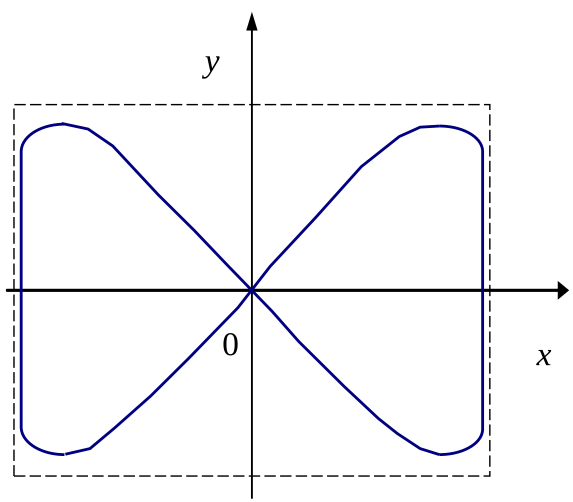


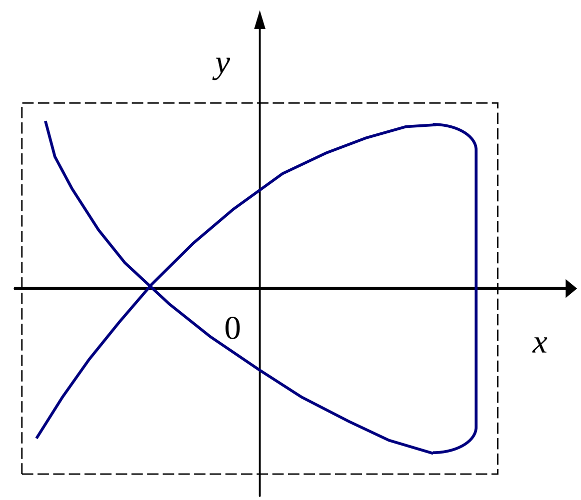
$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi / 2$

$p / k = 1 / 2$

$p / k = 2 / 3$

По фигурам Лиссажу можно определить неизвестную частоту по известной или определить соотношение частот складываемых колебаний.





$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi / 2$$

$p / k = 1 / 2$

$p / k = 2 / 3$