1. Булевы константы и векторы

1.1. Булевы константы

Определение. *Булевыми константами* называются символы 0 и 1.

Они могут интерпретироваться как числа: ноль и единица, знаки: минус и плюс, потенциалы: низкий и высокий, высказывания: ложь и истина, и многое другое.

Определение. *Булевым множеством* называется множество булевых констант $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.

1.2. Булев вектор

Определение. *Булев вектор* это последовательность булевых констант, называемых *компонентами* булева вектора.

Договоримся обозначать булевы векторы греческими буквами, а компоненты вектора – латинскими с указанием номеров компонент.

Примеры. $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_6 = 010101$, $\beta = b_1 b_2 \ldots b_8 = 11110000$. •

Определение. *Длиной* булева вектора назовем количество его компонент, а *весом* вектора – количество компонент, равных единице.

Пример. Длина булева вектора $\alpha = 101010$ равна шести, а вес – трем. •

Теорема о числе булевых векторов. Число различных булевых векторов длины n равно 2^n.

Доказательство (методом математической индукции по длине булева вектора).

База индукции: имеется два булевых вектора длины 1: это 0 и 1.

Индуктивное предположение: пусть число различных булевых векторов длины n равно 2^n

Индуктивный переход: добавим к векторам длины n еще одну $n+1$-ю компоненту, присвоив ей сначала значение 0 (получим 2^n векторов), а затем значение 1 (получим еще 2^n векторов). Итого существует $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ различных булевых векторов длины $n+1$. •

Примеры. Имеется 4 булевых вектора длины два: 00, 01, 10, 11, и 8 булевых векторов длины три: 000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111. •

Представление булевыми векторами подмножеств. Пусть заданы множество $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ и его подмножество A. Построим булев вектор $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$, представляющий подмножество A, следующим образом: зафиксируем порядок элементов в множестве M и положим

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m_i \in A; \\ 0, & \text{если} \quad m_i \notin A. \end{cases}$$

Примеры. Булев вектор $\alpha = 11101$ в множестве чисел $M = \{2, 6, 4, 7, 8\}$ выделяет подмножество четных чисел, булев вектор $\beta = 10010$ выделяет в этом же множестве подмножество простых чисел. •

Представление булевыми векторами целых неотрицательных чисел. Введем соответствие между булевым вектором $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ и числом $a \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$:

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i \times 2^{n-i}$$

(здесь компоненты булева вектора интерпретируются как числа 0 и 1).

Примеры.

Задан булев вектор $\alpha = 1001$, подставив его компоненты в формулу, получим число $a = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 1 = 9$.

Задано число $a = 13$, разложив его, согласно формуле, на сумму степеней двойки: $13 = 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, получим булев вектор $\alpha = 1101$. •

Данный алгоритм построения булева вектора по числу легко применим лишь для малых чисел, но в общем случае применяется другой вариант алгоритма.

Алгоритм построения вектора, представляющего число (использует целочисленное деление, результатом которого являются два целых числа: неполное частное и остаток).

Начало: задано целое число $a \geq 0$.

Шаг 1: поделим a на 2, запомним неполное частное и остаток.

Шаг 2: если полученное частное не равно нулю, то поделим его на 2, запомним новые неполное частное и остаток и повторим шаг 2.

Конец: выпишем остатки в обратном порядке – получим искомый булев вектор.

Пример. $a = 36$, $\begin{array}{r l} \text{частные:} & 18,\ 9,\ 4,\ 2,\ 1,\ 0; \\ \text{остатки:} & \underleftarrow{0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1.} \end{array}$

Выписав остатки в обратном порядке, получим булев вектор $\alpha = 100100$, представляющий число 36. •

1.3. Пара булевых векторов

Рассмотрим два булевых вектора одинаковой длины и договоримся для наглядности писать их один под другим

$\alpha = a_1\, a_2 \dots a_n$,

$\beta = b_1\, b_2 \dots b_n$.

Определение. Говорят, что булевы векторы α и β *ортогональны по i-й компоненте*, если $a_i \neq b_i$.

Пример. Векторы $\begin{matrix} \alpha = 1010 \\ \beta = 1000 \end{matrix}$ ортогональны по 3-й компоненте. •

Определение. *Расстоянием* между булевыми векторами называют число ортогональных компонент в данной паре векторов (его еще называют *расстоянием по Хэммингу*).

Пример. Расстояние по Хэммингу между векторами $\begin{matrix} \alpha = 1010 \\ \beta = 1001 \end{matrix}$ равно двум. •

Определение. Булевы векторы называются *соседними* (*соседями*), если они ортогональны по одной и только одной компоненте, то есть расстояние по Хэммингу между векторами равно единице.

Пример. Векторы $\begin{matrix} \alpha = 1010 \\ \beta = 1000 \end{matrix}$ – соседи (по третьей компоненте). •

Определение. Булевы векторы называются *противоположными* (*антиподами*), если они ортогональны по всем компонентам, то есть расстояние по Хэммингу между векторами равно их длине.

