# Теория графов

Ю.Б.Буркатовская

# 1. Основные понятия теории графов

Определение графов и родственных объектов

Смежность вершин и ребер

Подграфы

Типы графов

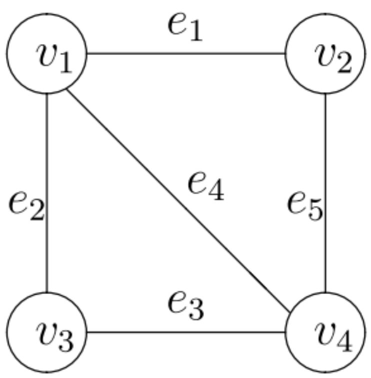
Изоморфизм графов

Операции над графами

Способы задания графов

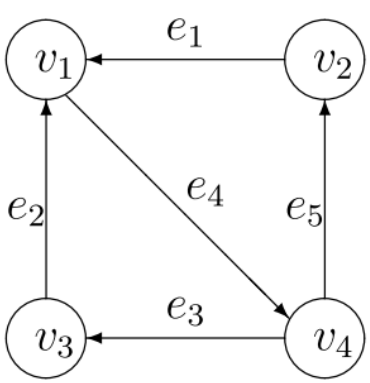
# 1.1. Определение графов и родственных объектов

- **Определение.** *Простым* графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества $V$ и множества $E$ неупорядоченных пар различных элементов множества $V$ . Множество $V$ называется *множеством вершин*, множество $E$ называется *множеством ребер*.
- **Обозначения:** $p$ – число вершин, $q$ – число ребер.
- **Пример.** $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = v_1 v_2$, $e_2 = v_3 v_1$, $e_3 = v_4 v_3$, $e_4 = v_1 v_4$, $e_5 = v_4 v_2$.



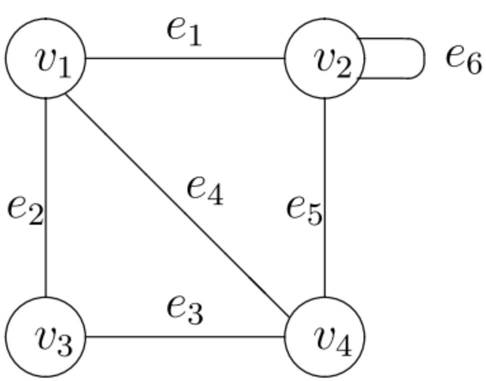
# Определение графов и родственных объектов

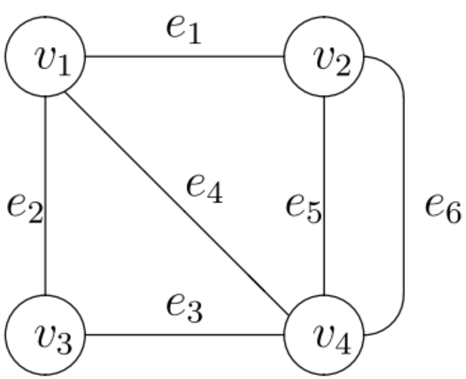
- **Определение.** Если элементами множества $E$ являются *упорядоченные пары* (т.е. пары, в которых фиксирован порядок элементов), то граф называется *ориентированным* (или *орграфом*). В этом случае элементы множества $V$ называются *узлами,* а элементы множества $E$ – *дугами*. Первую вершину упорядоченной пары называют *началом дуги,* вторую – *концом*.
- **Пример.** $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_3v_1$, $e_3 = v_4v_3$, $e_4 = v_1v_4$, $e_5 = v_4v_2$.



# Определение графов и родственных объектов

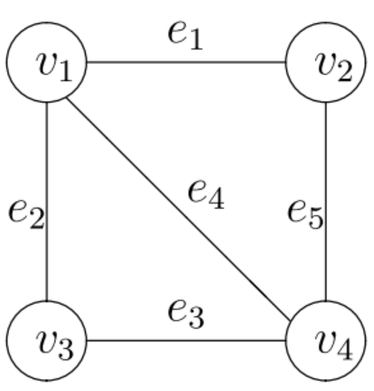
- **Определение.** Пара одинаковых элементов $V$ вида $vv$ называется *петлей*. Граф с петлями называется *псевдографом*.
- **Пример**. Добавим к графу из первого примера петлю $e_6 = v_2v_2$.
- **Определение.** Если $E$ не множество, а *семейство*, то есть если $E$ содержит одинаковые элементы, то такие элементы называются **кратными ребрами**, а граф называется *мультиграфом*.
- **Пример**. Добавим к графу из первого примера ребро $e_6 = v_4v_2$. Теперь ребра $e_5$, $e_6$ – кратные.



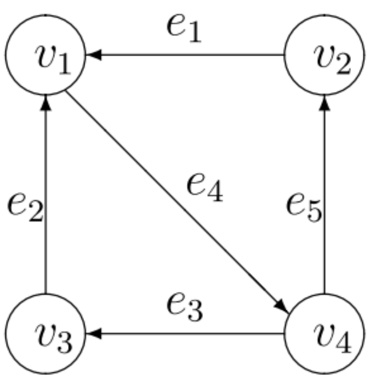
# 1.2. Смежность вершин и ребер

- **Определение.** Пусть $v_1$, $v_2$ – вершины, $e = v_1 v_2$ – соединяющее их ребро. Тогда вершина $v_1$ и ребро $e$ инцидентны, вершина $v_2$ и ребро $e$ также инцидентны. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными*, две вершины, инцидентные одному ребру, также называются *смежными*.
- **Определение.** Множество вершин, смежных с вершиной $v$, называется *множеством смежности* вершины $v$ и обозначается $\Gamma(v) = \{u : vu \in E\}$. Если $A \subset V$ – множество вершин, то $\Gamma(A)$ – множество всех вершин, смежных с вершинами из $A$ : $\Gamma(A) = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v)$.
- **Пример.**
- Вершины $v_1, v_2$ смежны
- Вершины $v_2, v_3$ не смежны
- Ребра $v_1 v_2$ и $v_1 v_3$ смежны
- $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$



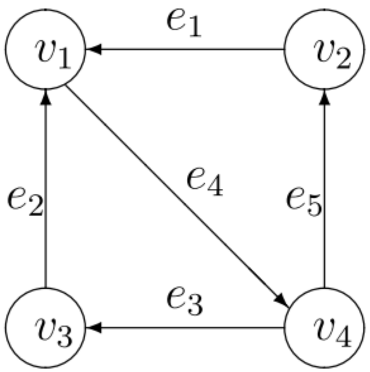
# Смежность вершин и ребер

- **Пример.**
- Вершины $v_1, v_2$ смежны
- Вершины $v_2, v_3$ не смежны
- Ребра $v_2 v_1$ и $v_3 v_1$ смежны
- $\Gamma(v_1) = \{ v_4\}$
- $\Gamma(v_2) = \{ v_1\}$
- $\Gamma(v_3) = \{ v_1\}$
- $\Gamma(v_4) = \{ v_2, v_3\}$



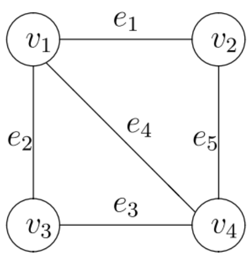
# Смежность вершин и ребер

- **Пример.**
- Вершины $v_1, v_2$ смежны
- Вершины $v_2, v_3$ не смежны
- Ребра $v_2 v_1$ и $v_3 v_1$ смежны
- $\Gamma(v_1) = \{ v_4\}$
- $\Gamma(v_2) = \{ v_1\}$
- $\Gamma(v_3) = \{ v_1\}$
- $\Gamma(v_4) = \{ v_2, v_3\}$

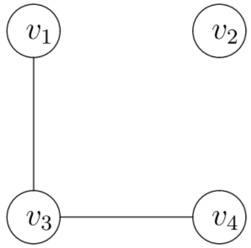


# Смежность вершин и ребер

- **Определение.** Количество ребер, инцидентных вершине $v$, называется *степенью* (или *валентностью*) вершины $v$ и обозначается $d(v)$.
- **Пример**. $d(v_1)= d(v_4)$=3, $d(v_2)= d(v_3)$=2

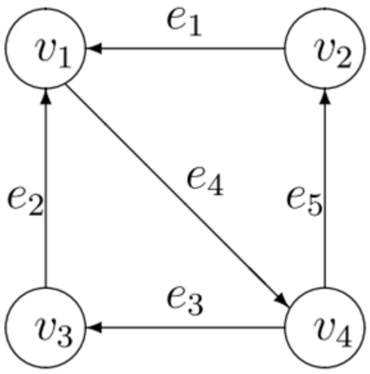



- **Определение.** Если степень вершины равна 0, то вершина называется *изолированной*. Если степень вершины равна 1, то вершина называется *висячей*.
- **Пример**. В данном графе $v_1$ и $v_4$ – висячие вершины, $v_2$– изолированная.



