Математическая логика и теория алгоритмов

История и методология прикладной математики и информатики

Ю.Б.Буркатовская, доцент ОИТ

Что такое логика?

- **Джон Локк** (John Locke; 1632–1704 гг., английский философ): *«Логика есть анатомия мышления»*.
- **Джон Стюарт Милль** (John Stuart Mill; 1806–1873 гг., английский философ): «*Логика не тождественна знанию, хотя область ее и совпадает с областью знания. Логика есть общий ценитель и судья всех частных исследований. Она незадается целью находить очевидность; она только определяет, найдена очевидность или нет.*

  Логика не наблюдает, не изобретает, не открывает — она судит. Итак, логика есть наука об отправлениях разума, служащих для оценки очевидности; она есть учение как о самом процессе перехода от известных истин к неизвестным, так и о всех других умственных действиях, поскольку они помогают этому процессу».

Что такое логика?

- **Льюис Кэрролл** (Lewis Carroll, настоящее имя Charles Lutwidge Dodgson; 1832–1898 гг., английский писатель, математик, логик, философ):
- *«-I know what you're thinking about, - said Tweedledum: - but it isn't so, nohow. -Contrariwise, - continued Tweedledee, - if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic.»*
- *«- Я знаю, о чем ты думаешь, - сказал Труляля, - но это не так! Ни в коем разе!- И задом наперед, совсем наоборот, - подхватил Траляля. - Если бы это было так, это бы еще ничего, а если бы ничего, оно бы так и было, но так как это не так, так оно и не этак! Такова логика вещей!»*
- Из книги «Алиса в Зазеркалье», перевод Н. Демуровой.

Что такое логика?

- **Амброз Бирс** (Ambrose Bierce; 1842–1913 гг., американский писатель, журналист, автор юмористических и «страшных» рассказов) :
- «***Логика (сущ.).*** *Искусство размышлять и излагать мысли в неукоснительном соответствии с людской ограниченностью и неспособностью к пониманию. Основа логики — силлогизм, состоящий из большой и меньшей посылок и вывода. Например:*
- ***Большая посылка:*** *Шестьдесят людей способны сделать определенную работу в шестьдесят раз быстрее, чем один человек.*
- ***Меньшая посылка:*** *Один человек может выкопать яму под столб за 60 секунд.*
- ***Вывод:*** *Шестьдесят людей могут выкопать яму под столб за 1 секунду.*
- *Это можно назвать арифметическим силлогизмом, где логика соединена с математикой, что дает нам двойную уверенность в правильности вывода».*

Что такое логика?

- **Джеймс Тёрбер** (James Thurber; 1894–1961 гг., американский художник газетных сатирических комиксов, писатель и юморист): «*If you can touch the clocks and never start them, then you can start the clocks and never touch them1. That's logic, as I know and use it*».
- **Непейвода Н. Н.** (род. 1949 г., советский и российский математик, учёный в области теоретической информатики и математической логики): «*Логика — наука, изучающая с формальной точки зрения понятия, методы их определения и преобразования, суждения о них и структуры доказательных рассуждений*».
- **Википедия. «*Логика*** (др.-греч. λογική — «наука о правильном мышлении», «способность к рассуждению» от др.-греч. λόγος — «логос», «рассуждение», «мысль», «разум», «смысл») — раздел философии, нормативная наука о формах, методах и законах интеллектуальной познавательной деятельности, формализуемых на логическом языке.»

Что такое логика?

- **Льюис Кэрролл** (Lewis Carroll, настоящее имя Charles Lutwidge Dodgson; 1832–1898 гг., английский писатель, математик, логик, философ):
- *«-I know what you're thinking about, - said Tweedledum: - but it isn't so, nohow. -Contrariwise, - continued Tweedledee, - if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic.»*
- *«- Я знаю, о чем ты думаешь, - сказал Труляля, - но это не так! Ни в коем разе!- И задом наперед, совсем наоборот, - подхватил Траляля. - Если бы это было так, это бы еще ничего, а если бы ничего, оно бы так и было, но так как это не так, так оно и не этак! Такова логика вещей!»*
- Из книги «Алиса в Зазеркалье», перевод Н. Демуровой.

Зарождение логики

- **Фалес** и **Пифагор** использовали логические рассуждения в математике.
- **Сократ** (ок. 469–399 гг. до н. э.) и **Платон** (ок. 427–347 гг. до н. э.) применяли рассуждения математического типа в философских вопросах.
- «*Я знаю только то, что ничего не знаю, но другие не знают и этого*». Сократ.
- От Платона идет ***реализм*** — философское направление в математике, последователи которого считают, что математические объекты (сущности) существуют независимо от математиков. Большинство современных математиков, поддерживают эту позицию.
- **Евклид** («Начала») – аксиоматический метод. Евклид начал изложение геометрии с ***аксиом*** (некоторые из них с наиболее сложной формулировкой и связанные с геометрическими построениями назывались им ***постулатами***) — истинных утверждений, которые, по его мнению, просты и самоочевидны. Используя аксиомы, он доказывал ***теоремы*** — истинные утверждения, более сложные и не очевидные.

Аксиоматический метод

- **Аксиома в понимании Евклида** – истина, не требующая доказательств.
- **Постулат** – аксиома в геометрии.
- **Постулаты Евклида**.
  - От всякой точки до всякой можно провести прямую.
  - Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать до прямой.
  - Из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг.
  - Все прямые углы равны между собой.
  - Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.
- Пятый постулат сложнее первых четырех, поэтому геометры пытались доказать его, исходя из первых четырех (Омар Хайям, Насир ад-Дин ат-Туси, Джон Валлис…).
- **Следствия.**
  - Через данную точку можно провести одну прямую, параллельную данной.
  - Сумма углов треугольника равна 180 градусов.

Аксиоматический метод

- **Иоганн Карл Фридрих Гаусс** (30 апреля 1777, Брауншвейг — 2 февраля 1855, Гёттинген) — немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».
- Гаусс первым (по некоторым данным, примерно в 1818 году) построил основы неевклидовой геометрии (отказ от пятого постулата) и поверил в её возможную реальность. Занимался теорией параллельных прямых с 1792 г.
- Измерял вершины многокилометрового прямоугольника, вершинами которого являются три горы в Германии, чтобы понять, является ли геометрия евклидовой.
- *Я прихожу всё более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере человеческим рассудком и для человеческого рассудка. Может быть, в другой жизни мы придём к взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До сих пор геометрию приходится ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто a priori, а скорее с механикой.*

Из письма астроному В. Ольберсу, 1817.

Аксиоматический метод

- **Иоганн Карл Фридрих Гаусс**
- В 1824 г. писал, что неевклидова геометрия «*в которой сумма углов треугольника меньше 180 градусов, совершенно последовательна... все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить, даже не может достичь некоторого предела, как бы велики ни были его стороны… мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже не знаем ничего о сущности пространства.*»

  Письмо к Тауринусу.
- В 1831 году кратко изложил свои выводы, но ничего не опубликовал по неевклидовой геометрии.
- Из письма к Бесселю: «*Я опасаюсь крика беотийцев, если выскажу свои воззрения*».
  - Беотийцы, жители области Древней Греции, Беотии, считались особо глупыми, так что название стало нарицательным.

Аксиоматический метод

- **Янош Бойяи** (15 декабря 1802, Коложвар — 27 января 1860, Марошвашархей) — венгерский математик, один из первооткрывателей неевклидовой геометрии (называемой теперь геометрией Лобачевского).
- Уже в колледже он настолько увлёкся исследованием пятого постулата Евклида, что отец (известный венгерский математик **Фаркаш Бойяи**) с тревогой советовал Яношу: «*Ты должен бросить это как самое гнусное извращение. Оно может отнять у тебя всё время, здоровье, разум, все радости жизни. Эта чёрная пропасть в состоянии, может быть, поглотить тысячу таких титанов, как Ньютон.*»
- Янош не внял совету отца. Вскоре он пришёл к выводу, что пятый постулат недоказуем и независим от остальных. Это означало, что, заменив его на альтернативный, можно построить **новую геометрию**, отличную от евклидовой.
- Примерно в 1820—1823 годах Бойяи заканчивает трактат с описанием новой геометрии. Он шутил в письме отцу: «*Я создал странный новый мир из ничего!*»

Аксиоматический метод

- **Янош Бойяи**
- В 1832 году отец опубликовал своё сочинение, а в приложении к нему — работу сына, вошедшую в историю математики под именем *Appendix* (приложение): «*Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может)*».
- Годом ранее (1831) Фаркаш Бойяи послал оттиск «Аппендикса» Гауссу. Прочитав сочинение, Гаусс написал одному из своих друзей: «*Этот юный геометр Бойяи — гений высшего класса*». Самому же Фаркашу Гаусс ответил: «*Оценить это — всё равно что оценить себя. Потому что всё, что там написано, совпадает с моими собственными размышлениями последних 30—35 лет на эту тему*».
- Янош решил, что Гаусс приписал себе его открытия. Пытается продолжить математические работы, начинает и вскоре забрасывает несколько сочинений, очень интересных по своим идеям.
- В 1848 году Янош Бойяи обнаружил труд **Н. И. Лобачевского**, который ещё в 1829 году, на 3 года раньше Бойяи, опубликовал сходную по идеям работу. Бойяи в ярости. Он подозревает, что у него украли лучшие идеи, что никакого Лобачевского никогда не существовало, и всё это проделки хитроумного Гаусса. В то же время он восхищается мастерством и остроумием доказательства некоторых теорем. Последние годы Бойяи омрачены тяжёлым душевным разладом.

Аксиоматический метод

- **Николай Иванович Лобачевский** (20 ноября (1 декабря) 1792, Нижний Новгород — 12 (24) февраля 1856, Казань) — российский математик, один из создателей неевклидовой геометрии, деятель университетского образования и народного просвещения.
- Известный английский математик Уильям Клиффорд назвал Лобачевского «Коперником геометрии»
- Лобачевский в течение 40 лет преподавал в Императорском Казанском университете, в том числе 19 лет руководил им в должности ректора; его активность и умелое руководство вывели университет в число передовых российских учебных заведений.

Аксиоматический метод

- **Николай Иванович Лобачевский**
- Евклидова аксиома о параллельных (точнее, одно из эквивалентных ей утверждений,):
- *На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.*
- В геометрии Лобачевского вместо неё принимается следующая аксиома:
- *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.*
- **«О началах геометрии» (1829).** Пятый постулат не может быть доказан на основе других посылок евклидовой геометрии, и допущение постулата, противоположного постулату Евклида, позволяет построить геометрию столь же содержательную и свободную от противоречий, как и евклидова.
- *Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о котором не хочу здесь упоминать; таким образом, я не нашёл для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шёл я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение.*

Гаусс, в письме Г.Х.Шумахеру.