Пример. Векторы $\begin{matrix} \alpha = 1010 \\ \beta = 0101 \end{matrix}$ – антиподы. •

Определение. Говорят, что булев вектор $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ *предшествует* булеву вектору $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$ (и это отношение обозначают $\alpha \preceq \beta$), если для любого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется условие $a_i \leq b_i$ (здесь компоненты булевых векторов интерпретируются как числа 0 и 1). В этом случае говорят также, что булев вектор β *следует за* α, булев вектор α называют *предшественником*, а β – *последователем.*

Пример. $\begin{matrix} \alpha = 0010 \\ \beta = 1011 \end{matrix} : \alpha \preceq \beta$. •

Определение. Булевы векторы α и β называются *сравнимыми*, если $\alpha \preceq \beta$ или $\beta \preceq \alpha$, в противном случае говорят, что они *несравнимы.*

Примеры. Рассмотрим две пары векторов $\begin{matrix} \alpha = 1011 \\ \beta = 1001 \end{matrix}, \begin{matrix} \alpha' = 1010 \\ \beta' = 1001 \end{matrix}$. Векторы α и β сравнимы, причем $\beta \preceq \alpha$, а α' и β' несравнимы. •

1.4. Упражнения

Упр.1. Определить длину и вес булевых векторов:

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 00011100, & \alpha_2 = 0001010, & \alpha_3 = 11111, & \alpha_4 = 1101000, \\ \alpha_5 = 1, & \alpha_6 = 001, & \alpha_7 = 0000, & \alpha_8 = 1001. \end{array}$$

Какие натуральные числа они представляют?

Упр.2. Какими булевыми векторами представляются числа 5, 7, 21, 32, 40, 2002?

Упр.3. Задано множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Представить булевыми векторами его подмножества: A_1 – четных чисел; A_2 – простых чисел; A_3 – чисел, кратных 3; A_4 – целых чисел.

Упр.4. Какие из следующих векторов являются соседними? Противоположными? Сравнимыми?

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 00000011, & \alpha_2 = 00000111, & \alpha_3 = 10100001, & \alpha_4 = 01010101, \\ \alpha_5 = 11111100, & \alpha_6 = 10000001, & \alpha_7 = 01010100, & \alpha_8 = 01111110. \end{array}$$

Каким из перечисленных векторов предшествуют α_1, α_7? Каково расстояние по Хэммингу между векторами α_3 и α_7, α_1 и α_5, α_6 и α_8?

Упр.5. Перечислите все пары сравнимых векторов пространства $\mathcal{B}^3$.

Упр.6. Могут ли соседние векторы быть антиподами?

Упр.7. Могут ли быть сравнимыми различные векторы одинакового веса?

Упр.8. Сколько соседей у вектора длины n?

2. Булево пространство, интервал в булевом пространстве

2.1. Булево пространство и способы его задания

Определение. *Булевым пространством* $\mathcal{B}^n$ *размерности* n называется множество всех булевых векторов длины n, расстояние между которыми вычисляется по Хэммингу.

Примеры. $\mathcal{B}^1 = \{0, 1\} = \mathcal{B}$, $\quad \mathcal{B}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$. •

Булево пространство может быть задано несколькими способами. Рассмотрим два из них.

1) Явным перечислением векторов.

Пример. $\mathcal{B}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$. •

2) Матрицей в коде Грея. Булево пространство размерности n представляется матрицей, состоящей из 2^s строк и 2^p столбцов, где s и p – целые числа, такие что $s+p=n$ и $s=p$ либо $s=p-1$. Строкам матрицы поставлены в соответствие булевы векторы длины s (их называют *кодами строк*), а столбцам – булевы векторы длины p (*коды столбцов*).

Коды столбцов упорядочены по следующему принципу:

– младшая компонента кодов, то есть компонента с меньшим номером, равна 0 в первой половине столбцов и равна 1 во второй их половине (например, если столбцов восемь, то младшая компонента принимает значения 00001111);

– следующая компонента равна 0 в первой четверти кодов и равна 1 во второй четверти, после чего значения симметрично повторяются, то есть равны 1 в третьей четверти и 0 в четвертой (в примере: 00111100) – симметрирование происходит в момент, когда предыдущая компонента меняет свое значение с 0 на 1;

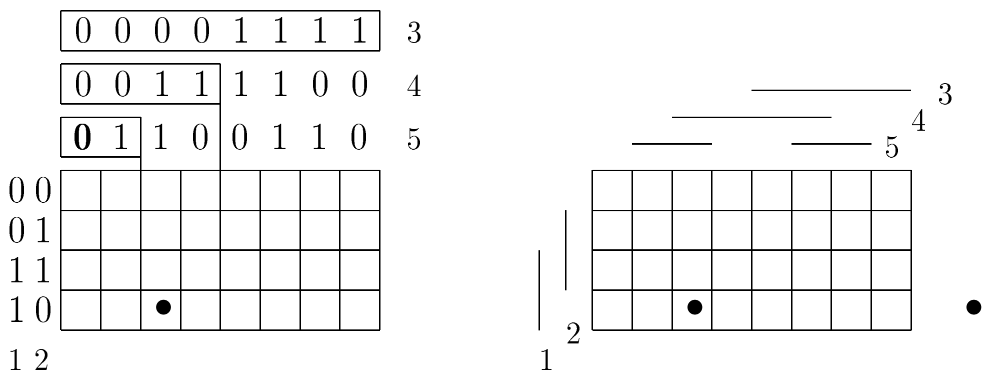
– следующая компонента равна 0 в первой осьмушке кодов и равна 1 во второй их осьмушке, после чего ее значения дважды симметрично повторяются (в примере: 01100110) – симметрирование происходит в моменты, когда вторая компонента, а затем первая, меняют свои значения с 0 на 1;

– и так далее (за 1/8 следуют 1/16, 1/32, ...).

Коды строк строятся аналогично.

