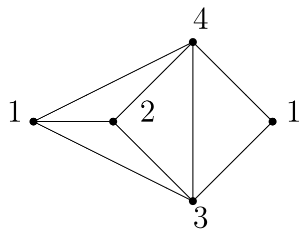
# Тема 10. Раскрашивание графов

## 10.1. Хроматическое число

**Определение.** Граф $G$ называется *$k$-раскрашиваемым*, если каждой его вершине можно приписать один из $k$ цветов таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не были одного цвета. Если граф $G$ является $k$-раскрашиваемым, но не является $k-1$-раскрашиваемым, то граф наывается *$k$-хроматическим*, а $k$ – его *хроматическим числом* $\chi(G)$.

**Пример.** Граф 4-хроматический (цвета обозначены цифрами).




Ясно, что $\chi(K_p) = p$, и, следовательно, легко построить графы со сколь угодно большим хроматическим числом. С другой стороны, граф 1-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он является пустым, и 2-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он является двудольным.

**Теорема 1.** Если наибольшая из степеней вершин графа равна $\rho$, то граф $\rho+1$-раскрашиваем.

*Доказательство.* Индукция по числу вершин. Пусть $G$ – граф с $p$ вершинами, если из него удалить произвольную вершину $v$ вместе с инцидентными ей ребрами, то в результате получим граф $G'$ с $p-1$ вершинами, причем степени вершин по-прежнему не превосходят $\rho$. По индуктивному предположению этот граф $\rho+1$-раскрашиваем. Отсюда получаем, что исходный граф также $\rho+1$-раскрашиваем: вершину $v$ окрашиваем в цвет, отличный от цветов смежных вершин, а их не более чем $\rho$.

**Теорема 2 (Брукса).** Пусть наибольшая из степеней вершин графа $G$ равна $\rho$. Тогда $G$ является $\rho$-раскрашиваемым, за исключением тех случаев, когда $G$ содержит в качестве компоненты граф $K_{\rho+1}$, или $\rho = 2$ и цикл нечетной длины является компонентой $G$.

*Доказательство.* Индукция по числу вершин. Пусть $G$ – граф с $p$ вершинами. Если степень какой-либо вершины меньше $\rho$, то дальнейшие рассуждения проводим, как в предыдущей теореме. Поэтому считаем, что граф является регулярным степени $\rho$. Удалим произвольную вершину $v$ вместе с инцидентными ей ребрами, то в результате получим граф $G'$ с $p-1$ вершинами, причем степени вершин по-прежнему не превосходят $\rho$. По индуктивному предположению этот граф $\rho$-раскрашиваем. Считаем, что смежные с $v$ вершины $v_1, \ldots, v_\rho$ расположены по часовой стрелке и окрашены в цвета $c_1, \ldots, c_\rho$ (если какие-либо из смежных вершин окрашены в одинаковый цвет, то вершину $v$ можно окрасить в цвет, не задействованный в окраске смежных вершин).

Определим подграф $H_{ij}$ графа $G'$ как правильный подграф, содержащий все вершины, окрашенные в цвета $c_i$ и $c_j$. Теперь имеется две возможности:

– найдутся такие $i$ и $j$, что вершины $v_i$ и $v_j$ лежат в разных компонентах связности графа $H_{ij}$. Тогда перекрашиваем вершины, вошедшие в ту же компоненту, что и $v_i$: вершины, окрашенные в цвет $c_i$, перекрашиваем в цвет $c_j$, а вершины, окрашенные в цвет $c_j$, перекрашиваем в цвет $c_i$. Теперь вершина $v_i$ окрашена в цвет $c_j$, как и $v_j$, а это означает, что вершину $v$ можно окрасить в цвет $c_i$;

– вершины $v_i$ и $v_j$ лежат в одной компоненте связности графа $H_{ij}$ для любых $i$ и $j$. Тогда в этом графе существует цепь, соединяющая эти вершины. Обозначим компоненту связности $H_{ij}$, содержащую вершины $v_i$ и $v_j$, через $C_{ij}$.

Ясно, что если вершина $v_i$ смежна более чем с одной вершиной цвета $c_j$, то существует цвет (отличный от $c_i$), не приписанный никакой из вершин, смежных с $v_i$ (т. к. степень вершины $v_i$ после удаления $v$ стала равной $\rho-1$). В этом случае вершину $v_i$ можно перекрасить в этот цвет, что в свою очередь позволяет окрасить вершину $v$ в цвет $c_i$ и закончить на этом доказательство теоремы. Поэтому считаем, что вершина $v_i$ смежна ровно с одной вершиной цвета $c_j$.

