

Прхождение частицы через потенциальный барьер

Гармонический осциллятор

Линейным (одномерным) гармоническим осциллятором

называется частица с массой m , которая колеблется с собственной циклической частотой ω_0 вдоль некоторой оси ox под действием квазиупругой силы $F = -kx$.

Потенциальная энергия гармонического осциллятора

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}.$$

Потенциальная энергия гармонического осциллятора

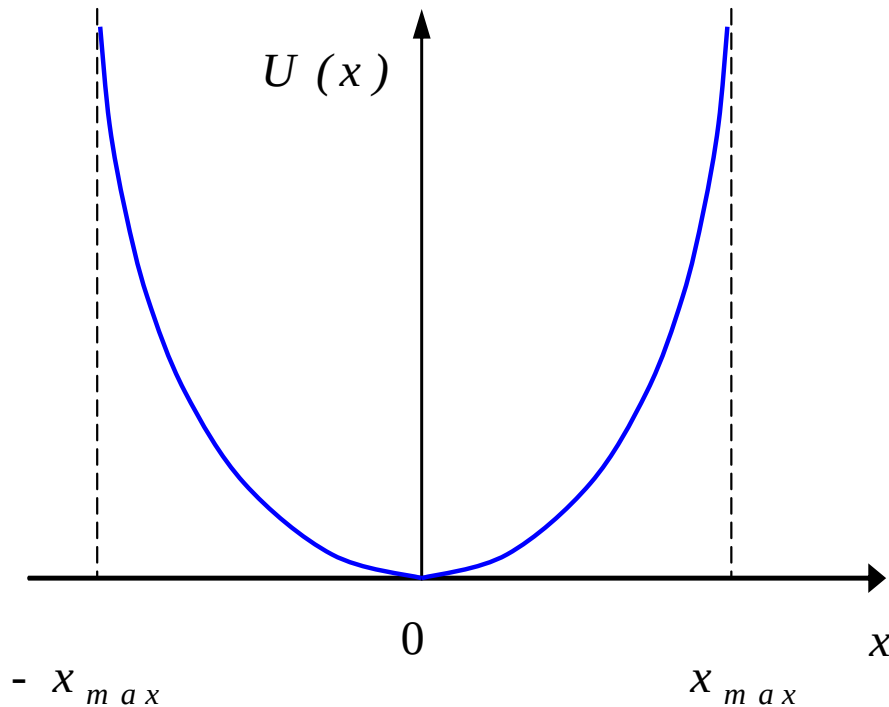
$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi).$$

$$F = ma = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0^2 x \Rightarrow$$

$$U = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}.$$

● *Классический осциллятор.* $U(x) = \frac{kx^2}{2}$



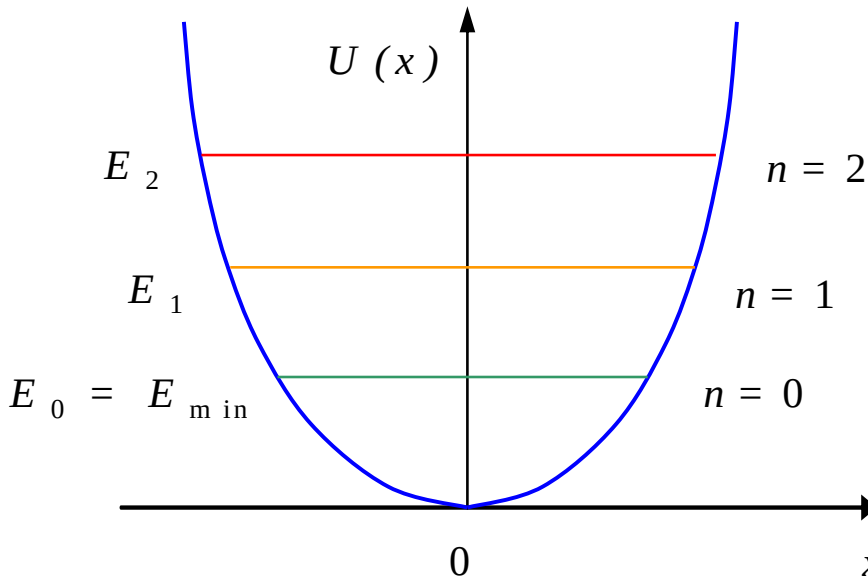
При $\pm x_{max}$ полная энергия $E = U$;
 $E_k = 0$.