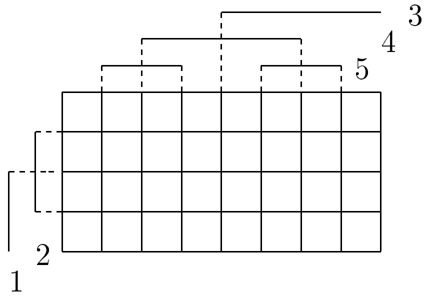
Элемент матрицы в коде Грея, стоящий в i-й строке и j-м столбце, задает булев вектор, который получается приписыванием к коду строки i кода столбца j.

Пример. Пусть $n=5$. На левой матрице показан процесс построения кодов столбцов. Выделенная клетка задает булев вектор 10011.



Договоримся изображать коды условно: единицу – черточкой, а ноль – ее отсутствием: такой код более нагляден, да и быстрее рисуется (он показан на правой матрице предыдущего примера).

Код Грея обладает свойством симметрии, которое оказывается полезным при решении многих задач. Проиллюстрируем это свойство на примере матрицы для пространства $\mathcal{B}^5$.



На матрице пунктирными линиями обозначены места смены значений компонент, эти линии называются *осями симметрии* компонент. Каждая ось имеет свою *зону симметрии*, то есть область, на которую распространяется ее действие:

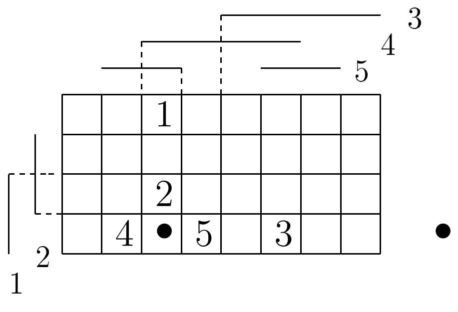
– зоной симметрии оси младшей компоненты (в примере: первой для строк и третьей для столбцов) является вся матрица;

– зонами симметрии двух осей следующих компонент (в примере: второй для строк и четвертой для столбцов) являются половины матрицы;

– и так далее (с каждым разом размер зоны уменьшается в два раза, а число осей увеличивается в два раза).

Нетрудно заметить, что пара соседних векторов располагается в матрице симметрично относительно оси той компоненты, по которой векторы ортогональны, причем относительно именно оси, в зоне симметрии которой располагаются вектора.

Пример. Каждый из соседей выделенного вектора отмечен номером ортогональной компоненты.



Симметричное расположение соседей на матрице Грея упрощает их поиск и делает представление булева пространства наглядным.

При описании кода Грея мы фактически изложили алгоритм его построения. Рассмотрим более простой алгоритм рисования кода Грея для столбцов матрицы (код Грея для строк рисуется аналогично).

Алгоритм рисования кода Грея для столбцов матрицы.

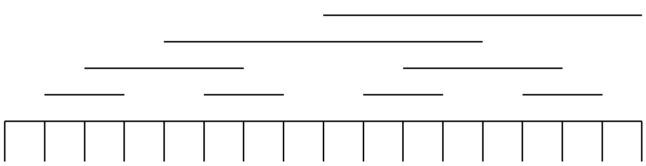
Начало: задана матрица из 2^p столбцов.

Шаг 1: отступив от края матрицы один столбец, нарисуем черточку над двумя столбцами, затем, пропустив два столбца, нарисуем черточку над двумя следующими столбцами и так далее до конца матрицы.

Шаг 2: отступив от полученного ряда черточек немного вверх, начнем следующий ряд: нарисуем черту от середины первой до середины второй черточки предыдущего ряда, затем – от середины третьей до середины четвертой черточки предыдущего ряда и так далее до конца матрицы. Повторим шаг 2, пока это возможно (последнюю черту, которая начнется с середины матрицы, оборвем у правого края).

Конец.

Пример. Матрица содержит 16 столбцов.



•

Далее будем называть матрицу в коде Грея матрицей Грея.

2.2. Интервал в булевом пространстве

2.2.1. Определение интервала и алгоритм его распознавания

Пусть задана пара булевых векторов одинаковой длины:
$\alpha = a_1\, a_2 \ldots a_n$,
$\beta = b_1\, b_2 \ldots b_n$.

Определение. *Интервалом* $I(\alpha, \beta)$ в булевом пространстве $\mathcal{B}^n$, заданным парой булевых векторов α и β, таких что $\alpha \preceq \beta$, называется множество всех булевых векторов γ длины n, удовлетворяющих условию $\alpha \preceq \gamma \preceq \beta$, то есть $I(\alpha, \beta) = \{\gamma \in \mathcal{B}^n : \ \alpha \preceq \gamma \preceq \beta\}$. Булевы векторы α и β называются *границами интервала* , вектор α – *наименьшим элементом* интервала, а β – *наибольшим.*

Пример. $I(000, 101) = \{000, 001, 100, 101\}$, граница $\alpha = 000$ – наименьший элемент, граница $\beta = 101$ – наибольший элемент. •

Из определения интервала следует, что либо границы α и β совпадают в i-й компоненте ($a_i = b_i$), тогда все векторы γ интервала $I(\alpha, \beta)$ имеют в i-й компоненте то же значение, либо границы не совпадают ($a_i < b_i$), тогда такие компоненты принимают в векторах γ все возможные значения.

Определение. Компоненты, по которым границы (а значит и все векторы интервала) совпадают, называются *внешними* компонентами интервала, остальные – *внутренними.* Число внешних компонент называется *рангом* интервала (r), а число внутренних – его *размерностью* (s).