# Смежность вершин и ребер

- **Определение.** Для орграфа число дуг, исходящих из вершины v, называется *полустепенью исхода* $d^{+}(v)$, а входящих – *полустепенью захода* $d^{-}(v)$.
- **Пример**. $d^{+}(v_1)$=1, $d^{-}(v_1) = 2$.



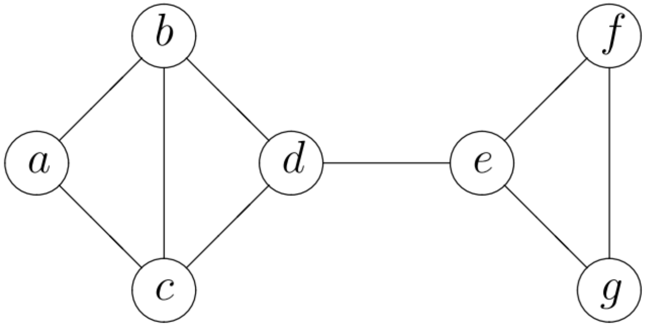
# Смежность вершин и ребер

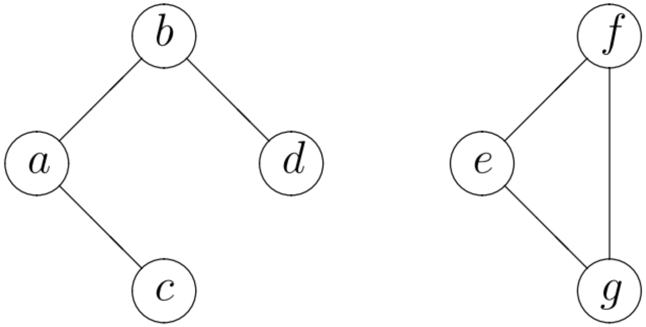
- **Лемма (Эйлера).** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер
$$\sum_{v\in V} d(v) = 2q, \sum_{v\in V}(d^{+}(v) + d^{-}(v)) = 2q$$

- Эта лемма также называется «лемма о рукопожатиях» и имеет следующую интерпретацию: если произошло $q$ рукопожатий, то всего участвующие в этом люди пожали руки $2q$ раз.
- **Теорема о числе вершин нечетной степени.** Число вершин нечетной степени в графе четно.

# 1.3. Подграфы

- **Определение.** Граф $G_0(V_0, E_0)$ называется *подграфом* графа $G(V, E)$ (обозначается $G_0 \subseteq G$ ), если $V_0 \subseteq V$ и $E_0 \subseteq E$.
- **Определение.** Если $V_0 = V$ , то подграф $G_0(V_0, E_0)$ называется *остовным* подграфом графа $G(V, E)$ .
- **Пример.** Слева – исходный граф, справа – его остовный подграф.



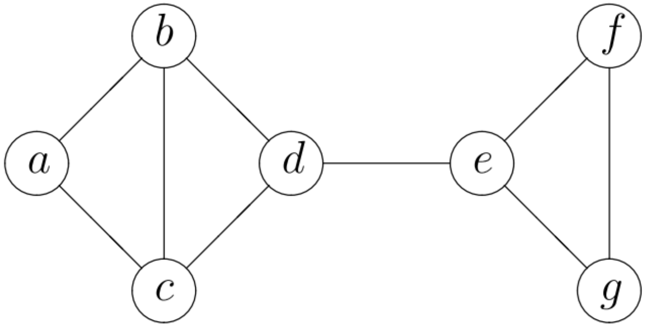



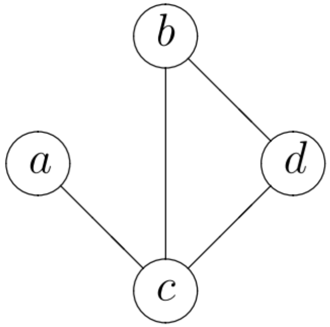
# Подграфы

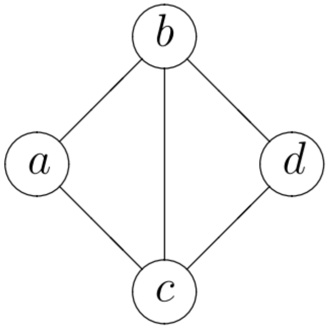
- **Определение.** Если $V_0 \neq V$ , $E_0 \neq E$ то подграф $G_0(V_0, E_0)$ называется *собственным* подграфом графа $G(V, E)$ .
- **Определение.** Подграф $G_0(V_0, E_0)$ называется *правильным* подграфом графа $G(V, E)$б если он содержит все возможные ребра исходного графа:

$$\forall\, u, v \in V_0 : uv \in E \Rightarrow uv \in E_0.$$

- **Пример.** Слева – исходный граф, справа – его собственные подграфы (правильный и неправильный).

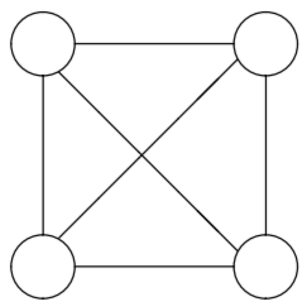


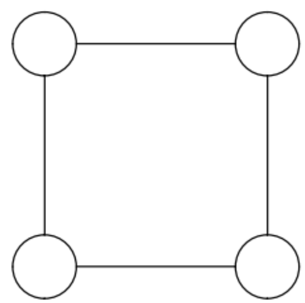



# 1.4. Типы графов

- **Определение.** Граф $G(V,E)$ называется *тривиальным*, если он состоит из одной вершины: $p = 1$, $E = \emptyset$.
- **Определение.** Граф $G(V,E)$ называется *пустым*, если $E = \emptyset$.
- **Определение.** Граф $G(V,E)$ называется *полным*, если в нем любые две вершины смежны, то есть $\forall\, u, v \in V : uv \in E$ (обозначение $K_p$).
- **Определение.** Если степени всех вершин равны k, то граф называется *регулярным степени k*.
- **Примеры.**



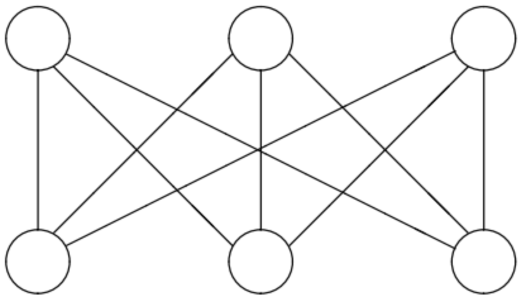
Полный граф $K_4$



Регулярный граф степени 2

# Типы графов

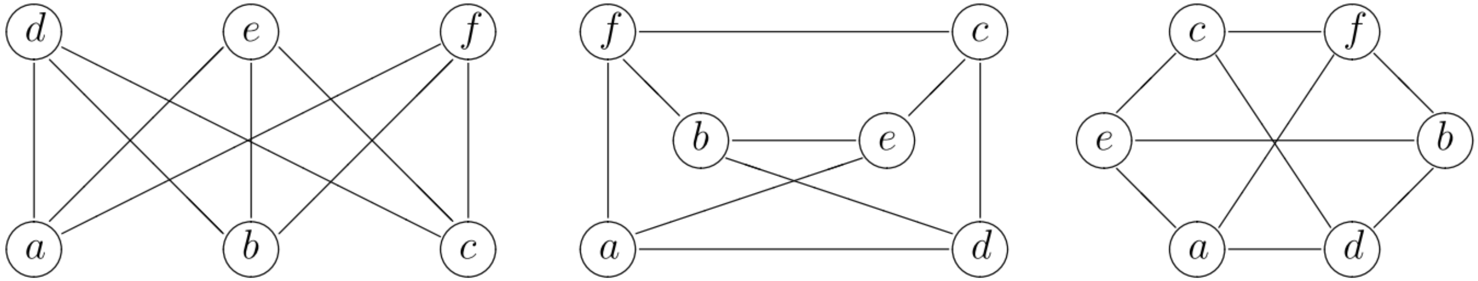
- **Определение.** Граф $G(V,E)$ называется *двудольным*, если множество $V$ можно разбить на два непересекающихся подмножества $V_1$ и $V_2$ таким образом, что любое ребро из $E$ соединяет вершину из $V_1$ с вершиной из $V_2$ . Множества $V_1$ и $V_2$ называются *долями* двудольного графа.
- **Определение.** Если двудольный граф содержит все возможные ребра, то есть $\forall\, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \colon v_1 v_2 \in E$, то он называется *полным двудольным* графом и обозначается $K_{m,n}$, где $m = |V_1|$, $n = |V_2|$.
- **Пример.**



