

Зарождение математики в древности

История и методология прикладной математики и информатики

Ю.Б.Буркатовская, доцент ОИТ

Древнейшие математические артефакты

- *Кость из Лембобо* – кость бабуина с выбитыми чёрточками, которые предположительно были результатом какого-то вычисления.
- Найдена в горах Лембобо, на границе Южной Африки и Свазиленда, 1970.
- Возраст кости – около 37 тысяч лет, по другим источникам – от 43000 до 44200 лет.
- Предполагают, что кость имеет отношение к лунному календарю.



Древнейшие математические артефакты

- *Кость Ишанго* – археологический артефакт, представляющий собой инструмент, сделанный из малоберцовой кости бабуина с прикреплённым к одному из её концов острым отщепом кварца и тремя рядами насечек по всей её длине.
- По одним данным, возраст от 9 до 6,5 тысяч лет назад, по другим — более 20 тысяч лет.
- Была обнаружена в 1950 году в Бельгийском Конго на территории стоянки Ишанго около верховий реки Нил.
- Не доказано, что насечки имеют отношение к математике, это лишь одна из гипотез.



Возникновение первых математических понятий

- Около 10 тысяч лет назад – переход к земледелию
- Восточная математика – прикладная наука
 - Календарные расчеты
 - Сбор налогов
 - Распределение урожая
 - Обмер земельных участков
- Понятия:
 - Число
 - Длина
 - Площадь
 - Объем

Древний Египет

- Основные сохранившиеся источники (период Среднего царства, расцвет древнеегипетской культуры):
 - Папирус Ахмеса или папирус Ринда — наиболее объёмный манускрипт, содержащий 84 математические задачи. Написан около 1650 г. до н. э.
 - Московский математический папирус (25 задач), около 1850 г. до н. э., 544×8 см.
 - Так называемый «кожаный свиток», 25×43 см.
 - Папирусы из Лахуна (Кахуна), содержащие ряд фрагментов на математические темы.
 - Берлинский папирус, около 1300 года до н. э.
 - Каирские деревянные таблички (таблички Ахмима)
 - Папирус Рейснера, примерно XIX век до н. э.



Древний Египет

- Десятичная иероглифическая система (на картинке число 35736)
- Умножение сводится к сложению ($237 \times 13 = 237 \times 8 + 237 \times 4 + 237$)
- Действия с дробями (все дроби сводятся к сумме основных дробей $1/n$ и некоторых индивидуальных: $2/3, 3/4...$)
- Линейные уравнения (специальный иероглиф для переменной)
- Площадь треугольника, объемы параллелепипеда и кругового цилиндра
- Площадь четырехугольника $((a + b)/2) \times ((c + d)/2)$
- Объем усеченной пирамиды с квадратным $(a^2 + ab + b^2)h/3$
- Площадь круга $(8d/9)^2$ (значение $\pi=3.1605...$)



Древний Египет

- Пример задачи из папируса Ринда
- *Найти число, если известно, что от прибавления к нему $\frac{2}{3}$ его и вычитания из результата его трети получается 10.*

Древний Вавилон

- Приблизительно современный Ирак, XX–VI века до н.э.
- Более 500 глиняных табличек
- 60-ричная позиционная система счисления (нет нуля!)
 - Деление часа на 60 минут и минуты на 60 секунд
 - Деление круга на 360 градусов
- Действия с произвольными дробями
- Решение квадратных уравнений
- Решение некоторых кубических уравнений с помощью таблиц



Древний Вавилон

- Уравнения и системы

$$ax = b, \quad x^2 = a, \quad x^2 \pm ax = b, \quad x^3 = a, \quad x^2(x + 1) = a,$$

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ xy = b, \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

- Суммы арифметической прогрессии, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n 2^k$
- Элементы тригонометрии
- Теорема Пифагора (на табличке тройки пифагоровых чисел)
- Площадь круга $l^2/12$, где l – длина окружности (значение $\pi=3$)

Древний Китай

- «Математика в девяти книгах» – II век до н.э. 246 задач с ответами
 - «Измерение полей»
 - «Оценка работ»
 - «Пропорциональное распределение»
- Линейные и квадратные уравнения с числовыми коэффициентами
- Системы линейных уравнений, матрица коэффициентов
- Отрицательные числа (впервые)
- Теорема Пифагора
- Десятичная иероглифическая система счисления (без нуля)



Древняя Индия

- Источники практически отсутствуют
- Религиозно-философские книги Шульба-сутры (дополнение к Ведам) – описание построения жертвенных алтарей
 - Действия с дробями
 - Извлечение корней
 - Рациональные приближения для корней
 - Решение уравнений
 - Суммирование арифметической и геометрической прогрессий
 - Теорема Пифагора
 - Точные и приближённые методы расчета площади треугольника, параллелограмма и трапеции, объёма цилиндра, призмы, усечённой призмы.
 - Классическая задача комбинаторики: «сколько есть способов извлечь t элементов из N возможных» упоминается в сутрах, начиная примерно с IV века до н. э.
 - Биномиальные коэффициенты и их связь с биномом Ньютона.

