2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. Уравнение колебательного контура

- **Когда происходят электрические колебания, ток в цепи изменяется со временем.**
- **Ток оказывается не одинаковым на разных участках цепи (из-за того что электромагнитные возмущения распространяются с конечной скоростью).**
- **Будем считать ток квазистационарным - одинаковым на всех участках цепи. Период колебаний >> времени распространения электромагнитных возмущений.**

Условие квазистационарности

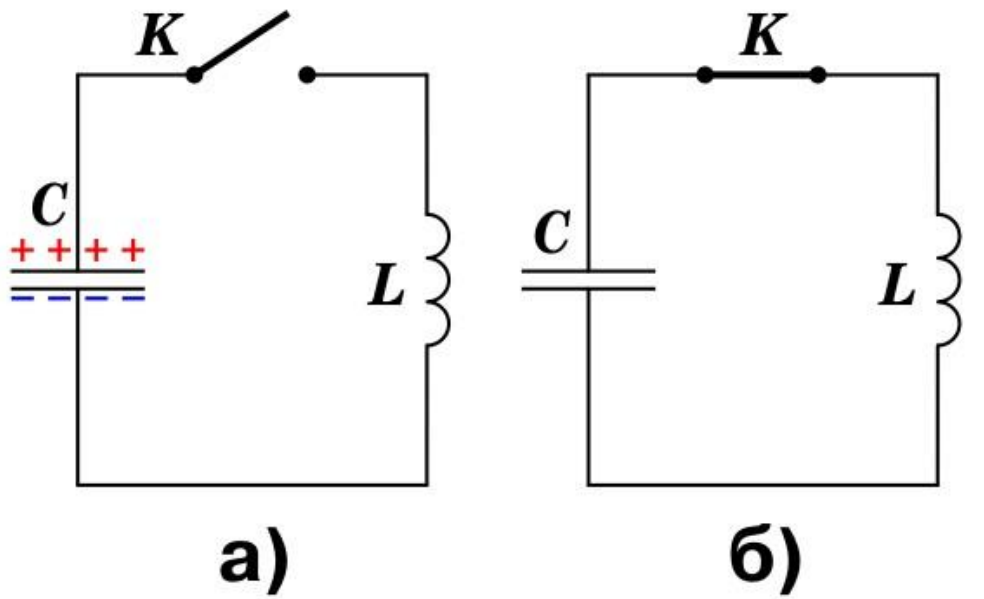
$$\tau = l/c << T$$

Если ν= 50 Гц, $l = c\tau \sim 100$ км

Будем считать, что условие квази-стационароности всегда выполняется

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

В цепи, содержащей катушку индуктивности *L* и конденсатор емкости *C*, могут возникнуть электрические колебания. Такую цепь называют колебательным контуром.



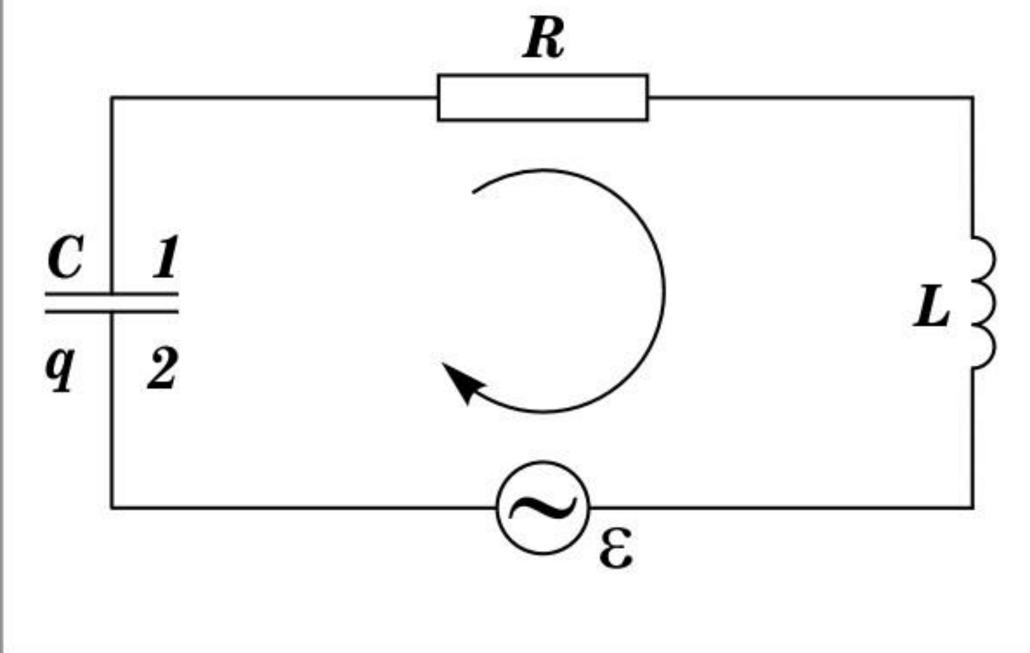
- **Верхняя обкладка заряжена положительно. Энергия контура сосредоточена в конденсаторе (рис. а).**
- **Замкнем ключ. В цепи потечет ток. Энергия электрического поля уменьшается, энергия магнитного поля увеличивается.**