Полный двудольный граф $K_{3,3}$

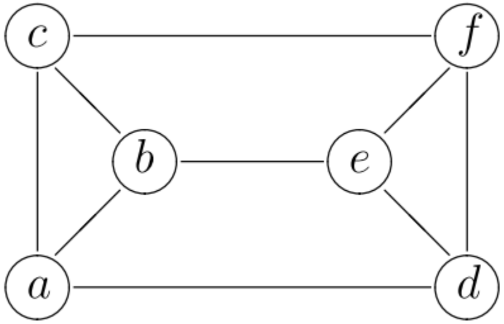
# 1.5. Изоморфизм графов

- **Определение.** Графы называются *изоморфными*, если между их вершинами можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность: Вершины в одном графе смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие вершины во втором графе.
- **Пример**. Все приведенные графы являются изоморфными, это различные диаграммы двудольного графа $K_{3,3}$.



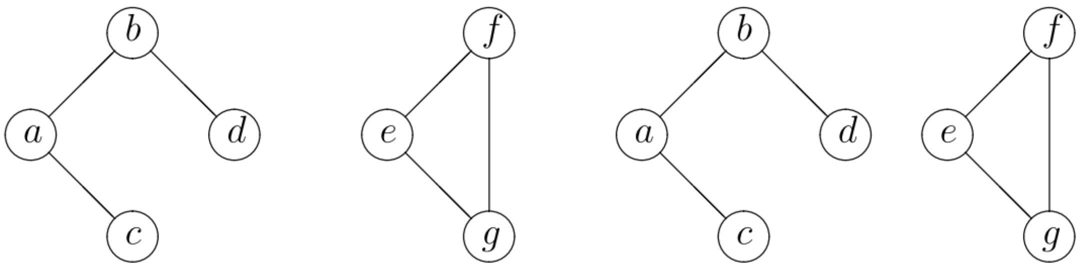
# Изоморфизм графов

- Если графы являются изоморфными, то они имеют одинаковое количество вершин и ребер, а также одинаковое число вершин одной валентности. Обратное неверно: графы, у которых все эти характеристики совпадают, могут не быть изоморфными.
- **Пример**. Граф, неизоморфный $K_{3,3}$



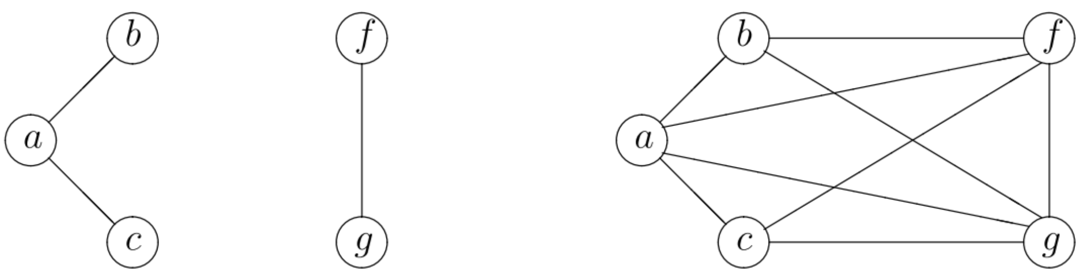
# 1.6. Операции над графами.

- **Объединение**




$G_1(V_1, E_1)$ $\quad$ $G_2(V_2, E_2)$ $\quad$ $G(V, E) = G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$

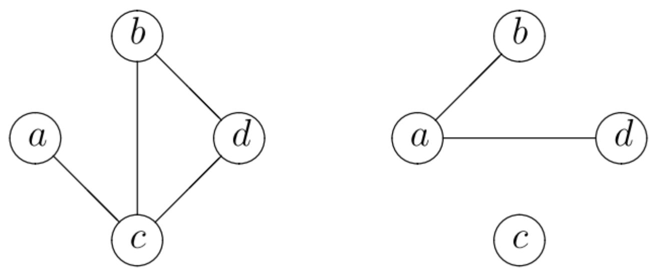
- **Соединение**




$G_1(V_1, E_1)$ $\quad$ $G_2(V_2, E_2)$ $\quad$ $G(V, E) = G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2)$

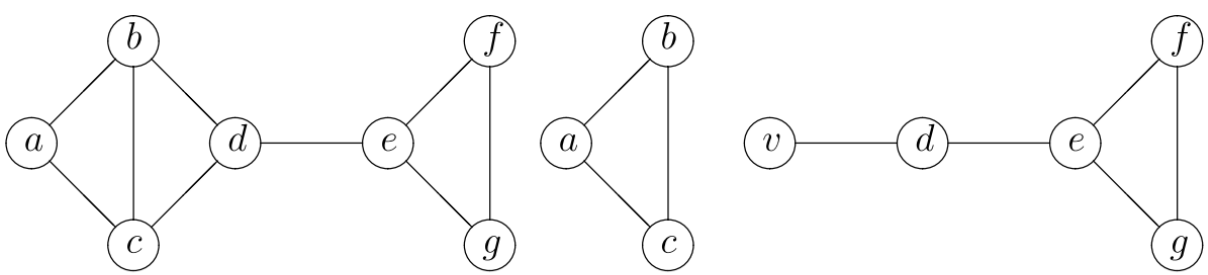
# Операции над графами.

- **Дополнение**




$G_1(V_1, E_1)$ $\quad$ $G_2(V_2, E_2) = \overline{G_1}(V_1, E_1)$

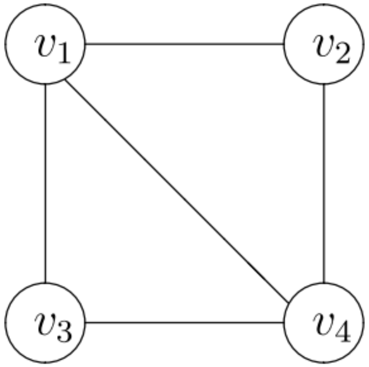
- **Стягивание правильного подграфа в вершину**



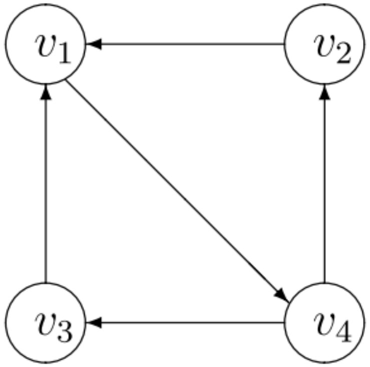

$G_1(V_1, E_1)$ $\quad$ $A(V, E)$ $\quad$ $G_2(V_2, E_2)$

# 1.7. Способы задания графа

- *Списки вершин и ребер* уже рассмотрены выше.
- *Списки смежности.* Каждой вершине графа сопоставляется список смежных ей вершин.
- **Примеры.**




$$
\begin{aligned}
v_1 &: \quad v_2, v_3, v_4; \\
v_2 &: \quad v_1, v_4; \\
v_3 &: \quad v_1, v_4; \\
v_4 &: \quad v_1, v_2, v_3.
\end{aligned}
$$



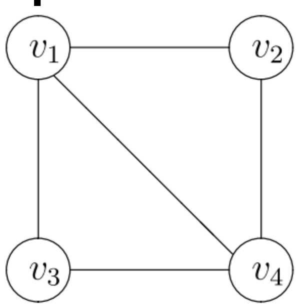

$$
\begin{aligned}
v_1 &: \quad v_4; \\
v_2 &: \quad v_1; \\
v_3 &: \quad v_1; \\
v_4 &: \quad v_2, v_3.
\end{aligned}
$$

