Математика после эпохи Возрождения

История и методология прикладной математики и информатики

Ю.Б.Буркатовская, доцент ОИТ

Математика и астрономия

- **Эпоха великих географических открытий**
- Арабы, начиная с VII века, блокировали Восток от Запада. Европейцы начали искать пути обхода этих заслонов.
- **Марко Поло (Венеция, XIII в.)** – северный путь в Китай (шелковый путь).
- **Васко да Гама (Португалия)** – достиг Индии, обогнув Африку (1497–1499). Затем португальцы достигли этим путем Индонезии, Китая и Японии.

Маршруты экспедиции Васко да Гамы в 1497—1499 гг.
Плавание в Индию
Возвращение в Португалию

Математика и астрономия

- **Эпоха великих географических открытий**
- **Христофор Колумб** (Генуя) – испанская экспедиция, открытие Америки в поисках Индии в западном направлении (1492 г.).
- **Фернан Магеллан** (Португалия) – испанская экспедиция, достигла Азии через запад, вернулась в Испанию, обогнув Африку (1519–1522 гг.).

Математика и астрономия

Математика и астрономия

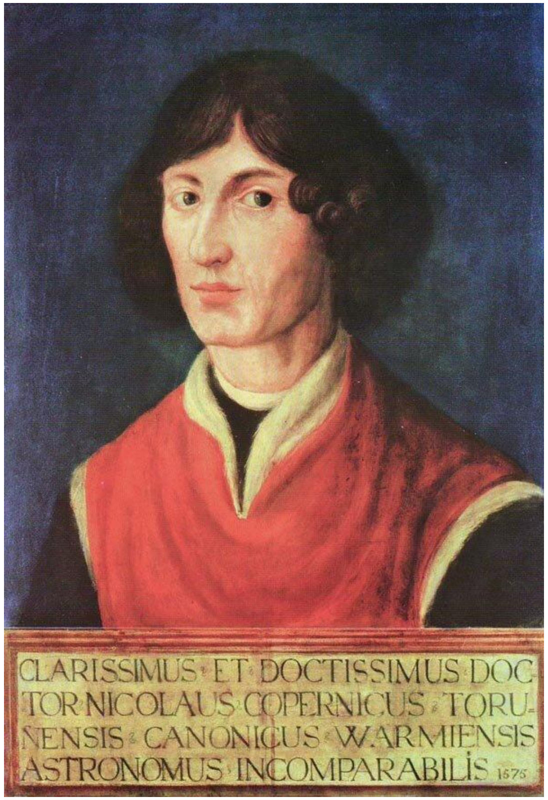
- **Связь математики и астрономии**
- *Тригонометрия* возникла из нужд астрономии, стала самостоятельной наукой благодаря Туси (XIII в.) и Мюллера (XV в.) Астрономия ставила перед математикой задачу *определения точных координат*.
- *Широту* определяли достаточно точно (по звездам), для определения *долготы* понадобилось три столетия с плавания Колумба.
- В 1707 г. − катастрофа английского флота. Возвращавшийся из Средиземного моря на родину отряд кораблей из-за навигационной ошибки (неверного определения долготы) 22 октября оказался на скалах у островов Силли. В результате погибли «Ассосиейшн», 70-пушечный «Игл», 50-пушечный «Ромни» и небольшой 8-пушечный «Файрбрэнд». Катастрофа унесла свыше 1550 жизней, включая командующего флотом адмирала сэра Клодисли Шовеля.

Математика и астрономия

- **Проблема определения долготы** – одна из задач, поставленных при создании Лондонского королевского общества и Французской академии наук.
- **Христиан Гюйгенс (1657)** – теория маятниковых часов.
- **Исаак Ньютон, Леонард Эйлер** – изучали движение Луны.
- **Герард Меркатор** – картография.
- Английский парламент установил премию в 20 тысяч фунтов стерлингов за изобретение часов, точных в условиях плавания. Две идеи: точные часы и наблюдения за небом.
- **Джон Гаррисон** – создал маятниковые часы в 1761 г. Использовались во второй экспедиции Кука.
- http://inhoras.com/persona/garrison

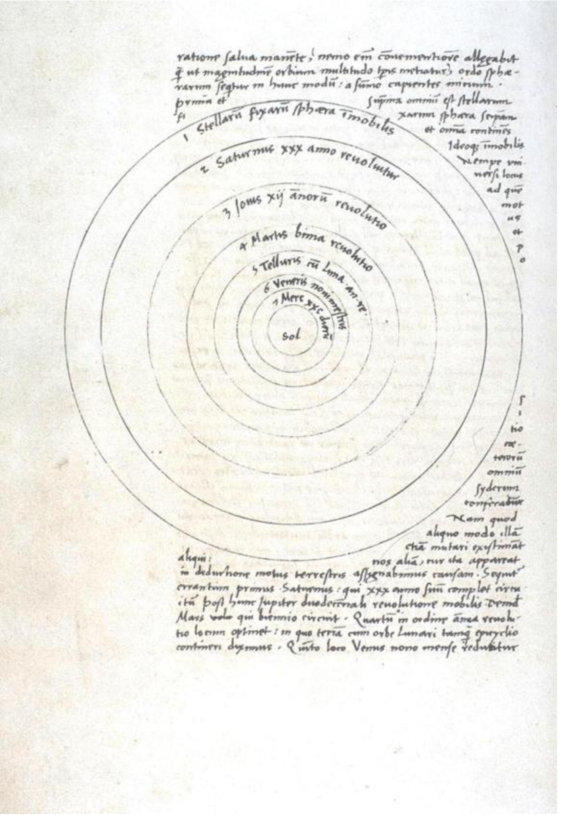
Математика и астрономия

- **Гелиоцентрическая модель Солнечной системы**
- **Николай Коперник (**19 февраля 1473, Торунь — 24 мая 1543, Фромборк**)**
- «О вращении небесных сфер» (1543)
- *Принимая в соображение, какой нелепостью должно показаться это учение, я долго не решался напечатать мою книгу и думал, не лучше ли будет последовать примеру пифагорейцев и других, передававших своё учение лишь друзьям, распространяя его только путём предания.*



Математика и астрономия

- **Гелиоцентрическая модель Солнечной системы**
- Орбиты и небесные сферы не имеют общего центра.
- Центр Земли – не центр вселенной, но только центр масс и орбиты Луны.
- Все планеты движутся по орбитам, центром которых является Солнце, и поэтому Солнце является центром мира.
- Расстояние между Землёй и Солнцем очень мало по сравнению с расстоянием между Землёй и неподвижными звёздами.



Математика и астрономия

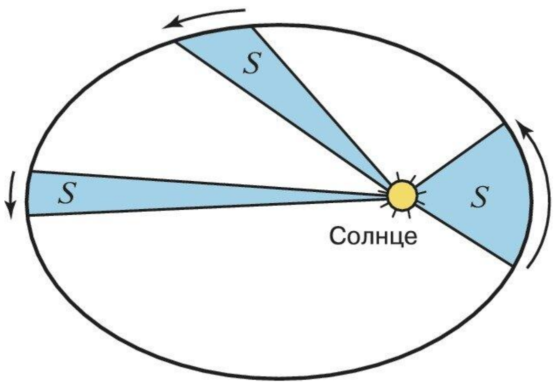
- **Гелиоцентрическая модель Солнечной системы**
- Суточное движение Солнца − воображаемо, и вызвано эффектом вращения Земли, которая поворачивается один раз за 24 часа вокруг своей оси, которая всегда остаётся параллельной самой себе.
- Земля (вместе с Луной, как и другие планеты), обращается вокруг Солнца, и поэтому те перемещения, которые, как кажется, делает Солнце (суточное движение, а также годичное движение, когда Солнце перемещается по Зодиаку) – не более чем эффект движения Земли.
- Это движение Земли и других планет объясняет их расположение и конкретные характеристики движения планет.
- **Планеты движутся по круговым орбитам.**

Математика и астрономия

- **Тихо Браге (1546-1601)** – датский астроном XVII в.
- Разработал новаторские методы и высокоточные инструменты для слежения за звездами, в течение долгих лет вел наблюдения, позволившие будущим поколениям ученых сделать важные научные открытия. Был приверженцем геоцентрической системы.
- В ноябре 1572 г. в созвездии Кассиопеи Браге обнаруживает новую звезду, которую позже назовут его именем. Лишь в XX в. ученые докажут, что эта звезда была первой сверхновой, рожденной в нашей Галактике за ближайшие 5 сотен лет.
- В 1576-80 гг. по личному проекту Тихо Браге на острове Вен длилось строительство обсерватории Ураниборг («Замок Урании»), названной так в честь музы астрономии.
- В 1600 г. Браге взял к себе в помощники начинающего астронома Иоганна Кеплера, и доверил ему обработку данных, полученных за 16 лет тщательных наблюдений планеты Марс.