Древняя Индия

- Десятичная система счисления (арабские цифры на самом деле индийские) – 500г. н.э.
- Появление нуля (на картинке число 605)



605

Особенности математики Египта и стран Востока

- Отсутствие доказательств
- При решении задач пишутся предписания – делай так то и так-то, без объяснений
- Геометрические задачи могут сопровождаться лишь чертежом и словом «смотри»
- Нет формул

Впечатление неудовлетворенности исчезает, когда мы уясняем себе, что большая часть математики, которой мы обучаем современных инженеров и техников, все еще строится по принципу «Делай то-то, делай так-то», без большого стремления к строгости доказательств.

Д.Я.Стройк. Краткий очерк истории математики

Математика Греции

- К VII веку до н.э. Греция – развитое государство, состоящее из городов-полисов, торговля с соседями, высокий уровень архитектуры, философии, астрономии, математики.
- Первые источники – IV–II вв. до н.э., труды Евклида, Архимеда, Аполлония.
- **Доказательства математических фактов!**
- Аксиоматический метод
- Дедуктивный метод
- Система счисления – аттическая (или геродианова) и ионическая (она же александрийская или алфавитная). По существу, десятичные. Цифры обозначались буквами с чертой над ними.

Математика Греции

Периоды

- Ионийский (600–450 гг. до н.э.)
- Афинский (450–300 гг. до н.э.)
- Эллинистический (300–150 гг. до н.э.)
- Завершающий (150 г. до н.э.–V в. н.э.)

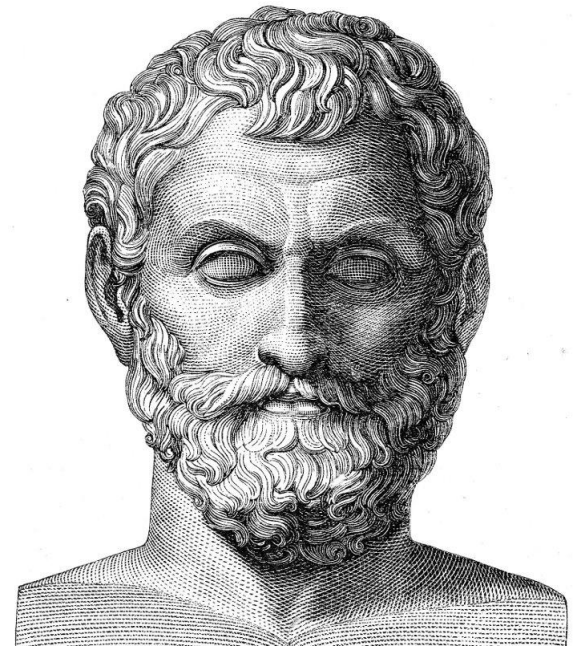
Научные школы

- Ионийская (Фалес, VII – VI вв. до н.э.)
- Итальянская (Пифагор, VI – V вв. до н.э.)
- Афинская (Платон, Аристотель, IV – III вв. до н.э.)
- Александрийская (Аполлоний, Архимед, Платон, Евклид, Герон, Диофант, III в. до н.э. – V в. н.э.)

Математика Греции

Фалес Милетский (ок. 620–540 гг. до н.э.)

- Богатый купец, хорошо изучил вавилонскую математику и астрономию — вероятно, во время торговых поездок.
- Познакомил греков с созвездием Малой Медведицы и научил соотечественников использовать его как путеводный инструмент.
- Предсказал солнечное затмение в 585 г. до н.э. и объяснил, почему это происходит — по его словам, когда Луна закрывает собой Солнце, тогда на город опускается тьма.



Математика Греции

Фалес Милетский (ок. 620–540 гг. до н.э.)

- Календарь, согласно которому в году насчитывается 365 дней – 12 месяцев по 30 дней каждый, а еще 5 дней являются чередующимися.