Пример. В предыдущем примере вторая компонента – внешняя, первая и третья – внутренние, ранг $r = 1$, размерность $s = 2$. •

Договоримся для наглядности записывать векторы интервала один под другим и опускать фигурные скобки; кроме того, введем компактное представление интервала *троичным вектором*, в котором 0 и 1 задают значения внешних компонент, а черточки отмечают внутренние компоненты.

Пример. $I(000, 101) = \begin{matrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{matrix} = -0-.$ •

Рассмотрим крайние случаи:

$I(\alpha, \alpha) = \{\alpha\}$, границы интервала совпадают, значит он состоит из одного булева вектора, ранг $r = n$, размерность $s = 0$,

$I(00\ldots0, 11\ldots1) = --\ldots-$, интервал – все булево пространство $\mathcal{B}^n$, ранг $r = 0$, размерность $s = n$.

Утверждение о мощности интервала. Мощность интервала размерности s равна 2^s.

Доказательство. Так как интервал состоит из булевых векторов со всевозможными комбинациями нулей и единиц во внутренних компонентах, а внутренние компоненты образуют булев вектор длины s, то число таких векторов (по теореме о числе булевых векторов) равно 2^s. •

Примеры. Мощность интервала $-0-$ равна $2^2 = 4$, мощность интервала 101 равна $2^0 = 1$, мощность интервала $---$ равна $2^3 = 8$. •

Алгоритм распознавания интервала и поиска его границ (основан на определении интервала и на утверждении о мощности интервала).

Начало: задано множество A булевых векторов длины n.

Шаг 1: если мощность множества A не является целой степенью двойки, то есть $|A| \neq 2^c$, где c – целое, то A не является интервалом, идем на конец.

Шаг 2: считаем число s несовпадающих компонент в векторах множества A, то есть число компонент, претендующих быть внутренними. Если $s \neq c$, то A – не интервал, идем на конец; иначе A является интервалом, s – его размерность, $r = n - s$ – ранг.

Шаг 3: находим границы α и β интервала. Вектор минимального веса (из всех векторов множества A) – это наименьший элемент интервала (α), а вектор максимального веса – наибольший элемент (β).

Конец.

Примеры.

$A = \{010, 011, 001\}$: множество не образует интервал, так как его мощность, равная 3, целой степенью двойки не является.

$A = \{0010, 0011, 0001, 1000\}$: множество не образует интервал – мощность является целой степенью двойки, но показатель степени $c = 2$ не совпадает с количеством компонент $s = 3$, претендующих быть внутренними (это первая, третья и четвертая компоненты).

$A = \{010, 011, 001, 000\}$: множество образует интервал, так как его мощность является целой степенью двойки ($c = 2$), и эта степень совпадает с количеством компонент $s = 2$, претендующих быть внутренними (это вторая и третья компоненты). Границы интервала: $\alpha = 000$, $\beta = 011$. •

2.2.2. Способы задания интервалов

Мы уже пользовались тремя способами задания интервалов.

1) Границами интервала.

2) Явным перечислением векторов интервала.

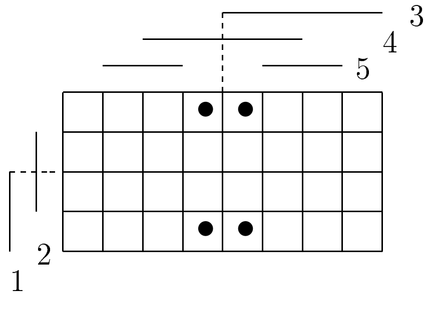
3) Троичным вектором.

Рассмотрим еще один способ.

4) На матрице Грея. Булево пространство представляется матрицей Грея, а все булевы векторы (клетки), образующие интервал, отмечаются.

Чтобы нарисовать интервал, не обязательно получать каждый из его векторов и отмечать соответствующую клетку на матрице. Достаточно найти все строки и все столбцы, коды которых совпадают с векторами интервала по внешним компонентам – на их пересечении и будет лежать интервал.

Пример. $I = -0-10$: находим строки матрицы Грея, в кодах которых вторая компонента равна 0 (верхняя и нижняя строки), и столбцы, в кодах которых четвертая компонента равна 1, а пятая – 0 (два средних столбца), – на их пересечении лежит заданный интервал.



•

Поскольку код Грея обладает свойством симметрии, то элементы интервала лежат симметрично относительно осей внутренних компонент (в примере это первая и третья компоненты). Это позволяет распознавать интервалы на матрице Грея, не переходя к явному перечислению векторов.

Алгоритм распознавания интервала на матрице Грея.

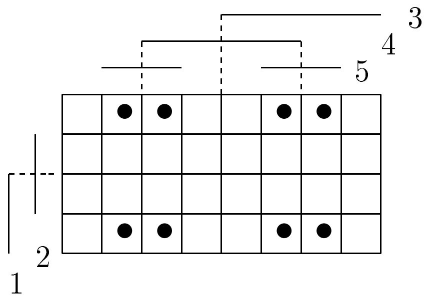
Начало: задана матрица Грея с отмеченными клетками, которые образуют множество A.

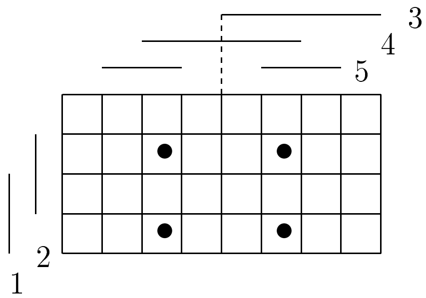
Шаг 1: если число клеток множества A не является целой степенью двойки, то есть $|A| \neq 2^c$, то A – не интервал, идем на конец.

