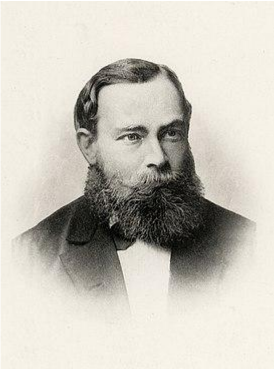
Университетские субботы-2021. Информатика.

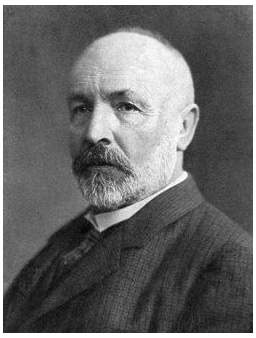
Юлия Борисовна Буркатовская, ОИТ

Математическая логика

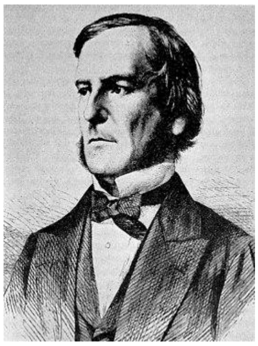
- Джордж Буль (Булева алгебра)
- Георг Кантор (теория множеств)
- Готлоб Фреге (логика высказываний и логика предикатов)



Фридрих Людвиг Готлоб Фреге (1848—1925 гг.)



Георг Кантор (1845–1918 гг.)



Джордж Буль (1815–1864 гг.)

«Многие люди спрашивают меня, что такое математическая логика и какова ее цель. К сожалению, ни одно простое определение не может дать даже самое отдаленное понимание математической логики. Только после погружения в этот предмет его сущность становится очевидной. Что касается цели, то существует множество целей, но, снова, можно понять их только после некоторого изучения предмета. Тем не менее есть одна цель, и ее я могу сказать вам прямо сейчас: сделать точным понятие доказательства.»

Рэймонд Смаллиан.

Алгебра логики, или **Булева алгебра**

Высказывания:

- могут быть истинными или ложными (0 или 1);
- связываются между собой операторами (и, или, если-то…);
- нет кванторов (для любого, существует…).

Пример. Если идет дождь, то земля мокрая.

Когда истинно?

Функции алгебры логики

Обозначения: 0−ложь, 1−истина.

Элементарные функции – зависящие не более чем от двух переменных.

Таблица истинности – каждому набору значений переменных сопоставляется значение функции.

Функции, не зависящие от переменных: *константа 0 и константа 1*.

Функции, зависящие от одной переменной: *тождественная функция (x)* и *инверсия (не x)*.

x	$\neg x$
0	1
1	0

Функции, зависящие от двух переменных: *конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, сумма по модулю два.*

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \equiv y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0
		x и y	*x или y*	*если x, то y*	*x эквивалентно y*	*либо x, либо y*
		конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквивалентность	сумма по модулю два

Пример конъюнкции и суммы по модулю два:

Кролик: *Вы что будете – мёд или варенье?*

Винни-Пух: *И того и другого побольше. А хлеба можно совсем не давать.*

Пример импликации: ***если*** два вписанных в окружность угла опираются на ее диаметр, ***то*** они равны. (Углы, которые не опираются на диаметр, также могут быть равны!)

Пример эквивалентности: квадратное уравнение имеет два действительных корня ***тогда и только тогда***, когда его дискриминант больше нуля.

Более удобная запись.

$\neg x$	$x\&y$
$\bar{x}$	xy

Теория множеств

Неформально говоря, любое *множество* есть просто совокупность (собрание) некоторых объектов (элементов).

Два множества считаются *равными*, если и только если они включают одни и те же элементы.

Обозначения:

- $A = B$ (множества A и B равны);
- $A \neq B$ (множества A и B не равны).

Примеры.