Теоремы геометрии

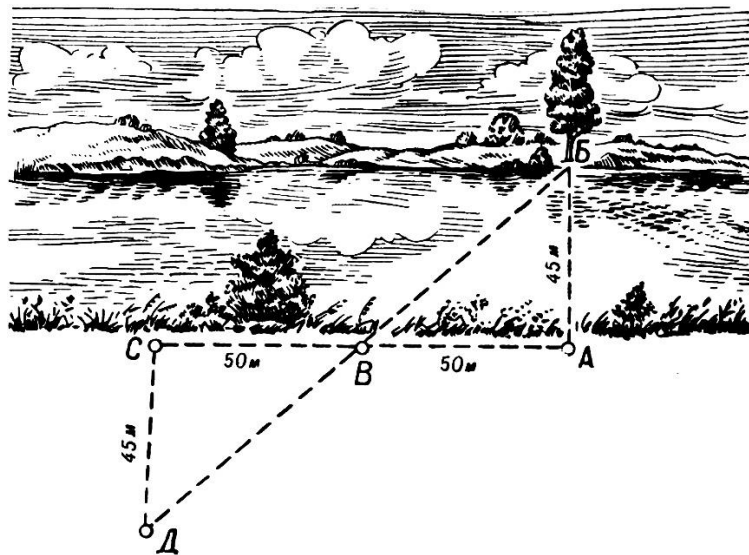
- Вертикальные углы равны
- Треугольники равны по одной стороне и двум углам, прилежающим к ней
- У основания равнобедренного треугольника углы равны
- Диаметр делит круг на две равные части

Первым ввел в науку доказательство.

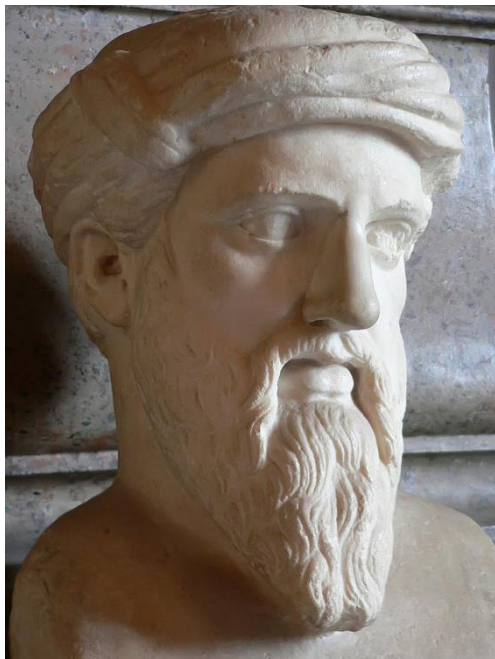
Математика Греции

Фалес Милетский (ок. 620–540 гг. до н.э.)

- Способ определения расстояния от берега до движущегося корабля — подобие треугольников
- Измерение высоты египетских пирамид



Математика Греции



Пифагор (ок. 570–490 гг. до н.э.)

- древнегреческий философ, математик и мистик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев.
- Источники появились лишь 200 лет спустя после смерти, сочинений не осталось
- Вернувшись около 530 г. до н. э. в Великую Грецию (район южной Италии), он в городе Кротон основал нечто вроде тайного духовного ордена. Пифагорейцы считали прикладную математику уделом низших сословий

Математика Греции

Пифагор (ок. 570–490 гг. до н.э.)

- *«элементы чисел являются элементами всех вещей... весь мир в целом является гармонией и числом»*
- аксиоматический метод: чётко выделяются базовые предположения (аксиомы, постулаты) и дедуктивно выводимые из них теоремы

Теория музыки

- Высота тона, издаваемого колеблющейся струной, зависит от ее длины
- Гармонические созвучия издают натянутые струны, длины которых относятся между собой, как целые числа (октава — интервал между тонами, при котором длины относятся как $1/2$)

Математика Греции

Пифагор (ок. 570–490 гг. до н.э.)

Геометрия

- Построена значительная часть планиметрии, доказана теорема Пифагора
- Найден способ отыскания «пифагоровых троек» (a, b, c) , $a = n$, $a^2 + b^2 = c^2$ для нечетных n : $(n, (n^2 - 1)/2, (n^2 + 1)/2)$.
- Для четных n числа получены в академии Платона: $(n, n^2/2 - 1, n^2/2 + 1)$

Математика Греции

Пифагор (ок. 570–490 гг. до н.э.)

Арифметика

- Выделена теория чисел: все, относящееся к целым числам
- Целые числа полагались универсальными объектами, к отношениям между которыми (рациональным числам) сводятся все математические построения
- Разработана теория дробей (как пропорций), действия с дробями, приведение к общему знаменателю
- Алгоритм Евклида (НОД)
- **Но сами же пифагорейцы доказали, что отношение диагонали квадрата к его стороне не является рациональным числом**

Математика Греции

Первый кризис математики

- Не все числа рациональны
- Понятие бесконечности ряда чисел противоречило понятию конечности мира
- Нет отрицательных чисел (впервые, видимо, использовались китайцами, вошли в математику после работ Кардано в 1545 г.)