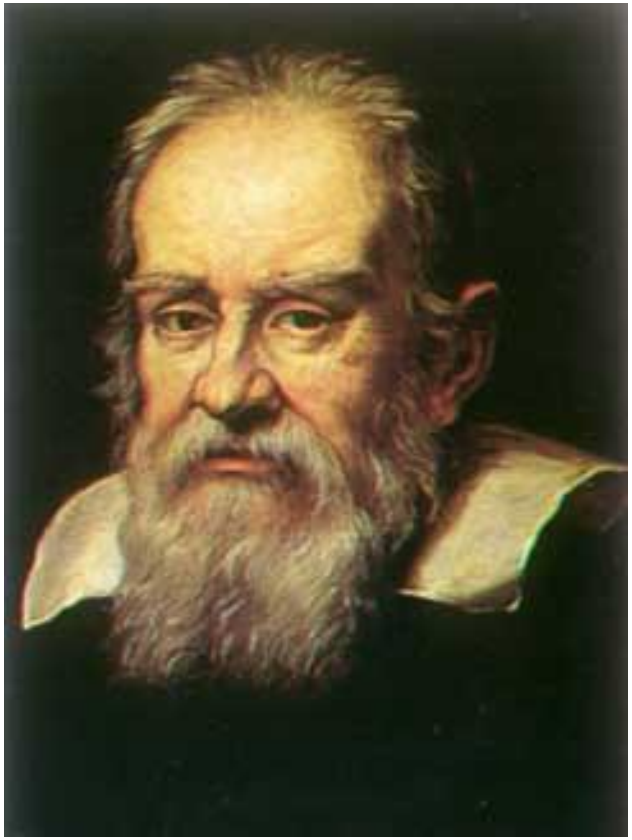
Математика и астрономия

- **Иоганн Кеплер** (1571−1630) — немецкий астроном, один из творцов астрономии нового времени.
- **Законы Кеплера**.
- **Первый** гласит, что планета движется по эллипсу, в одном из двух фокусов которого находится Солнце.
- **Второй**, что радиус-вектор планеты заметает одинаковые площади за равные промежутки времени.
- **Третий** закон, названный законом гармонии, устанавливает точную связь между радиусом орбиты планеты и периодом ее обращения вокруг Солнца.



Математика и астрономия

- **Галилео Галилей** (15 февраля 1564, Пиза — 8 января 1642, Арчетри) — итальянский физик, механик, астроном, философ, математик.
- **Основные открытия**
- **Телескоп** (рельеф луны, спутники Юпитера, пятна на Солнце, звезды Млечного Пути). Поддерживал теорию Коперника.
- **Научный метод** (сочетание теории и эксперимента). Изучал свободное падение и обнаружил закономерность: вес тела не влияет на его падение. Скорость растет пропорционально времени, расстояние – пропорционально квадрату времени.
- **Принцип инерции.** Если на тело не действуют силы, оно покоится либо равномерно движется.



Математика и астрономия

- **Основные открытия Галилео Галилея**
- Доказал, что брошенное под углом к горизонту тело летит **по параболе**. В истории науки это первая решённая задача **динамики**.
- **Закон движения маятника.** Период колебаний не зависит от их амплитуды (верно для малых амплитуд). Маятниковые часы.
- **Сопротивление материалов.** Впервые в истории науки Галилей поставил вопрос о прочности стержней и балок при изгибе.
- **Теории вероятностей.** Исследование об исходах при бросании игральных костей.
- **Теория множеств.**

льшая часть чисел не являются квадратами.

Математика и астрономия

Основные труды Галилео Галилея

- О движении, около 1590.
- Механика, около 1593.
- Звёздный вестник, 1610.
  - Книга имела огромный успех, даже коронованные особы заказывали себе телескопы. Галилей становится одним из известнейших ученых Европы.
- Рассуждение о телах, погружённых в воду, 1612.
- Письма о солнечных пятнах, 1613.
  - Открыто высказался в пользу системы Коперника. После этого гелиоцентризм был признан церковью опасной ересью.
- Пробирных дел мастер, 1623.
- Диалог о двух системах мира, 1632.
  - Ватикан признал книгу ересью, в итоге инквизиция вынудила Галилея отречься от его учения и приговорила к тюремному заключению.
- Беседы и математические доказательства двух новых наук, 1638.
  - Основы кинематики и сопротивления материалов

Математика и астрономия

«Галилей, пожалуй, больше, чем кто-либо другой из отдельных людей, ответствен за рождение современной науки. Знаменитый спор с Католической Церковью занимал центральное место в философии Галилея, ибо он одним из первых объявил, что у человека есть надежда понять, как устроен мир, и, более того, что этого можно добиться, наблюдая наш реальный мир.»

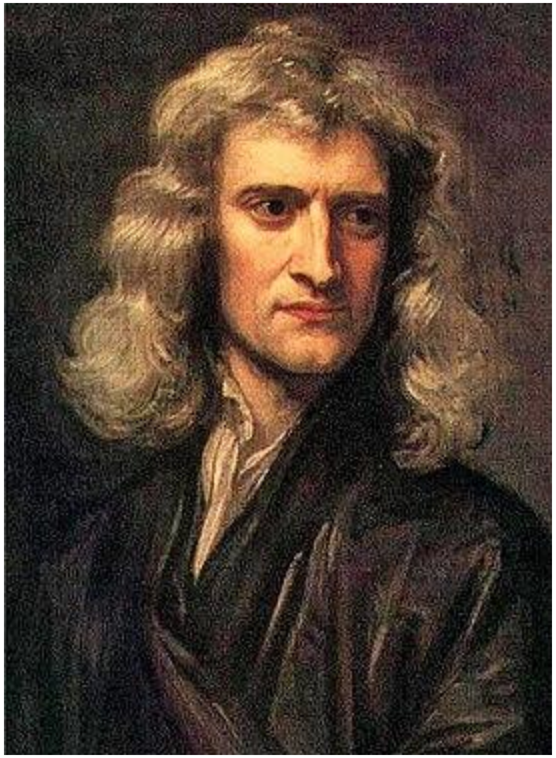
Стивен Хокинг.

«Требовалась исключительная сила духа, чтобы извлечь законы природы из конкретных явлений, которые всегда были у всех перед глазами, но объяснение которых тем не менее ускользало от пытливого взгляда философов».

Жозеф Луи Лагранж.

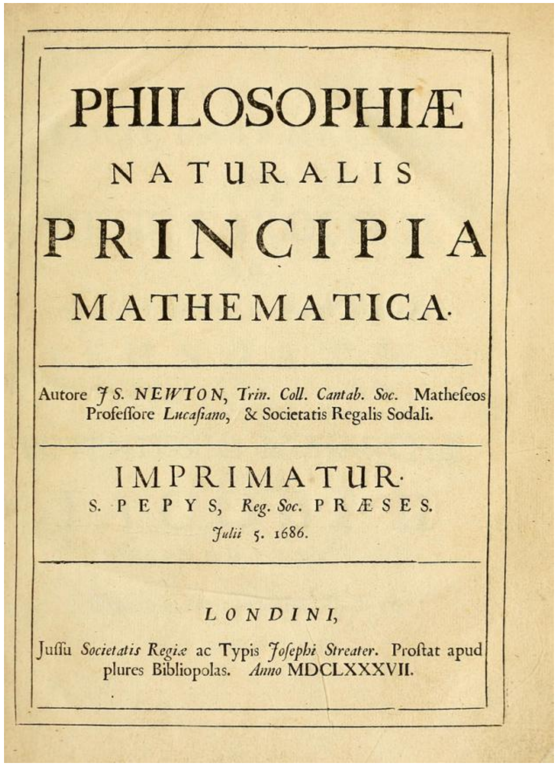
Математика и астрономия

- **Исаак Ньютон (**25 декабря 1642 года — 20 марта 1727 года**)** − английский физик, математик, механик и астроном.
- **Закон всемирного тяготения.**
- *В бумагах, написанных более 15 лет тому назад ... я выразил обратную квадратичную пропорциональность тяготения планет к Солнцу в зависимости от расстояния и вычислил правильное отношение земной тяжести и conatus recedendi [стремление] Луны к центру Земли, хотя и не совсем точно.*
- Неточность была вызвана тем, что размеры Земли и величину ускорения свободного падения Ньютон взял из «Механики» Галилея. Позднее Ньютон получил более точные данные Пикара.



Математика и астрономия

- **“Математические основы натуральной философии” (1684—1686)**
- Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения и принцип движения планет. Он *строго доказывает* этот факт, исходя из наблюдаемой картины движения планет и их спутников.
- Он описал орбиты разных небесных тел, в том числе тех, которые еще не были известны его предшественникам (например, Кеплеру).
- Метод Ньютона — создание модели явления, «не измышляя гипотез», а потом уже, если данных достаточно, поиск его причин.


PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR. S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES. Julii 5. 1686.

LONDINI, Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Математика и астрономия

- **Задачи астрономии – вычисление подробных и точных таблиц тригонометрических функций**
- Работы аль-Каши долго были неизвестны европейцам (десятичные дроби, число π и sin1 до 17 знака.
- **вин** (1548 (по др. сведениям 1549), Брюгге — 1620, Гаага или Лейден) — фламандский математик, механик и инженер. Ввел в Европе десятичные дроби. Разработал таблицы сложных процентов.
- Другая заслуга Стевина — разрыв с античной традицией и полное уравнение в правах иррациональных чисел. В своём трактате «*Арифметика*» он определил число как «*меру количества некоей вещи*» и провозгласил, что «*единица делима*». С некоторой осторожностью он использовал и отрицательные числа.
- Вслед за Оремом Стевин ввёл дробные (хотя в данном случае — не десятичные) показатели степени (например, 2/3).