Следовательно,
частица не может
выйти за пределы
области $[-x_{max}; +x_{max}]$
и находится в
потенциальной яме.

● Квантовый осциллятор

описывается уравнением
Шредингера
(стационарным уравнением
Шредингера

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

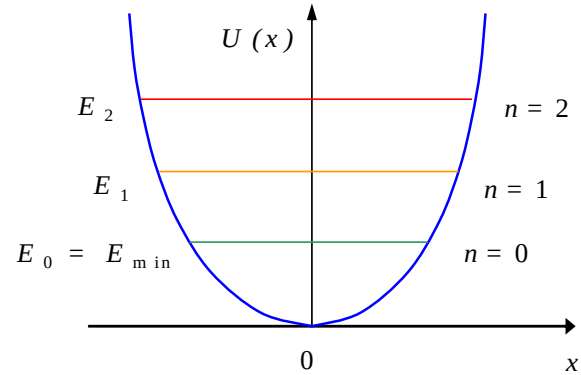


$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0. (1)$$

Это уравнение имеет
решение только при

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad (2), \quad \text{т.е. энергия квантуется.}$$

Квантовый осциллятор



$E_0 = E_{\min} = \frac{\hbar\omega_0}{2}$ — энергия нулевых колебаний.

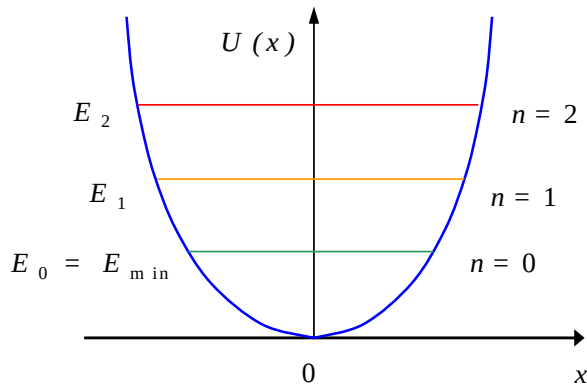
Решением уравнения (1) являются *собственные волновые функции* ψ_n .

Наличие $E_{\min}$ показывает, что квантовая частица не может находиться на дне потенциальной ямы, т.е. её энергия не равна нулю даже при $T = 0$, т.к. на дне ямы импульс частицы $p = 0$ и, соответственно, *неопределённость импульса* $\Delta p = 0$. Следовательно, *неопределённость координаты* $\Delta x \rightarrow \infty$, что противоречит факту нахождения частицы в яме.

Квантовый осциллятор

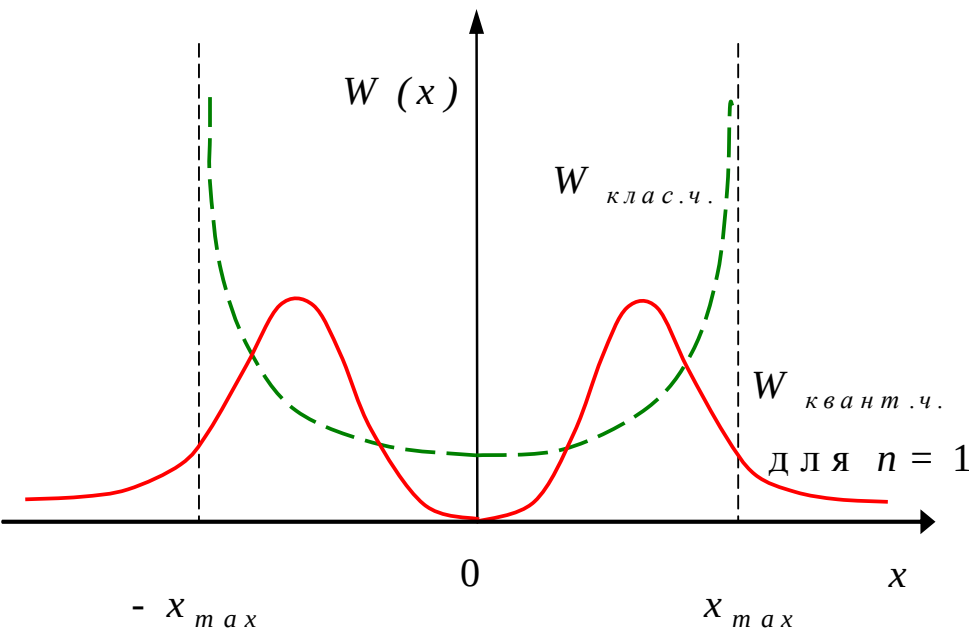
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad (2),$$