Математика Греции

Геометрическая алгебра

- Первичные элементы – отрезки прямой
- Все построения осуществляются циркулем и линейкой без делений
- Сложение – приставление отрезков, вычитание – отбрасывание части отрезка, умножение – вычисление площади прямоугольника, деление – приложение площадей (приложить к отрезку прямоугольник, равновеликий данному, рис. 2.1), здесь $x = ab/c$.
- Интерпретация алгебраических формул геометрией (рис. 2.2), показана формула $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Математика Греции

Геометрическая алгебра

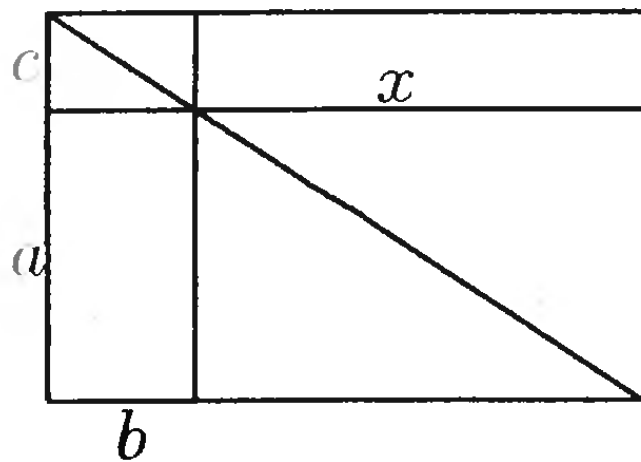


Рис. 2.1

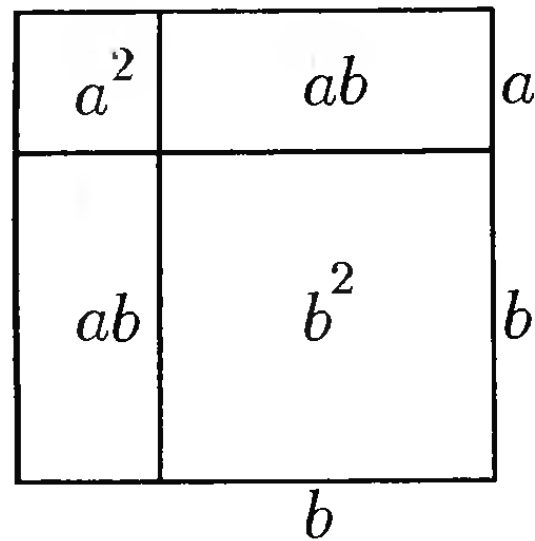


Рис. 2.2

Математика Греции

Геометрическая алгебра

Неудобства:

- Громоздкость вычислений
- Существуют задачи, не решаемые с помощью циркуля и линейки
 - Задача о трисекции угла, т.е. разделении угла на три равные части
 - Задача об удвоении куба, т.е. построении куба, объем которого в два раза больше объема данного куба
 - Задача о квадратуре круга, т.е. о нахождении такого квадрата, площадь которого равна площади заданного круга
- Методами геометрической алгебры получены неверные либо приближенные решения

Математика Греции

Геометрическая алгебра

Квадратисса (радиус OA вращается, одновременно AB перемещается вниз, чтобы концы радиуса и отрезка одновременно достигли точки C . Точка N – пересечение радиуса и отрезка – формирует квадратиссу).