Математика и астрономия

- **Задачи астрономии – вычисление подробных и точных таблиц тригонометрических функций**
- **Франсуа Виет** вычислил 9 знаков числа π.
- **Адриан ван Роумен** вычислил 16 знаков числа π (метод многоугольников Архимеда).
- **Людольф ван Цейлен** вычислил 35 знаков числа π. Во многих странах π стало известно как лудольфово число.

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028$$

- К концу XVI века появились таблицы всех шести тригонометрических функций с шагом в 10 секунд. Над таблицами работали Мюллер, Коперник, Виет, Кеплер, и др. Вычисления производились в целых числах, при радиусе окружности 10^{10}.

Изобретение логарифмов

- **Логарифмы** позволили свести к сложению не только умножение и деление, но также степень и извлечение корня.
- **Идея:** сравнение арифметической и геометрической прогрессий.

	-2	**-1**	**0**	**1**	**2**	**…**	***k***	**…**
…	q^{-2}	q^{-1}	q^{0}	q^{1}	q^{2}	…	q^{k}	…

- Умножению элементов «нижней» последовательности соответствует сложение элементов «верхней» последовательности.

$$x = x_1 + x_2 \qquad q^x = q^{x_1+x_2} = q^{x_1}q^{x_2}$$

Изобретение логарифмов

- **Йост Бюрги** (*Jost Bürgi*; 28 февраля 1552, Лихтенштейг — 31 января 1632, Кассель) — швейцарский и немецкий математик, астроном, часовщик и приборостроитель.
- Основываясь на таблицах сложных процентов Стевина, составил таблицы с основанием

$$\sqrt[10]{1+10^{-4}}$$

- Не пользовался десятичными дробями, что упростило бы работу.
- Работал над таблицами с 1603 по 1611 гг., опубликовал в 1620 г., уступив настойчивой просьбе Кеплера. Поэтому не считается первооткрывателем логарифмов.
- Впервые сконструировал часы с секундной стрелкой.

Изобретение логарифмов

- **Джон Непер** (англ. *John Napier*; 1550—1617) — шотландский математик, один из изобретателей логарифмов, первый публикатор логарифмических таблиц, астроном. 8-й лэрд Мерчистона.
- **«Описание удивительной таблицы логарифмов»** (1614 г., 56 страниц текста и 90 страниц таблиц). Краткое описание логарифмов и их свойств, а также семизначные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0° до 90°, с шагом 1′.
- Понятия функции тогда ещё не было, и Непер определил логарифм кинематически, сопоставив равномерное и логарифмически замедленное движение.

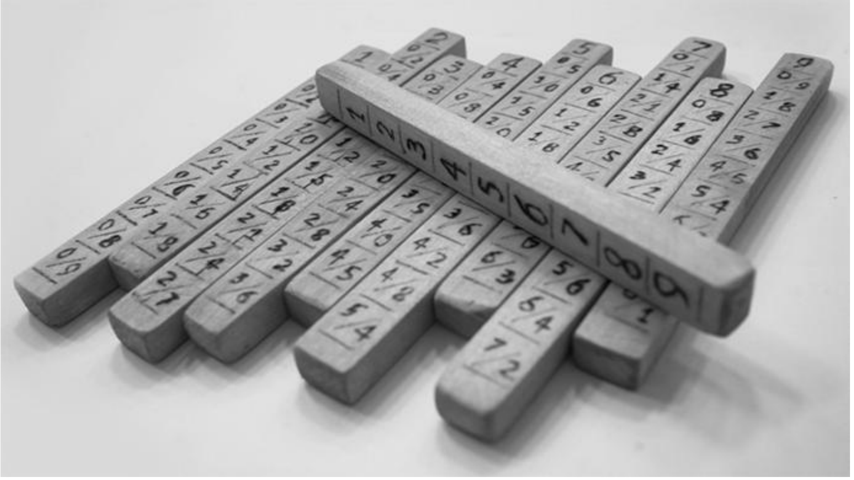
$$\mathrm{Nep}\log y = 10^7 \; \ln 10^7 - \ln y$$

Изобретение логарифмов

- Все значения таблицы Непера, как оказалось, содержали вычислительную ошибку после шестого знака.
- **Джон Непер** и **Генри Бригс** пришли к идее десятичных логарифмов, Бриггс опубликовал таблицы в год смерти Непера.
- Но и в таблицах Бригса обнаружились ошибки. Первое безошибочное издание на основе таблиц **Георга Веги** появилось только в 1857 году в Берлине (таблицы **Бремикера**).
- В 1620-е годы **Эдмунд Уингейт** и **Уильям Отред** изобрели первую логарифмическую линейку.
- Современное определение логарифмирования — как операции, обратной возведению в степень — впервые появилось у Валлиса и Иоганна Бернулли, а окончательно было узаконено Эйлером в XVIII веке. Эйлеру принадлежит и заслуга распространения логарифмической функции на комплексную область.

Изобретение логарифмов

Палочки Непера	Логарифмическая линейка



Математика переменных величин

- XVII век − сближение научного и технического прогресса. Развитие механики.
- Внедрение математики в механику и естествознание (Галилей, Кеплер, Ньютон).
- Ученые-универсалы (Галилей, Декарт, Спиноза, Лейбниц) искали универсальный метод изучения природы. Таким средством становится в том числе математика.
- Университеты достаточно консервативны, возникают академии в Неаполе (1560), Риме (1603), Лондонское королевское общество (1662), Парижская академия наук (1666).
- Первые научные журналы (Лондон, Париж, Лейпциг).

Математика переменных величин

Новые математические дисциплины

- Математический анализ (Ньютон, Лейбниц).
- Аналитическая геометрия (Декарт, Ферма)
- Проективная и дифференциальная геометрия (Паскаль, Гюйгенс, Кеплер)
- Теория вероятностей (Якоб Бернулли, Ферма).

Математика переменных величин

Рене Декарт (31 марта 1596, Лаэ — 11 февраля 1650, Стокгольм) — французский философ, математик, механик, физик и физиолог.

- Происходил из мелких дворян.
- Учился в иезуитском колледже, в результате стал скептически относиться к философским приоритетам того времени. Позже он сформулировал свой метод познания: *дедуктивные (математические) рассуждения над результатами воспроизводимых опытов*.
- В 1612 году Декарт закончил коллеж, некоторое время изучал право в Пуатье, затем уехал в Париж, где несколько лет чередовал рассеянную жизнь с математическими исследованиями.

Математика переменных величин

Рене Декарт

- Военная служба (1617) — сначала в Голландии, затем в Германии.
- В Голландии в 1618 году Декарт познакомился с выдающимся физиком и натурфилософом Исааком Бекманом, оказавшим значительное влияние на его формирование как учёного.
- Затем — ещё несколько лет участия в войне (осада Ла-Рошели). По возвращении во Францию оказалось, что свободомыслие Декарта стало известно иезуитам, и те обвинили его в ереси. Поэтому Декарт переезжает в Голландию (1628), где проводит 20 лет в уединённых научных занятиях.
- В 1634 году он заканчивает свою первую, программную книгу под названием «Мир» (*Le Monde*), состоящую из двух частей: «Трактат о свете» и «Трактат о человеке». Но момент для издания был неудачным — годом ранее инквизиция осудила Галилея. Поэтому Декарт решил при жизни не печатать этот труд.
- В 1649 году Декарт переехал в Стокгольм. Почти сразу после переезда он серьёзно простудился и вскоре умер.

Математика переменных величин

Основные математические труды Декарта

- "Геометрия" (1637)
- "Рассуждение о методе..." (1637)
  - Главный тезис: геометрия и алгебра есть единая наука математика и никаких принципиальных различий между ними нет.
  - Координатный метод (аналитическая геометрия). Декартова система координат.
  - Избавление от размерности величин, введение единичного отрезка
  - Решение геометрических задач алгебраическими методами
  - Задание кривой с помощью уравнения (шаг к функции). Кривые рассматривались только в первой четверти, неудобная классификация кривых.
  - Геометрическая иллюстрация алгебраических задач

Математика переменных величин

Основные математические труды Декарта

- Правило определения числа положительных корней уравнения
  - Число положительных корней уравнения равно числу перемен знака в коэффициентах, либо меньше этого числа на четное число
- Математическая символика, близкая к современной (переменные, коэффициенты, показатель степени)
  - x,y,z – переменные
  - a,b,c – коэффициенты
- Сформулировал основную теорему алгебры
  - Многочлен n-той степени имеет ровно n корней.
  - Различал действительные, воображаемые (отрицательные) и мнимые (комплексные) корни

Математика переменных величин

Пьер Ферма (17 августа 1601 — 1 января 1665) — французский математик-самоучка, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел.

- По профессии юрист, с 1631 года — советник парламента в Тулузе. Блестящий полиглот. Наиболее известен формулировкой **Великой теоремы Ферма**, «самой знаменитой математической загадки всех времён»[
- Ферма приобрёл славу одного из первых математиков Франции, хотя и не писал книг (научных журналов ещё не было), ограничиваясь письмами к коллегам (Рене Декарт, Блез Паскаль, и другие).

Математика переменных величин

Пьер Ферма.

Аналитическая геометрия

- Уравнения первого и второго порядка (прямые и конические сечения).

$$y = mx, \quad xy = k^2, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 \pm a^2 y^2 = b^2$$

- Рассматривает общие уравнения второго порядка, сводит их сдвигом и поворотом осей к каноническому виду (в отличие от Декарта).
- Введение в аналитическую геометрию бесконечно малых величин.