Шаг 2: если множество A лежит симметрично относительно осей симметрии c компонент (его можно "разрезать" осями на симметричные половины, затем половины на симметричные четвертины, затем четвертины на симметричные осьмушки и так далее до тех пор, пока множество A не "разрежется" на отдельные клетки), то A – интервал, идем на конец, иначе A – не интервал.

Конец.

Примеры.





На левой матрице – интервал $-0--1$ (8 клеток и оси симметрии трех компонент), на правой – не интервал (4 клетки и ось симметрии лишь одной компоненты). •

Очевидно, что интервалами являются следующие множества:
- каждая отдельная клетка,
- любая пара симметричных клеток, в том числе рядом лежащих,
- любая строка и любой столбец,
- любая пара симметричных строк или столбцов, в том числе рядом лежащих,
- любой "квадрат" размером 2×2,
- любая половина или четвертина матрицы,
- четверка клеток, лежащих в углах матрицы,
- и не только они.

2.2.3. Соседние интервалы

Рассмотрим два интервала булева пространства $\mathcal{B}^n$: $I_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $I_2(\alpha_2, \beta_2)$.

Определение. Интервалы I_1, I_2 называют *соседними* (*соседями*), если они совпадают по номерам внешних компонент, но различаются по значению одной из них; ее называют *ортогональной* компонентой, а интервалы I_1, I_2 – *соседями по данной компоненте.*

Примеры. Рассмотрим три пары интервалов:

$I_1 = 0\,1 - - -$, $\quad I_1' = 0\,1 - - -$, $\quad I_1'' = 0\;1\; - - -$,

$I_2 = 1\,1 - - -$; $\quad I_2' = 1\,0 - - -$; $\quad I_2'' = 0 - - -\;1$.

Интервалы I_1 и I_2 являются соседями (по первой компоненте), I_1' и I_2' не являются соседями (различаются по двум внешним компонентам), I_1'' и I_2'' также не соседи (различаются по номерам внешних компонент). $\bullet$

Утверждение о соседних интервалах. Два соседних интервала ранга r (размерности s) не пересекаются, а их объединение образует интервал ранга $r-1$ (размерности $s+1$).

Доказательство. Рассмотрим соседние интервалы I_1 и I_2 в пространстве $\mathcal{B}^n$. Они не пересекаются, так как их ортогональная компонента во всех векторах одного интервала равна 0, а в векторах другого равна 1. Следовательно, мощность их объединения I равна

$$|I| = |I_1 \cup I_2| = |I_1| + |I_2| - |I_1 \cap I_2| = 2^s + 2^s - 0 = 2^{s+1},$$

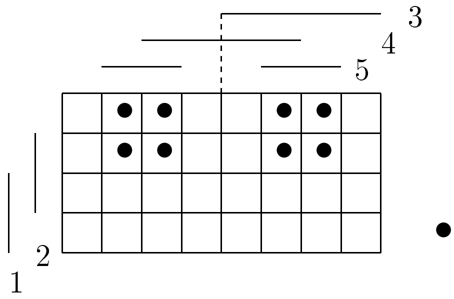
то есть она оказывается целой степенью двойки ($s+1$-й). Количество компонент в векторах множества I, претендующих быть внутренними, тоже равно $s+1$, так как к s внутренним компонентам интервалов I_1 и I_2 добавляется еще одна, ортогональная, компонента. Это равенство означает, согласно алгоритму, что множество I образует интервал размерности $s+1$ (ранга $r-1$, так как $r+s=n$). $\bullet$

Определение. Операцию объединения двух интервалов I_1 и I_2, соседних по i-й компоненте, назовем *склеиванием* интервалов по i-й компоненте, а результат их склеивания $I = I_1 \cup I_2$ – *расширением* каждого из интервалов I_1 и I_2 по i-й компоненте.

Пример. Соседние интервалы $\begin{array}{l} I_1 = 0 - 0 - 1 \\ I_2 = 0 - 1 - 1 \end{array}$ ранга 3 склеиваются, образуя интервал $I = 0 - - - 1$ ранга 2 (он является расширением интервалов I_1 и I_2 по третьей компоненте). $\bullet$

Очевидно, что на матрице в коде Грея соседние по i-й компоненте интервалы располагаются симметрично относительно оси симметрии этой компоненты.

Пример. На матрице показаны интервалы из предыдущего примера, которые располагаются симметрично относительно оси симметрии третьей компоненты.



2.3. Упражнения

Упр.1. Перечислить булевы векторы, образующие следующие интервалы: $I_1(0001, 1001)$, $I_2(01010, 11011)$, $I_3(0000, 1100)$, $I_4(000, 111)$. Задать эти интервалы на матрице Грея и вычислить их ранги.

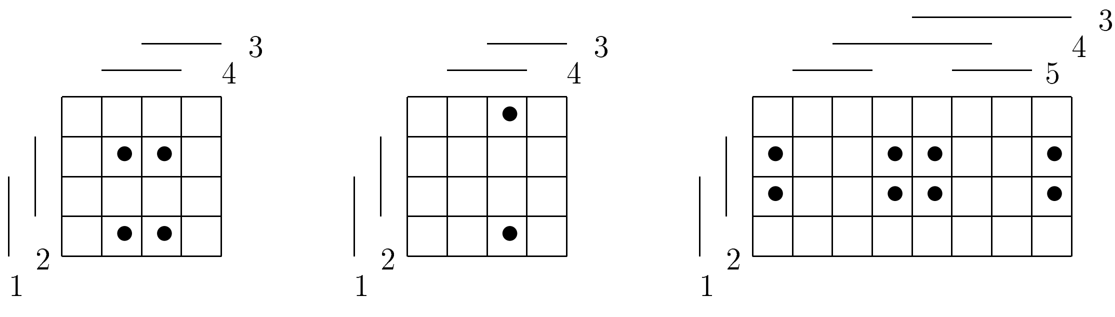
Упр.2. Перечислить все интервалы ранга 1 в булевом пространстве $\mathcal{B}^3$, представив их троичными векторами.