- Первая трансцендентная кривая

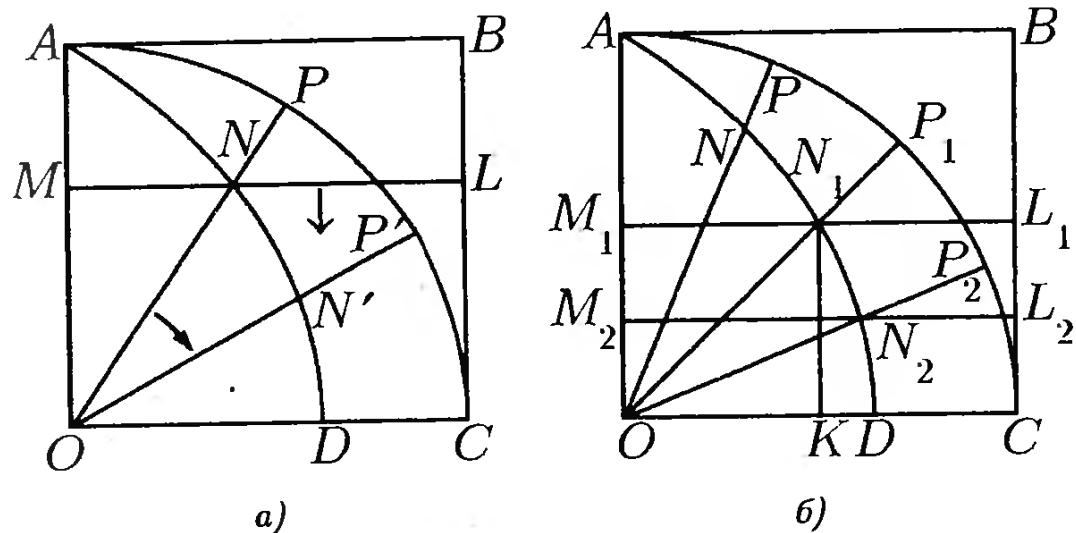


Рис. 2.7

Математика Греции

- **Архит (468–365 гг. до н.э.)** ему приписывают большую часть открытий школы Пифагора, в частности, иррациональность чисел вида
- **Тезтет (академия Платона, умер в 369 г. до н.э.)** – первая классификация иррациональностей
- **Евдокс (академия Платона, 405–369 гг. до н.э.)** – теория отношений и пропорций, метод исчерпывания (рис. 3.1)

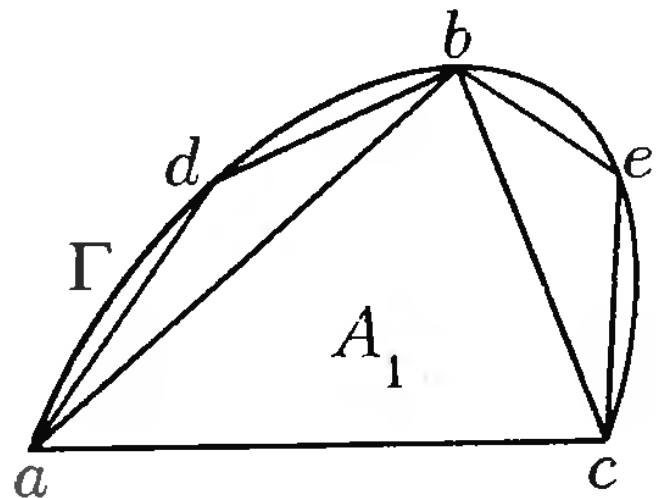


Рис. 3.1

Математика Греции

Расцвет греческой математики (Евклид, Архимед, Аполлоний)

- **Александр Македонский** (356 — 323 гг. до н. э.) — начиная с 334 года, подчиняет себе Грецию, завоевывает страны Ближнего Востока: Египет, Сирия, Месопотамия и т.д. Греческая цивилизация проникает на Восток.
- **Александрия (Египет)** — создан научный центр Музейон (прибежище муз) с библиотекой, около 500 тысяч экземпляров. Основной фонд утрачен в 273 году в ходе римских завоеваний. Влияние Музейона продолжалось около 7 веков.
- В Музейоне в разное время работали Евклид, Архимед, Аполлоний
- Появились первые профессиональные ученые, получающие деньги за научную работу

Математика Греции

Евклид (ок. 324 г. до н.э. –?)

- Первый математик Александрийской школы
- Главная работа Евклида – "Начала" (лат. *Elementa*) – содержит изложение планиметрии, стереометрии и ряда вопросов теории чисел (например, *алгоритм Евклида*); состоит из 13-ти книг.
- Как правило, постулаты задают базовые построения (напр., «требуется, чтобы через любые две точки можно было провести прямую»), а аксиомы — общие правила вывода при оперировании с величинами (напр., «если две величины равны третьей, они равны между собой»).



Математика Греции



«Начала»

- В I книге изучаются свойства треугольников и параллелограммов; эту книгу венчает знаменитая теорема Пифагора для прямоугольных треугольников.
- Книга II, восходящая к пифагорейцам, посвящена «геометрической алгебре».
- В III и IV книгах излагается геометрия окружностей, а также вписанных и описанных многоугольников; при работе над этими книгами Евклид мог воспользоваться сочинениями Гиппократы Хиосского.
- В V книге вводится общая теория пропорций, построенная Евдоксом Книдским, а в VI книге она прилагается к теории подобных фигур.

Математика Греции

«Начала»

- VII—IX книги посвящены теории чисел и восходят к пифагорейцам; автором VIII книги, возможно, был Архит Тарентский. Рассматриваются теоремы о пропорциях и геометрических прогрессиях, вводится метод поиска наибольшего общего делителя двух чисел (алгоритм Евклида), доказывается бесконечность множества простых чисел.
- В X книге, представляющей собой самую объёмную и сложную часть *Начал*, строится классификация иррациональностей; возможно, что её автором является Теэтет Афинский.

Математика Греции

«Начала»

- XI книга содержит основы стереометрии.
- В XII книге с помощью метода исчерпывания доказываются теоремы об отношениях площадей кругов, а также объёмов пирамид и конусов; автором этой книги по общему признанию является Евдокс Книдский.
- XIII книга посвящена построению пяти правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр); считается, что часть построений была разработана Теэтетом Афинским.