- $A = \{2,4,6,8\}, B = \{4,2,8,6\}: A = B$
- $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,3,5\}: A \neq B$
- $A = \{2k | k \in N\}, B = \{x + y | x = 2k + 1, y = 2m - 1, k \in N, m \in N\}: ?$

Множество A является *подмножеством* множества B (B *содержит* A), если все элементы A принадлежат B.

Обозначения:

- $A \subset B$ (множества A и B не могут быть равны);
- $A \subseteq B$ (множества A и B могут быть равны).

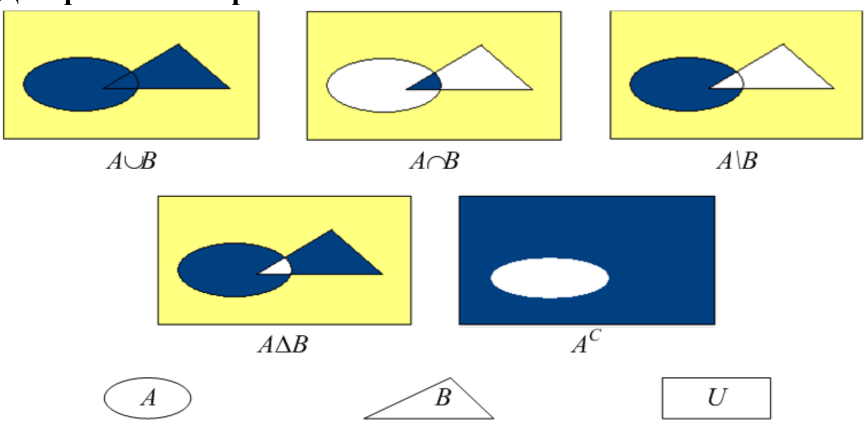
Примеры.

- $A = \{2,4,6,8\}, B = \{4,2,8,6\}: A \subseteq B$
- $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,5\}: A \subset B, A \subseteq B$
- $A = \{2k | k \in N\}, B = \{x + y | x = 2k + 1, y = 2m + 1, k \in N, m \in N\}: ?$

Операции над множествами

- *Объединение* содержит элементы, принадлежащие хотя бы одному множеству: $A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}$.
- *Пересечение* содержит элементы, которые принадлежат обоим множествам: $A \cap B = \{x: (x \in A) \& (x \in B)\}$.
- *Разность A и B* содержит элементы, которые принадлежат A и не принадлежат B: $A \backslash B = \{x: (x \in A) \& (x \notin B)\}$.
- *Симметрическая разность* содержит элементы, которые принадлежат ровно одному множеству: $A \Delta B = \{x: (x \in A) \oplus (x \in B)\}$.
- Дополнение содержит элементы, не принадлежащие A, из некоторого универсального множества U: $A \subseteq U$: $A^C = \{x \notin A\}$.

Диаграммы Эйлера-Венна



Примеры. $A = \{2,3,5,7\}, B = \{1,3,5,7,9\}, U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

- $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9\}$
- $A \cap B = \{3,5,7\}$
- $A \backslash B = \{2\}, B \backslash A = \{1,9\}$
- $A \Delta B = \{1,2,9\}$
- $A^C = \{1,4,6,8\}, B^C = \{2,4,6,8\}$

Логика предикатов

Предикат – высказывание, которое может быть истинным или ложным, в зависимости от переменной.

Пример. $P(x)$:{$x -$ четное число}; $P(2)$ истина, $P(3)$ ложь (обозначение $\neg P(3)$).

Кванторы. $\exists$ – существует, $\forall-$ любой, для любого.

Кванторы в сочетании с предикатами порождают *высказывания*, в которых уже нет зависимости от переменной.

Пример. $\exists x \in N. P(x)$ высказывание истинно (существует натуральное число x, являющееся четным); $\forall x \in N. P(x)$ высказывание ложно (любое натуральное число x является четным).

Если учиться и не думать — запутаешься, а если думать и не учиться — впадешь в сомнение (Конфуций. Лунь юй).

