Тема 9. Планарность графов

9.1. Плоские и планарные графы

Определение. Граф *укладывается* на некоторой поверхности, если его диаграмму можно нарисовать на этой поверхности без пересечения ребер.

Теорема об укладке графа в трехмерном пространстве. Всякий граф может быть уложен в трехмерном пространстве.

Доказательство. Расположим все вершины графа на одной прямой. Через эту прямую проходит бесконечное число различных плоскостей, так что если расположить все ребра графа в различных плоскостях, они не будут пересекаться.

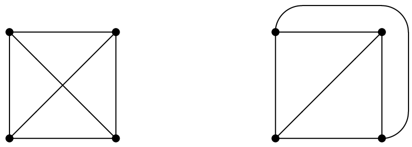
Определение. Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости.

Определение. Граф называется *плоским*, если он уложен на плоскости.

Определение. Область, ограниченная ребрами в лоском графе и не содержащая внутри себя вершин и ребер, называется *гранью.* Число ребер плоского графа G обозначается $r(G)$. Внешняя часть плоскости также образует грань.

Неограниченная грань называется *внешней*, органиченые – *внутренними.*

Пример. Диаграммы планарного графа K_4 и его укладки на плоскости. Граф имеет 4 грани.



Число ребер, вершин и граней не являются независимыми величинами.

Теорема (формула Эйлера). В связном плоском графе $p - q + r = 2$.

Доказательство. Индукция по числу ребер q. База: $q = 0 : p = 1, r = 1$. Пусть теорема верна для всех графов с q ребрами. Добавим еще одно ребро. Если добавляемое ребро соединяет две существующие вершины, то $q' = q + 1$, $p' = p$, $r' = r + 1$. Тогда $p' - q' + r' = p-(q+1)+(r+1) = p-q+r = 2$. Если добавляемое ребро соединяет существующую вершину с новой, то $q' = q+1$, $p' = p+1$, $r' = r$. Тогда $p'-q'+r' = (p+1)-(q+1)+r = p-q+r = 2$.

Следствие 1. В связном планарном графе при $p > 3$ $q \leq 3p - 6$.

Доказательство. Каждая грань ограничена по крайней мере тремя ребрами, каждое ребро ограничивает две грани, поэтому $3r \leq 2q$. Имеем $2 = p-q+r \leq p-q+2q/3$. Отсюда $q \leq 3p - 6$.

Следствие 2. В любом простом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.

Доказательство. Без потери общности можно считать граф плоским, связным и содержащим по крайней мере три вершины. Если степень каждой вершины не меньше 6, то $6p \leq 2q$ $(3p \leq q)$. Используя следствие 1, получаем противоречие: $3p \leq 3p - 6$.

Теорема о графах K_5 и $K_{3,3}$. Графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны.

Доказательство от противного. В графе K_5 $p = 5$, $q = 10$. Если K_5 планарен, то по следствию из предыдущей теоремы $q \leq 3p - 6 \Rightarrow 10 \leq 9$. Противоречие.

В графе $K_{3,3}$ $p = 6$, $q = 9$. В этом графе нет треугольников, значит, если он планарен, то в его плоской укладке каждая грань ограничена по меньшей мере четырьмя ребрами и, следовательно, $4r \leq 2q$. По формуле Эйлера $6 - 9 + r = 2$, откуда $r = 5$. Имеем $4r = 20 \leq 2q = 18$. Противоречие.

Рассмотрим следующие операции над графом.

Включение вершины в ребро. Пусть имеется граф $G(V, E)$. Пусть u, w – смежные вершины. Тогда результатом включения вершины в ребро будет граф

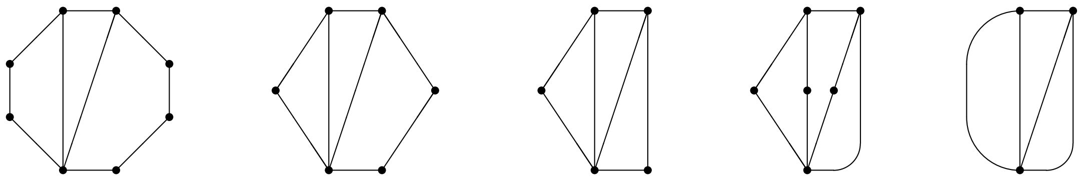
$$G'(V', E') : V' = V \cup v;\ E' = \{E \cup (v, w) \cup (v, u)\} \setminus (u, w).$$

Удаление вершины степени 2. Пусть имеется граф $G(V, E)$ и $\exists v \in V : d(v) = 2$. Пусть u, w – вершины, смежные с v. Тогда результатом удаления вершины будет граф

$$G'(V', E') : V' = V \setminus v;\ E' = \{E \cup (u, w)\} \setminus \{(v, w) \cup (v, u)\}.$$

Определение. Графы называются *гомеоморфными*, если графы, полученные из них включением вершин в ребро и удалением вершин степени 2, изоморфны.

Пример. Все эти графы гомеоморфны.



Теорема Понтрягина–Куратовского. Граф планарен, если и только если он не содержит подграфа, гомеомерфного K_5 или $K_{3,3}$.

9.2. Толщина графа

В электротехнике части цепей наносятся на одну сторону непроводящей пластины (печатная плата). Поскольку проводники не изолированы, они не могут пересекаться, и соответствующие графы должны быть планарными. Требуется знать, сколько печатных плат понадобится для формирования всей сети. С этой целью вводится понятие толщины графа.

Определение. *Толщина графа* $t(G)$ – наименьшее число планарных графов, наложение которых дает G.