# Способы задания графа

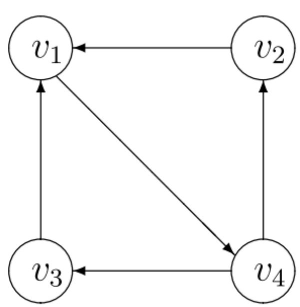
- *Матрица смежности.* Так называется матрица $M : p \times p$,

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & ij \in E; \\ 0 & ij \notin E. \end{cases}$$

- **Примеры.**




$$M(G) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$




$$M(D) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

# Способы задания графа

- *Матрица инциденций*. Так называется матрица $H : p \times q$,

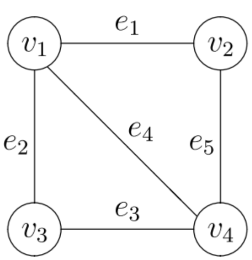
$$h_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } i \text{ инцидентна вершине } j; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

для неориентированного графа,

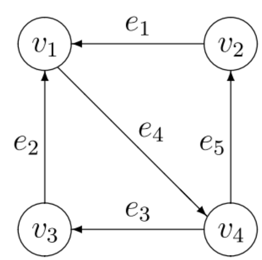
$$h_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ребро } j \text{ выходит из вершины } i, \\ -1, & \text{ребро } j \text{ заходит в вершину } i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

для ориентированного графа.

- **Примеры.**




$$H(G) = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$




$$H(D) = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ v_3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

# Способы задания графа

| | Список ребер | Списки смежности | Матрица смежности | Матрица инциденций |
|---|---|---|---|---|
| Память | $q$ | $q$ | $p \times p$ | $\boldsymbol{p \times q}$ |
| Проверка смежности двух вершин | $\boldsymbol{q}$ | $p$ | 1 | $\boldsymbol{q}$ |

# 2. Связность

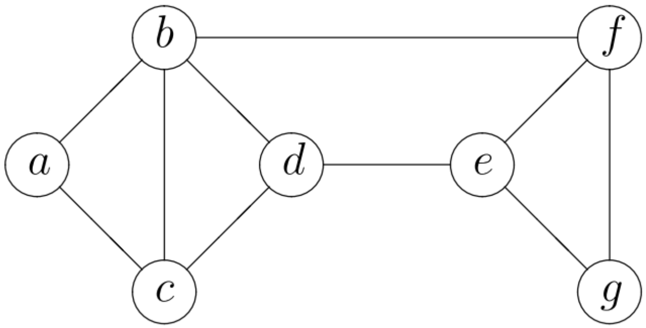
Маршруты, цепи, циклы
Расстояния в графе
Связность неориентированных графов
Оценка числа ребер в графе
Связность орграфов

# 2.1. Маршруты, цепи, циклы

- **Определение.** *Маршрутом* в графе называется последовательность вершин и ребер вида $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots\ v_{k-1} e_k v_k$, в которой $e_i = v_{i-1} v_i$. Вершина $v_0$ называется *начальной*, а $v_k$ – *конечной* вершиной маршрута.
- Для графа без кратных ребер достаточно указать только последовательность вершин.
- **Определение.** Если все ребра в маршруте различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит и ребра) в маршруте различны, то маршрут называется *простой цепью*.
- **Определение.** Если $v_0 = v_k$, маршрут называется замкнутым.
- **Определение.** Если все ребра в замкнутом маршруте различны, то он называется *циклом*. Если все вершины в замкнутом маршруте, кроме первой и последней, различны, то он называется *простым циклом*.
- В орграфе цепь называется *путем*, а цикл – *контуром*.

# Маршруты, цепи, циклы

- **Примеры.**

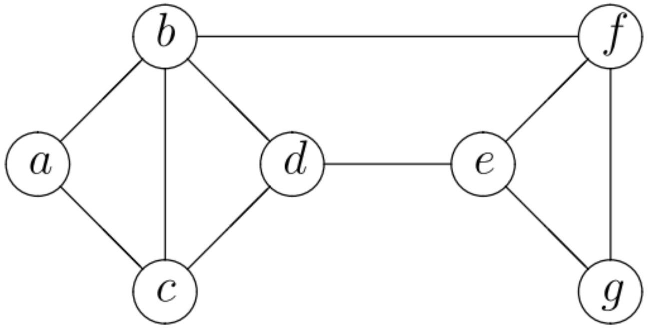



$abdbc$ – маршрут, но не цепь;
$abdcb$ – цепь, но не простая цепь;
$abcde$ – простая цепь;
$abdbca$ – замкнутый маршрут, но не цикл;
$abfedbca$ – цикл, но не простой цикл;
$abca$ – простой цикл.

- **Лемма о цепи.** Если есть цепь, соединяющая вершины *u*, *v*, то есть и простая цепь, соединяющая вершины *u*, *v*.

# 2.2. Расстояния в графе

- **Определение.** *Длиной маршрута* называется количество ребер в нем. Если маршрут $\mu = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots\ v_{k-1} e_k v_k$, то длина μ равна *k* (| μ | = *k*).
- **Определение.** *Расстоянием* между вершинами *u*, *v* (обозначается $s(u,v)$) называется наименьшая длина цепи $\langle u, v\rangle$. Цепь $\mu = \langle u, v\rangle$, для которой $|\mu| = s(u,v)$, называется *кратчайшей* цепью.
- Если $\nexists\langle u, v\rangle$, то по определению $s(u,v) = \infty$.
- **Пример**. В рассмотренном графе $s(a,b) = 2$, кратчайшая цепь, например, *abd*.

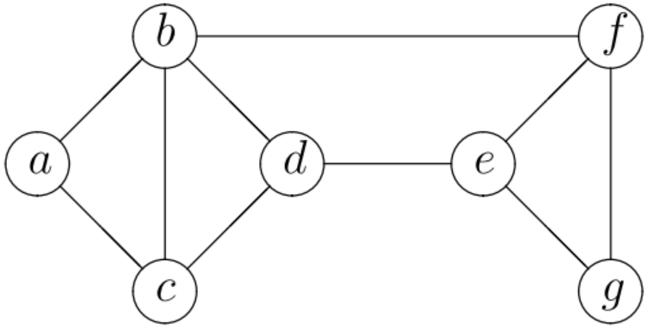


# Расстояния в графе

- **Определение.** *Диаметром графа* $G(V,E)$ (обозначается $D(G)$) называется наибольшее расстояние между двумя его вершинами
$$D(G) = \max_{u,v \in V} s(u,v)$$
- **Определение.** Максимальное из расстояний между вершиной $u$ и остальными вершинами из $G(V,E)$ называется *максимальным удалением* в графе $G(V,E)$ от вершины $u$ (обозначается $r(u)$)
$$r(v) = \max_{u,v \in V} s(u,v)$$
- **Определение.** *Радиусом графа* $G(V,E)$ (обозначается $R(G)$ называется минимальное из максимальных удалений
$$R(G) = \min_{u \in V} r(u) = \min_{u \in V} r(u) \max_{u,v \in V} s(u,v)$$
- **Определение.** Любая вершина $v \in V$, такая что $r(v) = R(G)$, называется *центром графа*.