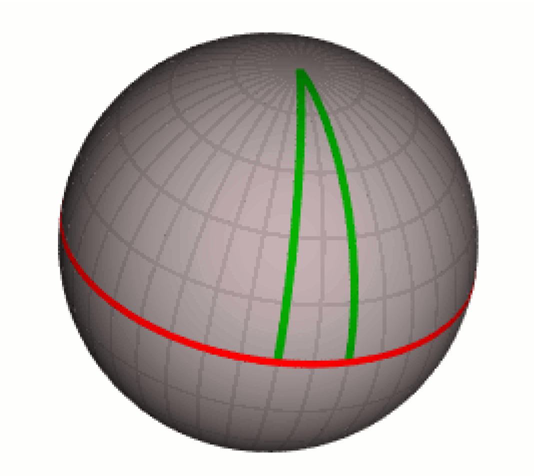
Аксиоматический метод

- **Николай Иванович Лобачевский**
- Однако научные идеи Лобачевского не были поняты современниками. Его труд «О началах геометрии», представленный в 1832 году советом университета в Академию наук, получил у М. В. Остроградского отрицательную оценку. В иронически-язвительном отзыве на книгу Остроградский откровенно признался, что он ничего в ней не понял, кроме двух интегралов, один из которых, по его мнению, был вычислен неверно (на самом деле ошибся сам Остроградский[). Среди других коллег также почти никто Лобачевского не поддержал, росли непонимание и невежественные насмешки.
- *«Для чего же писать, да ещё и печатать, такие нелепые фантазии? <…> Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какой-нибудь серьёзной целью книгу, которая немного бы принесла чести и последнему приходскому учителю? Если не учёность, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего. <…> Новая Геометрия <…> написана так, что никто из читавших её почти ничего не понял.»*

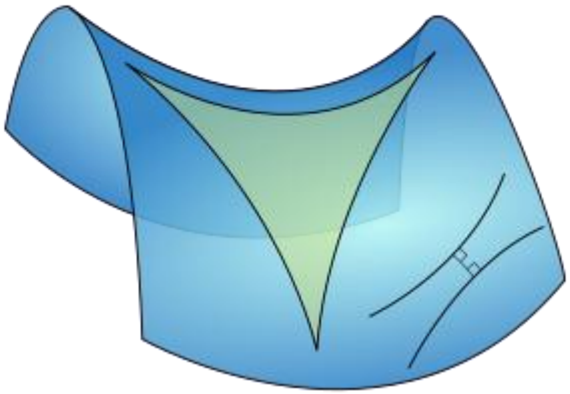
  Из анонимной статьи в журнале Ф. Булгарина «Сын отечества» в 1834 году.
- Лобачевский не дожил чуть более 10 лет до признания своих идей.

Аксиоматический метод

Сфера: параллельные прямые пересекаются

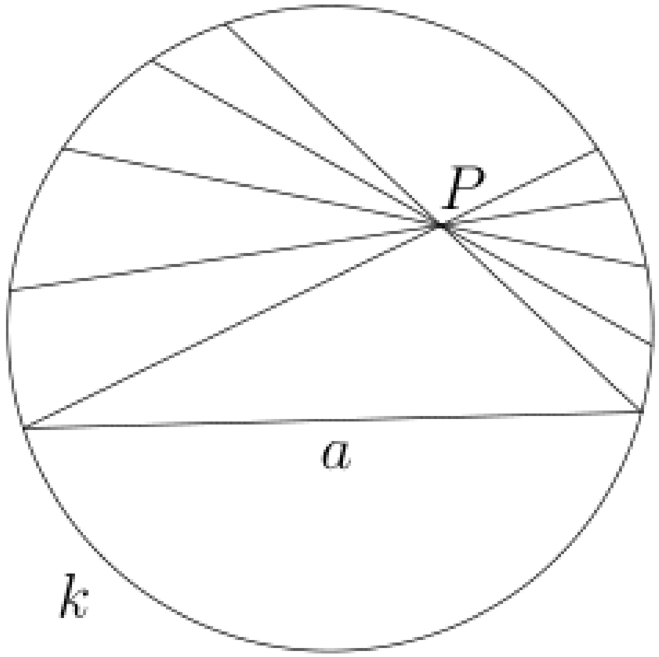


Поверхность отрицательной кривизны

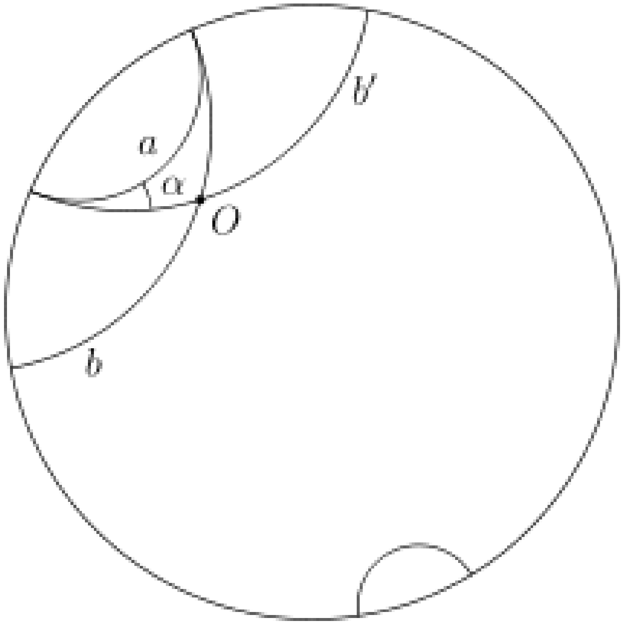


Аксиоматический метод

Модель Бельтрами-Клейна



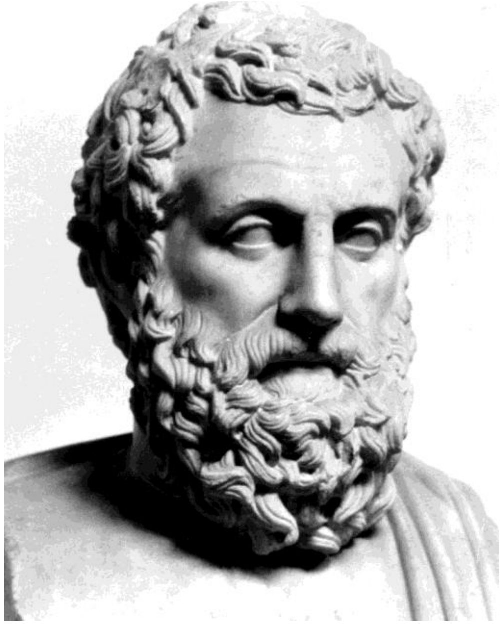
Модель Пуанкаре



Аксиоматический метод

- **Теорема.**
- *Евклидова геометрия непротиворечива тогда и только тогда, когда непротиворечива геометрия Лобачевского.*
- **Современное понимание аксиомы.** Утверждение, которое становится основой некоторой теории, после чего из этой аксиомы выводятся теоремы.
- **Приложения неевклидовой геометрии.**
  - Сам Лобачевский применял свою теорию к вычислению определённых интегралов, интерпретируя их как выражения для длины, площади или объёма фигур в его геометрии.
  - Была установлена тесная связь геометрии Лобачевского с кинематикой специальной (частной) теории относительности. Законы сложения относительных скоростей, полученные Альбертом Эйнштейном, напрямую связаны с геометрией Лобачевского.
  - В 1950-х годах советский физик Н.А. Черников стал успешно использовать геометрию Лобачевского для исследования столкновений элементарных частиц в ускорителе, а также при изучении других вопросов физики элементарных частиц и ядерных реакций.

Становление логики



- **Аристотель** (384 год до н. э., Стагира, Фракия — 322 год до н. э., Халкида, остров Эвбея)
- Древнегреческий философ. Ученик Платона. С 343 года до н. э. — воспитатель Александра Македонского. В 335/4 годах до н. э. основал Ликей.
- Аристотель был первым мыслителем, создавшим всестороннюю систему философии, охватившую все сферы человеческого развития: социологию, философию, политику, логику, физику.
- *Analytica priora*;
- *Analytica posteriora*.
- ***Логика*** — наука об анализе доказательств, аргументов и установлении принципов, на основании которых могут быть сделаны надежные рассуждения.

Законы логики Аристотеля

- **Закон противоречия**

«Невозможно, чтобы одно и то же в одно и то же время и в одном и том же отношении и было, и не было присуще одному и тому же»

- **Закон исключенного третьего**

«Равным образом не может быть ничего посредине между двумя противоречащими друг другу суждениями, но об одном одно необходимо либо утверждать, либо отрицать»

- **Закон тождества**

«…иметь не одно значение — значит не иметь ни одного значения; если же у слов нет значений, тогда утрачена всякая возможность рассуждать друг с другом, а в действительности — и с самим собой; ибо невозможно ничего мыслить, если не мыслить что-нибудь одно»

- **Закон достаточного основания**

«Любая мысль (тезис) для того, чтобы иметь силу, обязательно должна быть доказана (обоснована) какими-либо аргументами (основаниями)».

Силлогизмы Аристотеля

Есть четыре варианта **утверждений** касательно отношений меж двумя категориями. Возьмем категории «студентов» и «поэтов», тогда следующие варианты соотношения становятся возможны:

1. Все студенты это поэты
2. Ни один студент не является поэтом
3. Некоторые студенты это поэты
4. Некоторые студенты это не поэты

Силлогизм (др.-греч. συλ-λογισμός — «подытоживание, подсчёт, умозаключение», от др.-греч. συλ- (συν-) — приставка со значением совместности действия, соучастия и др.-греч. λογισμός — «счёт, подсчёт; рассуждение, размышление») это такое рассуждение, которое состоит из трех утверждений: двух посылок и одного заключения.