Булева алгебра:

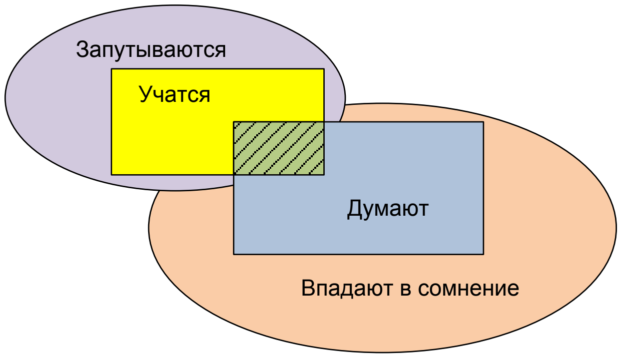
- *A: «Человек учится».*
- *B: «Человек думает».*
- *C: «Человек запутывается».*
- *D: «Человек впадает в сомнение».*

Формула*:* $(A\&\neg B \to C)\&(\neg A\&B \to D)$, или $(A\bar{B} \to C)(\bar{A}B \to D)$

Логика предикатов:

- *Универсум: люди.*
- *Предикат A(x)⇔«человек x учится».*
- *Предикат B(x)⇔«человек x думает».*
- *Предикат C(x)⇔«человек x запутывается».*
- *Предикат D(x)⇔«человек x впадает в сомнение».*
- *Формула:* $\forall x((A(x)\ \&\ \neg B(x)) \to C(x))\ \&\ \forall x((\neg A(x)\ \&\ B(x)) \to D(x))$.

Теория множеств:



Законы алгебры логики

Законы коммутативности	Законы 0 и 1	
$xy = yx$	$x0 = 0$	$x1 = x$
$x \vee y = y \vee x$	$x \vee 0 = x$	$x \vee 1 = 1$
$x \oplus y = y \oplus x$	$x \oplus 0 = x$	$x \oplus 1 = \bar{x}$
Законы ассоциативности	$x \equiv 0 = \bar{x}$	$x \equiv 1 = x$
$(xy)z = x(yz) = xyz$	$x \to 0 = \bar{x}$	$x \to 1 = 1$
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$	$0 \to x = 1$	$1 \to x = x$
$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$	Законы Де Моргана	
Законы дистрибутивности	$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$	
$x(y \vee z) = xy \vee xz$	$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}$	
$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$	Законы поглощения	
$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$	$x \vee xy = x$	
Закон двойного отрицания	$x(x \vee y) = x$	
$\bar{\bar{x}} = x$	Законы склеивания	
Закон противоречия	$x\bar{y} \vee xy = x$	
$x\bar{x} = 0$	$(x \vee \bar{y})(x \vee y) = x$	
Закон исключенного третьего	Законы идемпотентности	
$x \vee \bar{x} = 1$	$x \vee x = x$	$xx = x$
Приведение к дизъюнктивной нормальной форме		
$x \to y = \bar{x} \vee y$		
$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$		
$x \equiv y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$		

Элементарная конъюнкция – конъюнкция переменных, в которой каждая переменная встречается не более одного раза (с инверсией или без).

Дизъюнктивная нормальная форма – дизъюнкция различных элементарных конъюнкций, в том числе дизъюнкция переменных.

Конъюнкция принимает значение 1, если все входящие в нее множители принимают значение 1. Конъюнкция принимает значение 0, если хотя бы один ее множитель равен 0.

Дизъюнкция принимает значение 0, если все входящие в нее слагаемые принимают значение 0. Дизъюнкция принимает значение 1, если все хотя бы одно ее слагаемое равно 1.

Импликация равна нулю на единственном наборе 10. Из истины ложь не следует. Из лжи следует все, истина следует из чего угодно.

Задача 15. Множества из натуральных чисел

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \to (x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

Решение

1. Перейти к дизъюнктивной форме $a \to b = \bar{a} \vee b$.

