

Элементы квантовой механики

Гипотеза де Бройля.

**Соотношение
неопределённости**

Физика элементарных частиц, атомов, молекул и их коллективов, в частности, кристаллов, изучается в *квантовой механике*.

Объекты микромира, изучаемые квантовой механикой, имеют линейные размеры порядка $10^{-6} \div 10^{-13}$ см.

В основе квантовой механики лежат представления:

- Планка о дискретном характере изменения энергии атомов;
- Эйнштейна о фотонах;
- данные о квантованности некоторых физических величин (p , E), характеризующих в определённых условиях состояния частиц микромира.

Гипотеза де Бройля

Гипотеза об универсальности корпускулярно-волнового дуализма.

- *Движущийся электрон.*

Электрон обладает волновыми свойствами по аналогии того, что световые волны представляют собой поток фотонов.

Гипотеза де Бройля

- *Движущаяся микрочастица.*

Каждому микрообъекту свойственны

- корпускулярные характеристики: p , E ,
- волновые характеристики: ν , λ , которые связаны соотношениями

$$E = h\nu; \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{такими же, как и для фотонов.}$$

Движущаяся частица описывается волновым процессом с длиной волны λ , даже если она обладает массой покоя. Необходимо, чтобы она обладала импульсом $p = mv$.

Формула де Бройля: $\lambda = \frac{h}{p}$, h – постоянная Планка.

Другой вид: $\vec{p} = \frac{h}{2\pi} \vec{k} = \hbar \vec{k}$, $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$ –
волновой вектор,

$\vec{n}$ – единичный вектор в направлении
распространения волны.

Волны де Бройля – волны связанные с
движущейся частицей.

У макроскопических тел волновые свойства не
проявляются, т.к. $p \gg 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$.

Пример: $m = 1g$; $v = 1 \frac{m}{c} \Rightarrow \lambda = 6,62 \cdot 10^{-31} m$ –
вне доступной области наблюдения.

Гипотеза де Бройля

- Электрон находится на n -й орбите атома, имеет скорость v_n , момент импульса

$L_n = mv_n r_n = n\hbar$ и обладает длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_n} = \frac{h}{\frac{n\hbar}{r_n}} = \frac{hr_n}{n\frac{h}{2\pi}} = \frac{2\pi r_n}{n},$$

т.е. λ укладывается на орбите длиной $l = 2\pi r_n$ целое число раз n . Следовательно, возможно образование стоячей волны.

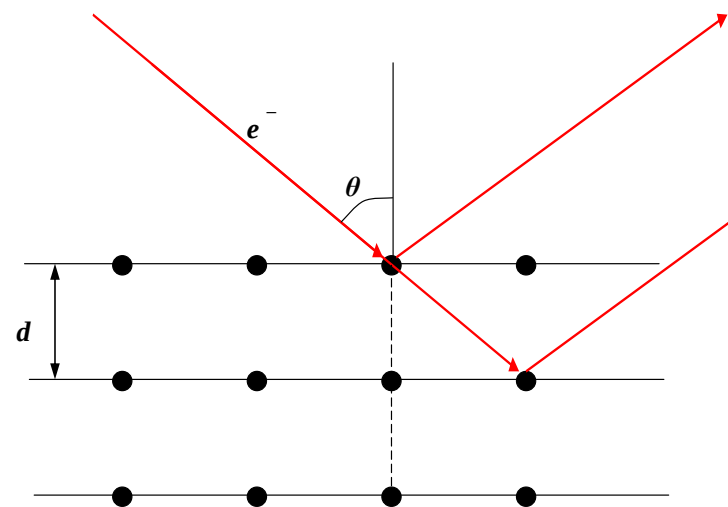
Гипотеза де Бройля

Длина волны де Бройля для частицы массой m , имеющей кинетическую энергию E_k :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}.$$

Экспериментальные подтверждения существования волн де Бройля

- Опыт Дэвиссона и Джермера 1927 г.: опыт по рассеянию пучка электронов от естественной дифракционной решётки кристалла *Ni*.



Рассеянный пучок даёт чёткую дифракционную картину.

Дифракционные максимумы соответствуют формуле Вульфа-Брэггов: $k\lambda = d \sin \theta$,

k – порядок максимума,
 d – постоянная решётки.

Длина волны λ совпадала с λ , вычисленной по формуле для волны де Бройля.

Экспериментальные подтверждения существования волн де Бройля

- **Опыт Тартаковского и Томсона:** дифракционная картина при прохождении пучка быстрых электронов ($E \approx 50$ кэВ) через металлическую фольгу ($d \approx 1$ мкм).
- **Опыт Фабриканта:** дифракционная картина при прохождении слабого электронного пучка (электроны пронизывали фольгу по отдельности). При длительной экспозиции дифракционная картина не отличалась от картины, полученной для пучка электронов.

Экспериментальные подтверждения существования волн де Бройля

- Дифракция нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков.

Во всех случаях дифракционная картина имеет вероятностную закономерность, т.е. электроны (микрочастицы) после рассеяния в плёнке с наибольшей вероятностью попадают в определённые места.

Следовательно, согласно статистическим рассмотрениям: физический смысл волн де Бройля – волны вероятности; квадрат модуля амплитуды этой волны $|A|^2$ – плотность вероятности найти частицу в элементе объёма dV .