Силлогизмы Аристотеля

Пример	**Форма**	**Название**
Все люди смертны. Все греки люди. Все греки смертны.	All M are P. All S are M. All S are P.	B**a**rb**a**r**a**
Рептилии не имеют меха. Все змеи - рептилии. Змеи не имеют меха.	No M are P. All S are M. No S are P.	C**e**s**a**r**e**
Все квадраты - прямоугольники. Все квадраты - ромбы. Некоторые ромбы - прямоугольники.	All M are P. All M are S. Some S are P.	D**a**r**a**pt**i**

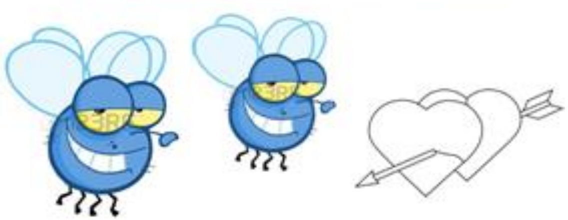
Большая посылка
Меньшая посылка
Вывод

Проблемы естественных языков

Неоднозначность грамматики

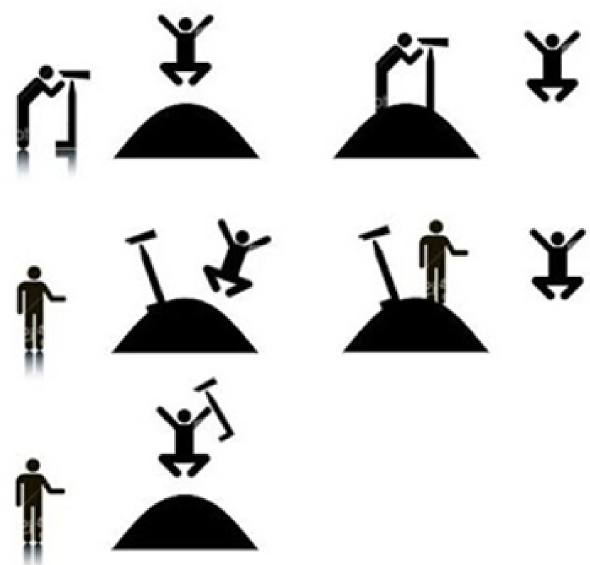
Time flies like an arrow

Time flies like an arrow



Неоднозначность семантики

I saw the man on the hill with a telescope.



Проблемы естественных языков

Буквально или фигурально?

- *Я стоял посреди мастерской и,* ***фигурально*** *говоря, чесал затылок. Во всяком случае, рукой по затылку, я елозил совсем не* ***фигурально***.

Николай Удальцов, Дорога во все ненастья. Брак (сборник), 2013

Зависимость от контекста

- Champagne is better than beer.
- Beer is better than soda.

Therefore, champagne is better than soda.

OK!

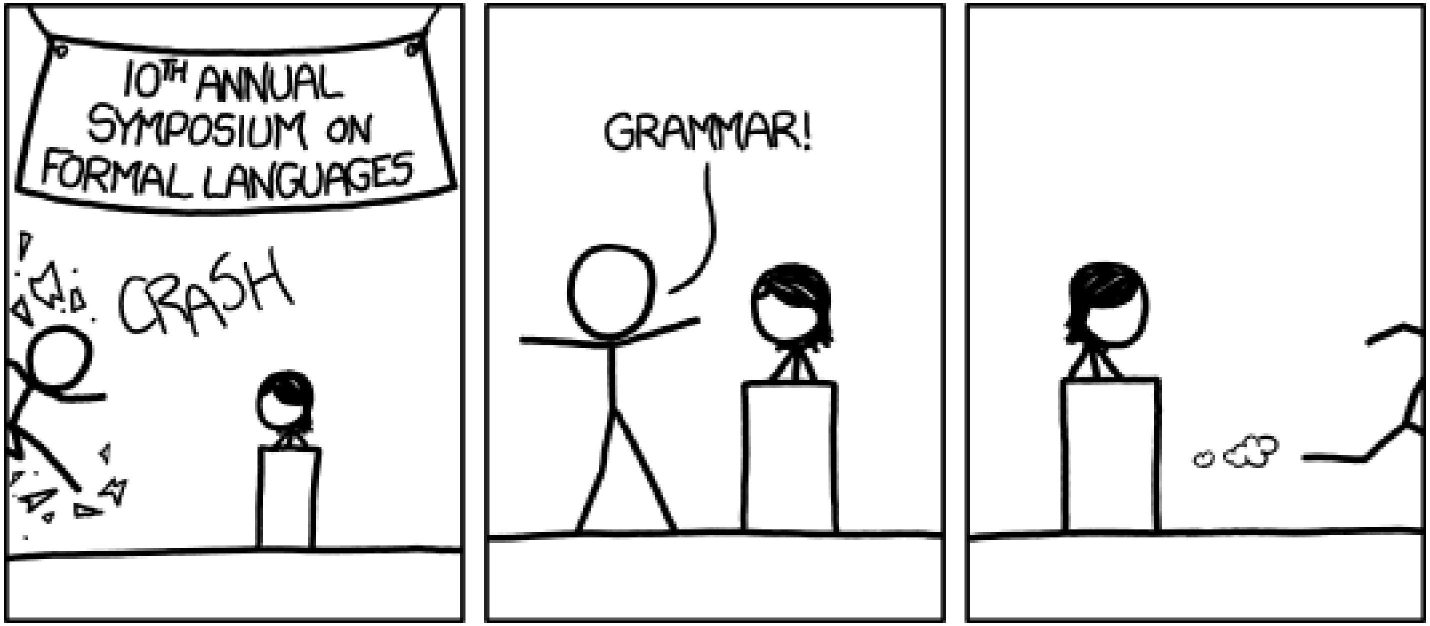
- Bad sex is better than nothing.
- Nothing is better than good sex.

Therefore, bad sex is better than good sex.

Слово “nothing” имеет два разных значения.

'What just happened?' 'There must be some context we're missing.'

Randall Munroe. Xkcd project.



Работы Лейбница

- **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646–1716 гг.) — немецкий философ, логик, математик.
- Он был первым, кто продвинул логику вперед после Аристотеля. Он пытался записывать логические утверждения в символическом виде, надеясь свести рассуждения к манипулированию символами, к вычислениям. Это была первая попытка создать символическую логику. Но его идеи были далеко впереди его времени, поэтому они не были восприняты современниками. Только через двести лет логики переоткрыли их и стали использовать.
- *«Это единственный способ исправить наши рассуждения, чтобы сделать их также ясными как у математиков, так что мы могли бы найти ошибку с первого взгляда, а когда возникают споры, мы могли бы просто сказать: «Давайте вычислим и увидим, кто прав».»*

«Искусство открытия» (1685 г.)

Начало математической логики

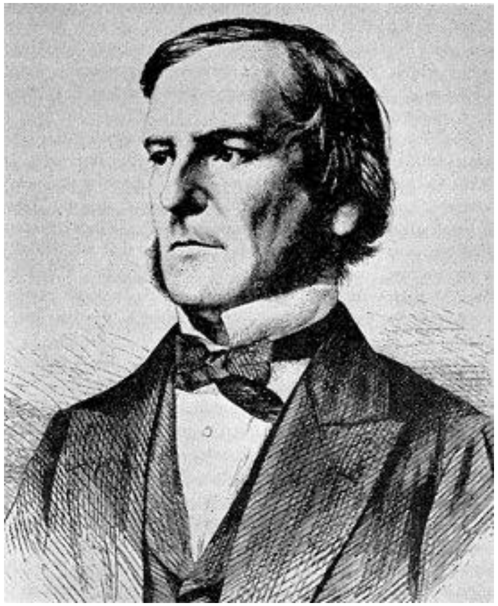
- Джордж Буль (Булева алгебра)
- Георг Кантор (теория множеств)
- Готлоб Фреге (логика высказываний и логика предикатов)

- *«Многие люди спрашивают меня, что такое математическая логика и какова ее цель. К сожалению, ни одно простое определение не может дать даже самое отдаленное понимание математической логики. Только после погружения в этот предмет его сущность становится очевидной. Что касается цели, то существует множество целей, но, снова, можно понять их только после некоторого изучения предмета. Тем не менее есть одна цель, и ее я могу сказать вам прямо сейчас: сделать точным понятие доказательства.»*

Рэймонд Смаллиан.

Булева алгебра

- **Джордж Буль** (1815–1864 гг.) — английский математик и логик.
- Джордж Буль родился и вырос в семье небогатого ремесленника Джона Буля, увлечённого наукой.
- С шестнадцати лет Буль начал работать помощником учителя в частной школе в Донкастере.
- Профессор математики Королевского колледжа Корка с 1849 г.
- Был женат (с 1855 г.) на Мэри Эверест, также занимавшейся наукой и преподаванием, а после смерти мужа много сил уделившей популяризации его вклада в логику.
- Четыре их дочери снискали известность как учёные (геометр Алисия, химик Люси), или члены учёных семей (Мэри, жена математика и писателя Ч. Г. Хинтона, и Маргарет, мать математика Дж. И. Тейлора), а пятая — Этель Лилиан Войнич — прославилась как писатель.
- Умер на пятидесятом году жизни от воспаления лёгких.



Булева алгебра

- Публике Буль был известен в основном как автор ряда трудных для понимания статей на математические темы и трёх или четырёх монографий, ставших классическими.
- «*Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логики и вероятностей*» (1854).
- **Алгебра логики**, или **Булева алгебра**
- **Высказывания:**
  - могут быть истинными или ложными (0 или 1);
  - связываются между собой операторами (и, или, если-то…);
  - нет кванторов (для любого, существует…).
- **Пример.** Если идет дождь, то земля мокрая.
- *Когда истинно?*

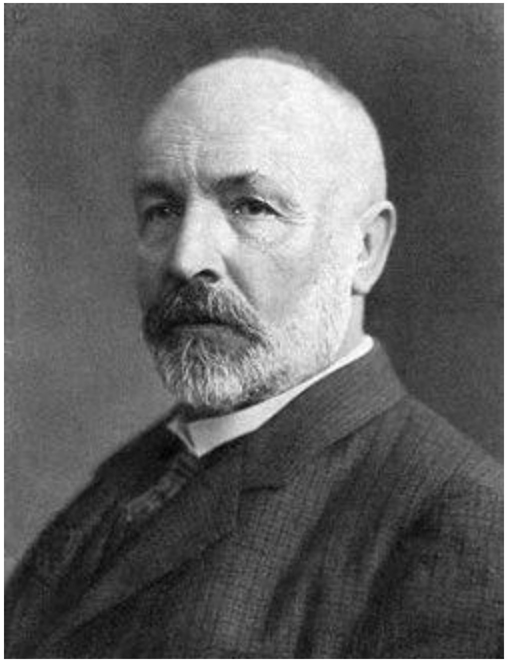
Булева алгебра

- Булева алгебра подобна стандартной арифметике — два значения: 0 и 1 (ложь и истина) и две операции: умножение и сложение (конъюнкция и дизъюнкция).
- Буль не считал логику разделом математики, но находил глубокую аналогию между символическим методом алгебры и символическим методом представления логических форм и силлогизмов.
- **Пример.** Пусть имеется два утверждения: *A* и *B* соответственно:
- *A: «Волга впадает в Каспийское море»;*
- *B: «Ангара впадает в озеро Байкал»*.
- Так как первое утверждение истинное, а второе ложное, мы можем сказать: *A = 1 и B = 0*.
- В булевой алгебре сложение интерпретируется как *«или»,* так что утверждение «*Волга впадает в Каспийское море или Ангара впадает в озеро Байкал»* вычисляется как $A + B = 1 + 0 = 1$, то есть истинно.