- **Когда конденсатор полностью разрядится ток в цепи достигнет максимума (рис. б).**
- **Ток начинает постепенно убывать, т.к. его поддерживает ЭДС самоиндукции.**

- Ток будет перезаряжать конденсатор.
- Ток прекратится, когда конденсатор перезарядится. Заряд на конденсаторе достигнет максимума. С этого момента конденсатор начнет перезаряжаться.

Если R=0, то в контуре будут совершаться строго периодические колебания.

Если $R \neq 0$, то кроме процесса преобразования энергии электрического поля в энергию магнитного поля будет происходить преобразование электромагнитной энергии в теплоту.



Получим уравнение колебательного контура.

Закон Ома

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s + \mathcal{E}$$

φ **– потенциал обкладки конденсатора,** $\boldsymbol{\mathcal{E}_s}$ **– ЭДС самоиндукции.**

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}$$

$$RI = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + \mathcal{E}$$

Уравнение колебательного контура

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=\frac{\varepsilon}{L}$$

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=\frac{\varepsilon}{L}$$

$$\beta=\frac{R}{2L},\quad \omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

ω_0 - **собственная частота контура,** β – **коэффициент затухания**

2.2. Свободные электрические колебания

Если в контуре нет внешней ЭДС ε**=0 и активное сопротивление** R**=0, то колебания в таком контуре являются свободными незатухающими.**

$$\ddot{q}+\omega_0^2 q=0$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\qquad T_0=2\pi\sqrt{LC}$$

$$q=q_m\cos(\omega_0 t+\alpha)$$

$$I=dq/dt=I_m\cos(\omega_0 t+\alpha+\pi/2)$$

$$U_C=q/C=U_m\cos(\omega_0 t+\alpha)$$

При свободных незатухающих колебаниях ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