Из уравнения (2) следует, что расстояние между соседними энергетическими уровнями одинаково:

$$\Delta E = \hbar \omega_0.$$


Вероятность обнаружить квантовый линейный осциллятор в области от x до $x + dx$:

$$W(x) = \int_x^{x+dx} |\psi_n|^2 dx.$$

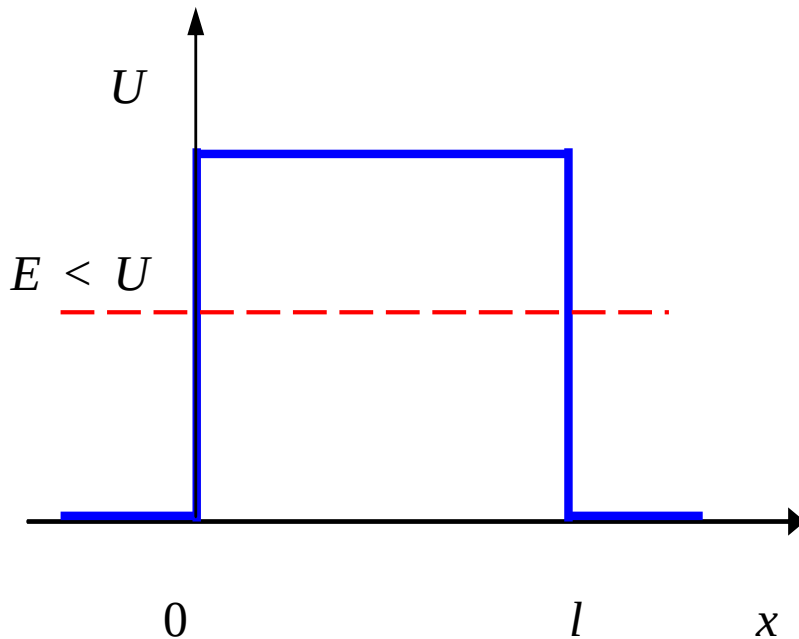


$W_{\text{клас.ч.}}$ — вероятность обнаружить классическую частицу, которая не может быть за пределами $\pm x_{\text{max}}$.

$W_{\text{квант.ч.}}$ — вероятность обнаружить квантовую частицу. Может быть за пределами классически дозированной области, что объясняет возможность прохождения микрочастиц сквозь пот. барьер.

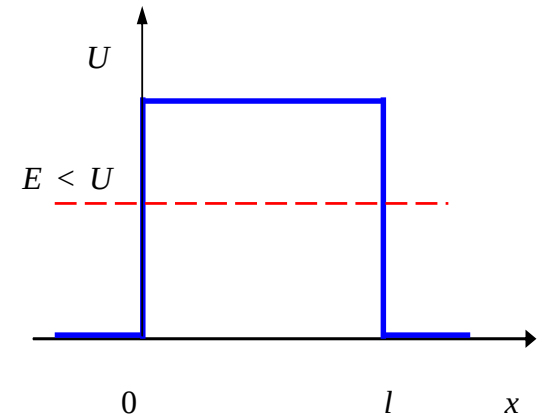
Туннельный эффект

Рассмотрим движение частицы вдоль оси x , на пути которой потенциальный барьер прямоугольной формы



$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x > l. \end{cases}$$

- *Классическая частица.*



При $E > U$ пройдёт над барьером.

При $E < U$ отразится от него.