Математический анализ

- Первым предложил метод определения максимума и минимума функции. Декарт не разобрался в методе и раскритиковал его.
- Лемма Ферма: производная в точках экстремума равна нулю.
- Поиск касательных и площадей.
- Показал, что площадь неограниченной фигуры может быть конечной
- Вычисление длин дуг кривых и сведение их к площадям (один шаг до интеграла).

Математика переменных величин

Пьер Ферма. Теория чисел

- *Арифметика имеет свою собственную область, теорию целых чисел; эта теория была лишь слегка затронута Евклидом и не была достаточно разработана его последователями (если только она не содержалась в тех книгах Диофанта, которых нас лишило разрушительное действие времени); математики, следовательно, должны ее развить или возобновить.*
- **Малая теорема Ферма.** *Если a не делится на простое число p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.* Доказано и обобщено Леонардом Эйлером.
- Простые числа вида $4k+1$ представляются в виде суммы квадратов, причем единственным способом (доказано Леонардом Эйлером, ушло 7 лет).
- **Великая теорема Ферма.** Диофантово уравнение $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$ не имеет решения в натуральных числах. Доказано Эндрю Уайлсом в 1995 г.
- Индуктивный метод бесконечного спуска для решения диофантовых уравнений.

Математика переменных величин

Пьер Ферма. Теория вероятностей

- В переписке Ферма с Блезом Паскалем было определено понятие математического ожидания, сформулированы теоремы сложения и умножения вероятностей. Результаты этих обсуждений приведены в работе Христиана Гюйгенса "О расчётах в азартной игре" (1657 г.).
- Задачи **шевалье де Мере**.
- 1) Сколько раз нужно подбросить две кости, чтобы число случаев, благоприятствующих выпадению хотя бы раз двух шестерок, было больше, чем число случаев, когда ни при одном бросании не появляются две шестерки одновременно?
- 2) Два игрока играют и они договорились, что то, кто первым выиграет 6 партий, получит весь приз. Предположим, то на самом деле игра остановилась, до того, как один из них выиграл приз (например, первый игрок выиграл 5 партий, второй − 3). Как справедливо следует разделить приз? Большинство математиков XVI − XVII вв. считали, что в отношении 5:3, один из них − Тарталья считал, что 2:1. Паскаль и Ферма установили, что 7:1

Математика переменных величин

Марен Мерсенн (8 сентября 1588 — 1 сентября 1648) — французский математик, физик, философ и богослов, теоретик музыки.

- На протяжении первой половины XVII века был, по существу, координатором научной жизни Европы, ведя активную переписку с видными учёными того времени.
- Учился в иезуитском коллеже в Ла-Флеш, вместе с Декартом, тесную дружбу с которым Мерсенн пронёс через всю жизнь. Мерсенн не только сообщал Декарту о новейших научных идеях и достижениях, но также защищал его от клерикальных нападок и помогал в издании трудов
- В числе его 78 корреспондентов, кроме Декарта, были Галилей, Кавальери, Бекман, Этьен и Блез Паскали, Роберваль, Торричелли, Ферма, Гюйгенс, и многие другие.
- Об открытиях Ферма мы знаем практически только из его переписки с Мерсенном, изданной посмертно.
- В течение его продолжительного пребывания в Париже у него еженедельно происходили собрания математиков и физиков (*четверги Мерсенна*). Позднее из этого кружка образовалась, при содействии Кольбера, Парижская академия наук.
- Мерсенн известен более всего как исследователь «чисел Мерсенна», играющих важную роль в теории чисел, криптографии и генераторах псевдослучайных чисел.

Математика переменных величин

Анализ бесконечно малых (вычисление площади и объема)

- Еще Архимед работал с бесконечно малыми.
- Динамика (ветвь механики) основана на понятии бесконечно малой величины.
- Смысл бесконечно малой **в то время**: не изменяющаяся неотрицательная величина, меньшая любой конечной величины и не равная тождественно нулю (актуальная бесконечно малая).
- **Современная бесконечно малая**: переменная величина, которая в процессе своего изменения становится меньше любой конечной величины.
- **Кеплер. «***Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии*»
- Формулы для объемов тел вращения (всего 92 тела), метод суммирования бесконечно малых, предложенный Архимедом.

Математика переменных величин

Анализ бесконечно малых (вычисление площади и объема)

- **Галилей** − математическое описание движения, зависимость между ускорением, расстоянием и скоростью.
- **Бонавентура Кавальери** (1598 −1647) − ученик Галилея, возглавлял кафедру в Болонском университете.
  - *«Геометрия, изложенная новым способом неделимых непрерывного» (1635)*
  - *«Шесть геометрических опытов» (1647)*
- Изобрел **метод неделимых** для вычисления площадей плоских фигур и объемов тел. Фигуры состоят из параллельных отрезков прямых, тела − из плоских фигур. Это и есть неделимые, их бесконечно много, и они не имеют толщины. Получил результат

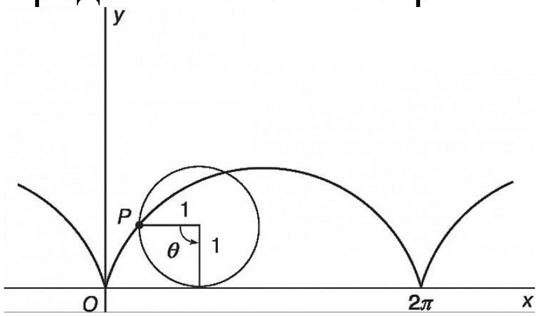
$$\int_0^a x^m dx = \frac{1}{m+1} a^{m+1}$$

- Эта идея есть у Архимеда в «Письмах к Эратосфену», обнаруженных в 1909г.

Математика переменных величин

Анализ бесконечно малых (вычисление площади и объема)

- Метод неделимых логически несовершенен, поскольку площадь составляется из отрезков, не имеющих ширины.
- **Торичелли** показал, что если суммировать отрезки, то из правила Кавальери следует, что высота делит треугольник на две равные по площади части.
- Совершенствование метода − вместо суммы неделимых рассматриваются суммы элементарных площадей.
- **Ферма** ввел неравномерное разбиение абсциссы и доказал формулу для рациональных показателей *m*.
- Блез Паскаль − дал наиболее четкое определение определенного интеграла в трактате «Общий трактат о рулетте». (Циклоида)



Математика переменных величин

Блез Паскаль (19 июня 1623, Клермон-Ферран — 19 августа 1662, Париж, Франция) — французский математик, механик, физик, литератор и философ.

- Сын председателя налогового управления Этьена Паскаля и Антуанетты Бегон.
- Этьен и сам неплохо разбирался в математике — дружил с Мерсенном и Дезаргом, открыл и исследовал неизвестную ранее алгебраическую кривую, с тех пор получившую название «улитка Паскаля», входил в комиссию по определению долготы, созданную Ришельё.
- С 14 лет Блез Паскаль участвовал в еженедельных семинарах Мерсенна, проводимых по четвергам.

Математика переменных величин

Блез Паскаль. Основные открытия

- **«Опыт о конических сечениях» (1640).** Проективная геометрия. Теорема Паскаля: *Если вершины шестиугольника лежат на некотором коническом сечении, то три точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны, лежат на одной прямой*. Этот результат и 400 следствий из него Паскаль изложил в «Полном труде о конических сечениях», который был впоследствии утерян.
- **Суммирующая машина «Паскалина» (1642).** Принцип действия − зубчатая передача, положен в основу арифмометров.
- **«Трактат о равновесии жидкостей» (1653).** Основной закон гидростатики. Подтвердил предположение Торричелли об атмосферном давлении.
- **«Трактат об арифметическом треугольнике» (1665).** Свойства «треугольника Паскаля» и его применение к подсчёту числа сочетаний, не прибегая к алгебраическим формулам.

Математика переменных величин

Блез Паскаль. Основные открытия

- **«Общий трактат о рулетте» (1640).** Основа дифференциального и интегрального исчисления.

Паскаль как философ и писатель.

- **«Письма к провинциалу» (1956–1957**). Критика ордена иезуитов (под псевдонимом)
  - «*Делались попытки самыми различными способами показать иезуитов отвратительными; Паскаль сделал больше: он показал их смешными*». Вольтер.
- **«Мысли о религии и других предметах»** В основном они посвящены взаимоотношению Бога и человека, а также апологетике христианства в янсенистском понимании.
  - «Есть только три разряда людей: одни обрели Бога и служат Ему; эти люди разумны и счастливы. Другие не нашли и не ищут Его; эти люди безумны и несчастны. Третьи не обрели, но ищут Его; эти люди разумны, но пока несчастны»

Математика переменных величин

Анализ бесконечно малых (касательные и экстремумы).

- **Ферма –** первый решил задачу об экстремуме.
- **Торричелли и Барроу** – использовали кинематику, раскладывая скорость движения материальной точки по осям.
- **Исаак Барроу (1630 – 1677)** – профессор математики Кембриджского университета, у которого учился Исаак Ньютон. Впервые в 1670 году указал в «Лекциях по оптике и геометрии» на связь построения касательной (дифференцирование) и квадратур (интегрирование).
- **Джон Валлис (1616 – 1703).** «Арифметика бесконечного» (1655).
  - Ввёл придуманный им символ бесконечности.
  - Сформулировал строгое определение предела переменной величины.
  - Впервые ввёл отрицательные абсциссы.
  - Вычислил суммы бесконечных рядов — по существу интегральные суммы, хотя понятия интеграла тогда ещё не было.