Рассуждая аналогично, можно показать, что компонента $C_{ij}$ состоит только из простой цепи, соединяющей вершины $v_i$ и $v_j$. Предположим противное: пусть $w$ – вершина из цепи, имеющая степень больше двух. Тогда $w$ смежна с более чем одной вершиной цвета $c_i$ ($c_j$), и ее можно перекрасить в цвет, отличный от $c_j$ ($c_i$). Это приводит к тому, что вершины $v_i$ и $v_j$ будут лежать в разных компонентах связности графа $H_{ij}$, а этот случай уже был описан выше. Поэтому компонента $C_{ij}$ есть простая цепь, соединяющая $v_i$ и $v_j$.

Заметим теперь, что две простые цепи $C_{ij}$ и $C_{jl}$ (где $i \neq l$) можно считать пересекающимися только в вершине $v_j$, т. к. если $w$ – другая точка пересечения, то ее можно перекрасить в цвет, отличный от $c_i$, $c_j$ или $c_l$, а это будет противоречить факту, что вершины $v_i$ и $v_j$ связаны простой цепью.

Для завершения доказательства выберем (если это возможно) две несмежные вершины $v_i$ и $v_j$ и допустим, что $w$ – вершина цвете $c_j$, смежная с $v_i$. Теперь возьмем компоненту $C_{jl}$ (где $i \neq l$) и поменяем в ней раскраску вершин ($c_j$ на $c_l$ и наоборот), т. к. это простая цепь, мы можем это сделать, не затрагивая остальную часть графа. Но это приводит к противоречию, потому что тогда $w$ будет общей вершиной простых цепей $C_{ij}$ и $C_{jl}$. Отсюда следует, что нельзя выбрать две вершины $v_i$ и $v_j$не смежными, т. е. $G$ содержит полный граф $K_{\rho+1}$, что не допускается условием теоремы. Все случаи рассмотрены, теорема доказана.

Обе эти теоремы удобно применять тогда, когда степени всех вершин графа примерно одинаковы. Так, из теоремы 1 сразу получается, что всякий граф степени 3 является 4-раскрашиваемым, а из теоремы 2 – что всякий связный граф степени 3, кроме $K_4$, на самом деле 3-раскрашиваем. С другой стороны, если граф имеет несколько вершин высокой степени, эти теоремы дают очень мало. Хорошей иллюстрацией служит граф «звезда» $K_{1,n}$, который по теореме Брукса $n$-раскрашиваем, а на самом деле является 2-хроматическим.

Ситуация меняется, если ограничиться планарными графами.

### 10.2. Хроматическое число планарных графов

**Теорема о шести красках.** Любой планарный граф 6-раскрашиваем.

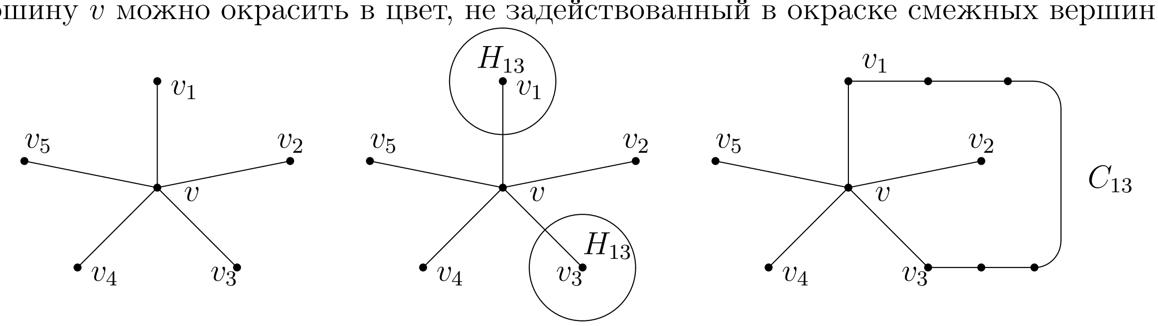
*Доказательство.* Индукция по числу вершин. Для планарных графов, число вершин которых меньше 7, результат очевиден. Пусть $G$ – планарный граф с $p$ вершинами, и что все планарные графы с $p-1$ вершинами 6-раскрашиваемы. Без потери общности можно считать $G$ простым графом, тогда (по следствию из формулы Эйлера) он содержит вершину $v$, степень которой не больше пяти. Удалим эту вершины вместе с инцидентными ей ребрами, получим планарный граф с $p-1$ вершинами, который 6-раскрашиваем по индуктивному предположению. Из этой раскраски можно получить раскраску для $G$, если окрасить вершину $v$ цветом, отличным от цветов смежных вершин, которых не более пяти.

С помощью более тщательных рассудений можно усилить этот результат.