- Для микрочастиц свойственна связь полной энергии и частоты ν волн де Бройля: $\mathcal{E} = h\nu$.

Фазовая и групповая скорость волн де Бройля

Рассмотрим частицу массой m свободно движущуюся со скоростью v .

- *Фазовая скорость:*

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} =$$

$$\left(\begin{array}{l} E = \hbar\omega; \\ p = \hbar k, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{array} \right) = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}.$$

$v_{\text{фаз}} > c$ — скорости света в вакууме.

- *Групповая скорость:*

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} =$$

$$\left(E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{2pc^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}} =$$

$$= \frac{pc^2}{E} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v.$$

$$v_{gp} = v_{частицы}.$$

Волны де Бройля испытывают дисперсию.

$$v_{\text{фаз}} = \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}}{p};$$

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = p(\lambda) \Rightarrow v_{\text{фаз}}(\lambda).$$

Соотношение неопределённости

В классической механике: частица движется по определённой траектории так, что в любой момент времени t можно точно определить её координату (x, y, z) и импульс p .

У микрочастицы из-за наличия у неё волновых свойств нельзя строго определить траекторию, понятие «длина волны в данной точке» лишено физического смысла.

Т.к. $p = \frac{h}{\lambda}$, следовательно, микрочастица с определённым импульсом p имеет, обладая λ , неопределённую координату.

Соотношение неопределённости

И наоборот, если микрочастица находится с точным значением координаты, то её импульс полностью неопределён, $\Delta p \rightarrow \infty$.
Т.е. волновые свойства микрочастиц вносят ограничения в возможность применения к этим частицам понятий координаты и импульса в их классическом смысле.

Соотношение неопределённости Гейзенберга для координат и импульса (1927 г.):

микрочастица не может иметь одновременно и определённую координату (x, y, z) и определённую проекцию импульса (p_x, p_y, p_z) , неопределённость этих величин удовлетворяет условию

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h; \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq h; \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq h,$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – интервалы координат, в которых может быть локализована частица, описываемая волной де Бройля, если проекции её импульса на оси координат заключены в интервалах $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$.

Т.е. если частица находится в состоянии с точным значением координаты ($\Delta x = 0$), то в этом состоянии проекция её импульса неопределенна $\Delta p_x \rightarrow \infty$.

Чем более точно определено положение частицы (чем меньше Δx , Δy , Δz), тем менее точно определены значения проекций её импульса (т.е. тем больше Δp_x , Δp_y , Δp_z).

Это не связано с неточностью измерений, а отражает двойственные *корпускулярно-волновые свойства* микрочастиц, т.е. для описания микрочастиц одновременно используются классические характеристики (x, p) и волновые – λ .

Соотношение неопределённости

- Соотношение неопределённости накладывает в квантовой механике определённые ограничения на возможность описания движения частиц по некоторой траектории, т.е. является квантовым ограничением применимости классической механики к микрообъектам.

Соотношение неопределённости

Фактически невозможно одновременно с любой наперёд заданной точностью измерить координату и импульс микрообъекта.

Соотношение неопределённости

Пример: положение электрона, движущегося в атоме, может быть определено с точностью до размеров атома, $\Delta x \sim 10^{-10}$ м.

$$\Delta p_x = m \cdot \Delta v_x \Rightarrow \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{h}{m \cdot \Delta x} \approx 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}} -$$

неопределённость скорости

того же порядка, что и сама скорость v электрона в атоме. И в этом случае нельзя говорить о движении электрона в атоме по определённой траектории.

Траектория электрона в атоме с точно заданной в каждой точке скоростью v не имеет классического смысла.

Соотношение неопределённости

Для описания движения микрочастиц в микромире нельзя пользоваться законами классической механики.

Соотношение неопределённости

- Соотношение неопределённости не вносит ограничений в возможность использования классических понятий координат и импульса для макроскопических тел.

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{h}{m},$$

чем больше масса m тела, тем меньше неопределённость координаты Δx и скорости Δv_x , следовательно, тем с большей точностью можно для этой частицы определить понятие траектория и, соответственно, понятия классической механики.

Т.е. для макротел их волновые свойства не играют роль, и можно пользоваться законами классической механики.

Пример: пылинка $m = 10^{-12}$ кг, линейные размеры 10^{-6} м, точность определения координаты 0,01 её линейных размеров
 $\Rightarrow \Delta x = 10^{-8}$ м.

Неопределённость скорости

$$\Delta v_x = \frac{h}{m \cdot \Delta x} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ м}}{10^{-12} \cdot 10^{-8} \text{ с}} = 6,62 \cdot 10^{-14} \frac{\text{м}}{\text{с}} \ll \text{реальных скоростей частицы.}$$

Следовательно, неопределённость скорости не сказывается при всех скоростях частицы

- Соотношение неопределённости для энергии E и времени t .

Неопределённости энергии ΔE и времени Δt удовлетворяют условию $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$,

ΔE – неопределённость энергии некоторого состояния системы,

Δt – промежуток времен, в течение которого это состояние существует.

Следовательно, система, имеющая среднее время жизни Δt , не может быть охарактеризована определенным значением энергии E . Разброс $\Delta E = \frac{h}{\Delta t}$ возрастает с уменьшением Δt .