Теория множеств

Георг Кантор (1845–1918 гг.) — немецкий математик.

- Кантор родился в 1845 году в Западной колонии торговцев в Санкт-Петербурге. В 1856 году семья переехала в Германию.
- В 1862 году поступил в Федеральный политехнический институт в Цюрихе.
- Через год умер его отец; получив солидное наследство, Георг перевёлся в Берлинский университет имени Гумбольдта, где начал посещать лекции таких знаменитых учёных, как Леопольд Кронекер, Карл Вейерштрасс и Эрнст Куммер.
- Лето 1866 года он провёл в Гёттингенском университете — крупнейшем центре математической мысли тех времён.
- В 1867 году Берлинский университет присвоил ему степень доктора философии за работу по теории чисел *«De aequationibus secundi gradus indeterminatis»*.
- После непродолжительной работы в качестве преподавателя в Берлинской школе для девочек, Кантор занял место в Галльском университете Мартина Лютера, где и прошла вся его карьера.

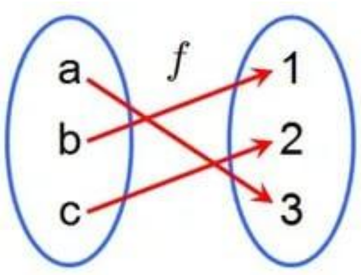


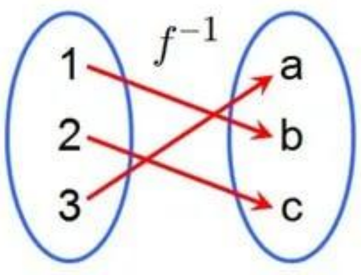
Теория множеств

- **Георг Кантор** – первооткрыватель теории множеств (***наивная теория множеств***), влияние которой на логику и математику трудно переоценить.
- Неформально говоря, любое ***множество*** есть просто совокупность (собрание) некоторых объектов (элементов).
- **Примеры:**
  - {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, . . .} — бесконечное множество, содержащее все простые числа;
  - {пешка, конь, слон, ладья, ферзь, король};
  - {{1, 2}, {3, 4}, {1, 2, 3}} — множество из трех элементов, которые сами являются множествами;
  - {Африка, Байкал, ноябрь, дыхание, Млечный путь, красота};
  - множество людей, погибших во Второй мировой войне.
- Как установить, принадлежит элемент множеству или нет?
- Число128907390028386341…75694564165241 – простое?

Теория множеств

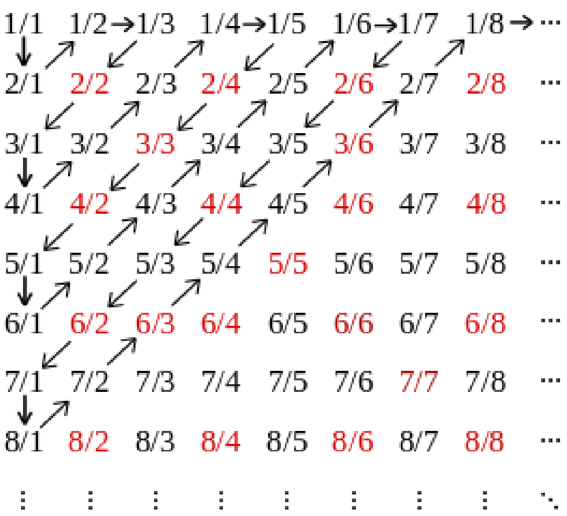
- **Конечные** и **бесконечные** множества имеют разную природу.
- ***Кардинальное число*** (***мощность***) множества – число элементов множества.
- Равны ли кардинальные числа двух множеств?
- Для конечных – подсчитать:
  - A – множество цветов радуги;
  - B – множество европейских столиц;
  - $|A| \neq |B|$.
- Для бесконечных – найти ***биекцию*** (взаимно однозначное соответствие).
- *Множества имеют одинаковую мощность, если между ними существует биекция* (верно для любых множеств).
  - A – множество натуральных чисел;
  - B – множество положительных целых чисел;
  - Биекция: $y=f(x)=2x$; $x=f^{-1}(y)=y/2$.
  - $|A| = |B|$.





Теория множеств

- **Счётное множество** — бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами. Множество X является счётным, если существует биекция со множеством натуральных чисел: X ↔ N.
- Счётными являются множества натуральных чисел N целых чисел Z, рациональных чисел Q, алгебраических чисел A.
- **Парадокс бесконечного отеля.** Представьте себе отель со счётным множеством комнат, в каждой из которых находится постоялец. Необходимо подселить нового человека. Для этого мы переселим гостя из комнаты № 1 в комнату № 2, гость из комнаты № 2 перейдёт в комнату № 3 и так далее. В общем случае, гость из комнаты n переселится в комнату n+1. Таким образом, мы освободим первую комнату, в которую можно будет поселить нового гостя.



Теория множеств

- **Несчётное множество** — такое бесконечное множество, которое не является счётным.
- Таким образом, любое множество является либо конечным, либо счётным, либо несчётным.
- Множество всех подмножеств счётного множества несчётно (континуально).
- Множество вещественных чисел несчётно (континуально).

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & 0.\mathbf{3}141592653589793238462643383279\ldots \\
x_2 & = & 0.2\mathbf{7}18281828459045235360287471352\ldots \\
x_3 & = & 0.16\mathbf{1}8033988749894848204586834365\ldots \\
x_4 & = & 0.141\mathbf{4}213562373095048801688724209\ldots \\
x_5 & = & 0.1732\mathbf{0}508075688772935274463415 05\ldots \\
x_6 & = & 0.22360\mathbf{6}7977499789696409173668731\ldots \\
x_7 & = & 0.120205\mathbf{6}903159594285399738161511\ldots \\
 & \vdots & \qquad\qquad \ddots \\
x & = & 0.\mathbf{6285933}\ldots
\end{array}
$$

Теория множеств

- 1874 году Кантор опубликовал в статью, в которой ввёл понятие мощности множества и показал, что рациональных чисел столько же, сколько натуральных, а вещественных гораздо больше (по совету Вейерштрасса этот революционный вывод был в статье смягчён).
- В 1877 году Кантор получил поразительный результат, который сообщил в письме Дедекинду: множества точек отрезка и точек квадрата имеют одну и ту же мощность (континуум), независимо от длины отрезка и ширины квадрата.
- Сформулировал и безуспешно пытался доказать «континуум-гипотезу». *Мощность континуума — наименьшая, превосходящая мощность счётного множества, и «промежуточных» мощностей между счетным множеством и континуумом нет*.
- Статья Кантора «*К учению о многообразиях*» с изложением этих ключевых результатов появилась в 1878 году.

Теория множеств

- Вскоре после восстановления (1889) Кантор сразу же сделал несколько важных дополнений к своей теории, в частности, доказал диагональным методом несчётность множества всех подмножеств натуральных чисел.
- В статье 1892 года впервые появился знаменитый диагональный метод Кантора.
- В 1897 году началась интенсивная переписка Кантора с Гильбертом по поводу первого обнаруженного в наивной теории множеств противоречия.
- Решение парадоксов (не ставшее, впрочем, общепринятым) было найдено только 30 лет спустя, после замены «наивной теории множеств» Кантора на аксиоматическую.
- В декабре 1899 года у Кантора умер 13-летний сын. Душевная болезнь Кантора обострилась. До 1913 года Кантор продолжал преподавание в университете (время от времени делая длительные перерывы на лечение), затем вышел на пенсию. Его интересы после 1899 года касались в основном философии Лейбница и вопроса об авторстве шекспировских пьес, которым Кантор увлекался уже много лет.
- Георг Кантор умер 6 января 1918 года от сердечного приступа в психиатрической лечебнице города Галле.

Конфликты вокруг теории множеств

- Канторовская теория множеств натолкнулась на резкую критику со стороны ряда известных математиков-современников — Анри Пуанкаре; позднее — Германа Вейля и Лёйтзена Брауэра. Они напоминали, что до Кантора все корифеи математики, от Аристотеля до Гаусса, считали актуальную бесконечность недопустимым научным понятием. Положение усугубило обнаружение в первой версии теории множеств губительных противоречий.
- Критика была порой очень агрессивна: так, Пуанкаре называл «канторизм» тяжёлой болезнью, поразившей математическую науку, и выражал надежду, что будущие поколения от неё излечатся; а в публичных заявлениях и личных выпадах Кронекера в адрес Кантора мелькали иногда такие эпитеты, как «научный шарлатан», «отступник» и «развратитель молодёжи».
- Резкой критике со стороны части видных математиков противостояли всемирная известность и одобрение других. В 1904 году Лондонское королевское общество присудило Кантору свою высшую математическую награду — медаль Сильвестра. Сам Кантор верил в то, что теория трансфинитных чисел была сообщена ему свыше. Бертран Рассел оценил теорию множеств как «один из главных успехов нашей эпохи», а Давид Гильберт назвал Кантора «математическим гением» и заявил: «Никто не сможет изгнать нас из рая, созданного Кантором».

Использование идей Кантора

- Начиная с 1881 года методами Кантора начинают пользоваться другие математики: Вольтерра, Дюбуа-Реймон, Бендиксон, Гарнак, в основном в связи с вопросами об интегрируемости функций.
- Шрёдер в 1895 году обращает внимание на совпадение алгебры множеств и исчисления высказываний, тем самым устанавливая глубокую связь между математической логикой и теорией множеств.
- В статье 1872 года Кантор дал вариант обоснования теории вещественных чисел. В его модели вещественное число определяется как класс фундаментальных последовательностей рациональных чисел, таким образом, любое вещественное число можно сколь угодно точно приблизить рациональным (*полнота* множества рациональных чисел).
- На рубеже веков его работа была полностью признана в качестве основы для теории функций, анализа и топологии.