Обозначим $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

$$\neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \vee \big(\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \to (x \in A)\big) = 1$$

$$(x \notin B) \vee \big((x \notin C) \to (x \in A)\big) = 1$$

$$(x \notin B) \vee (x \in C) \vee (x \in A) = 1$$

2. Нас интересует случай:

$$\begin{cases} (x \notin B) \vee (x \in C) = 0 \\ (x \in A) = 1 \end{cases}$$

(Если 1 за счет выражений, в которых нет A, то A неважно)

3. Система:

$$\begin{cases} (x \notin B) = 0 \\ (x \in C) = 0 \end{cases}$$

То есть

$$\begin{cases} (x \in B) = 1 \\ (x \notin C) = 1 \end{cases}$$

Вспоминая обозначения:

$$\begin{cases} x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ x \notin \{3, 6, 9, 12, 15\} \end{cases}$$

Это верно для $x \in \{1, 2, 4, 5\}$.

4. Для них должно быть $(x \in A) = 1$, А - наименьшее, $A = \{1,2,4,5\}$.

Ответ: 12.

Примечание. Внимательно читаем условия, то сумму просят, то произведение, то количество элементов, то еще что-нибудь. Изобретательные люди.

Задача 15. Отрезки.

Пример 1. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [44;\ 49]$ и $Q = [28;\ 53]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$((x \in A) \to (x \in P)\ ) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной х.

Решение.

1. Переходим к дизъюнктивной форме

$$\big((x \in A) \to (x \in P)\big) \vee (x \in Q) = 1$$

$$(x \notin A) \vee (x \in P) \vee (x \in Q) = 1$$

Или проще

$$\bar{A} \vee P \vee Q = 1$$

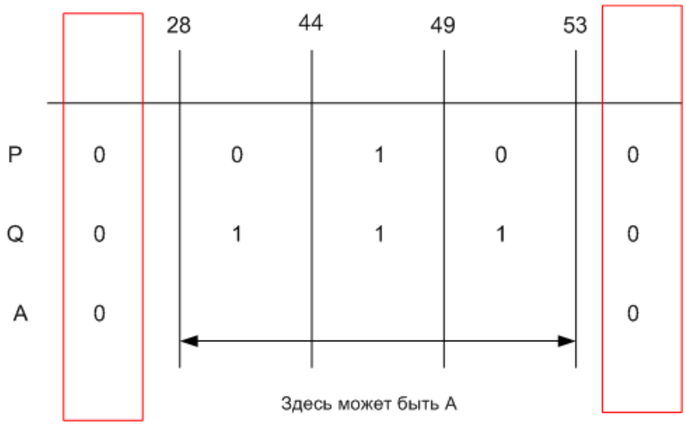
2. Нас интересует случай

$$\begin{cases} P \vee Q = 0 \\ \bar{A} = 1 \end{cases}$$

3. Система

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

4. Удобно геометрически



5. Так как A - максимальный, это [28,53]

Ответ. 25

Пример 2. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [12; 26]$ и $Q = [30; 53]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка А, что формула

$$((x \in A) \to (x \in P)\,) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