Математика переменных величин

Анализ бесконечно малых (касательные и экстремумы).

- «Трактат о конических сечениях»
  - Развил «метод неделимых» Кавальери, перенеся его с геометрической базы на алгебраическую с помощью понятия бесконечно малого.
  - Вычислил ряд определённых интегралов для степенной функции и близких к ней функций.
  - Конические сечения рассматриваются как плоские кривые; при этом использовал не только декартовы, но и косоугольные координаты.
  - Трактат содержал разложение бинома, приближённые вычисления, а также геометрическую интерпретацию комплексных чисел, оставшуюся незамеченной современниками.
  - Валлис первый дал современное определение логарифмирования как операции, обратной возведению в степень.
- Исследования по определению длины дуги некоторых кривых. Он сумел, на пари с Паскалем, найти длину дуги для арки циклоиды, её площадь и положение центра масс сегмента циклоиды.

Математика переменных величин

Исаак Ньютон (1642−1727)

- Родом из семьи фермера, деревня Вулсторп, графство Линкольншир.
- Более или менее систематическое обучение Исаак начал в 1655 году, когда его отправили учиться в Грэнтем, где была ближайшая школа. В 1661 году поступил в Кембридж, Тринити колледж. Профессор Барроу поддерживал его занятия математикой.
- Занятия летом 1665 года прекратились − в Англии началась эпидемия чумы. Ньютон отправился в Линкольншир. Он хотел продолжать свои исследования и взял с собой все книги и инструменты, которые могли понадобиться.
  - Создал формулу Ньютона-Лейбница.
  - Доказал, что белый цвет разлагается на несколько других.
  - Закон всемирного тяготения.
- Труды его были обнародованы только через два десятилетия.
- В октябре 1667 года Ньютона приняли в члены колледжа.
- В 1668 году, после ухода профессора Барроу, возглавил кафедру математики и оптики.
- В 1672 г. стал членом Королевского общества. Хотел покинуть его, из-за споров, возникающих вокруг его работ.

Математика переменных величин

Исаак Ньютон (1642−1727)

- 1687г. – выходят «Математические основы натуральной философии».
- В 1887 году Ньютон, который не переносил ссоры ни в каком виде, вступил в серьезный конфликт с королем из-за того, что Яков Второй нарушил права университетов.
- В 1689 году, после свержения короля Якова II, Ньютон был в первый раз избран в парламент от Кембриджского университета и заседал там немногим более года. Повторно был членом парламента в 1701—1702 годах.
- В середине 90-х гг. ученый был назначен хранителем Монетного двора. Он стал одним из исполнителей денежной реформы, и предложил способ отличать настоящие монеты от фальшивых, и более надежный способ чеканки. Более 100 фальшивомонетчиков были выслежены и осуждены; несколько главарей были казнены. Число фальшивых монет в Англии значительно сократилось
- В 1703 году его избрали президентом Королевского Общества, два года спустя вышла “Оптика”, которая дала направление развитию этой науки на ближайшие два столетия.
- Ньютоновская теория движения небесных светил уже преподавалась везде, идеи его находили все больше сподвижников.

Математика переменных величин

Исаак Ньютон. Основные открытия.

- Закон всемирного тяготения
- Три закона механики
- Теория движения небесных тел (обоснование законов Кеплера)
- Корпускулярная теория света, (свет — это поток мельчайших частиц), дисперсия света, интерференция и дифракция.
- Доказал, что Земля не идеальный шар: она «сплюснута» у полюсов и «вздута» у экватора, а приливы и отливы в Мировом океане объясняются действием притяжения Луны и Солнца.
- Первый зеркальный телескоп — прообраз тех гигантских телескопов, которые сегодня установлены в крупнейших обсерваториях мира.
- Бином Ньютона.
- Дифференциальное и интегральное исчисление.
- Метод Ньютона приближенного решения уравнений.

Математика переменных величин

Исаак Ньютон. Основные открытия.

- Закон всемирного тяготения
- Три закона механики
- Теория движения небесных тел (обоснование законов Кеплера)
- Корпускулярная теория света, (свет — это поток мельчайших частиц), дисперсия света, интерференция и дифракция.
- Доказал, что Земля не идеальный шар: она «сплюснута» у полюсов и «вздута» у экватора, а приливы и отливы в Мировом океане объясняются действием притяжения Луны и Солнца.
- Первый зеркальный телескоп — прообраз тех гигантских телескопов, которые сегодня установлены в крупнейших обсерваториях мира.
- Бином Ньютона.
- Дифференциальное и интегральное исчисление.
- Метод Ньютона приближенного решения уравнений.

Математика переменных величин

Исаак Ньютон. Метод флюксий

- **«Метод флюксий и бесконечных рядов»,** разработан в 1665–1666гг., опубликован в 1736г.
- Переменные величины – *флюенты* (текущие), зависящие от времени, обозначения *u*, *x*, *y*. Их скорости – *флюксии*, производные по времени (те же символы с точкой сверху). Бесконечно малые – *моменты* (*o*).
- **Первая задача** – определение соотношения между флюксиями по соотношению между флюентами. Это задача **дифференцирования** и получения дифференциального уравнения.
- **Пример**.
  - Уравнение
  - Придаем малые приращения переменным
  - Слагаемые без флюксий сокращаются
  - Делим на момент *o*, получаем дифуравнение

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0;$$

$$x = x + \dot{x}o, \quad y = y + \dot{y}o;$$

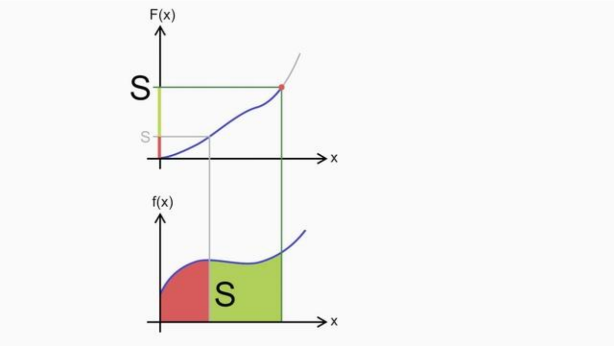
$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Математика переменных величин

Исаак Ньютон. Метод флюксий

- Вводит вторую флюксию (вторую производную).
- Применяет правила дифференцирования сложной функции.
- Распространяет теорию на трансцендентные функции при помощи рядов.
- Применяет исчисление для поиска экстремумов, построения касательной к кривой, определение радиуса кривизны.
- **Вторая задача** − определение соотношения между флюентами по соотношению между флюксиями. Это задача **интегрирования**. Ньютон решал отдельные уравнения, как правило, с помощью бесконечных рядов.
- Задача нахождения первообразной (флюенты по флюксии) − задача квадратуры кривой.
- **Теорема Ньютона-Лейбница**.

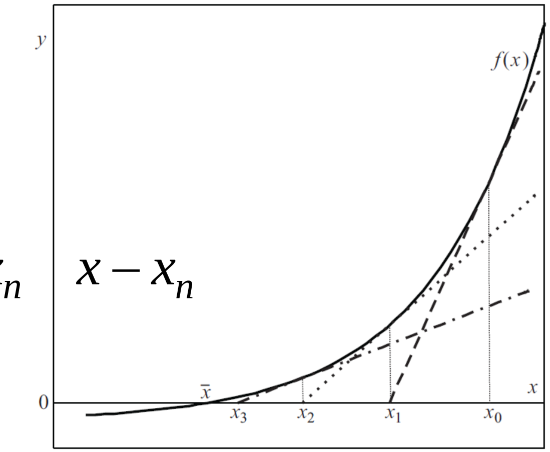
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



Математика переменных величин

Метод Ньютона поиска корня уравнения

- Уравнение $f(x) = 0$
- Приближенное значение $0 = f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$
- Итерационный процесс $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



  - Если начальное приближение недостаточно близко к решению, то метод может не сойтись.
  - Если производная не непрерывна в точке корня, то метод может расходиться в любой окрестности корня.
  - Если не существует вторая производная в точке корня, то скорость сходимости метода может быть заметно снижена.
  - Если производная в точке корня равна нулю, то скорость сходимости не будет квадратичной, а сам метод может преждевременно прекратить поиск, и дать неверное для заданной точности приближение.

Математика переменных величин

Исаак Ньютон. Основы метода конечных разностей

- Задача интерполяции − вычисление значения функции в промежуточных точках.
- Интерполяционная формула Ньютона (1711)

$$f(x) = f(x_0 + t\Delta x) = f(x_0) + \frac{t}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \ldots$$

$$+\frac{t(t-1)\ldots(t-(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_0).$$

- Здесь конечные разности

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_0 + \Delta x) - \Delta f(x_0);$$

$$\Delta^3 f(x_0) = \Delta^2 f(x_0 + \Delta x) - \Delta^2 f(x_0);$$

$$\ldots$$

$$t = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

Математика переменных величин

Исаак Ньютон. Основы метода конечных разностей

- Интерполяционная формула Ньютона послужила Тейлору как аналог для вывода ряда Тейлора (1715).
- Пусть t=n (целое), при $n\to\infty$: $\Delta x\to 0$, но $n\Delta x=h$ остается конечным. Рассмотрим бесконечный ряд

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+\frac{h(h-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{\Delta^2 x}+\ldots$$

$$+\frac{h(h-\Delta x)\ldots(h-(n-1)\Delta x)}{n!}\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta^n x}+\cdots$$

- При $\Delta x\to 0$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}\frac{df(x_0)}{dx}+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f(x_0)}{d^2 x}+\ldots+\frac{h^n}{n!}\frac{d^n f(x_0)}{d^n x}+\cdots$$

Математика переменных величин

йбниц (21 июня 1646 — 14 ноября 1716) — немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед.