Математика Греции

Евклидова геометрия

- *I. Аксиомы сочетания.* 1) Через каждые две точки можно провести прямую и притом только одну. 2) На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой. 3) Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. 4) На каждой плоскости есть по крайней мере три точки и существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. 5) Если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости. 6) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют ещё одну общую точку (и, следовательно, общую прямую).
- *II. Аксиомы порядка.* 1) Если точка В лежит между А и С, то все три лежат на одной прямой. 2) Для каждой точки А, В существует такая точка С, что В лежит между А и С. 3) Из трёх точек прямой только одна лежит между двумя другими. 4) Если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она пересекает ещё другую его сторону или проходит через вершину (отрезок АВ определяется как множество точек, лежащих между А и В; соответственно определяются стороны треугольника).

Математика Греции

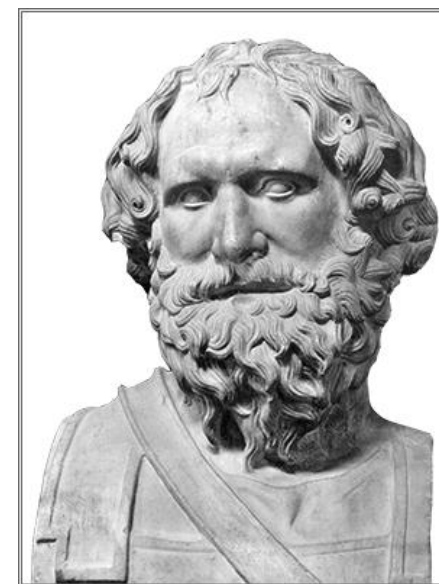
Евклидова геометрия

- *III. Аксиомы движения.* 1) Движение ставит в соответствие точкам точки, прямым прямые, плоскостям плоскости, сохраняя принадлежность точек прямым и плоскостям. 2) Два последовательных движения дают опять движение, и для всякого движения есть обратное. 3) Если даны точки A, A' и полуплоскости \mathbf{a}, \mathbf{a}' , ограниченные продолженными полупрямыми a, a' , которые исходят из точек A, A' , то существует движение, и притом единственное, переводящее A, \mathbf{a}, a в A', \mathbf{a}', a' (полупрямая и полуплоскость легко определяются на основе понятий сочетания и порядка).
- *IV. Аксиомы непрерывности.* 1) Аксиома Архимеда: всякий отрезок можно перекрыть любым отрезком, откладывая его на первом достаточное число раз (откладывание отрезка осуществляется движением). 2) Аксиома Кантора: если дана последовательность отрезков, вложенных один в другой, то все они имеют хотя бы одну общую точку.
- *V. Аксиома параллельности Евклида.* Через точку A вне прямой a в плоскости, проходящей через A и a , можно провести лишь одну прямую, не пересекающую a .

Математика Греции

Архимед (287 — 212 до н. э.)

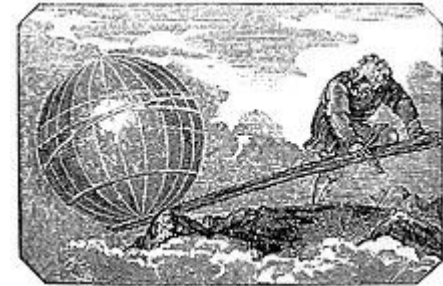
- Математик, физик и инженер из Сиракуз (остров Сицилия)
- Погиб при взятии Сиракуз римлянами. Несколько версий сходятся в одном: Архимеда, занимавшегося геометрическими построениями, зарубил римский воин.
- Плутарх сообщает, что Архимед, «как утверждают, завещал родным и друзьям установить на его могиле описанный вокруг шара цилиндр с указанием отношения объема описанного тела к вписанному», что было одним из наиболее славных его открытий.



Математика Греции

Архимед как инженер и механик

- Метательные машины
- Винтовой двигатель
- Устройство для поднятия тяжестей (теория рычага)
- «Когти Архимеда» (захватывали нос вражеского корабля и топили его)
- Закон Архимеда (о потере веса телом, погруженным в жидкость).