1. Переходим к дизъюнктивной форме

$$\big((x \in A) \to (x \in P)\big) \vee (x \in Q) = 1$$

$$(x \notin A) \vee (x \in P) \vee (x \in Q) = 1$$

Или проще

$$\bar{A} \vee P \vee Q = 1$$

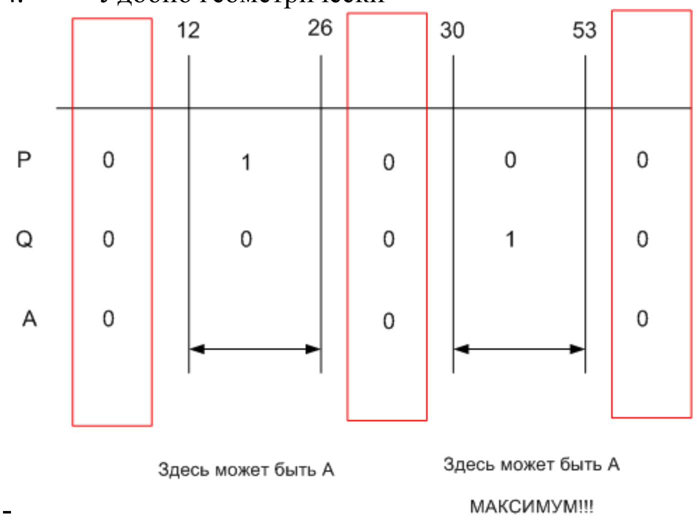
2. Нас интересует случай

$$\begin{cases} P \vee Q = 0 \\ \bar{A} = 1 \end{cases}$$

3. Система

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

4. Удобно геометрически



-

5. A - максимальный ОТРЕЗОК, т.е. [30,53]

Ответ: 23

Пример 3.

На числовой прямой даны два отрезка: P = [5; 30] и Q = [14; 23]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)\ ) \to (x \notin A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

1. Переходим к дизъюнктивной форме

$$\big((x \in P) \equiv (x \in Q)\big) \to (x \notin A) = 1$$

$$\overline{\big((x \in P) \equiv (x \in Q)\big)} \vee (x \notin A) = 1$$

Или проще

$$\overline{(P \equiv Q)} \vee \bar{A} = 1$$

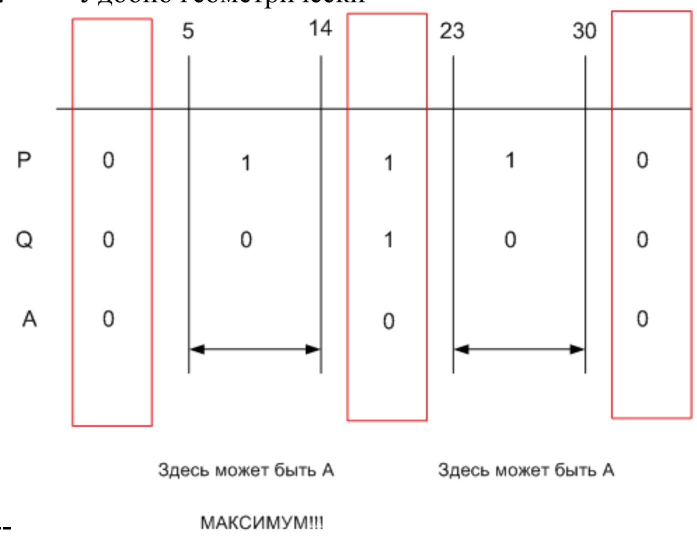
2. Нас интересует случай

$$\begin{cases} \overline{(P \equiv Q)} = 0 \\ \bar{A} = 1 \end{cases}$$

3. Система

$$\begin{cases} (P \equiv Q) = 1 \\ A = 0 \end{cases}$$

4. Удобно геометрически



---

5. A - максимальный ОТРЕЗОК, т.е. [5,14]

Ответ: 9

Задача 15. Делимость.

Пример 1. Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg ДЕЛ(x, A) \wedge ДЕЛ(x, 6)) \to \neg ДЕЛ(x, 3)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

1. Более удобные обозначения

$$\left(\overline{(x|A)} \wedge (x|6)\right) \to \overline{(x|3)} = 1$$

2. Перейдем к дизъюнктивной форме

$$\overline{\left(\overline{(x|A)} \wedge (x|6)\right)} \vee \overline{(x|3)} = 1$$

3. Правило де Моргана

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$
$$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$$

Упрощаем

$$(x|A) \vee \overline{(x|6)} \vee \overline{(x|3)} = 1$$

4. Нас интересует случай

$$\begin{cases} \overline{(x|6)} \vee \overline{(x|3)} = 0 \\ (x|A) = 1 \end{cases}$$

5. Система

$$\begin{cases} (x|6) = 1 \\ (x|3) = 1 \\ (x|A) = 1 \end{cases}$$

То есть все числа, кратные 6 и 3, должны быть кратны A. A - максимально (иначе, не решая уравнение вообще, можно взять A =1). Наименьшее число, кратное 3 и 6, это 6, оно должно быть кратно A, т.е., A – делитель 6. Наибольший такой делитель это 6.