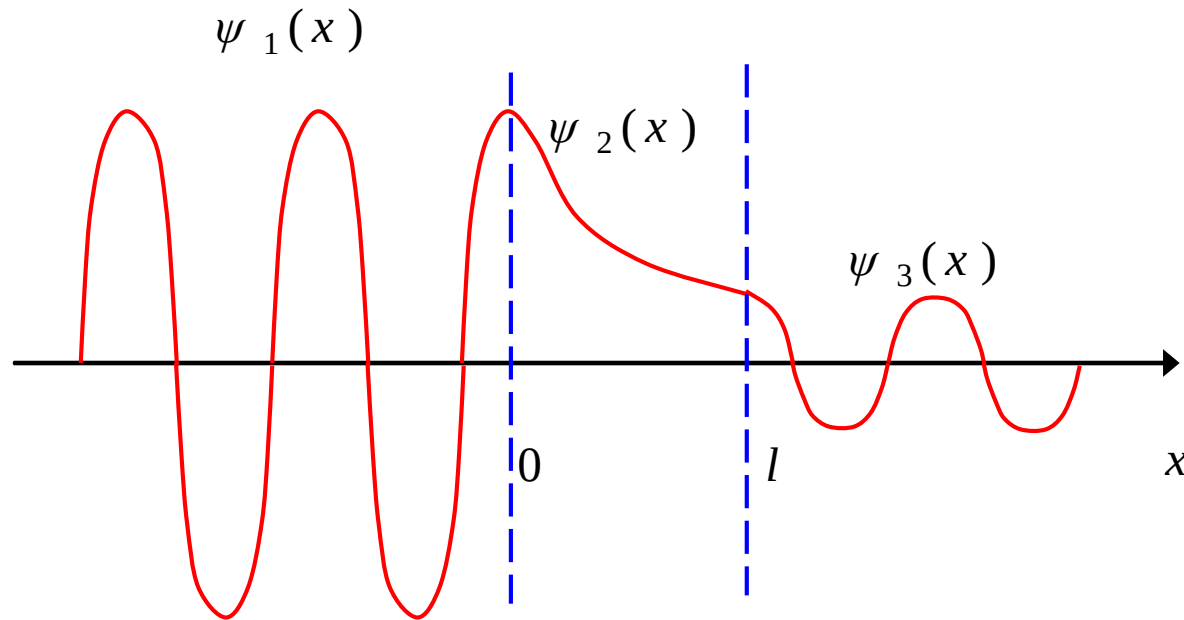
- *Микрочастица.*

При $E > U$ существует вероятность, что частица отразится от барьера, и будет двигаться в обратную сторону.

При $E < U$ существует вероятность, что частица окажется в области $x > l$, т.е. пройдёт сквозь барьер.

Туннельный эффект

вытекает из решения уравнения Шредингера, которое для разных областей дает вид ψ -функции, качественно показанной на рисунке.



ψ_1 — волна де Бройля с частотой f и амплитудой A_1 . $\psi_2 \neq 0$.

ψ_3 — волна де Бройля с амплитудой $A_3 < A_1$ но с той же частотой f .

Коэффициент прозрачности потенциального барьера – отношение плотности потока прошедших частиц к плотности потока падающих частиц:

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}.$$

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} \cdot l\right),$$

U – высота потенциального барьера,

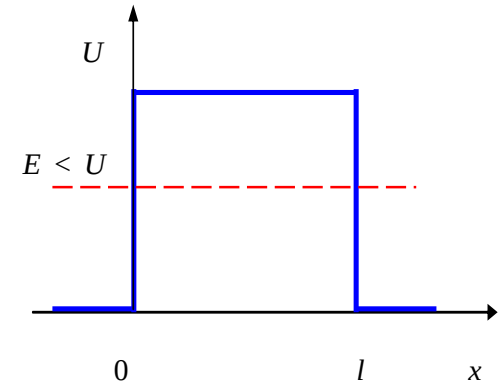
E – энергия частицы,

l – ширина барьера,

D_0 – постоянная ~ 1 ,

m – масса покоя частицы.

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} \cdot l\right),$$



Чем больше m , $(U - E)$, l , тем меньше
вероятность прохождения частицы сквозь
барьер.

Объяснение туннельного эффекта из соотношения неопределённости $\Delta x \cdot \Delta p \geq h$.

Неопределённость импульса на отрезке

$$\Delta x = l : \Delta p > \frac{h}{l} \Rightarrow$$

Разброс кинетической энергии $\Delta E = \frac{\Delta p^2}{2m}$
может оказаться настолько большим, что
полная энергия частицы E окажется $> U$.