Готфрид Вильгельм родился в семье профессора философии морали (этики) Лейпцигского университета Фридриха Лейбнюца и Катерины Шмукк, дочери профессора юриспруденции.

Учился в Лейпцинском и Йенском университетах, занимался в основном юриспруденцией.

Служил при дворе ганноверских герцогов, по делам службы посетил ряд европейских стран, где встречался с видными учеными.

Был членом Лондонского королевского общества и Парижской академии наук.

Основал Берлинскую академию и научный журнал в Лейпциге.

Математика переменных величин

Готфрид Вильгельм Лейбниц.

- «*Об искусстве комбинаторики*» (1666) Опередив время на два века, 21-летний Лейбниц задумал проект математизации логики. Идеалом для Лейбница было создание такого языка науки, который позволил бы заменить содержательные рассуждения исчислением на основе арифметики и алгебры: «*… с помощью таких средств можно достичь… удивительного искусства в открытиях и найти анализ, который в других областях даст нечто подобное тому, что алгебра дала в области чисел*».
- Лейбниц изобрёл собственную конструкцию арифмометра, гораздо лучше паскалевской, — он умел выполнять умножение, деление, извлечение квадратных и кубических корней, а также возведение в степень.
- В 1673 году Лейбниц в Лондоне на заседании Королевского общества продемонстрировал свой арифмометр, и его избрали членом Общества. От секретаря Общества Ольденбурга он получил изложение ньютоновских открытий: анализа бесконечно малых и теории бесконечных рядов. Сразу оценив мощь метода, он сам начал его развивать. В частности, он вывел первый ряд для числа π

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Математика переменных величин

Готфрид Вильгельм Лейбниц.

- В 1675 году Лейбниц завершил свой вариант математического анализа, тщательно продумав его символику и терминологию, отражающую существо дела. Почти все его нововведения укоренились в науке, и только термин «интеграл» ввёл Якоб Бернулли (1690), сам Лейбниц вначале называл его просто суммой.
- По мере развития анализа выяснилось, что символика Лейбница, в отличие от ньютоновской, отлично подходит для обозначения многократного дифференцирования, частных производных и т. д. На пользу школе Лейбница шла и его открытость, массовая популяризация новых идей, что Ньютон делал крайне неохотно.
- «Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого» (1684).
  - Характеристический треугольник (dx,dy,ds) (ранее у Паскаля и Барроу).
  - Даны правила дифференцирования суммы, произведения, частного, степени.
  - Получено условие $dy=0$ для экстремума и $d^2y=0$ для точек перегиба.

Математика переменных величин

Готфрид Вильгельм Лейбниц.

- «О глубокой геометрии» (1686).
  - Правила интегрирования.
  - Интеграл как сумма «всех» ординат, которых бесконечно много (следуя Паскалю и Кавальери).
  - Современный символ для интеграла.
  - Использование рядов для трансцендентных функций.
  - Формула многократного дифференцирования функций (формула Лейбница).

$$uv^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{k} v^{n-k}$$

- Совместно с Иоганном и Якобом Бернулли до конца века разработал значительную часть современного дифференциального и интегрального исчисления.
- Первый учебник по дифференциальному исчислению «Анализ бесконечно малых» ученика Иоганна Бернулли, маркиза Лопиталя. Правило Лопиталя (сообщено Лопиталю в одном из писем Бернулли).
- Окончательное обоснование анализа бесконечно малых дано в XIX веке, в основном трудами Коши по теории пределов.

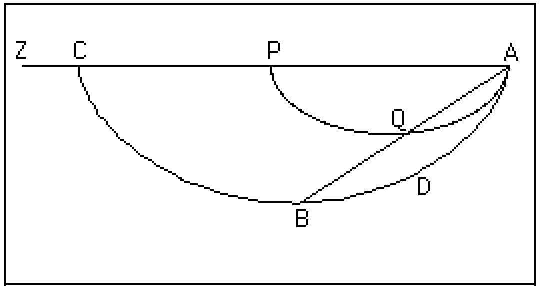
Математика переменных величин

Готфрид Вильгельм Лейбниц. Основные открытия.

- Независимо от Ньютона создал дифференциальное и интегральное исчисления .
- Создал комбинаторику как науку.
- Заложил основы математической логики.
- Описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1.
- В механике ввёл понятие «живой силы» (прообраз современного понятия кинетической энергии) и сформулировал закон сохранения энергии.
- Ввёл термин «модель», писал о возможности машинного моделирования функций человеческого мозга.
- Высказал идею о превращении одних видов энергии в другие, сформулировал один из важнейших вариационных принципов физики — «принцип наименьшего действия» .
- В психологии выдвинул понятие бессознательно «малых перцепций» и развил учение о бессознательной психической жизни.
- Создал теорию исторического происхождения языков и дал их генеалогическую классификацию.

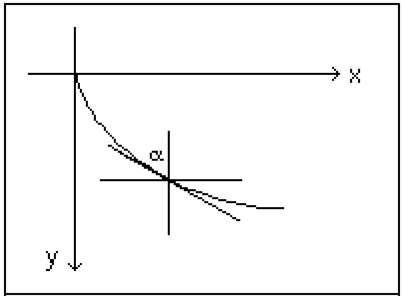
Математика XVIII века

Решение Ньютона



Newton's diagram

Решение Бернулли



cycloid as limit of strips

Математика XVIII века

Леонард Эйлер.

- **Россия (1727—1741)**
- Эйлер прибыл в Санкт-Петербург 24 мая 1727 года. Эйлера сделали адъюнктом высшей математики, выделили ему жалованье 300 рублей в год и предоставили казённую квартиру.
- В 1728 году началась публикация первого русского научного журнала «Комментарии Петербургской Академии наук» (на латинском языке). Уже второй том содержал три статьи Эйлера, и в последующие годы практически каждый выпуск академического ежегодника включал несколько новых его работ. Всего в этом издании было опубликовано более 400 статей Эйлера.
- 27 декабря 1733 года 26-летний Леонард Эйлер женился на своей ровеснице Катарине, дочери академического живописца Георга Гзеля. В семье Эйлера родились 13 детей, но выжили 3 сына и 2 дочери
- В 1733 Даниил Бернулли вернулся в Швейцарию, и Эйлер, оставив кафедру физики, занял его кафедру теоретической физики, став академиком и профессором высшей математики с окладом 600 рублей.

Математика XVIII века

Леонард Эйлер.

- **Россия (1727—1741)**
- Работы у молодого профессора было много: картография, всевозможные экспертизы, консультации для кораблестроителей и артиллеристов, составление учебных руководств, проектирование пожарных насосов и т. д
- Двухтомное сочинение «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически», изданное в 1736 году, принесло Эйлеру общеевропейскую известность. В этой монографии Эйлер с успехом применил методы математического анализа к общему решению проблем движения в пустоте и в сопротивляющейся среде.
- Эйлер составил на немецком языке очень добротное «Руководство к арифметике», которое тут же было переведено на русский и служило не один год в качестве начального учебника.
- Обстановка ухудшилась, когда в 1740 году умерла императрица Анна Иоанновна, и императором был объявлен малолетний Иоанн VI. В регентство Анны Леопольдовны Петербургская академия окончательно пришла в запустение.

Математика XVIII века

Леонард Эйлер.

- **Пруссия (1741—1766)**
- Эйлер принял предложение прусского короля Фридриха, который приглашал его на весьма выгодных условиях в Берлинскую академию, на должность директора её Математического департамента. Академия создавалась на базе прусского Королевского общества, основанного ещё Лейбницем, но в те годы находившегося в удручающем состоянии.
- В июне 1741 года 34-летний Леонард Эйлер с женой, двумя сыновьями и четырьмя племянниками прибыл в Берлин. Он провёл там 25 лет и издал около 260 работ.
- Работы у Эйлера было немало. Помимо математических исследований, он руководил обсерваторией, занимался многими практическими делами, включая выпуск календарей (основной источник дохода Академии[), чеканку прусских монет, прокладку нового водопровода, организацию пенсионного обеспечения и лотерей.
- Выходят работы Эйлера: «Введение в анализ бесконечно малых» (1748), «Морская наука» (1749), «Теория движения Луны» (1753), «Наставление по дифференциальному исчислению». В 1744 году Эйлер открыл вариационное исчисление.

Математика XVIII века

Леонард Эйлер.

- **Снова Россия (1766—1783)**
- В 1762 году на русский престол вступила Екатерина II, которая осуществляла политику просвещённого абсолютизма. Она предложила Эйлеру вернуться в Россию.
- 6 января 1766 года Екатерина сообщила графу Воронцову:
- *Письмо к Вам г. Эйлера доставило мне большое удовольствие, потому что я узнаю из него о желании его снова вступить в мою службу. Конечно, я нахожу его совершенно достойным желаемого звания вице-президента Академии наук, но для этого следует принять некоторые меры, прежде чем я установлю это звание — говорю установлю, так как доныне его не существовало. При настоящем положении дел там нет денег на жалование в 3000 рублей, но для человека с такими достоинствами, как г. Эйлер, я добавлю к академическому жалованию из государственных доходов, что вместе составит требуемые 3000 рублей… Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека.*

Математика XVIII века

Леонард Эйлер.