Ответ. 6.

Пример 2.

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$ДЕЛ(x, 18) \to (\neg ДЕЛ(x, A) \to \neg ДЕЛ(x, 12))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение

1. Перейдем к дизъюнктивной форме

$$\overline{(x|18)} \vee (x|A) \vee \overline{(x|12)} = 1$$

2. Нас интересует случай

$$\begin{cases} \overline{(x|18)} \vee \overline{(x|12)} = 0 \\ (x|A) = 1 \end{cases}$$

3. Система

$$\begin{cases} (x|18) = 1 \\ (x|12) = 1 \\ (x|A) = 1 \end{cases}$$

4. Все числа, кратные 12 и 18 одновременно, кратны также и A. НОК(12,18)=36, т.е., все числе, кратные 12 и 18 одновременно, кратны 36. То есть все числа, кратные 36, кратны A. A - делитель 36, нас интересует максимальный делитель.

Ответ 36.

Задача 15. Поразрядная конъюнкция.

Пример 1. Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$(x\&56 \neq 0) \rightarrow ((x\&48 = 0) \rightarrow (x\&A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Поразрядная конъюнкция

```
x     01101101
y     10111001
x&y   00101001
```

Решение.

1. Переходим к дизъюнктивной форме ($a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$)

$$(x\&56 \neq 0) \rightarrow \left((x\&48 = 0) \rightarrow (x\&A \neq 0)\right) = 1$$

$$(x\&56 = 0) \vee (x\&48 \neq 0) \vee (x\&A \neq 0) = 1$$

2. Нас интересует случай

$$\begin{cases} (x\&56 = 0) \vee (x\&48 \neq 0) = 0 \\ (x\&A \neq 0) = 1 \end{cases}$$

3. Система

$$\begin{cases} (x\&56 \neq 0) \\ (x\&48 = 0) \\ (x\&A \neq 0) \end{cases}$$

4. Решаем. Проще начать с условия, где конъюнкция равна 0.

```
48=32+16=110000

48    1  1  0  0  0  0
x     x5 x4 x3 x2 x1 x0

48&x  x5 x4 0  0  0  0  =  0
```

Это возможно при `x5=x4=0`. Т.е. `x = 0 0 x3 x2 x1 x0`.

Второе условие.

```
56 = 32+16+8=111000

56    1  1  1  0  0  0
x     0  0  x3 x2 x1 x0

56&x  0  0  x3 0  0  0  не равно 0
```

Результат не равен 0, это возможно при `x3=1`.

Третье условие. (− любое значение, может быть 0 или 1)

```
x     0  0  1  -  -  -
A     a5 a4 a3 a2 a1 a0

x&A   0  0  a3 -  -  -
```

`x&A` гарантированно не равно 0 только при `a3=1`.

Ищем наименьшее `A`, т.е. `001000`.

Ответ. 8

Пример 2.

(М.В. Кузнецова) Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$((x\&13 \neq 0)(x\&39 \neq 0)) \to ((x\&A \neq 0)(x\&13 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

1. Заменяем импликацию ($a \to b = \bar{a} \vee b$)

$$\overline{((x\&13 \neq 0)(x\&39 \neq 0))} \vee \big((x\&A \neq 0)(x\&13 \neq 0)\big) = 1$$

используем закон де Моргана ($\overline{ab} = \bar{a} \vee \bar{b}$)

$$\overline{(x\&13 \neq 0)} \vee \overline{(x\&39 \neq 0)} \vee \big((x\&A \neq 0)(x\&13 \neq 0)\big) = 1$$

$$(x\&13 = 0) \vee (x\&39 = 0) \vee \big((x\&A \neq 0)(x\&13 \neq 0)\big) = 1$$

2. Нас интересует случай

$$\begin{cases}(x\&13 = 0) \vee (x\&39 = 0) = 0\\ (x\&A \neq 0)(x\&13 \neq 0) = 1\end{cases}$$