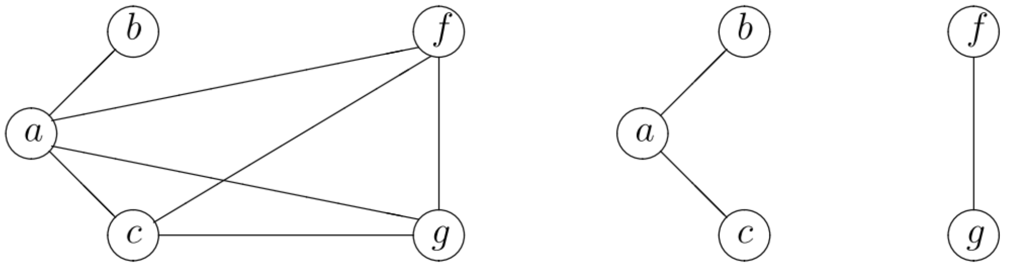
# Расстояния в графе

- **Примеры.**
- $D(G) = 3$
- $r(a) = r(c) = r(e) = r(f) = r(g) = 3$
- $r(b) = r(d) = 2$
- $R(G) = 2$



# 2.3. Связность неориентированных графов

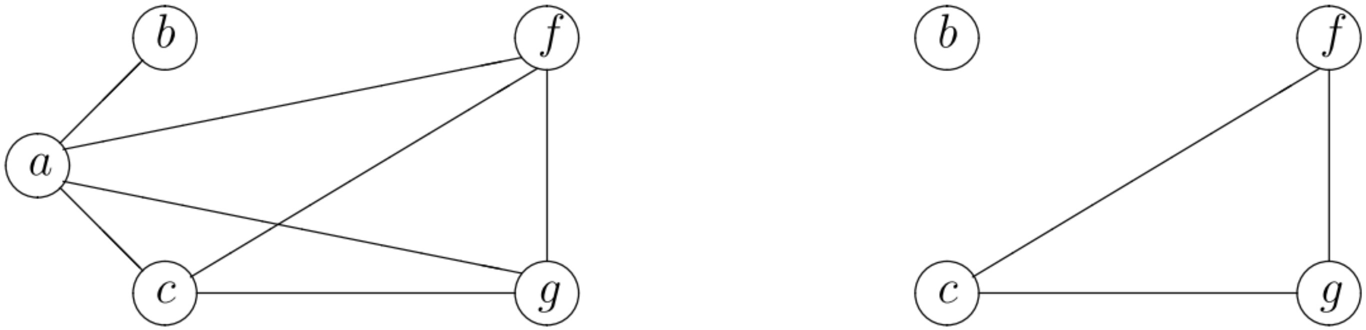
- **Определение.** Две вершины в графе *связны*, если существует соединяющая их цепь.
- **Определение**. Граф называется *связным*, если любые две вершины в нем связны.
- **Определение.** *Компонентой связности* графа $G(V,E)$ называется его правильный связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа $G(V,E)$ .
- **Примеры.**




Связный граф Граф с двумя компонентами связности

# Связность неориентированных графов

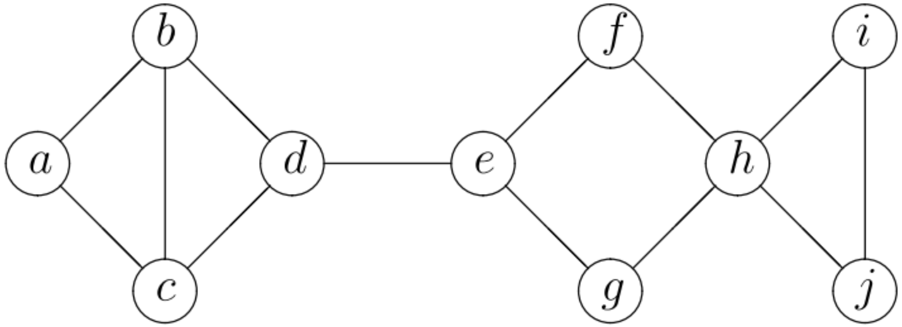
- **Определение.** Вершина графа $G(V,E)$ называется *точкой сочленения*, если ее удаление (вместе с инцидентными ей ребрами) увеличивает число компонент связности графа.
- **Пример.** Для графа слева $a$ – точка сочленения. Результат ее удаления (граф с двумя компонентами связности) показан на рисунке справа.




- **Лемма о точках сочленения.** В любом графе $G(V,E)$ с $p \geq 2$ есть по крайней мере две вершины, не являющиеся точками сочленения.

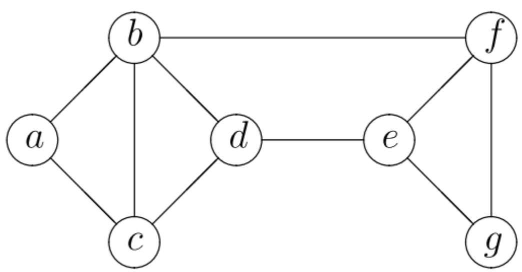
# Связность неориентированных графов

- **Определение.** Ребро графа $G(V,E)$ называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент связности графа.
- **Пример.** Мостом является ребро $de$.



# Связность неориентированных графов

- **Определение.** *Числом вершинной связности* графа $G(V,E)$ (обозначается $\kappa(G)$) называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Граф $G(V,E)$ называется *$m$-связным*, если $\kappa(G) = m$.
- **Определение.** *Числом реберной связности* графа $G(V,E)$ (обозначается $\lambda(G)$) называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.
- **Примеры.** Здесь $\kappa(G) = 2$ (удаление вершин $b$ и $c$ приведет к несвязному графу), $\lambda(G) = 2$ (например, можно удалить ребра $bf$ и $de$).



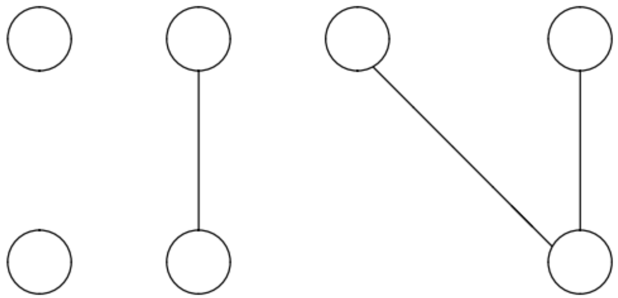

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

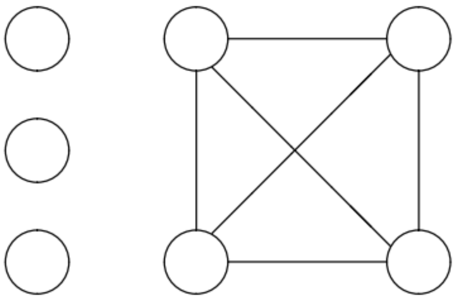
# 2.4. Оценка числа ребер в графе

- **Теорема.** Число вершин $p$, ребер $q$ и компонент связности $k$ графа $G(V,E)$ удовлетворяет неравенствам

$$p-k \le q \le \frac{(p-k)(p-k+1)}{2}$$

- **Пример.** $p$=7, $k$=4, $3 \le q \le 6$.



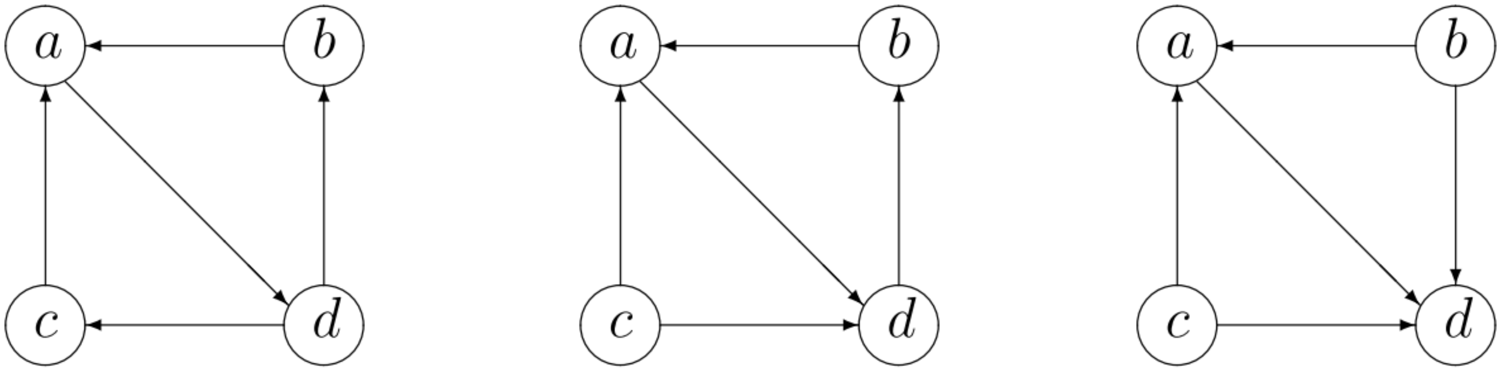


# 2.5. Связность орграфов

- **Определение.** Говорят, что два узла $v_1$ и $v_2$ *сильно связны* в орграфе $D(V,E)$, если существует путь из $v_1$ в $v_2$ и из $v_2$ в $v_1$.
- **Определение.** Говорят, что два узла $v_1$ и $v_2$ *односторонне связны* в орграфе $D(V,E)$, если есть путь либо из $v_1$ в $v_2$, либо из $v_2$ в $v_1$.
- **Определение.** Говорят, что два узла $v_1$ и $v_2$ *слабо связны* в орграфе $D(V,E)$, если они связны в графе $D'(V',E')$, полученном из $D(V,E)$ отменой ориентации ребер.