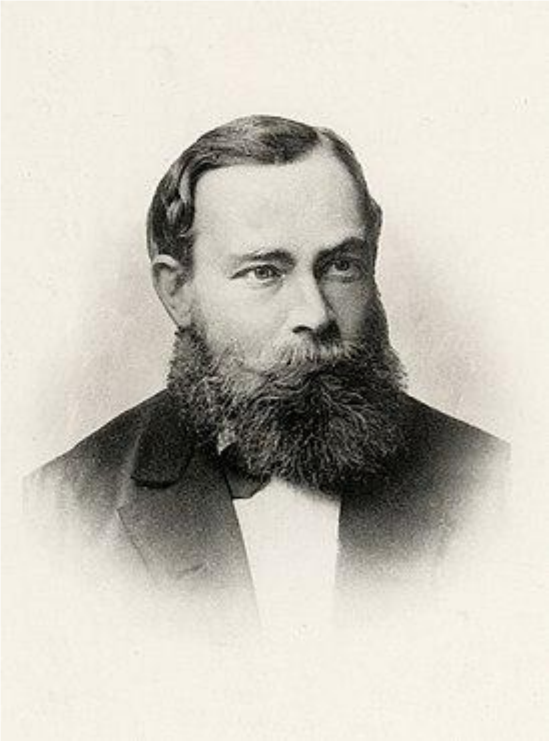
Аксиоматическая теория множеств

- **Аксиоматическая теория множеств** − любая конкретная система, формализующая теорию множеств. Возникла в начале 20 в. в Европе в связи с парадоксами теории множеств, показавшими, что наивная теория множеств приводит к противоречиям.
- Первая и наиболее известная из теорий – теория Цермело–Френкеля, определяющая построение множеств шаг за шагом, т. е. на каждом конечном или трансфинитном шаге рассматриваются только те множества, все элементы которых уже построены на предшествующих шагах.
- Первая проблема Гильберта − континуум-гипотеза. Доказано, что ее нельзя доказать или опровергнуть в аксиомах Цермело-Френкеля.

Аксиоматическая теория множеств

- **Аксиоматическая теория множеств** – любая конкретная система, формализующая теорию множеств. Возникла в начале 20 в. в Европе в связи с парадоксами теории множеств, показавшими, что наивная теория множеств приводит к противоречиям.
- Первая и наиболее известная из теорий – теория Цермело–Френкеля, определяющая построение множеств шаг за шагом, т. е. на каждом конечном или трансфинитном шаге рассматриваются только те множества, все элементы которых уже построены на предшествующих шагах.
- Первая проблема Гильберта – континуум-гипотеза. Доказано, что ее нельзя доказать или опровергнуть в аксиомах Цермело-Френкеля.

Логика высказываний



- **Фридрих Людвиг Готлоб Фреге** (8 ноября 1848, Висмар — 26 июля 1925, Бад-Клайнен) — немецкий логик, математик и философ. Представитель школы аналитической философии.
- Доцент, впоследствии профессор Йенского университета.
- Сформулировал идею **логицизма**, то есть направление в основаниях математики и философии математики, основным тезисом которого является утверждение о «сводимости математики к логике».
- Пересмотрел ряд математических проблем, включая ясную трактовку понятий функции и переменных.
- Изобрел и аксиоматизировал логику предикатов, благодаря своему открытию **кванторов** (∀, ∃), использование которых постепенно распространилось на всю математику.

Логика высказываний

- ***Логика высказываний,*** называемая также пропозициональной логикой, использует буквы для обозначения простых утверждений (высказываний), которые соединяются вместе в сложное высказывание с помощью логических операций (связок).
- Пять операций логики высказываний в русском языке можно передать словами: «не», «и», «или», «если. . ., то», «тогда и только тогда».
- Более сложная система, ***логика предикатов***, расширяет логику высказываний. Используются буквы (слова) для именования объектов (предметов) из некоторой предметной области и имена для предикатов. Предикаты обозначают свойства объектов или отношения между объектами.
- **Предикат** – высказывание, которое может быть истинным или ложным, в зависимости от переменной.

Логика высказываний

- *Если учиться и не думать — запутаешься, а если думать и не учиться — впадешь в сомнение* (Конфуций. Лунь юй).

Решение.

- **Логика высказываний:**
- *A*: *«Человек учится».*
- *B*: *«Человек не думает».*
- *C*: *«Человек запутывается».*
- *D*: *«Человек впадает в сомнение».*
- Формула: $(A\&\neg B \supset C)\&(\neg A\&B \supset D)$.
- **Логика предикатов:**
- Универсум: люди.
- Предикат $A(x) \Leftrightarrow$ *«человек x учится».*
- Предикат $B(x) \Leftrightarrow$ *«человек x думает».*
- Предикат $C(x) \Leftrightarrow$ *«человек x запутывается».*
- Предикат $D(x) \Leftrightarrow$ *«человек x впадает в сомнение».*
- Формула: $\forall x((A(x)\ \&\ \neg B(x)) \supset C(x))\ \&\ \forall x((\neg A(x)\ \&\ B(x)) \supset D(x))$.

Парадокс Рассела

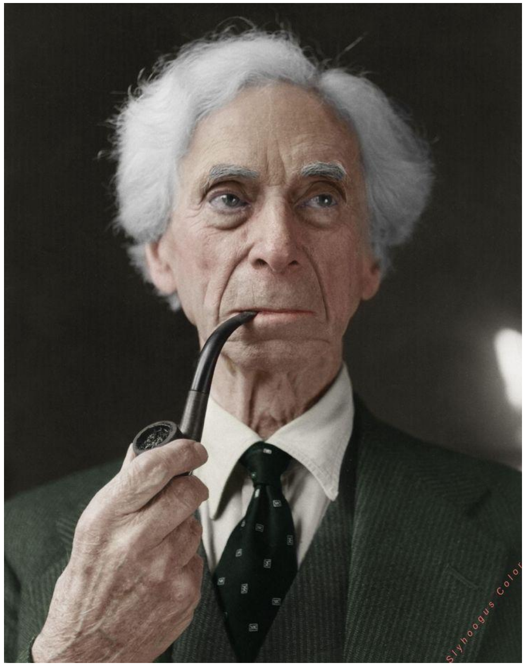
- Пусть K — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли K само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению K, оно не должно быть элементом K — противоречие. Если нет — то, по определению K, оно должно быть элементом K — вновь противоречие.
- **Существует много популярных формулировок этого парадокса.**
- Одному деревенскому брадобрею приказали *«брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется»*, как он должен поступить с собой? Еще один вариант:
- В одной стране вышел указ: *«Мэры всех городов должны жить не в своем городе, а в специальном Городе мэров»*, где должен жить мэр Города мэров? И ещё один:
- Некая библиотека решила составить библиографический каталог, в который входили бы все те и только те библиографические каталоги, которые не содержат ссылок на самих себя. Должен ли такой каталог включать ссылку на себя?

Парадокс Рассела

- 1901 г. Рассел открыл этот парадокс.
- Рассел написал Фреге о парадоксе в июне 1902 г. Переписка стала одной из самых интересных и обсуждаемых в истории логики. Парадокс приводил к противоречию в системе аксиом Фреге.
- Рассел делил множества на множества отдельных объектов, множества множеств отдельных объектов и т. д. Множества не считались объектами, а множества множеств – множествами. Множество никогда не обладало типом, позволяющим иметь в качестве члена самого себя. Поэтому нет множества всех множеств, не являющихся собственными членами, потому что для любого множества вопрос о том, является ли оно своим членом, сам по себе является нарушением типа.
- Совершенно иной подход принят в *теории множеств Цермело-Френкеля* (ЦФ). Могут существовать только те множества, для которых это явно постулировано или которые могут быть составлены с помощью итерационных процессов и т. д.
- Вопрос о том, найден ли ответ на неразрешимый парадокс Бертрана Рассела, по-прежнему является предметом дискуссий.

Расцвет математической логики

- **Бертран Артур Уильям Рассел, 3-й граф Рассел** (18 мая 1872, Треллек, Уэльс — 2 февраля 1970, Уэльс) — британский философ, логик, математик и общественный деятель. Известен своими работами в защиту пацифизма, атеизма, а также либерализма и левых политических течений, и внёс неоценимый вклад в математическую логику, историю философии и теорию познания
- В 1910–1913 годы Бертран Рассел и Альфред Уайтхед (1861–1947 гг.) написали фундаментальный труд **«Principia Mathematica»**, в котором, используя идеи Фреге, обосновали математику на аксиомах теории множеств и логики.
- Расселу и Уайтхеду пришлось заплатить 100 фунтов за издание книги. «Неплохой баланс, за десять лет работы мы заработали по минус 50 фунтов на каждого», – шутил впоследствии Рассел.



Расцвет математической логики

- **Давид Гильберт** (23 января 1862— 14 февраля 1943) — немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики. Член многих академий наук, в том числе Берлинской, Гёттингенской, Лондонского королевского общества, иностранный почётный член Академии наук СССР (1934). Лауреат премии имени Н. И. Лобачевского (1903). В 1910—1920-е годы (после смерти Анри Пуанкаре) был признанным мировым лидером математиков.
- Наиболее известны его первая полная аксиоматика евклидовой геометрии и теория гильбертовых пространств, одна из основ современного функционального анализа. Он внёс значительный вклад в теорию инвариантов, общую алгебру, математическую физику, интегральные уравнения и основания математики.

Расцвет математической логики

«Геттингенская программа» Гильберта, 1920-е годы.

- Математику можно представить в виде набора следствий, выводимых из некоторой системы аксиом, и доказать, что:
- 1. Математика является ***полной,*** т. е. любое математическое утверждение можно доказать или опровергнуть, основываясь на правилах самой дисциплины.
- 2. Математика является ***непротиворечивой,*** т. е. нельзя доказать и одновременно опровергнуть какое-либо утверждение, не нарушая принятых правил рассуждения.
- 3. Математика является ***разрешимой,*** т. е., пользуясь правилами, можно выяснить относительно любого математического утверждения, доказуемо оно или опровержимо.
- Фактически программа Гильберта стремилась выработать некую общую процедуру для ответа на все математические вопросы или хотя бы доказать существование таковой.