Толщина графа является мерой его «непланарности» – например, толщина планарного графа равна единице, а толщина графов K_5 и $K_{3,3}$ равна двум.

Оценку снизу для толщины графа легко получить при помощи теоремы Эйлера. Часто эта довольно грубая оценка оказывается истинным значением толщины.

Введем следующие обозначения: $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}$ – наименьшее целое число, не превосходящее x.

Теорема о нижней границе толщины графа. Толщина $t(G)$ графа G удовлетворяет следующим неравенствам:

$$t(G) \geq \left\{\frac{q}{3p-6}\right\}, \quad t(G) \geq \left[\frac{q+3p-7}{3p-6}\right].$$

Доказательство. Первое соотношение вытекает из следствия 1, а второе следует из первого с помощью легко доказываемого соотношения $\{a/b\} = [(a+b-1/b]$, где a, b – целые числа.

9.3. Укладка графа на плоскости

Критерии планарности графа не всегда просты в практическом применении и не дают информации о том, как строить укладку графа на плоскости, если он оказывается планарным. Все это вызвало появление алгоритмов, которые проверяют граф на планарность и строят его плоскую укладку.

Рассмотрим один из алгоритмов, который представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уложенному подграфу G' графа G новой цепи L. Процесс присоединения продолжается до тех пор, пока не будет построен плоский граф, изоморфный G, или присоединение новой цепи окажется невозможным, что будет свидетельствовать о непланарности графа G.

Пусть имеется некоторая плоская укладка подграфа $G' = (V', E')$ графа $G = (V, E)$.

Определение. *Сегментом* G_i относительно $G' = (V', E')$ называется подграф графа $G = (V, E)$ следующих двух видов:

1) ребро $e = (u, v)$ такое, что $e \notin E'$, $u, v \in V'$;

2) Связная компонента графа $G \setminus G'$, дополненная всеми ребрами графа G, соединяющими эту компоненту с подграфом G', и концами этих ребер.

Определение. Вершина u сегмента G_i называется *контактной*, если $u \in V'$.

Граф G' – плоский, значит, он разбивает плоскость на грани.

Определение. *Допустимой* гранью для сегмента G_i относительно G' называется грань γ графа G', содержащая все контактные вершины сегмента G_i

Обозначим через $\Gamma(G_i)$ множество допустимых граней для G_i. Для непланарных графов может быть $\Gamma(G_i) = \emptyset$. Рассмотрим простую цепь L сегмента G_i, соединяющую две контактные вершины этого сегменты и не содержащую других контактных вершин. Такие цепи называются *α-цепями.* Всякая α-цепь может быть уложеа в любую грань, допустимую для данного сегмента.

Определение. Два сегмента G_i и G_j называются *конфликтующими*, если:

1) $\theta = \Gamma(G_i) \cap \Gamma(G_j) \neq \emptyset$;

2) существуют две α-цепи $L_i \in G_i$ и $L_j \in G_j$, которые нельзя уложить без пересечений одновременно ни в какую грань $\gamma \in \theta$.

Пусть $\tilde{G}$ – плоская укладка некоторого подграфа графа G. Для каждого сегмента G_i относительно $\tilde{G}$ находим множество допустимых граней. Тогда возможны следующие три случая:

А) существует сегмент G_i, для которого $\Gamma(G_i) = \emptyset$, тогда исходный граф G непленарен;

Б) для некоторого сегмента G_i существует единственная допустимая грань Γ, тогда располагаем любую α-цепь сегмента G_i в грани Γ, при этом грань Γ разобьется на две грани;

В) $|\Gamma(G_i)| \geq 2$ для всех G_i, тогда располагаем любую α-цепь сегмента G_i в любой допустимой грани.

Если на очередном шаге множество сегментов пусто, то построена укладка графа на плоскости.

Алгоритм укладки планарного графа на плоскости

Шаг 1. Выбираем любой простой цикл μ графа G. Укладываем этот цикл на плоскости и полагаем $\tilde{G} = \mu$.

Шаг 2. Находим все грани графа $\tilde{G}$ и все сегменты G_i относительно $\tilde{G}$. Если множество сегментов пусто, то укладка графа G на плоскости построена, конец.

Шаг 3. Для каждого сегмента G_i определяем множество допустимых граней $\Gamma(G_i)$. Если найдется сегмент G_i, для которого $\Gamma(G_i) = \emptyset$, то исходный граф не планарен, конец.

Шаг 4. Если существует сегмент G_i, для которого имеется единственная допустимая грань γ, то идем на шаг 6. Иначе идем на шаг 5.

Шаг 5. Для некоторого сегмента G_i выбираем произвольную допустимую грань γ.

Шаг 6. Произвольная α-цепь L сегмента G_i помещаем в грань γ. Полагаем $\tilde{G} = \tilde{G} \cup L$ и идем на шаг 2.

Интуитивно понятно, что любой планарный граф можно уложить на сфере, и обратно. Это замечание позволяет понять, что планарный граф можно уложить на плоскости несколькими способами.

Теорема. Для любой выделенной грани f плоского графа найдется изоморфный ему плоский граф, у которого грань, соответствующая грани f, будет внешней.

Доказательство. Пусть f – невнешняя грань плоского графа G. Уложим граф на сфере и выделим внутри грани f некоторую точку («северный полюс»). Проведем касательную плоскость к сфере через «южный полюс» и спроецируем граф на эту плоскость из «северного полюса». В результате получим плоский граф, изоморфный G, у которого f – внешняя грань.

Следствие. Для любого выделенного ребра плоского графа найдется такая укладка этого графа на плоскости, что выделенное ребро будет принадлежать внешней грани.