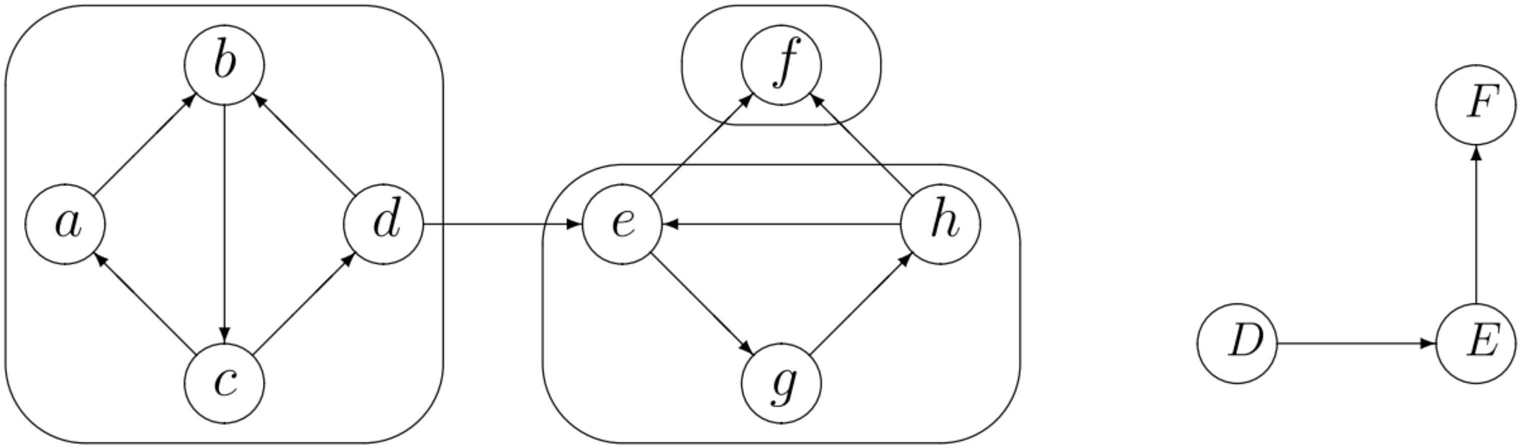
# Связность орграфов

- **Определение.** Орграф $D(V,E)$ называется *сильно* (*односторонне*, *слабо*) *связным*, если любые два узла в нем сильно (односторонне, слабо) связны.
- **Пример.** Слева – сильно связный орграф, в центре – односторонне связный (нет путей до узла $c$ из остальных), справа – слабо связный (нет путей между узлами $b$ и $c$).



# Связность орграфов

- **Определение.** *Компонентой сильной связности* орграфа $D(V,E)$ называется его правильный сильно связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа орграфа $D(V,E)$.
- **Определение.** *Конденсацией* (*фактор-графом*) орграфа $D(V,E)$ называется орграф, который получается стягиванием в один узел каждой компоненты сильной связности орграфа $D(V,E)$.
- **Пример.**

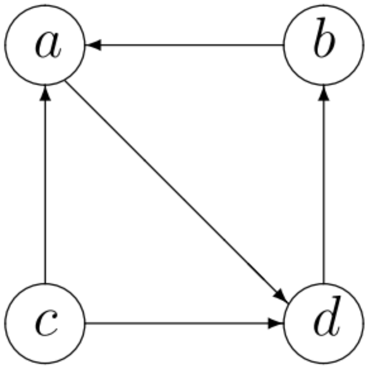


# Связность орграфов

- **Определение.** *Матрицей достижимости* орграфа $D(V,E)$ называется квадратная матрица $T(D)$ размерности $p \times p$ ,
$$t_{i,j} = \begin{cases} 1, & \exists\langle i,j\rangle; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
- Считается, что путь $\langle i,i\rangle$ существует всегда (это путь длины 0).
- **Определение.** *Матрицей сильной связности* орграфа $D(V,E)$ называется квадратная матрица $S(D)$ размерности $p \times p$ , где
$$s_{i,j} = \begin{cases} 1, & \exists\langle i,j\rangle, \langle j,i\rangle; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
- Иначе говоря, $s_{i,j} = 1$ тогда и только тогда, когда узлы $i$ и $j$ принадлежат одной компоненте сильной связности орграфа $D(V,E)$.

# Связность орграфов

- **Пример.** Рассмотрим орграф $D(V,E)$, его матрицу достижимости и сильной связности.




$$T(D) = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad S(D) = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

# Связность орграфов

**Алгоритмы построения матрицы сильной связности**

- *Алгоритм, основанный на операциях над булевыми матрицами*, вычислительная сложность $p^4$. Также позволяет проверить наличие путей заданной длины.
- *Алгоритм Уоршалла*, вычислительная сложность $p^3$. Также позволяет проверить наличие путей, проходящих через заданное множество вершин..

# Поиск путей в графе

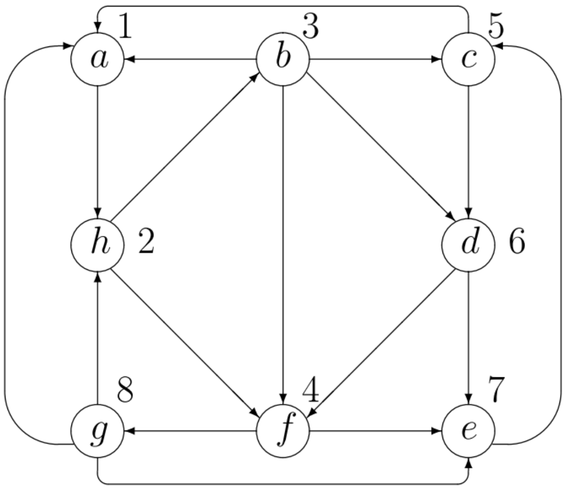
Обходы графа

Поиск кратчайших путей

Поиск минимальных путей

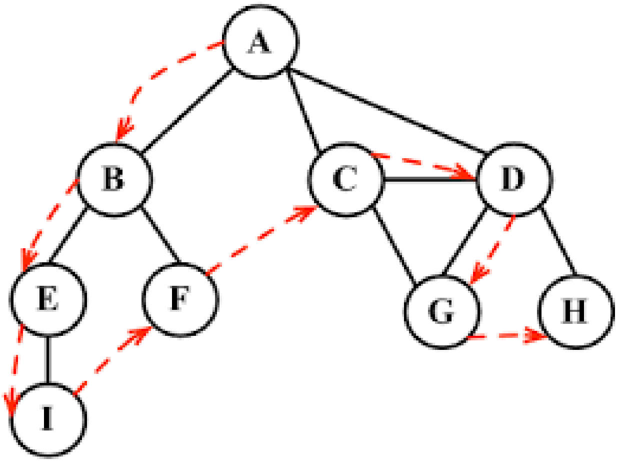
# 3.1. Стратегии обхода графа

- **Определение.** *Обходом графа* называется систематическое перечисление его вершин.
- **Стратегия обхода «в ширину».** Начиная со стартовой вершины, обходим все смежные с ней вершины. Затем для каждой из них повторяем эту процедуру, заходя только в непосещенные вершины. Процесс заканчивается, если посещены все вершины, либо нет непосещенных вершин, смежных с уже посещенными.
- **Пример.**