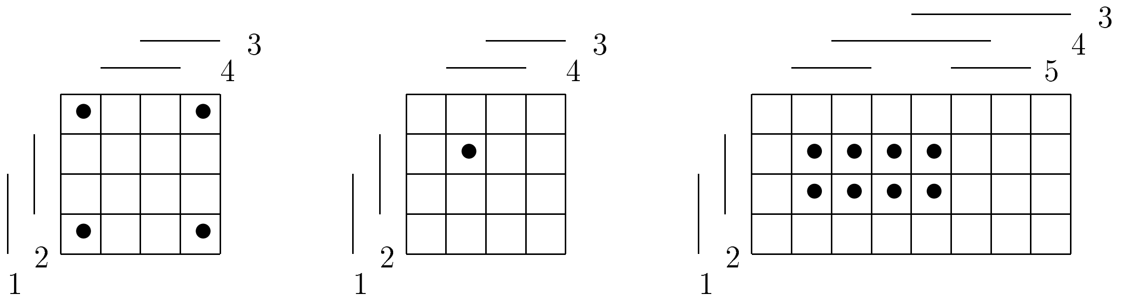
Упр.3. Перечислить все интервалы в пространстве $\mathcal{B}^5$, первая и четвертая компоненты которых являются внешними, а все остальные – внутренними. Представить интервалы на матрице Грея.

Упр.4. Являются ли следующие множества булевых векторов интервалами, и если да, то какими троичными векторами они представляются?

$$\begin{array}{llllllllll} A_1 = & 00000 & A_2 = & 01100 & A_3 = & 0101 & A_4 = & 0001 & A_5 = & 10011 \\ & 00001 & & 01101 & & 1011 & & 0101 & & \\ & 01000 & & 00100 & & 1101 & & & & \\ & & & 00101 & & 0001 & & & & \end{array}$$

Упр.5. Образуют ли интервал векторы, выделенные на матрице Грея? Если да, то представить интервал троичным вектором и найти границы.





Упр.6. Найти на матрице Грея все интервалы, соседние для $I = 1\,0 - 0 -$.

3. Булевы переменные, булевы функции, фиктивные переменные

3.1. Булевы переменные

Определение. *Булева переменная* – это переменная со значениями из булева множества $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.

Обозначаются булевы переменные символами: $a, b, c, \ldots, x, y, z$, или теми же символами с индексами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение. Последовательность значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ булевых переменных назовем *набором значений переменных* (или просто *набором*) и будем перечислять их без запятых.

Пример. Набор $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 = 010100$. •

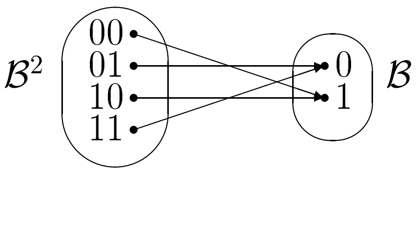
3.2. Булевы функции

Дадим два эквивалентных определения булевой функции.

Определение 1. Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовем *булевой*, если она сама и ее аргументы принимают значения 0 и 1.

Определение 2. *Булевой функцией* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовем однозначное отображение булева пространства $\mathcal{B}^n$ в булево множество $\mathcal{B}$, то есть $f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$.

Пример. Булева функция двух аргументов, принимающая на наборах 01 и 11 значение 0, а на наборах 00 и 10 значение 1:



$f : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$ •

Определение. Булевы функции *равны*,

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_2(x_1, \ldots, x_n),$$

если на одинаковых наборах они принимают одинаковые значения.

3.3. Способы задания булевых функций

1) Задание булевой функции таблицей истинности. Так называется таблица, состоящая из двух частей: в левой части перечисляются все наборы значений аргументов (булевы векторы пространства $\mathcal{B}^n$) в естественном порядке, то есть по возрастанию значений чисел, представляемых этими векторами, а в правой части – значения булевой функции на соответствующих наборах.

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	0	$\ldots$	0	$f(0, 0, \ldots, 0)$
1	0	0	$\ldots$	1	$f(0, 0, \ldots, 1)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a	a_1	a_2	$\ldots$	a_n	$f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$2^n - 1$	1	1	$\ldots$	1	$f(1, 1, \ldots, 1)$

Пример. Рассмотрим булеву функцию трех аргументов, называемую *мажоритарной* (или функцией голосования): она принимает значение 1 на тех и только тех наборах, в которых единиц больше, чем нулей (major – больший).

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

•

Так как левая часть таблицы истинности постоянна для всех функций с одинаковым числом аргументов, несколько таких функций могут быть заданы общей таблицей.

Пример. Таблица истинности для $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ и $f_3(x_1, x_2)$.

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$	$f_3(x_1, x_2)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1

$\bullet$

Теорема о числе булевых функций. Число различных булевых функций, зависящих от n переменных, равно 2^{2^n}.