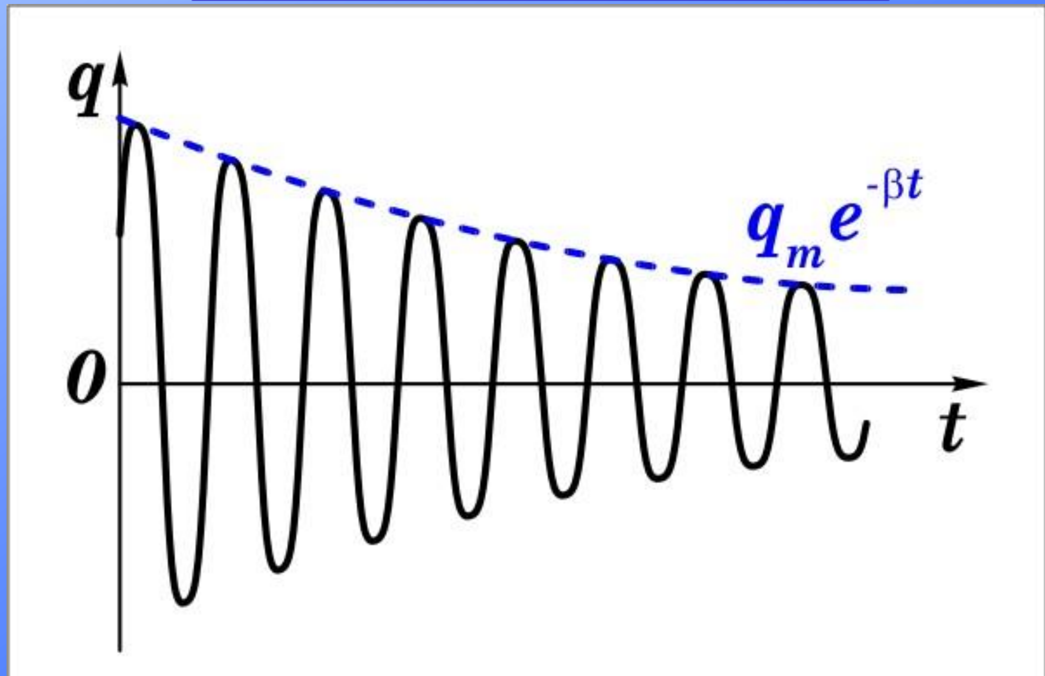
СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Каждый реальный контур обладает активным сопротивлением, и энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется на нагревание. Свободные колебания будут затухающими.

Уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega_з t + \alpha)$$



Частота затухающих колебаний

$$\omega_з = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$U_C = q/C = U_m e^{-\beta t}\cos(\omega_з t + \alpha)$$

$$I = I_m e^{-\beta t}\cos(\omega_з t + \alpha + \delta)$$

$$\pi/2 < \delta < \pi$$

При наличии активного сопротивления *R* ток в контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на $\pi/2$. При $R = 0$ опережение $\delta = \pi/2$.

Затухающие колебания на экране осциллографа.
http://www.youtube.com/watch?feature=endscreen&NR=1&v=dmeyXD5zIjU

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАТУХАНИЯ ($\beta << \omega_0$)

Логарифмический декремент

$$\lambda = \beta T \approx \frac{\beta 2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi R\sqrt{LC}}{2L} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Добротность

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

При $\beta \geq \omega_0$ колебания будут апериодическими. Активное сопротивление при котором наступает апериодический процесс, называют критическим.

$$\beta = \omega_0; \quad \frac{R_{кр}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

2.3. Вынужденные электрические колебания

Пусть в контур включена внешняя переменная ЭДС.

Уравнение колебательного контура:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L}\cos\omega t$$

Решение

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi)$$

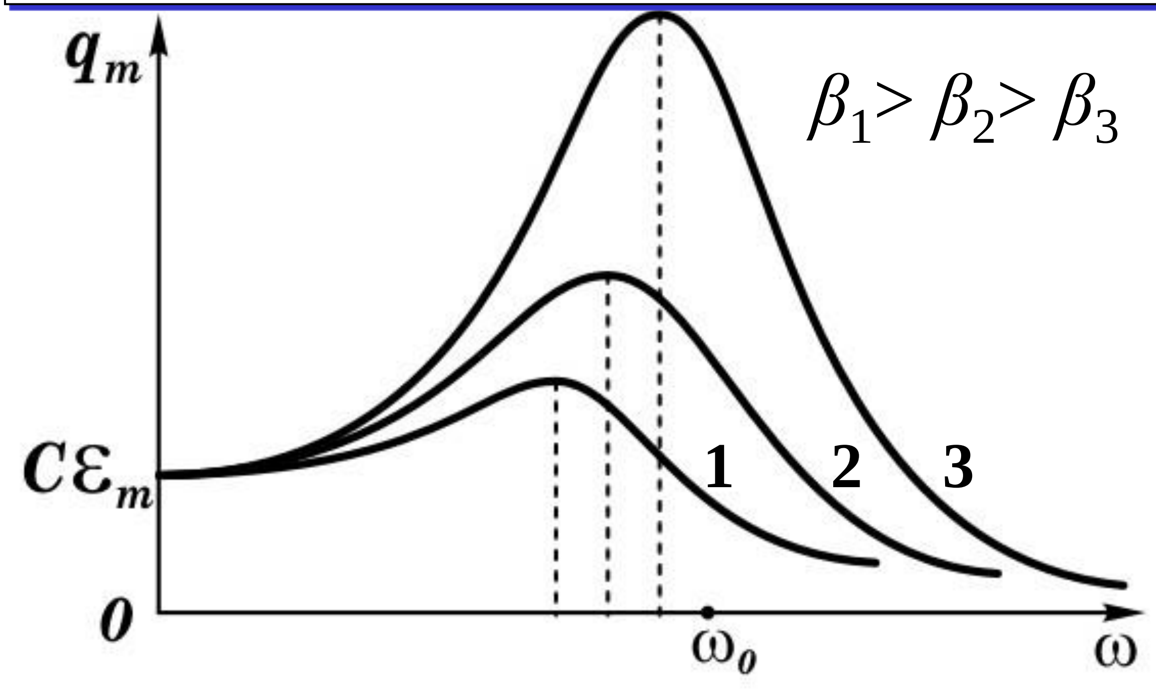
(ψ – разность фаз между колебаниями ЭДС и заряда)