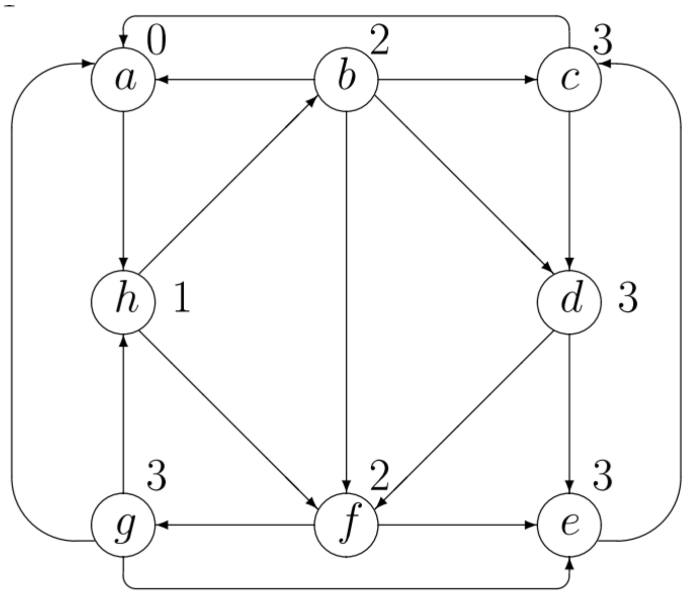
# Стратегии обхода графа

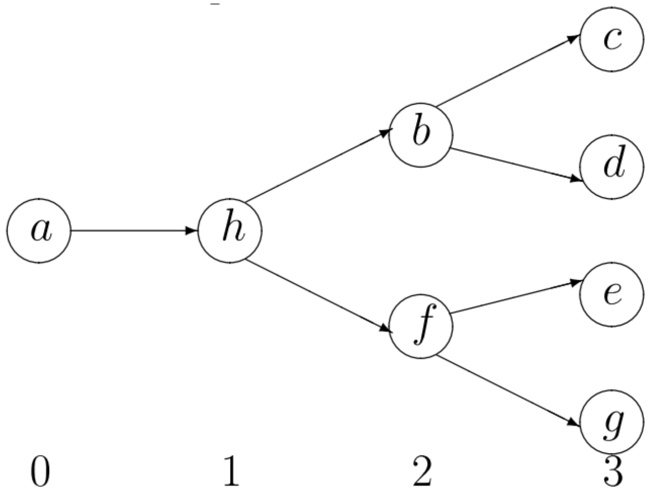
- **Стратегия обхода «в глубину».** Начиная со стартовой вершины, идем в смежную с ней вершину. Затем из этой вершины идем в смежную с ней непосещенную вершину, и т. д. Если нет непосещенных вершин, смежных с текущей, возвращаемся на шаг назад и идем в смежную непосещенную вершину, если нет таких вершин, возвращаемся еще на шаг назад, и т. д. Процесс заканчивается, если посещены все вершины, либо мы вернулись в стартовую вершину и не осталось смежных с ней непосещенных вершин.
- **Пример**.



# 3.2. Поиск кратчайших путей

- **Определение.** *Кратчайшим путем* $\langle u, v \rangle$ в графе называется путь наименьшей длины.
- *Волновой алгоритм* (*алгоритм Ли*). Вычислительная сложность $p^2$.
- **Пример**.



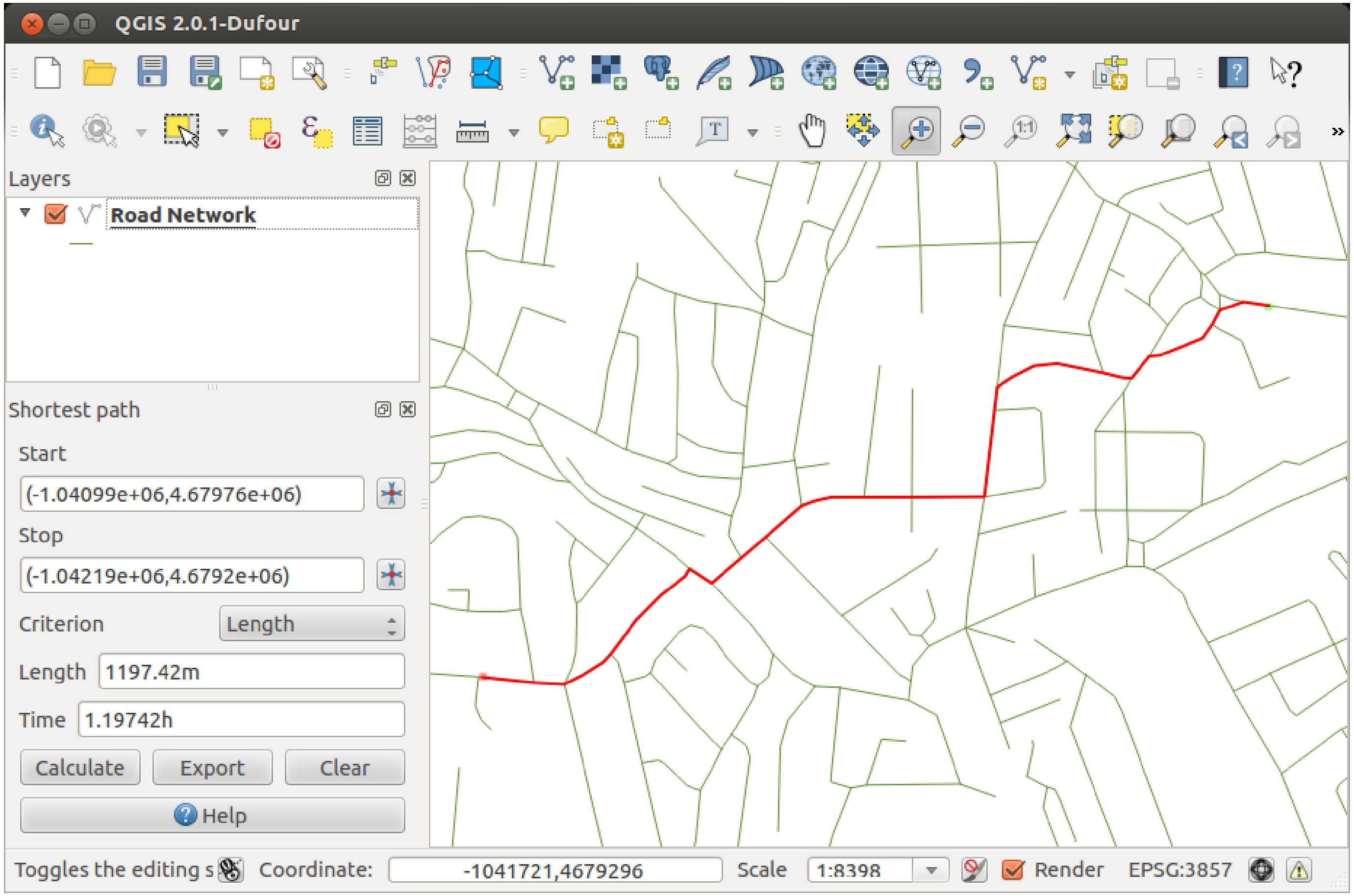
# 3.3. Поиск минимальных путей

- **Определение.** *Взвешенным графом* $G(V,E)$ называется граф, каждому ребру которого сопоставлено некоторое число, называемое *весом*.
- **Определение.** *Минимальным путем* $\langle u, v \rangle$ в графе называется путь с наименьшей суммой весов ребер.