Доказательство. Каждая булева функция определяется своим столбцом значений. Столбец является булевым вектором длины $m = 2^n$, где n – число аргументов функции. Число различных векторов длины m (а значит и число булевых функций, зависящих от n переменных) равно $2^m = 2^{2^n}$. $\bullet$

2) Задание булевой функции характеристическими множествами. Так называются два множества:

M_f^1, состоящее из всех наборов, на которых функция принимает значение 1, то есть $M_f^1 = \{\alpha \in \mathcal{B}^n : f(\alpha) = 1\}$;

M_f^0, состоящее из всех наборов, на которых функция принимает значение 0, то есть $M_f^0 = \{\alpha \in \mathcal{B}^n : f(\alpha) = 0\}$.

Пример (мажоритарная функция).

$M_f^1 = \{011, 101, 110, 111\}, \quad M_f^0 = \{000, 001, 010, 100\}$. $\bullet$

3) Задание булевой функции вектором ее значений.

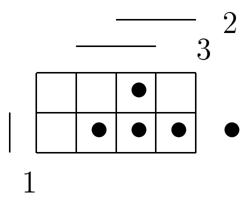
$\varphi_f = f(0, 0, \ldots, 0) f(0, 0, \ldots, 1) \ldots f(1, 1, \ldots, 1)$.

Пример (мажоритарная функция).

$\varphi_f = 00010111$. $\bullet$

4) Задание булевой функции матрицей Грея. Булево пространство задается матрицей Грея, и наборы (клетки матрицы), на которых булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, отмечаются и называются *точками*.

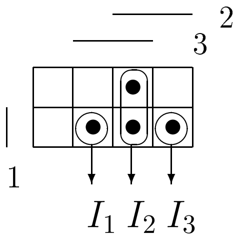
Пример (мажоритарная функция).



$\bullet$

5) Интервальный способ задания булевой функции. Булеву функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ можно задать множеством интервалов $I_f=\{I_1,I_2,\dots,I_k\}$, объединение которых образует характеристическое множество M_f^1, то есть $I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_k=M_f^1$. Множество интервалов I_f называется *достаточным* для функции $f(x_1,\dots,x_n)$.

Пример. Мажоритарная функция может быть задана достаточным множеством $I_f=\{I_1,I_2,I_3\}$ интервалов:

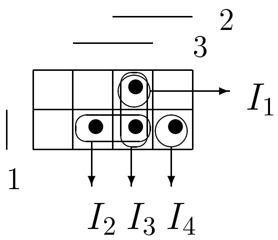


$I_1 = 1\,0\,1$
$I_2 = -\,1\,1$
$I_3 = 1\,1\,0$

Здесь интервалы представлены троичными векторами и изображены на матрице Грея.

В отличие от предыдущих, интервальный способ задания функций многовариантен (одну и ту же булеву функцию можно представить разными множествами интервалов).

Пример. Зададим мажоритарную функцию другим достаточным множеством $I'_f=\{I_1,I_2,I_3,I_4\}$ интервалов:

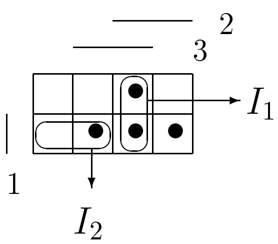


$I_1 = 0\;1\;1$
$I_2 = 1\;-1$
$I_3 = -\;1\;1$
$I_4 = 1\;1\;0$

Очевидно, что это множество интервалов избыточно: первый интервал (011) можно удалить.

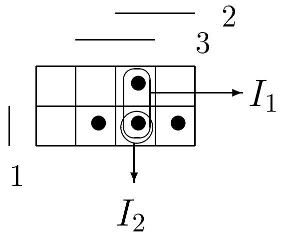
Определение. Интервал назовем *допустимым для булевой функции*, если на всех его наборах функция равна 1.

Примеры. $I_1 = -\,1\,1$ – допустимый интервал для мажоритарной функции, $I_2 = 1\,0\,-$ – не допустимый.

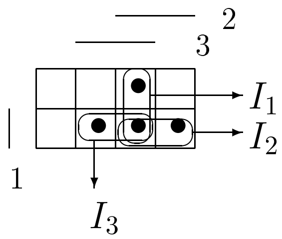


Определение. Интервал I назовем *максимальным для булевой функции* $f(x_1,\dots,x_n)$, если он является допустимым для этой функции, и не существует другого допустимого интервала I', такого что $I\subset I'$.

Пример. $I_1 = -\,1\,1$ является максимальным интервалом для мажоритарной функции, а допустимый интервал $I_2 = 111$ не является максимальным, так как $I_2 \subset I_1$.



Пример. Зададим мажоритарную функцию множеством $I''_f = \{I_1, I_2, I_3\}$ всех максимальных интервалов.



$I_1 = -\ 1\ 1$
$I_2 = 1\ 1\ -$
$I_3 = 1\ -\ 1$ •

Определение. Точку булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовем *ядерной*, если она принадлежит ровно одному максимальному для этой функции интервалу. Максимальный интервал называется *ядерным*, если он содержит ядерную точку.

Пример. Для мажоритарной функции ядерными точками являются 011 (принадлежит только интервалу $-\,1\,1$), 101 (принадлежит только интервалу $1-1$) и 110 (принадлежит только интервалу $1\,1-$). Все максимальные интервалы этой функции являются ядерными. •

Очевидно, что все ядерные интервалы входят в любое достаточное множество функции, состоящее из максимальных интервалов.

6) Задание булевой функции формулами будет рассмотрено несколько позже.

3.4. Фиктивные переменные

Определение. Говорят, что булева функция $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_i, если выполняется условие

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

В этом случае также говорят, что переменная x_i *существенная*, в противном случае ее называют *фиктивной* переменной.