$$A=\frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$q_m=\frac{\varepsilon_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\omega_{q рез}=\omega_{C рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

Резонансные кривые для заряда (напряжения на конденсаторе)



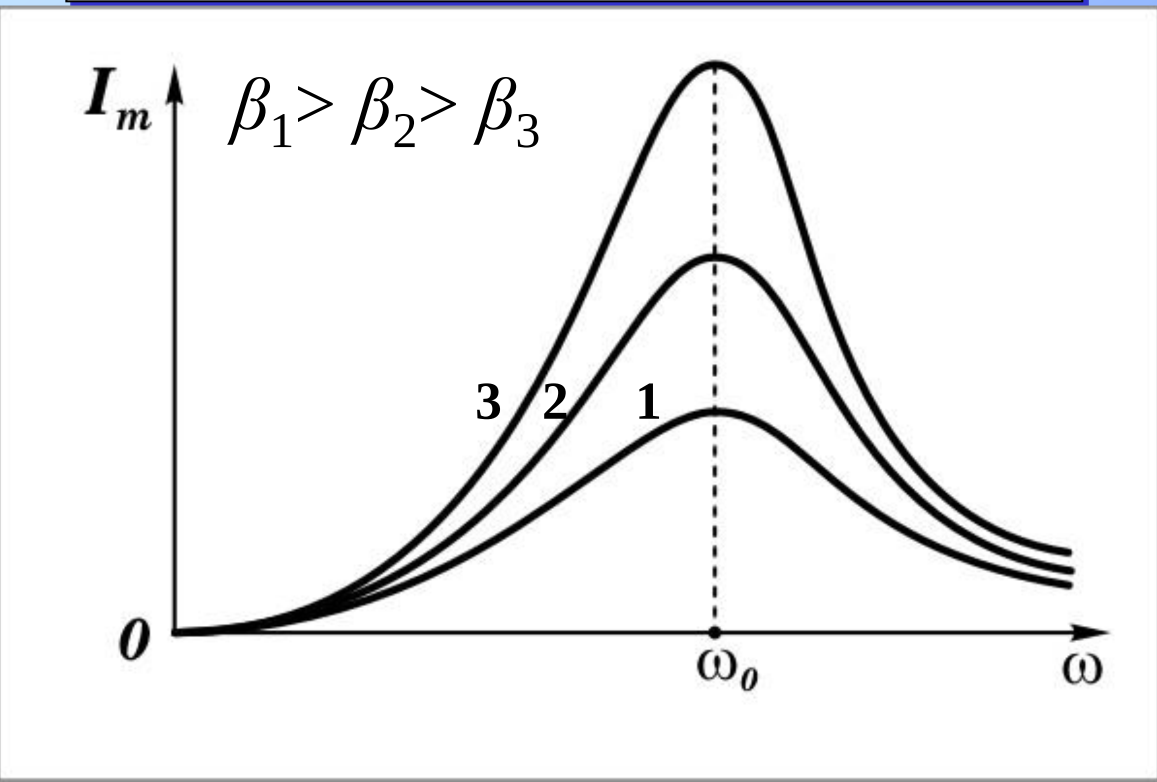
$$I = dq/dt = q_m \omega \cos(\omega t - \psi + \pi/2) = I_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2)$$

Амплитуда силы тока

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Резонансные кривые
(резонанс тока)

$$\omega_{I рез} = \omega_0$$



Резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура.