Расцвет математической логики

- **Курт Гедель** (28 апреля 1906, Брюнн, Австро-Венгрия — 14 января 1978, Принстон, Нью-Джерси) — австрийский логик, математик и философ математики.
- Наиболее известен сформулированными и доказанными им **теоремами о неполноте**, которые оказали огромное влияние на представление об основаниях математики. Считается одним из наиболее выдающихся мыслителей XX века
- Учился и преподавал в Венском университете.
- В марте 1938 года Австрия была присоединена к нацистской Германии. В ходе начавшейся реформы университетской системы Гёдель остался без работы, хотя «неарийской крови» у него не было. В довершение неприятностей 32-летний математик был признан годным к армейской службе и получил мобилизационную повестку.
- В 1940 году Гёдель уехал в США, работал в принстонском Институте перспективных исследований.

Расцвет математической логики

- **Курт Гедель**
- В 1948 году Гёдель получил американское гражданство. На собеседовании он попытался доказать, что Конституция США формально-логически неполна и не гарантирует от установления диктатуры, но был вежливо остановлен.
- До самой смерти Эйнштейна (1955) они много времени проводили вместе, оживлённо обсуждая физику, политику и философию. Следствием этих бесед стали несколько статей Гёделя по теории относительности. В Австрию Гёдель не вернулся даже после войны, хотя Венский университет его настойчиво приглашал.
- Ещё с 1930-х годов у Гёделя обнаруживались признаки психических проблем. В 1936 году у него развился параноидальный страх отравления. Опорой Гёделя в нелёгкое время была его жена Адель, кормившая его с ложки и буквально выходившая мужа.
- Учёный скончался от «недоедания и истощения», индуцированных «расстройством личности», 14 января 1978 года в Принстоне. Адель пережила мужа на 4 года.

Расцвет математической логики

- **«Principia Mathematica»,** труд Рассела и Уайтхеда, строго обосновал математику на основе логики, но сюрпризы были обнаружены в самой логике.
- 7 сентября 1930 года в Кёнигсберге проходил научный конгресс по основаниям математики, и на этом конгрессе 24-летний Гёдель впервые обнародовал две фундаментальные **теоремы**, показавшие, что программа Гильберта не может быть реализована.
- **Первая теорема (о неполноте)** утверждает, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует невыводимая и неопровержимая формула.
- **Вторая теорема (о непротиворечивости)** утверждает, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней невыводима некоторая формула, содержательно утверждающая непротиворечивость этой арифметики.
- Статья с обеими теоремами («*О принципиально неразрешимых положениях в системе Principia Mathematica и родственных ей системах*») была опубликована в *Monatshefte für Mathematik und Physik* в 1931 году.

Расцвет математической логики

- В сущности, теорема Гёделя о неполноте похоронила надежды Лейбница о существовании логического метода, который мог бы вычислить ответ на все научные вопросы. Логика, по крайней мере в настоящем виде, недостаточна, чтобы доказать каждую математическую истину, тем более любую истину в нашем мире.
- Теоремы Гёделя показали, что Геттингенская программа Гильберта нереализуема.
- Гильберт сразу признал ценность открытий Гёделя; первые полные доказательства обеих теорем были опубликованы в книге Гильберта и Бернайса «Основания математики» (1938). О духе науки того времени говорит то, что Гильберт завершил доказательство теоремы, которая сводила на нет его труды в течение 25 лет.

Расцвет математической логики

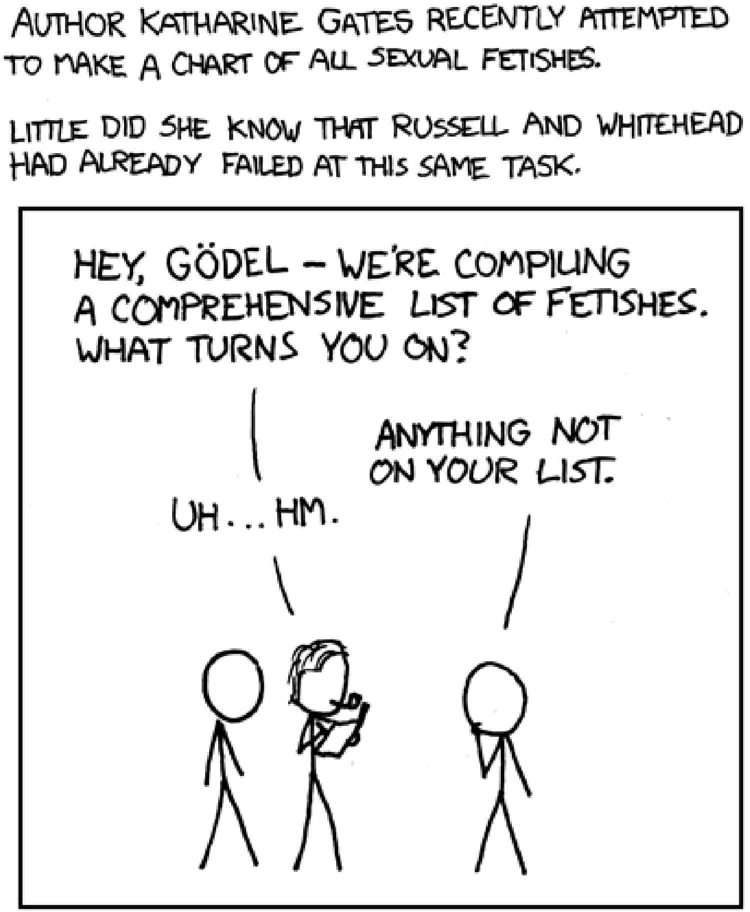
- В предисловии ко второму тому авторы признали, что для достижения поставленной цели финитных методов недостаточно, и добавили в число логических средств трансфинитную индукцию; в 1936 году Герхард Генцен сумел доказать с помощью этой аксиомы непротиворечивость арифметики, однако логическая полнота так и осталась недостижимой.
- *Вопреки распространённому заблуждению, теоремы о неполноте Гёделя не предполагают, что некоторые истины так и останутся навеки непознанными. Кроме того, из этих теорем не следует, что человеческие способности к познанию так или иначе ограниченны. Нет, теоремы всего лишь показывают слабости и недостатки формальных систем*

  Бертран Рассел.
- Теоремы о неполноте обрели статус важнейших открытий в логике со времен Аристотеля.

Расцвет математической логики

- Комикс Рэндела Манро о Расселе, Уайтхеде и Геделе.
- **Рэндел Манро** (*Randall Munroe*, род. 17 октября1984) — художник, программист, автор веб-комикса xkcd.
- Физик по образованию, Манро работал в НАСА, занимаясь проблемами робототехники. Начатый в качестве хобби комикс xkcd является в настоящий момент его основным занятием.

- https://www.explainxkcd.com/wiki/index.php/468:_Fetishes



Неклассические логики

Трехзначные логики

- ***Трёхзначная логика Лукасевича (1920)***
- Множества высказываний, каждое из которых может принимать одно из трёх значений: истина, нейтрально и ложь, обозначаемые соответственно И, Н, Л или 1, ½, 0. В качестве операций введены отрицание, обозначаемое Nx=1–x, конъюнкция Kxy=min(x,y), дизъюнкция Axy=max(x.y), импликация Cxy.
- Не выполняются законы исключенного третьего ($p \vee \neg p=1$), и непротиворечия ($\neg(p \& \neg p)=1$).

x\y	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

Неклассические логики

Трехзначные логики

- ***Трёхзначная логика Гейтинга***
- Отрицание, конъюнкция, дизъюнкция аналогично, импликация в таблице.
- ***Трёхзначные логики Рейхенбаха, Бочвара и Клини***.
- Рейхенбах построил свою логику для описания явлений квантовой механики. Если нельзя ни подтвердить истинность высказывания, ни опровергнуть его с помощью проверки, то такое высказывание должно оцениваться третьим значением – неопределенно. К числу таких высказываний относятся высказывания о ненаблюдаемых объектах в микромире.

x\y	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1/2	1

Неклассические логики

Конечнозначные логики

- ***Конечнозначная (k-значная, k≥2) логика Поста (1921 г.)*** является обобщением двузначной логики, т.е. при k=2 получится двузначная логика.
- Рассмотрим множество высказываний (переменных), каждое из которых может принимать одно из значений 0,1,2,…,k–1.
- На множестве введённых k–значных высказываний вводятся операции:
- ¬x =x+1(mod k) – циклическое отрицание или отрицание Поста,
- Nx=k–1–x – отрицание Лукасевича;
- Im(x)=k −1,если x = m, m=0,1,…,k–1. Im(x)= 0, если x ≠ m,
- [&y=min(x, y) – конъюнкция;
- x∨y=max(x, y) – дизъюнкция;
- x×y= x×y (mod k) – произведение по модулю k;
- x+y=x+y (mod k) – сумма по модулю k;
- …
- ***Многозначная логика Лукасевича.***

Неклассические логики

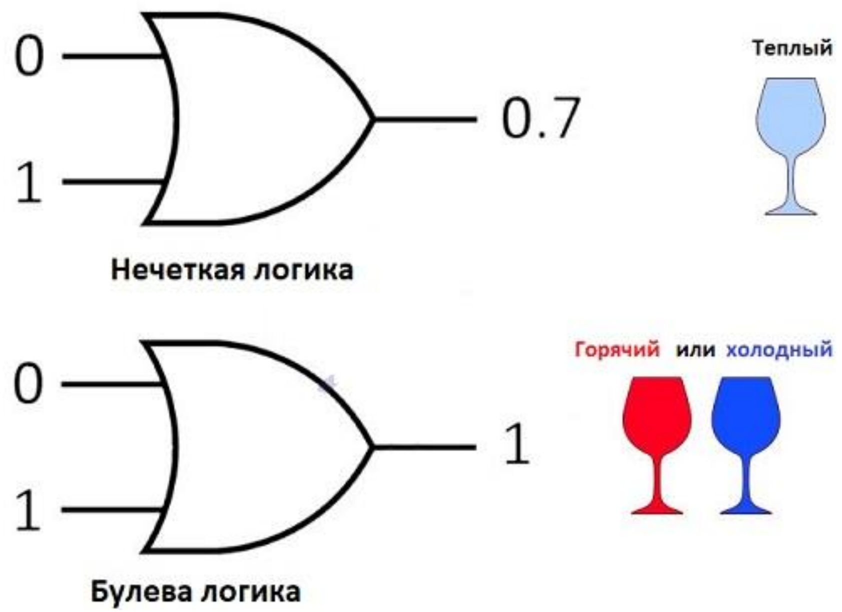
Бесконечнозначные логики

- Истинностное значение находится в отрезке действительных чисел от 0 до 1;
- отрицание определяется как: $\neg A = 1 - A$;
- конъюнкция определяется как: $A \wedge B = \min(A, B)$;
- дизъюнкция определяется как: $A \vee B = \max(A, B)$.
- Между **многозначными логиками** и **теорией вероятностей** есть принципиальное различие: в логиках истинностное значение любой функции целиком определяется истинностным значением её аргументов, в то время как в теории вероятностей вероятность составного события зависит не только от вероятностей входящих в него событий-компонентов, но и от их зависимости друг от друга (что выражается через их условные вероятности).
- Это проявляется, в частности, в том, что в теории вероятностей выполняется эквивалент «закона исключённого третьего»: вероятность того, что некоторое событие наступит или не наступит, всегда равна единице, в то время как в многозначных логиках закон исключённого третьего не выполняется.