- **Снова Россия (1766—1783)**
- После возвращения в Петербург у Эйлера образовалась катаракта левого глаза — он перестал видеть. Слепота не отразилась на работоспособности учёного, он лишь заметил, что теперь будет меньше отвлекаться от занятий математикой. Втечение второго пребывания в России Эйлер продиктовал более 400 статей и 10 книг, что составляет больше половины его творческого наследия.
- В 1768—1770 «Универсальная арифметика» . Все последующие учебники алгебры создавались под сильнейшим влиянием книги Эйлера.
- В эти же годы вышли «Диоптрика» о линзовых системах и фундаментальное «Интегральное исчисление».
- 1772: «Новая теория движения Луны». Эйлер наконец завершил свой многолетний труд, приближённо решив задачу трёх тел.
- В 1779 году опубликована «Всеобщая сферическая тригонометрия», это первое полное изложение всей системы сферической тригонометрии.
- Скончался в 76 лет от кровоизлияния в мозг.

Математика XVIII века

Леонард Эйлер. Основные открытия.

- В математике XVIII век – век Эйлера.
- Научная деятельность Эйлера имела прикладную направленность. К построению математических теорий он приходил от конкретных практических задач. Около 40% его работ посвящено прикладным вопросам астрономии, физики, гидродинамики, небесной механики, баллистики, кораблестроения, теории машин, картографии.
- Научные достижения Эйлера и его учеников выдвинули Петербургскую академию на первое место в мире.
- Среди непосредственных учеников Эйлера:
  - М. Е. Головин, академик математики.
  - П. Б. Иноходцев, академик астрономии.
  - С. К. Котельников, академик математики.
  - А. И. Лексель, талантливый астроном и математик.
  - С. Я. Румовский, академик астрономии.
  - Н. И. Фусс, академик математики.
  - И. А. Эйлер, старший сын Леонарда Эйлера, талантливый математик.

Математика XVIII века

Теория функций. Вклад Эйлера.

- Идея функции как соответствия довольно общей природы (Дирихле, Лобачевский).
- Функция как аналитическое выражение (Иоганн Бернулли, Эйлер, Даламбер). Считалось, что функция бесконечно дифференцируема и разложима в степенной ряд. Позже Эйлер уже допускал функции, задающиеся на разных участках разными выражениями, а также графически.
- Широкое использование аппарата степенных рядов для функций. Ввел показательную и логарифмическую функции.
- Ввел функции многих переменных и рассмотрел их дифференцирование.
- Доказал теорему независимости частной производной от порядка дифференцирования.
- Получил условие полного дифференциала (независимо этот результат получен Клеро): $Pdx+Qdy$ − полный дифференциал функции, если и только если

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Математика XVIII века

Теория многочленов

- В 1702 г. Лейбниц в связи с рассмотрением интеграла от рациональной функции поставил вопрос о **возможности разложения многочлена произвольной степени с действительными коэффициентами на множители первой и второй степени** и дал на него отрицательный ответ.
- Даламбер пытался доказать возможность такого разложения, но безуспешно. Николай Бернулли пытался найти примеры, когда разложение невозможно.
- В письме к Николаю Бернулли Эйлер сформулировал **теорему о разложимости многочлена**, а в труде «Введение в анализ бесконечно малых» дал ее доказательство для многочленов четвертой степени и некоторых специальных многочленов высоких степеней. Эйлер и Н. Бернулли пришли к мысли, что **комплексные корни многочлена всегда встречаются парами как комплексно-сопряженные, и их произведение дает многочлен второй степени с действительными коэффициентами**. Однако доказательства этого факта дано не было.
- Идеи Даламбера и Эйлера были использованы Гауссом для доказательства основной теоремы алгебры.

Математика XVIII века

Теория элементарных функций комплексного переменного

- Муавр получил в комплексной форме связь cosφ и cos$n\varphi$, Эйлер придал ей современный вид

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi\ ^{n} = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$$

- Формулы Эйлера (*«одно из самых прекрасных аналитических открытий, сделанных в этом веке», Лагранж*)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

- Эйлер определил понятие комплексного логарифма.
- Связь между тригонометрическими функциями и логарифмом (у И.Бернулли в неявном виде)

$$\arctan\varphi = \frac{1}{2i}\ln\frac{1 - i\varphi}{1 + i\varphi}$$

- Необходимые и достаточные условия аналитичности функции комплексного переменного (Эйлер и Даниил Бернулли).

Математика XVIII века

Интегральное исчисление

- «… *математика в течение 150 лет после смерти Эйлера не могла пробить бреши в том кольце интеграций, которое было выковано Эйлером и, таким образом, добавить новые квадратуры*.» Н.Н.Лузин.
- Термин «определенный интеграл» ввел Лаплас, обозначение − Фурье.
- 1770 Эйлер ввел **двойное интегрирование**, через два года Лагранж − тройные интегралы, Клеро в 1773 г. − криволинейные интегралы.
- **Специальные функции Эйлера** (бета-функция, гамма-функция, интегральный логарифм, интегральная показательная функция).

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad a,b>0;$$

$$\mathrm{li}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t},\quad \mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^t dt}{t}.$$

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,\quad a>0,\quad \Gamma(n+1)=n!.$$

Математика XVIII века

Дифференциальные уравнения

- Термин «дифференциальное уравнение» ввел Лейбниц. Ньютон и Лейбниц использовали для их решения бесконечные ряды.
- Братья Бернулли − решение в конечном виде с помощью элементарных функций.
- XVII век (Бернулли, Эйлер, Клеро, Даламбер, Лагранж).
- Разделение переменных
- Интегрирующий множитель (Бернулли, Эйлер, Клеро).
- Сведение нелинейных уравнений к линейным (Я.Бернулли, И.Бернулли, Лейбних, Рикатти, Д.Бернулли).
- Уравнение Рикатти и обобщение Эйлера. Эйлер ввел термины «частное решение « и «общее решение», свел уравнение к линейному, если известно частное решение $u(x)$

$$y' + ay^2 = bx^{\alpha}, \quad y' = P\ \ x\ \ y^2 + Q\ \ x\ \ y + R\ \ x\ \ , y = u + \frac{1}{z}.$$

Математика XVIII века

Дифференциальные уравнения

- В 1743г. Эйлер разработал метод решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами с помощью подстановки $y=e^{kx}$.

$$ay''+by'+cy=0, \quad y=e^{kx};$$

$$ak^2+bk+c \;\; e^{kx}=0.$$

- Эйлер рассмотрел случаи кратных и комплексных корней характеристического уравнения. Показал, что общим решением уравнения является линейная комбинация его частных решений.
- В 1766 г. Даламбер установил, что общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.
- Лагранж разработал метод вариации произвольной постоянной.
- Тейлор, Клеро, Даламбер, Эйлер, Лагранж изучали особые решения.

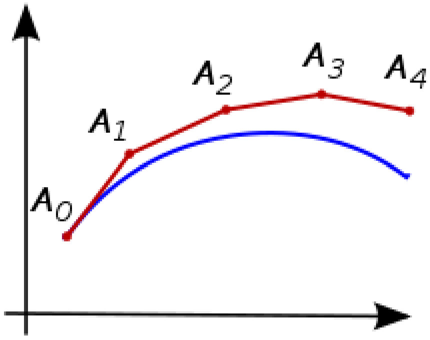
Математика XVIII века

Дифференциальные уравнения

- Метод Эйлера приближенного решения дифференциальных уравнений.

$$y' = f(x, y)$$

$$y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k, y_k)$$



- Впервые описан Леонардом Эйлером в 1768 году в работе «Интегральное исчисление».
- Метод Эйлера является явным, одношаговым методом первого порядка точности. Он основан на аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией, так называемой ломаной Эйлера.
- Погрешность на шаге $O(h^2)$, в целом $O(h)$.

Математика XVIII века

Уравнения в частных производных

- Уравнение колебаний струны и мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- Для мембраны − рассмотрено Эйлером, получено решение в виде ряда по цилиндрическим функциям.
- Уравнение объемного расширения жидкости (Эйлером получено частное решение).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- Уравнение Лапласа (задачи теплопроводности, гидростатики, термодинамики).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Математика XVIII века

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Уравнения в частных производных. Спор о струне

- 1747 Даламбер, 1748 Эйлер.
- 1713 Тейлор, не используя явно уравнение, определил частное решение для струны, закрепленной на концах, в виде синусоиды.
- Общее решение Даламбера и Эйлера

$$u = \varphi\ \ x + at\ \ + \psi\ \ x - at$$

- Ключевая проблема состояла в том, что полученные решения содержали *произвольные функции*. Однако, общепринятого определения функции на тот момент не было.
- Даламбер рассматривал задачу о струне в первую очередь с позиции чистого математика, полагая при этом, что функция, определяющая положение струны в начальной момент времени, должна быть задана каким-то *одним правилом*, но таким, чтобы она была нечетной и периодической, с периодом длины $2l$ (где l — длина струны), что требуется для выполнения граничных условий.
- Эйлер полагал, что начальная форма струны может быть любой, и впервые рассматривал кусочные и негладкие функции.