Математика Греции

Математические труды Архимеда

- Доказательства теорем о площадях и объемах криволинейных фигур или тел.
 - *О шаре и цилиндре*
 - *Об измерении круга*
 - *О коноидах и сфероидах*
 - *О спиралях*
 - *О квадратуре параболы*
- Работы по геометрическому анализу статических и гидростатических задач:
 - *О равновесии плоских фигур*
 - *О плавающих телах*
- Различные математические работы:
 - *О методе механического доказательства теорем,*
 - *Исчисление песчинок,*
 - *Задача о быках*
 - *Стомахион (сохранившийся лишь в отрывках)*



$$3.1409 \approx 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \approx 3.1429.$$

Математика Греции

Характерные черты трудов Архимеда

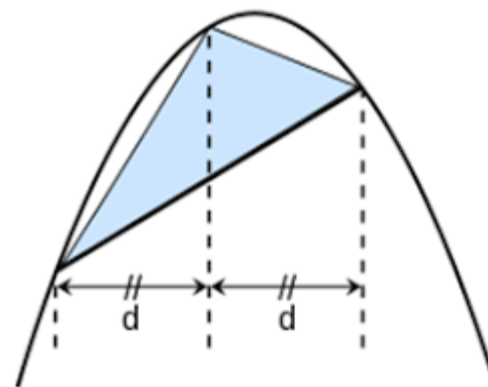
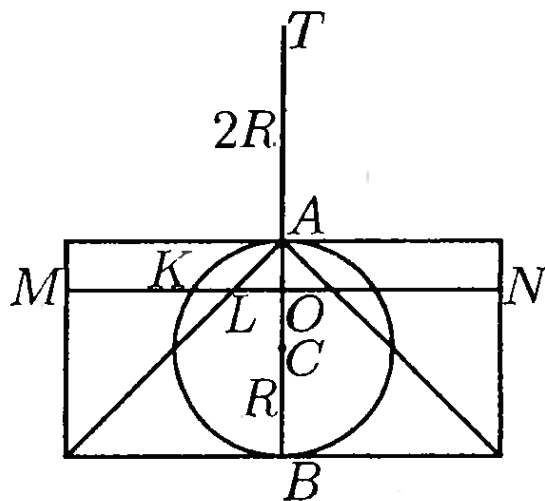
- Алгоритмическая направленность
- Применение математических методов в механике и физике
- Использование идей механики в математических разработках
- Совершенствование техники вычислений

Все это черты прикладной математики

Математика Греции

Методы вычислений

- Механический метод вычисления объема шара
- Площадь сегмента параболы равна $\frac{4}{3}$ площади вписанного в него треугольника.



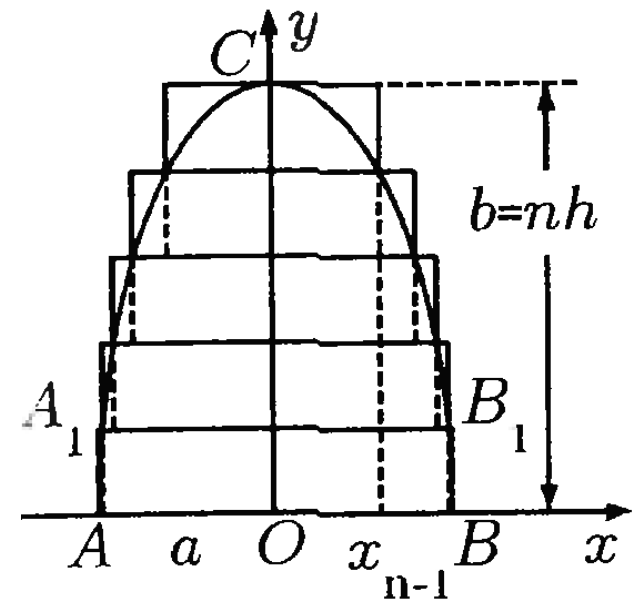
Математика Греции

Методы вычислений

- Метод интегральных сумм для вычисления объемов (предшественник метода интегрирования, аналог сумм Дарбу)
- Дифференцирование (для определения касательной к спиральной линии).

«Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современных математиков.»

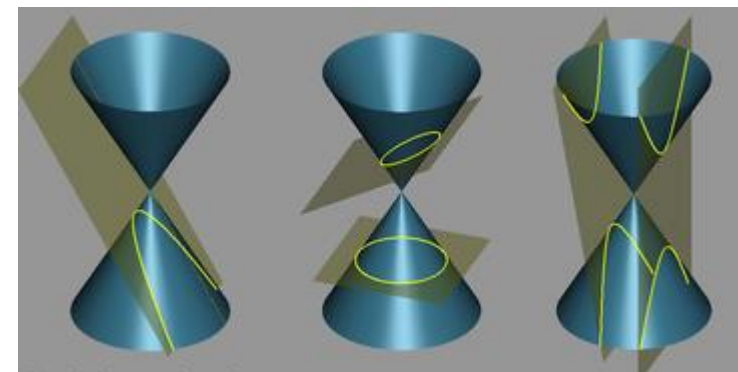
Г.Ф.Лейбниц



Математика Греции

Аполлоний (ок. 260–170 гг. до н.э.)