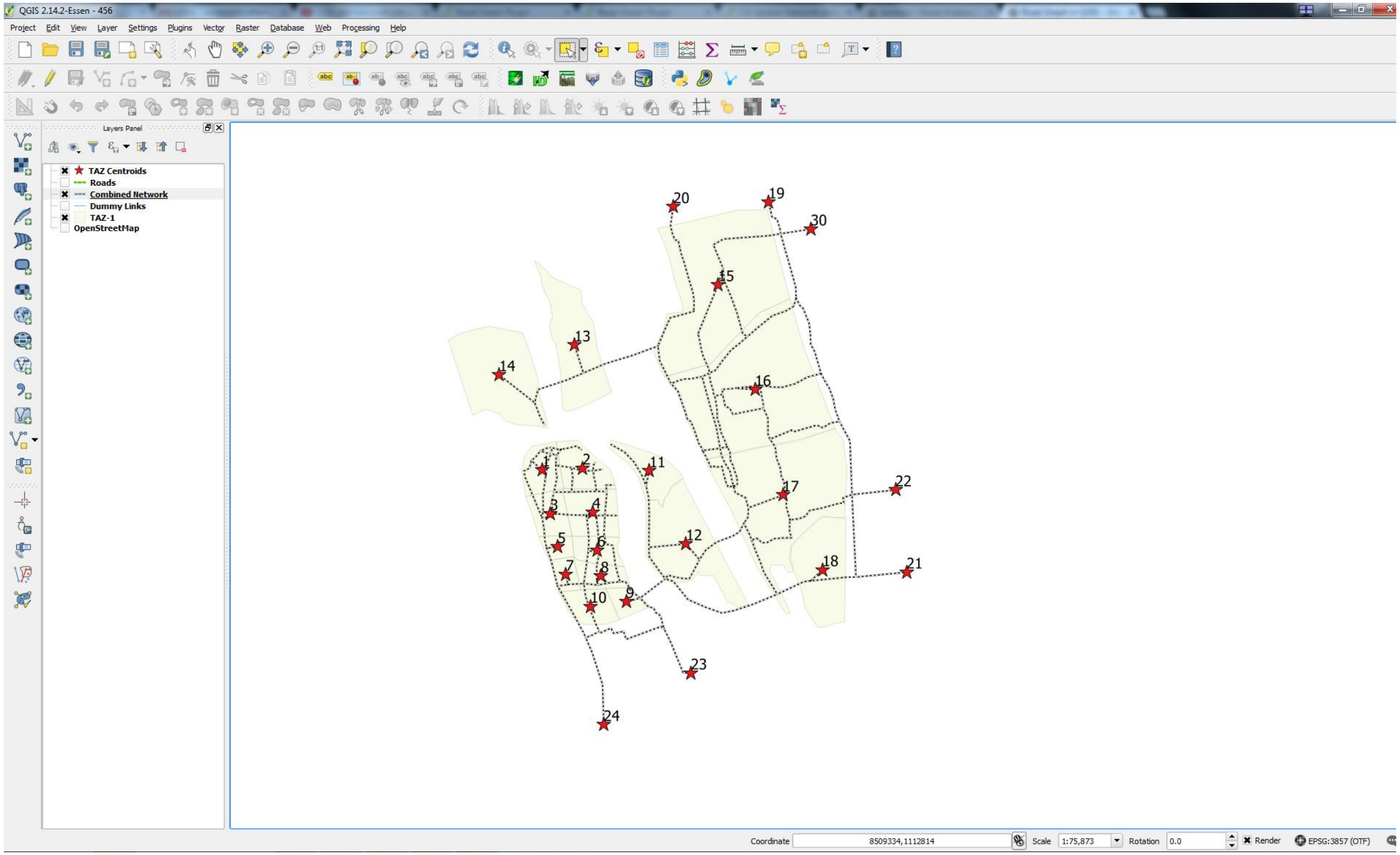
**Задачи:**

- Поиск пути между заданными вершинами;
- Поиск путей от заданной вершины до всех остальных;
- Поиск путей между всеми парами вершин.

# Поиск минимальных путей



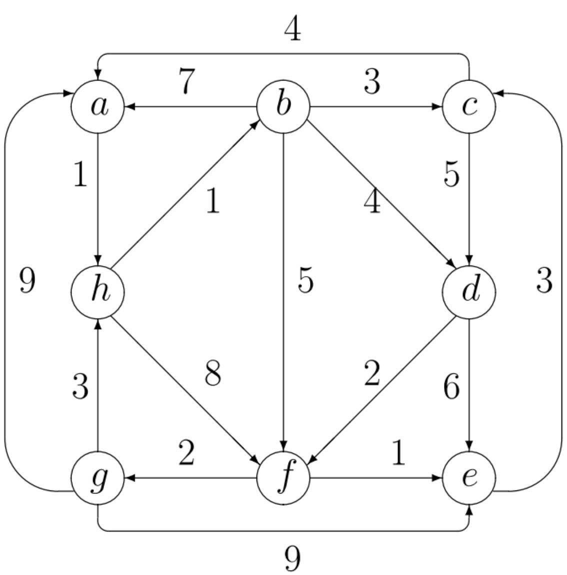
# Поиск минимальных путей



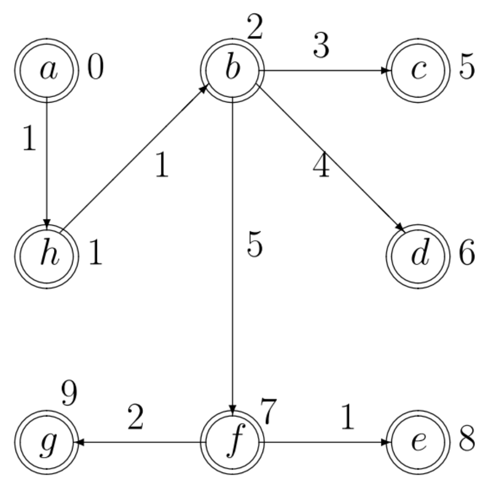
# Поиск минимальных путей

**Поиск пути от заданной стартовой вершины**

- *Алгоритм Дейкстра*: жадный алгоритм, вычислительная сложность $p^2$, веса ребер должны быть неотрицательны.
- **Пример.**



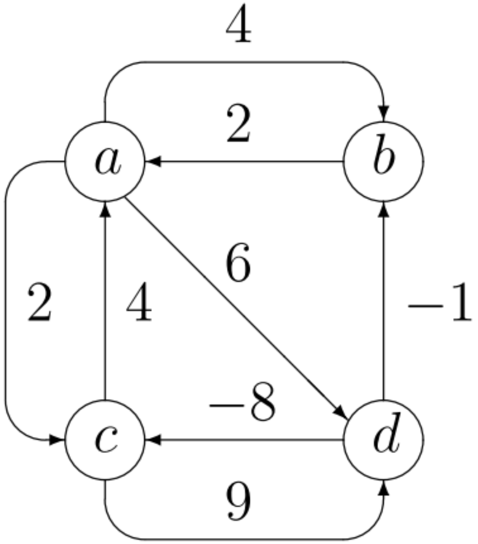

$$\lambda(a) = 0; \quad \lambda(d) = 6;$$
$$\lambda(h) = 1; \quad \lambda(f) = 7;$$
$$\lambda(b) = 2; \quad \lambda(e) = 8;$$
$$\lambda(c) = 5; \quad \lambda(g) = 9.$$

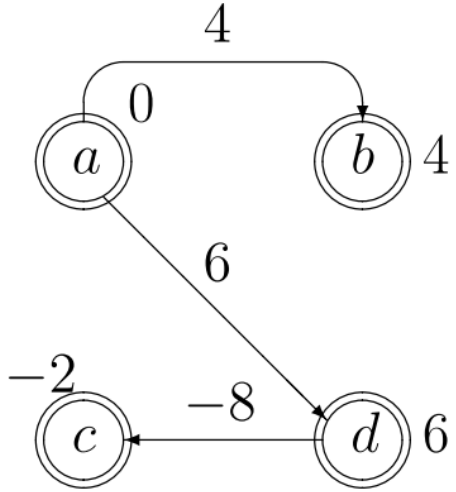


# Поиск минимальных путей

**Поиск пути от заданной стартовой вершины**

- *Модификация алгоритма Дейкстра* для произвольных весов ребер, вычислительная сложность $p^3$.
- *Алгоритм Форда-Беллмана-Мура*: динамическое программирование, для произвольных весов ребер, вычислительная сложность $pq$.
- **Пример.**

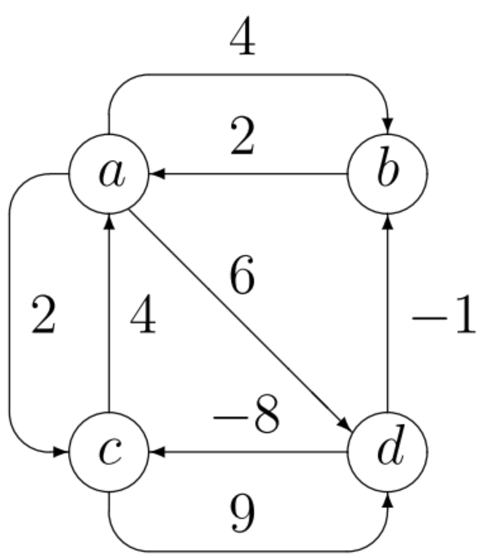


# Поиск минимальных путей

**Поиск пути между всеми парами вершин**

- *Алгоритм Флойда-Уоршалла*: динамическое программирование, для произвольных весов ребер, вычислительная сложность $p^3$. .
- **Пример.**




$$\Lambda = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 4 & -2 & 6 \\ b & 2 & 0 & 0 & 8 \\ c & 4 & 8 & 0 & 9 \\ d & -4 & -1 & -8 & 0 \end{array}$$

# Деревья

Свободные деревья