Резонансные кривые для напряжений

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\mathcal{E}_m\cos(\omega t)$$

$$U_L+U_R+U_C=\mathcal{E}_m\cos(\omega t)$$

U_L, U_R, U_C — **Падения напряжения на катушке, сопротивлении и конденсаторе, соответственно.**

$$U_C=\frac{q}{C}=\frac{q_m}{C}\cos(\omega t-\psi)=U_{Cm}\cos(\omega t-\psi)$$

$$U_R=IR=U_{Rm}\cos(\omega t-\psi+\pi/2)$$

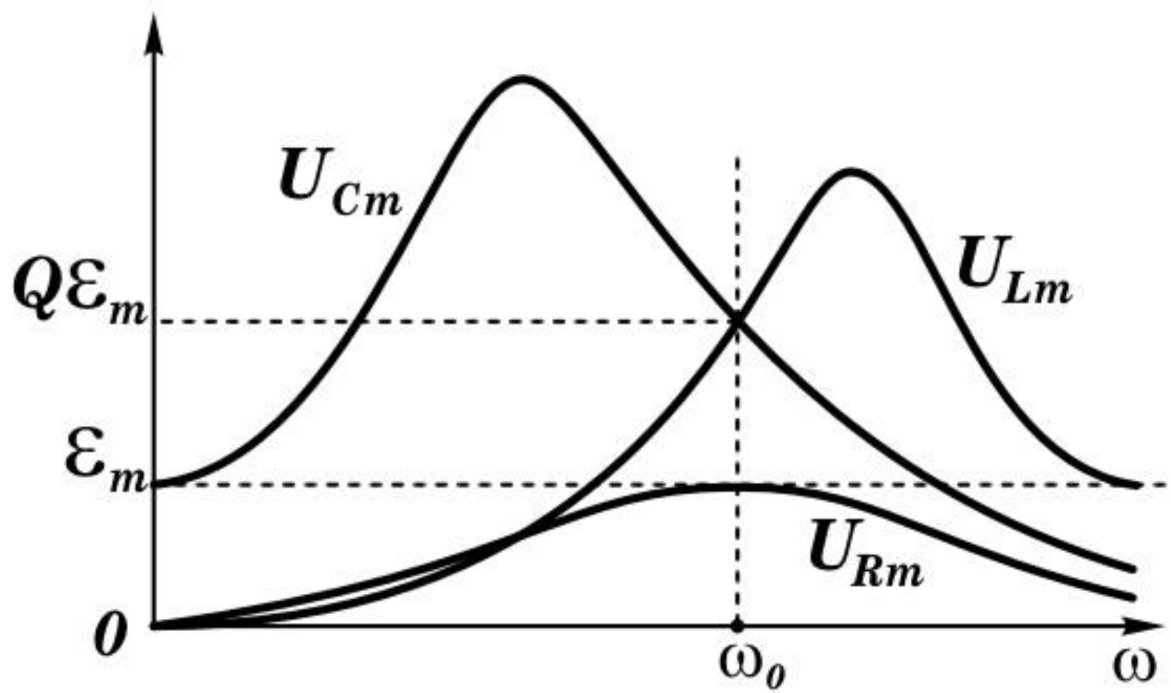
$$U_L=L\,dI/dt=LI_m\omega\cos(\omega t-\psi+\pi)$$

$$U_{Lm} = \omega L I_m = \frac{\omega L \varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\omega_{L\,рез} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2(\beta/\omega_0)^2}}$$

Резонансные кривые

(резонанс напряжений)



Явление резонанса в этом случае – это возбуждение сильных колебаний при частоте внешней ЭДС близкой к собственной частоте колебательного контура.