Неклассические логики

Нечеткая логика (fuzzy logic)

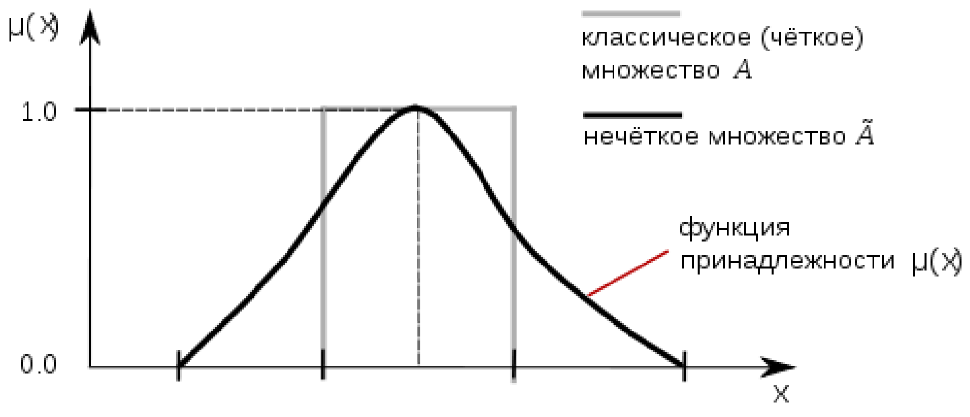
- Нечеткая логика (fuzzy logic) – надмножество классической булевой логики. Она расширяет возможности классической логики, позволяя применять концепцию неопределенности в логических выводах.
- Под термином “нечеткая логика” фактически понимается **непрерывная логика**, поскольку в данном случае вместе со значениями“ложь” и “истина” применяются значения между ними.



Неклассические логики

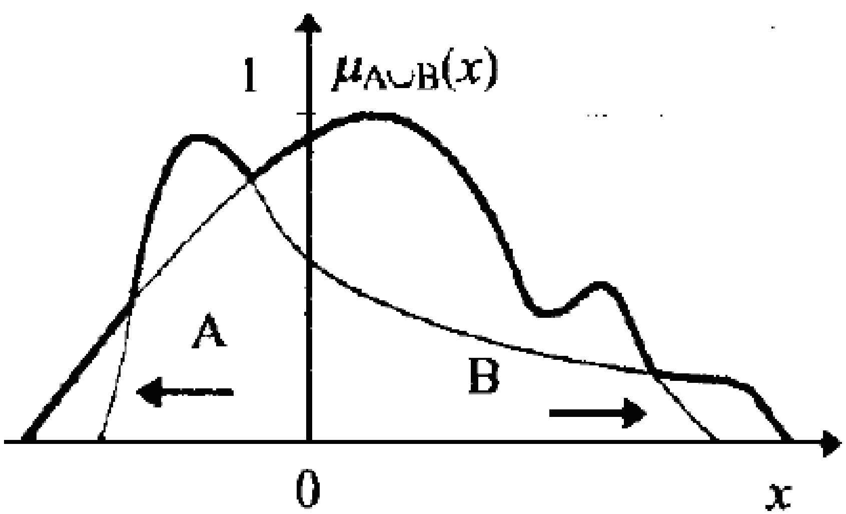
Нечеткая логика (fuzzy logic)

- Была представлена в 1960-х годах профессором Калифорнийского университета Лотфи Заде (Lotfi Zadeh).
- Первоначально нечеткая логика разрабатывалась как средство моделирования неопределенности человеческого языка.
- Нечеткие множества – обобщение множеств. Для них вводится **функция принадлежности** элемента к множеству, которая принимает значения из интервала [0,1].

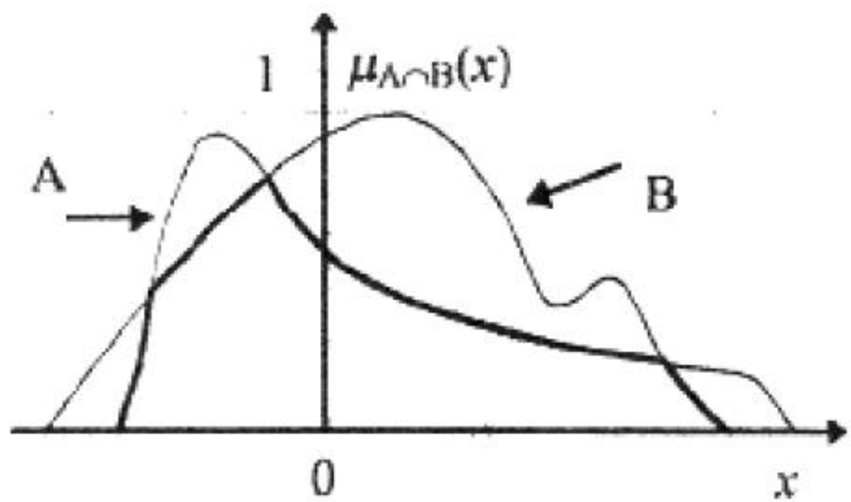


Неклассические логики

Объединение нечетких множеств



Пересечение нечетких множеств



Логика в информатике

Основная задача формальной логики

- *Даны:*
- База знаний Г ={φ1,...,φk}
- Высказывание ψ.
- *Проверить*, выводится ли ψ из Г по законам формальной логики.

Применение в информатике.

- ***Приложение 1***. *Экспертные системы*
- Г – база знаний экспертной системы
- Ψ – запрос к базе знаний
- Аппарат логического вывода – ядро экспертной системы. В том числе используются нечеткие логики.
- ***Приложение 2***. *Автоматизация научных исследований*.
- Г – система аксиом математической теории
- Ψ – математическое утверждение
- Аппарат логического вывода – ядро системы доказательства теорем.

Логика в информатике

- ***Приложение 3.*** *Программирование.*
- Вычисление программы – последовательное преобразование состояний данных интерпретатором
- Логический вывод – последовательное преобразование высказываний по законам формальной логики
- Γ – программа
- Ψ – исходные данные (вызов, запрос)
- Аппарат логического вывода – интерпретатор
- Языки логического программирования: Planner, Prolog, QLISP
- Answer Set Programming
- ***Приложение 4***. *Проверка правильности программ.*
- Правильная программа – это такая программа, поведение которой удовлетворяет заданной спецификации (требованиям корректности)
- Методы логики могут быть использованы для доказательства правильности программ

Логика в информатике

- ***Приложение 5.*** *Моделирование, анализ и диагностика цифровых систем.*
- Используются многозначные логики, особенно для технологии FPGA (field-programmable gate array).
- ***Приложение 6***. *Системы автоматического управления.*
- Используются нечеткие логики (нечеткие регуляторы).

Теория алгоритмов

- **Алонзо Чёрч** (14 июня 1903 года, Вашингтон — 11 августа 1995 года, Хадсон, Огайо, США) — американский математик и логик, внесший значительный вклад в основы информатики.
- Получил степень бакалавра искусств в Принстонском университете в 1924 году, и докторскую (Ph.D.) в 1927 году за работу «Alternatives to Zermelo's Assumption». Два года он был исследовательским стипендиатом, год провёл в Гарварде, затем — в Геттингене и Амстердаме. С 1929 года ассистент-профессор математики в альма-матер, с 1939 года доцент, с 1947 года профессор математики, с 1961 года профессор математики и философии.
- Прославился разработкой лямбда-исчисления.

Теория алгоритмов

- **Алан Тьюринг** (23 июня 1912 — 7 июня 1954) — английский математик, логик, криптограф, оказавший существенное влияние на развитие информатики.
- Кавалер Ордена Британской империи (1945), член Лондонского королевского общества (1951).
- Предложенная им в 1936 году абстрактная вычислительная «Машина Тьюринга», которую можно считать моделью компьютера общего назначения, позволила формализовать понятие алгоритма и до сих пор используется во множестве теоретических и практических исследований.

Теория алгоритмов

- **Алан Тьюринг.**
- Родился в Лондоне 23 июня 1912 года. Отец работал в Индийской гражданской службе. Родителям Алана приходилось часто путешествовать между Гастингсом и Индией, оставляя двоих своих сыновей на попечение отставной армейской пары.
- С первых лет жизни было понятно, что Алан чрезвычайно одаренный ребенок. К 6 годам он самостоятельно научился читать и просил у своих опекунов давать ему научные книги, а к 11 ставил химические опыты, пытаясь, к примеру, извлечь из морских водорослей йод.
- В 14 лет Алан поступил в престижную школу, где учились мальчики из аристократических семей. Однако успехи у него были весьма сомнительные: большинство гуманитарных дисциплин ему было неинтересно, и если заглянуть в классный журнал, то можно увидеть, что почти по всем предметам он был последним учеником в классе. Кроме математики — здесь Алан практически всегда числился под цифрой один.

Теория алгоритмов

- **Алан Тьюринг.**
- О его исключительных математических способностях лучше всего говорит тот факт, что во время учебы он самостоятельно разобрался в теории относительности Эйнштейна и сумел выделить проблемы, о которых сам автор говорит весьма завуалированно.
- Увлечение Тьюринга математикой не нашло особой поддержки среди учителей Шерборнской школы, где уделяли больше внимания гуманитарным наукам.
- «*Я могу смотреть сквозь пальцы на его сочинения, хотя ничего ужаснее в жизни своей не видывал, я пытаюсь терпеть его непоколебимую небрежность и непристойное прилежание; но вынести потрясающую глупость его высказываний во время вполне здравой дискуссии по Новому Завету я, все же, не могу*».
- Учился в Королевском колледже Кембриджа учился с 1931 по 1934 год под руководством известного математика Годфри Харолда Харди.