- Монография «Конические сечения», 8 книг — общая теория эллипса, гиперболы и параболы (названия введены Аполлонием, ранее они рассматривались как сечения конуса).
- Ввёл математические термины, латинские аналоги которых навсегда вошли в науку, в частности: асимптота, абсцисса, ордината, аппликата
- Переработал астрономическую модель Евдокса, введя эпициклы и эксцентрики для объяснения неравномерности движения планет.



Математика Греции

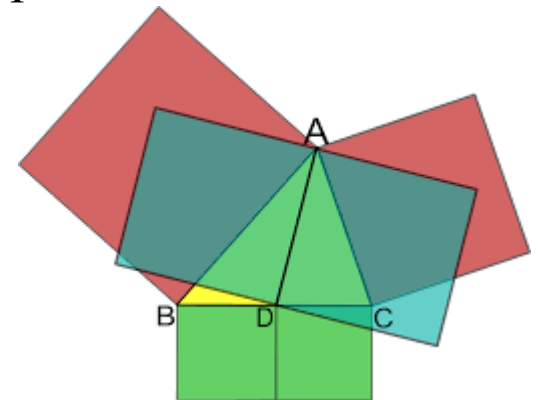
Аполлоний (ок. 260–170 гг. до н.э.)

- Кривые задаются уравнениями

$$y^2 = px, y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2$$

- «Приложение», «Приложение с недостатком», «Приложение с избытком» (приложение – построение прямоугольника со стороной p , по площади равного квадрату с стороной y .
- Все изложено на геометрическом языке, построения выполняются лишь с помощью циркуля и линейки.
- Тожество Аполлония

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$



Математика Греции

Завершающий (Римский) период

- Спад уровня математических исследований
- Интерес к вычислительным методам в связи с развитием астрономии, геодезии, географии
- Александрийская школа приходит в упадок (в частности, из-за ее противостояния христианству). Около 400 года был разорен Музеон, сожжена большая часть библиотеки, ученые изгнаны или убиты. Часть ученых перебралась в Афинскую академию.
- Афинская академия закрыта в 529 г. как языческая.
- *Совершенно запрещается достойное осуждения искусство математики.*

Кодекс Юстиниана (Византийский император, 483–565).

Математика Греции



Птолемеи (ок. 100–178 гг.)

- Крупнейший греческий астроном
- «Альмагест» («Великое собрание»)
- Обосновал сложную геоцентрическую модель мира, с удивительной точностью вычислил расстояние от Солнца и Луны до Земли. Теория существовала 14 столетий, до Коперника.
- Предложил каталог звездного неба, состоящий из 48 созвездий.
- Ввел деление градуса на минуты и секунды.
- Получил результаты по геометрии, тригонометрии, сферической тригонометрии.

Математика Греции



Герон Александрийский (вторая половина I века)

- Ему приписывают изобретение арбалета, который заряжается самостоятельно, автоматических дверей, паровой турбины, а также автоматический кукольный театр, автоматическая масляная лампа.
- Систематически изложил труды древнегреческих ученых по математике (в основном без доказательств):
 - «Метрика»,
 - «Пневматика»,
 - «Автоматопозтика»
 - «Механика»

Математика Греции



Диофант (III век)

- Основное произведение – «Арифметика» в 13 книгах. К сожалению, сохранились только 6 первых книг из 13.
- Развил методы поиска рациональных положительных решений неопределенных уравнений и систем уравнений вида

$$Ax^2 + Bx + C = y$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y$$

- Над созданием теории диофантовых уравнений математики работают до сих пор

Математика Греции

Папп (III век)

- В 8-ми книгах «Математического собрания» изложил результаты исследований более ранних древнегреческих авторов, присоединяя к ним собственные теоремы.
- Считается, что в 7-ой книге он упомянул некоторые правила дисциплины, получившей название «Эвристика».
- *«То что называют эвристикой, можно кратко определить как особое собрание принципов, предназначенное для тех, кто после изучения обычных «Начал» имеет желание научиться решать математические задачи; изучение эвристики полезно лишь для достижения этой цели. Эвристика создана трудами трёх людей: Евклида, автора «Начал», Аполлония из Перги и Аристия старшего. Она обучает приёмам анализа и синтеза.»*



Литература

- *Русанов В.В., Росляков Г.С.* История и методология прикладной математики: учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004.
- История математики (том 1) с древнейших времен до начала Нового времени. Под ред. *А.-А. П. Юшкевича*. – М., Наука, 1970.
- *Шевцова Ю.В.* История математики. Часть 2. Математика Древней Греции. Математика Востока.
- *Рыбников К.А.* История математики. – М., 1960.
- *Ван дер Варден.* Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. — М.: Наука, 1959.
- *Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. — М.: Наука, 1967.