Математика XVIII века

Уравнения в частных производных. Спор о струне

- Даниил Бернулли вступил в спор между Эйлером и Даламбером, подвергнув критике их решения с точки зрения физики как чрезвычайно абстрактные. В своих публикациях он отмечал, что это замечательные математические результаты, но спрашивал: «при чём здесь звучащие струны?»
- Из физических соображений он представляет решение в виде ряда

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

- Даламбер и Эйлер не приняли это решение, утверждая, что его нельзя считать общим.
- После работ Фурье в начале следующего века стало ясно, что при надлежащем выборе коэффициентов, решения Бернулли, Даламбера и Эйлера совпадают.

Математика XVIII века

Вариационное исчисление

- 1696 г. Задача Иоганна Бернулли о брахистохроне.
- Леонард Эйлер. «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойством максимума, либо минимума, или решение изометрической задачи.
- Функция дает экстремум функционалу, нсли оан удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнение Эйлера).

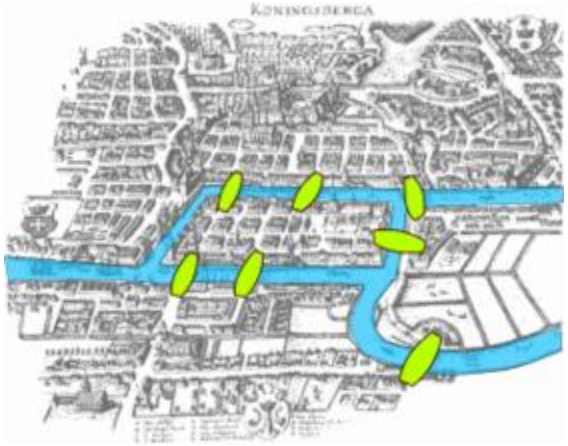
$$J\quad y = \int_a^b F\quad x, y, y'\ dx: \quad F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

- Эйлер свел вариационную задачу к отысканию экстремума функции многих переменных, заменяя кривую $y=y(x)$ ломаной линией.
- Лагранж упростил метод Эйлера, создал теорию вариаций, и разработал метод множителей Лагранжа.

Математика XVIII века

Теория графов

- Статья Эйлера 1736 года «Решение вопроса, связанного с геометрией положения» положила начало теории графов как математической дисциплине.
- Поводом для исследования послужила *задача о семи мостах Кёнигсберга:* можно ли пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходное место? Эйлер формализовал её, сведя к задаче о существовании в графе *циклического маршрута*, проходящего по каждому ребру ровно один раз (в современной терминологии — эйлерова цикла).
- Решая последнюю задачу, Эйлер показал: для наличия эйлерова цикла в графе нужно, чтобы у каждой вершины её степень была чётной (а в задаче о кёнигсбергских мостах это не так: степени равны 3, 3, 3 и 5)



Математика XVIII века

Жан Лерон Д’Аламбер (**Даламбер**; 16 ноября 1717 — 29 октября 1783)

- Д’Аламбер был незаконным сыном маркизы де Тансен и, по всей вероятности, австрийского герцога Леопольда Филиппа Аренберга. Вскоре после рождения младенец был подкинут матерью на ступени парижской «Круглой церкви Св. Иоанна». Вначале ребёнка поместили в Больницу Подкидышей. Затем доверенное лицо герцога артиллерийский офицер Луи-Камю Детуш, получивший деньги для воспитания мальчика, устроил его в семье стекольщика Руссо.
- Детуш привязался к мальчику, часто навещал его, помогал приёмным родителям и оплатил образование Д’Аламбера. Позднее, став знаменитым, Д’Аламбер никогда не забывал стекольщика и его жену, помогал им материально и всегда с гордостью называл своими родителями.

Математика XVIII века

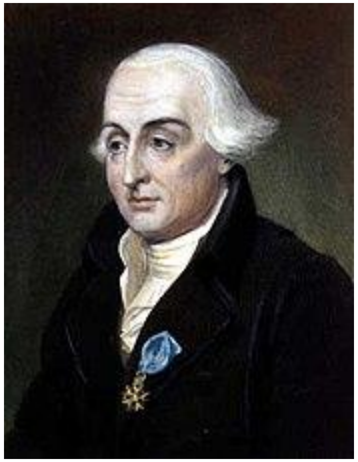
Жан Лерон Даламбер. Основные результаты.

- После Ньютона первым сделал попытку создать теорию пределов и обосновать исчисление бесконечно малых.
- В теории рядов его имя носит достаточный признак сходимости.
- Дал метод решения дифференциального уравнения 2-го порядка в частных производных, описывающего поперечные колебания струны (волнового уравнения).
- В 1752 году, при решении одного дифференциального уравнения с частными производными эллиптического типа (модель обтекания тела), встретившегося в гидродинамике, Д'Аламбер впервые применил функции комплексного переменного. У Д'Аламбера и у Л. Эйлера встречаются уравнения, связывающие действительную и мнимую части аналитической функции (условия Коши−Римана). С этого момента начинается широкое и плодотворное использование комплексных величин в гидродинамике.
- Результаты в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений 1-го и 2-го порядков.
- Дал первое (не вполне строгое) доказательство основной теоремы алгебры. Во Франции она называется теоремой Д'Аламбера −Гаусса.

Математика XVIII века

Жозеф Луи Лагранж (25 января 1736, Турин — 10 апреля 1813, Париж)

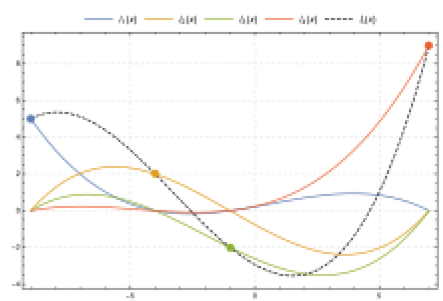
- Наряду с Эйлером — крупнейший математик XVIII века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала.
- Внес вклад в вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений, решение задач на нахождение максимумов и минимумов, теорию чисел (теорема Лагранжа), алгебру и теорию вероятностей.
- «Теория аналитических функций» (1797)
- «О решении численных уравнений» (1798) — подытожил всё, что было известно по этим вопросам в его время



Математика XVIII века

Интерполяционная формула Лагранжа

- Многочлен минимальной степени, принимающий данные значения в данном наборе точек (x_i,y_i).



$$L\ \ x\ =\prod_{i=0}^{n} y_i l_i\ \ x\ ,\quad l_i\ \ x\ =\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

- Существует единственный многочлен степени не превосходящей n, принимающий заданные значения в n+1 точке (что является обобщением факта, что через любые две точки проходит единственная прямая).

Математика XVIII века

Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (23 марта 1749−5 марта 1827)

- Родился в зажиточной крестьянской семье в Нормандии. Мальчик учился в школе бенедиктинцев, из которой вышел, однако, убеждённым атеистом.
- В 1773 году, виртуозно применив математический анализ, Лаплас доказал, что орбиты планет устойчивы, и их среднее расстояние от Солнца не меняется от взаимного влияния (хотя испытывает периодические колебания). Даже Ньютон и Эйлер не были в этом уверены. Правда, позже выяснилось, что Лаплас не принял во внимание приливное трение, замедляющее вращение, и другие важные факторы. За эту работу 24-летний Лаплас был избран адъюнктом Парижской Академии наук.

Математика XVIII века

Пьер-Симон, маркиз де Лаплас

- В 1785 году Лаплас был избран действительным членом Парижской Академии наук. В этом же году, на одном из экзаменов, Лаплас высоко оценил знания 16-летнего абитуриента Бонапарта. Впоследствии их отношения были неизменно тёплыми. Спустя 12 лет Лаплас рекомендовал генерала Бонапарта в Институт Франции (так тогда называлась Академия наук).
- В революционные годы Лаплас принял руководящее участие в работах комиссии по введению метрической системы и читал лекции в Нормальной школе.
- Наполеон наградил Лапласа титулом графа Империи и всеми мыслимыми орденами и должностями. Он даже пробовал его на посту министра внутренних дел, но спустя 6 недель предпочёл признать свою ошибку. Лаплас внёс в управление, как выразился позднее Наполеон, «дух бесконечно малых», то есть мелочность.
- Титул графа, данный ему в годы империи, Лаплас сменил вскоре после реставрации Бурбонов на титул маркиза (1817) и члена палаты пэров.
- Умер Лаплас от простудного заболевания 5 марта1827 года в собственном имении под Парижем, на 78-м году жизни.

Математика XVIII века

Пьер-Симон, маркиз де Лаплас. Основные достижения.

- При решении прикладных задач Лаплас разработал методы математической физики, широко используемые и в наше время. Особенно важные результаты относятся к теории потенциала и специальным функциям. Его именем названо преобразование Лапласа и уравнение Лапласа.
- Он далеко продвинул линейную алгебру; в частности, Лаплас дал разложение определителя по минорам.
- Лаплас расширил и систематизировал математический фундамент теории вероятностей, ввёл производящие функции. Первая книга «Аналитической теории вероятностей» посвящена математическим основам; собственно теория вероятностей начинается во второй книге, в применении к дискретным случайным величинам. Там же — доказательство предельных теорем Муавра—Лапласа и приложения к математической обработке наблюдений, статистике народонаселения и «нравственным наукам».
- Лаплас развил также теорию ошибок и приближений методом наименьших квадратов.