**Теорема о пяти красках.** Любой планарный граф 5-раскрашиваем.

*Доказательство.* Индукция по числу вершин. Для графов, имеющих меньше шести вершин, результат очевиден. Пусть $G$ – планарный граф с $p$ вершинами, и что все планарные графы с $p-1$ вершинами 5-раскрашиваемы. Без потери общности можно считать $G$ простым графом, тогда (по следствию из формулы Эйлера) он содержит вершину $v$, степень которой не больше пяти. Удалим эту вершины вместе с инцидентными ей ребрами, получим планарный граф с $p-1$ вершинами, который 5-раскрашиваем по индуктивному предположению.

Если $d(v) < 5$, то вершину $v$ можно окрасить в любой цвет, не участвующий в окраске смежных вершин (которых не более четырех), и в этом случае доказательство закончено. Поэтому предположим, что $d(v) = 5$, и что смежные с $v$ вершины расположены вокруг $v$ по часовой стрелке. Если какие-либо из смежных вершин окрашены в одинаковый цвет, то вершину $v$ можно окрасить в цвет, не задействованный в окраске смежных вершин.




Итак, мы пришли к случаю, когда все вершины $v_1, \ldots, v_5$ окрашены в разные цвета, пусть это будут $c_1, \ldots, c_5$ соответственно. Определим подграф $H_{ij}$ графа $G'$ как правильный подграф, содержащий все вершини, окрашенные в цвета $c_i$ и $c_j$. Теперь имеется две возможности:

– вершины $v_1$ и $v_3$ лежат в разных компонентах связности графа $H_{13}$. Тогда перекрашиваем вершины, вошедшие в ту же компоненту, что и $v_1$: вершины, окрашенные в цвет $c_1$, перекрашиваем в цвет $c_3$, а вершины, окрашенные в цвет $c_3$, перекрашиваем в цвет $c_1$. Теперь вершина $v_1$ окрашена в цвет $c_3$, как и $v_3$, а это означает, что вершину $v$ можно окрасить в цвет $c_1$;

– вершины $v_1$ и $v_3$ лежат в одной компоненте связности графа $H_{13}$. Тогда в этом графе существует цепь $C_{13}$, соединяющая эти вершины. Вместе с вершиной $v$ и ребрами $(v_1, v)$ и $(v, v_3)$ она образует цикл в графе $G$. Так как граф планарный, и вершина $v_2$ лежит внутри этого цикла, а $v_4$ – вне его, то в подграфе $H_{24}$ не существует цепи, соединяющей вершины $v_2$ и $v_4$. Это означает, что если мы поменяем цвета вершин из компоненты связности графа $H_{24}$, включающей вершину $v_2$, (вершины, окрашенные в цвет $c_2$, перекрашиваем в цвет $c_4$, а вершины, окрашенные в цвет $c_4$, перекрашиваем в цвет $c_2$), то вершина $v_2$ окажется окрашенной в цвет $c_4$, как и вершина $v_4$. Тогда вершину $v$ можно окрасить в цвет $c_2$.

**Гипотеза четырех красок.** Любой планарный граф 4-раскрашиваем.

Возникновение гипотезы четырех красок исторически связано с раскрашиванием географических карт. Если имеется карта с изображением нескольких стран, то граничащие страны необходимо раскрасить в разные цвета. Если каждой стране сопоставить вершину графа, и соединить вершины ребром в случае, если страны граничат, то мы получим планарный граф.

### 10.3. Алгоритмы раскраски графов

Ясно, что в один цвет могут быть покрашены только вершины, принадлежащие к независимому множеству.

**Точный алгоритм раскрашивания.**

*Шаг 1.* Найти все максимальные независимые подмножества вершин.

*Шаг 2.* Построить булеву матрицу, строкам которой сопоставлены максимальные независимые подмножества вершин, а столбцам – вершины графа.

*Шаг 3.* Найти кратчайшее покрытие этой таблицы.

*Шаг 4.* Раскрасить граф по найденному кратчайшему покрытию: Выбрать произвольную строку и окрасить все вершины соответствующего подмножества в один цвет. Затем выбрать следующую строку и окрасить все вершины соответствующего подмножества, кроме уже окрашенных, в следующий цвет и т.д., пока не будут исчерпаны все строки.

Алгоритм вычислительно сложный – поиск всех максимальных независимых подмножеств и поиск кратчайшего покрытия булевой матрицы являются вычислительно сложными задачами. Поэтому актуальными являются приближенные алгоритмы последовательной раскраски.

**Алгоритм 1.** Последовательно раскрашиваются вершины – берется очередная вершина и раскрашивается в цвет, не совпадающий с цветами смежных окрашенных вершин.

**Алгоритм 2.** Цикл по цветам – сначала все, что можно, окрашивается в цвет 1, затем все, что можно, в цвет 2, и т.д. При этом лучше сначала упорядочить вершины по убыванию степеней, так как чем больше степень вершины, тем больше вероятность, что ее придется красить в новый цвет, если она будет окрашиваться последней.