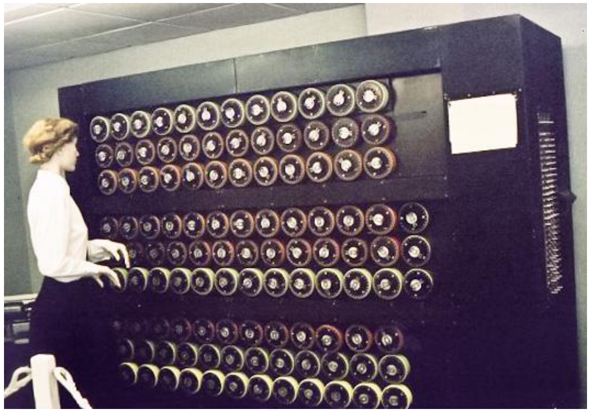
Теория алгоритмов

- **Алан Тьюринг.**
- В 1928 г. Давид Гильберт привлёк внимание мировой общественности к проблеме разрешения (*Entscheidungsproblem*). В своей работе «*On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*», опубликованной 12 ноября 1936 года, Тьюринг переформулировал теорему Гёделя о неполноте, заменив универсальный формальный арифметический язык Гёделя на простые гипотетические устройства, которые впоследствии стали известны как машины Тьюринга.
- В том же 1936 году профессор Принстонского университета (США) Джон фон Нейман, чьи работы Алан изучал, еще будучи студентом, и чье имя неразрывно связано с созданием ЭВМ, пригласил молодого ученого на стажировку. Несмотря на то что именно фон Неймана традиционно принято считать отцом современных электронно-вычислительных машин, он сам признавал, что фундаментальная их концепция принадлежит именно Алану Тьюрингу.

Теория алгоритмов

- **Алан Тьюринг.**
- 1 сентября 1939-го началась Вторая мировая война.
- Алан Тьюринг пришел на работу в Блетчли-парк — секретное подразделение английской разведки. Стараниями группы ученых был взломан код «Энигмы» — шифровальной машины, которую немецкое командование использовало для передачи секретных сообщений. В основу легли исследования польских ученых, до захвата Польши Германией.
- «*Я не хочу сказать, что мы выиграли войну благодаря Тьюрингу, но беру на себя смелость сказать, что без него мы могли бы ее и проиграть*».

И. Гуд, коллега Алана Тьюринга



Теория алгоритмов

- **Алан Тьюринг.**
- В ноябре 1942 года Тьюринг отправился в США, где совместно с криптоаналитиками ВМФ работал над взломом Энигмы и постройкой машин «Bombe» в Вашингтоне.
- В июле 1942 года Тьюринг принял участие в расшифровке кода «Лоренц», применявшегося немцами для передачи сообщений высшего командования. «Лоренц» был существенно сложнее «Энигмы» и не поддавался расшифровке существовавшими методами. Тьюринг предложил построить дешифратор на основе электронных ламп и привёл в команду Т. Флауэрса — опытного инженера-электронщика. В результате совместных усилий математиков и инженеров был разработан «Колосс» — одна из первых в мире ЭВМ. К 1944 году с помощью «Колосса» код «Лоренц» был взломан, что позволило союзникам читать всю переписку высшего германского руководства.

Теория алгоритмов

- **Алан Тьюринг.**
- В своей работе «Computing Machinery and Intelligence» (журнал «Mind», октябрь 1950) он обратился к проблеме искусственного интеллекта и предложил эксперимент, ставший впоследствии известным как тест Тьюринга. Его идея заключалась в том, что можно считать, что компьютер «мыслит», если человек, взаимодействующий с ним, не сможет в процессе общения отличить компьютер от другого человека.
- На основе этого эксперимента и было создано то, что сегодня известно каждому пользователю интернета: Captcha — тот самый «защитник», который просит подтвердить, что вы не робот.
- «Перу» Тьюринга принадлежит и первая компьютерная шахматная программа, которую он написал еще до появления самих компьютеров. Именно Тьюринга можно считать и создателем компьютерной музыки. В 1951 году созданная им машина была способна генерировать 3 мелодии, в числе которых и знаменитая «В настроении» Гленна Миллера.

Теория алгоритмов

- **Алан Тьюринг.**
- В 1952 году квартиру Алана Тьюринга обокрали. Он заявил в полицию, и в ходе следствия выяснилось, что это сделал некто Арнольд Мюррей — случайный знакомый Тьюринга, который однажды провел ночь в его доме. Ученый признал, что вступал с ним в связь — а в то время в Великобритании это считалось уголовным преступлением. Алану был предоставлен выбор между тюремным заключением и гормональной терапией. Он выбрал второе.
- Утром 8 июня 1954 года Алан Тьюринг был найден мертвым в своей кровати. Его обнаружила горничная. Причиной смерти стало отравление цианидом. На прикроватной тумбе лежало надкушенное яблоко, и хотя его экспертиза не проводилась, считается, что именно оно было отравлено самим Тьюрингом. Однако более современные исследования подвергли версию о самоубийстве сомнению.
- В 2013 году королева Великобритании Елизавета II официально помиловала Тьюринга за обвинения в «непристойности».

Теория алгоритмов

- Под **алгоритмом** понимается способ преобразования представления информации.
- **Основные особенности алгоритма**
- ***Определенность.*** Алгоритм разбивается на отдельные шаги (этапы), каждый из которых должен быть простым и локальным.
- ***Ввод.*** Алгоритм имеет некоторое (быть может, равное нулю) число входных данных, т.е. величин, заданных ему до начала работы.
- ***Вывод.*** Алгоритм имеет одну или несколько выходных величин, т. е. величин, имеющих вполне определенное отношение к входным данным.
- ***Детерминированность.*** После выполнения очередного шага алгоритма однозначно определено, что делать на следующем шаге.
- Мы будем рассматривать алгоритмы, имеющие дело только с натуральными числами.

Теория алгоритмов

- Пусть N обозначает множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, . . .\}$. Объекты, которые мы будем рассматривать, будут функциями с областью определения $D_f \subseteq N^k$ (k — целое положительное число) и с областью значений $R_f \subseteq N$. Такие функции будем называть ***k*-местными частичными**.
- Слово «частичная» должно напомнить о том, что функция определена на подмножестве N^k (конечно, в частном случае может быть $N^k = N^k$, тогда функция называется **всюду определенной**).
- Назовем k-местную функцию f: $N^k \to N$ **вычислимой**, если существует алгоритм A, её вычисляющий, т. е. такой алгоритм A, что:
- 1. Если на вход алгоритма A поступил вектор $x = <x_1, x_2,\ldots, x_k>$ из D_f , то вычисление должно закончиться после конечного числа шагов и выдать $f(x)$.
- 2. Если на вход алгоритма A поступил вектор x, не принадлежащий области определения D_f , то алгоритм A никогда не заканчивается.

Теория алгоритмов

- **Подходы к определению вычислимых функций.**
- ***Курт Гёдель и Стивен Клини (1936 г.).* Частично-рекурсивные функции.** Основная идея состояла в том, чтобы получить все вычислимые функции из существенно ограниченного множества базисных функций с помощью простейших алгоритмических средств.
- ***Алонзо Черч (1936г.).* Лямбда-исчисление.**
- ***Алан Тьюринг (1936г.).* Машина Тьюринга.** Абстрактная вычислительная машина с бесконечной лентой памяти, конечными входным алфавитом, множеством состояний и заданной функцией перехода.
- ***Эмиль Пост*.** Функции, определяемые **каноническими дедуктивными системами**.
- *А.А.Марков (1940-1950-е гг.)*. **Нормальные алгоритмы Маркова.** Система подстановок для строк символов.
- ***Шепердсон—Стерджис*. МНР-вычислимые функции.**

Теория алгоритмов

- **Теорема.** Каждое из вышеупомянутых уточнений вычислимости приводит к одному и тому же классу вычислимых функций.
- **Тезис Чёрча-Тьюринга.** Интуитивно и неформально определенный класс вычислимых функций совпадает с классом частично-рекурсивных функций.

Что такое тезис?

- Это **не теорема**, ибо тезис Чёрча не имеет доказательства.
- Это **не гипотеза**, ибо он и не может быть доказан.
- Это **не аксиома**, которую мы вольны принимать или не принимать.
- Всё это так из-за того, что тезис Чёрча не является точным математическим утверждением, ибо он связывает строгое понятие вычислимости с нестрогим понятием вычислимости в интуитивном смысле.

Теория алгоритмов

Тезис скорее является утверждением, которое принимается на веру, причем вера подкрепляется следующими аргументами:

- Фундаментальный результат: многие независимые инварианты уточнения интуитивного понятия вычислимости привели к одному и тому же классу функций.
- Обширное семейство вычислимых функций принадлежит этому классу.
- Никто еще не нашел функцию, которую можно было признать вычислимой в неформальном смысле, но которую нельзя было бы построить, используя один из формальных методов.

Теория алгоритмов

Алгоритмически неразрешимые проблемы.

- Алонзо Чёрч доказал, что не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.
- **Проблема останова** (Черч, Тьюринг). Не существует никакого общего алгоритма, позволяющего установить, остановится ли некоторая конкретная программа (на любом языке программирования), запущенная после введения в неё некоторого конкретного набора данных.
- **Десятая проблема Гильберта** (Ю. Матиясевич, 1970). Не существует общего алгоритма решения диофантовых уравнений.

Литература

- В. М. Зюзьков. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие. Томск : Эль Контент, 2015.
- Непейвода Н. Н. Прикладная логика : учеб. пособие. Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000.
- Успенский В. А. Апология математики. СПб. ; Амфора, 2009.
- Штейнгауз Г. Математика — посредник между духом и материей : пер. с польск. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
- Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. 4-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2012.
- Клини С. К. Введение в метаматематику. М. : Книжный дом «Либроком», 2009.
- Фреге Г. Логика и логическая семантика. Сборник трудов. М., Аспент пресс, 2000.
- Колмогоров А. Н., Драгалин А.И. Математическая логика. 3-е изд. М.: КомКнига, 2006.
- Галиев Ш.И. Математическая логика и теория алгоритмов. Казанский ГУ им. Туполева.
- http://digitrode.ru/articles/1242-chto-takoe-nechetkaya-logika-fuzzy-logic-princip-raboty-primery-primenenie.html
- **Спицын В.Г.** Разработка экспертных систем на основе нечетких правил вывода: методические указания к лабораторным работам. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011.