3. Система

$$\begin{cases}(x\&13 \neq 0)\\ (x\&39 \neq 0)\end{cases}$$
$$\begin{cases}(x\&A \neq 0)\\ (x\&13 \neq 0)\end{cases}$$

Повторяется условие $(x\&13 \neq 0)$, то есть система упрощается

$$\begin{cases}(x\&13 \neq 0)\\ (x\&39 \neq 0)\\ (x\&A \neq 0)\end{cases}$$

4. Поразрядная конъюнкция

13=8+4+1=001101

39=32+4+2+1=100111

```
13    0  0  1  1  0  1
x     x5 x4 x3 x2 x1 x0
x&13  0  0  x3 x2 0  x0 не равно 0

39    1  0  0  1  1  1
x     x5 x4 x3 x2 x1 x0
x&39  x5 0  0  x2 x1 x0 не равно 0
```

$(x\&13 \neq 0)$ если хотя бы один из разрядов, x0, x2, x3 равен 1

$(x\&39 \neq 0)$ если хотя бы один из разрядов, x0, x1, x2, x5 равен 1

То есть нам подходят

```
x=-----1 (x0=1)
x=---1-- (x2=1)
x=--1-1- (x3=1, x1=1)
x=1-1--- (x3=1, x5=1)
```

Чтобы для всех этих случаев обеспечить $(x\&A \neq 0)$, `A=--11-1` или `A=1--111`. Наименьшее A=1101=13.

Ответ. 13.

Задача 15. Две переменных.

Для какого наибольшего целого числа A формула

$$((x \leq 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A))((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 7))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных x и y)?

Решение.

1. Конъюнкция тождественно истинна, когда оба множителя тождественно истинны, имеем систему (отметим, что уравнения зависят от разных переменных, значит, их можно решать независимо).

$$\begin{cases}(x \leq 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A) = 1\\(y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 7) = 1\end{cases}$$

2. Переходим к ДНФ

$$\begin{cases}\overline{(x \leq 5)} \vee (x \cdot x \leq A) = 1\\\overline{(y \cdot y \leq A)} \vee (y < 7) = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x > 5) \vee (x \cdot x \leq A) = 1\\(y \cdot y > A) \vee (y < 7) = 1\end{cases}$$

3. Нас интересует случай для первого уравнения

$$\begin{cases}(x > 5) = 0\\(x \cdot x \leq A) = 1\end{cases}$$

Т.е., для $(x \leq 5)$ требуется $(x \cdot x \leq A)$, это верно для $A \geq 25$.

Нас интересует случай для второго уравнения

$$\begin{cases}(y \cdot y > A) = 1\\(y < 7) = 0\end{cases}$$

Т.е., для $(y \geq 7)$ требуется $(y \cdot y > A)$, это верно для $A \leq 48$.

Ответ. 48

Примечание. Можно не переходить к ДНФ, уравнения достаточно просты. Это импликация двух простых высказываний.

Первое уравнение

$$(x \leq 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A) = 1$$

Начинаем с условия, не содержащего A. Если $(x \leq 5) = 0$, то выражение тождественно истинно вне зависимости от A. Значит, рассматриваем случай $(x \leq 5) = 1$. Чтобы получить 1 в уравнении, требуется $(x \cdot x \leq A) = 1$. Итак, нас интересует случай

$$\begin{cases}(x \leq 5) = 1\\(x \cdot x \leq A) = 1\end{cases}$$

Второе уравнение

$$(y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 7) = 1$$

Начинаем с условия, не содержащего A. Если $(y < 7) = 1$, то выражение тождественно истинно вне зависимости от A. Значит, рассматриваем случай $(y < 7) = 0$. Чтобы получить 1 в уравнении, требуется $(y \cdot y \leq A) = 0$. Итак, нас интересует случай

$$\begin{cases}(y < 7) = 0\\(y \cdot y \leq A) = 0\end{cases}$$

Или, что то же самое,

$$\begin{cases}(y \geq 7) = 1\\(y \cdot y > A) = 1\end{cases}$$

Далее все так же.

Надо понимать, что мы исключаем случаи, когда уравнение верно за счет высказываний, не содержащих A, то есть начинаем рассуждать всегда с высказывания, не содержащего A, и выходим на высказывание, зависящее от A.

Задача 15. Области на плоскости.

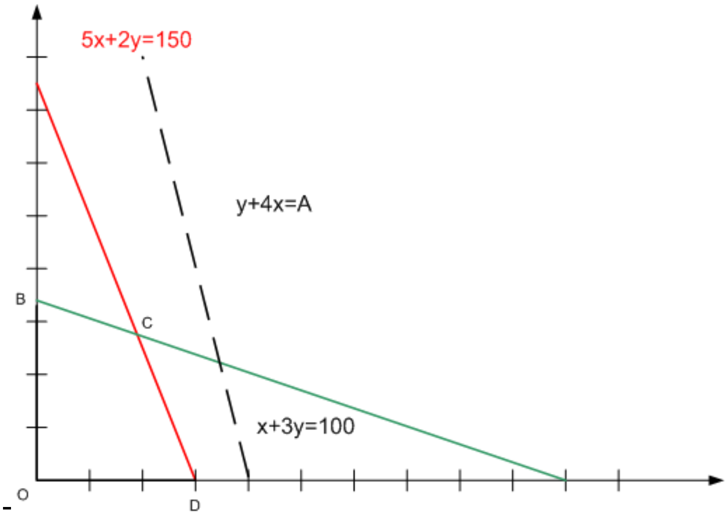
Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 4x < A) \lor (x + 3y > 100) \lor (5x + 2y > 150)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Решение.

1. Нас интересует случай
   $(x + 3y > 100) \lor (5x + 2y > 150) = 0$
   Дизъюнкция равна 0, когда оба слагаемых равны 0.
   $(x + 3y > 100) = 0$, т.е., $(x + 3y \leq 100)$. Граница этой области − прямая, проходящая через точки (0,100/3) и (100,0). Область лежит под прямой.
   $(5x + 2y > 150) = 0$, т.е., $5x + 2y \leq 150$. Граница этой области − прямая, проходящая через точки (0,75) и (30,0). Область лежит под прямой.



   Нас интересует пересечение этих областей - четырехугольник OBCD.
2. В этой области требуется $(y + 4x < A) = 1$, это область, которая лежит под прямой $y + 4x = A$, и не включает эту прямую. На рисунке прямая изображена пунктирной линией, здесь $\mathrm{A} = 160$.
   Очень важно при составлении чертежа соблюдать масштаб.
3. Надо, чтобы четырехугольник OBCD лежал целиком под прямой $y + 4x = A$. Если начать уменьшать А, то прямая будет двигаться параллельно самой себе влево, и первая точка области, которую она встретит, это $D(30{,}0)$. Эта точка не удовлетворяет условиям задачи, т.к. координаты должны быть целыми положительными. Рассмотрим тогда $\mathrm{x} = 29$, посмотрим, какие точки с такой абсциссой принадлежат четырехугольнику.
   Граница здесь $5x + 2y = 150$.
   Требуется $5 \times 29 + 2\mathrm{y} \leq 150$, отсюда $y \leq (150 - 145)/2 = 2.5$. То есть в области лежат две интересующие нас точки с целыми положительными координатами: (29,1) и (29,2). Точка (29,2) ближе к прямой $y + 4x = A$. Подставляем ее координаты в условие.
   $2 + 4 \times 29 < A$. т.е., $A > 118$. Минимальное А, удовлетворяющее этому условию, это 119.
   Ответ. 119.