Пример. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ и исследуем ее переменные x_1 и x_3.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

x_2	x_3	$f(0, x_2, x_3)$	$\neq f(1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

x_1	x_2	$f(x_1, x_2, 0)$	$= f(x_1, x_2, 1)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Из таблиц истинности видно, что переменная x_1 функции $f(x_1, x_2, x_3)$ существенная, так как $f(0, x_2, x_3) \neq f(1, x_2, x_3)$. Переменная x_3 фиктивная, так как $f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$. •

Очевидно, что для выявления фиктивных переменных можно не строить в явном виде таблиц истинности левой и правой частей неравенства, а сравнивать соответствующие части вектора-столбца значений функции.

Алгоритм распознавания фиктивной переменной по таблице истинности.

– Для переменной x_1 сравниваются половины столбца значений функции: верхняя и нижняя, так как именно в верхней половине $x_1 = 0$, а в нижней $x_1 = 1$, если они совпадают, то переменная x_1 фиктивна;

– для переменной x_2 сравниваются четвертины столбца в каждой половине, так как именно в верхних четвертинах $x_2 = 0$, а в нижних $x_2 = 1$, если четвертины в каждой половине совпадают, то переменная x_2 фиктивна;

– и так далее (за четвертинами следуют $1/8$, $1/16$, ...).

Пример. Для булевой функции из предыдущего примера переменная x_1 существенна, так как верхняя половина столбца значений функции (0011) не равна нижней половине (1100). Переменная x_2 существенна, так как четвертины уже в первой половине различаются (00 и 11). Переменная x_3 фиктивна, так как осьмушки во всех четвертинах равны (0 и 0, 1 и 1, 1 и 1, 0 и 0). •

Выявление фиктивных переменных можно ускорить, используя следующее очевидное утверждение.

Достаточное условие отсутствия фиктивных переменных. Если вес вектора-столбца значений функции нечетен, то функция не может содержать фиктивных переменных.

Алгоритм удаления фиктивной переменной x_i состоит в вычеркивании из таблицы истинности всех строк, в которых $x_i = 0$ (или всех строк, в которых $x_i = 1$), и столбца x_i.

Пример (функция та же). Применив алгоритм для удаления фиктивной переменой x_3 (таблица слева), получаем результат (таблица справа).

x_1	x_2	~~x_3~~	$f(x_1, x_2, x_3)$
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	0	~~1~~	0
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
0	1	~~1~~	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
1	0	~~1~~	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	1	~~1~~	0

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

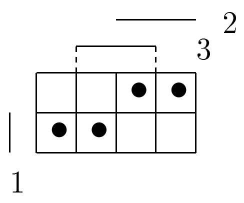
●

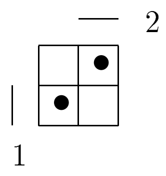
Если переменная x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ фиктивна, то на наборах, соседних по i компоненте, функция принимает одинаковые значения. Отсюда следует способ выявления и удаления фиктивной переменной функции, заданной матрицей Грея.

Алгоритм распознавания фиктивной переменной по матрице Грея (основан на свойстве симметрии кода Грея).

Переменная фиктивна тогда и только тогда, когда точки на матрице расположены симметрично относительно осей этой переменной. Упрощенная матрица – это одна из ее симметричных половин.

Пример (функция та же и представлена на левой матрице). Переменная x_3 функции фиктивна. Справа показан результат ее удаления.





●

Определение. Булевы функции назовем *равными с точностью до фиктивных переменных*, если равны (в смысле, определенном ранее) функции, полученные из исходных удалением фиктивных переменных (и именно это расширенное толкование равенства функций мы будем иметь в виду во всех дальнейших рассуждениях).

Пример. Рассмотрим функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$. Удалив фиктивную переменную x_1 функции $f_1(x_1, x_2)$ и фиктивную переменную x_2 функции $f_2(x_1, x_2)$, получим равные функции $f_1(x_2) = f_2(x_1) = f(x)$. Значит, исходные функции равны с точностью до фиктивных переменных.

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

x_2	$f_1(x_2)$
0	0
1	1

x_1	$f_2(x_1)$
0	0
1	1

$\bullet$

3.5. Элементарные булевы функции

Рассмотрим все булевы функции двух и менее аргументов.

При $n = 0$ имеем две функции: *константу 0* и *константу 1*.

При $n = 1$ имеем четыре функции:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции $f_0(x)$ и $f_3(x)$ зависят от x несущественно, поэтому равны двум рассмотренным ранее функциям. Введем названия и обозначения для остальных двух функций:

$f_1(x) = x$ – *тождественная* функция (читается "x"),

$f_2(x) = \overline{x}$ – функция *отрицания* (*инверсия*, *НЕ*) (читается "не x").

При $n = 2$ имеем 16 функций:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
			$\wedge$	$\hookrightarrow$		$\hookleftarrow$		$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\sim$		$\leftarrow$		$\rightarrow$	$/$	

Функции $f_0,\ f_3,\ f_5,\ f_{10},\ f_{12},\ f_{15}$ содержат фиктивные переменные и поэтому уже рассмотрены ранее. Обозначения остальных функций указаны в нижней строке таблицы, а названия их таковы:

$f_1(x_1, x_2) \;=\; x_1 \wedge x_2$ – *конъюнкция* (*логическое умножение*, *И*) (читается "x_1 и x_2"),

$f_7(x_1, x_2) \;=\; x_1 \vee x_2$ – *дизъюнкция* (*логическое сложение*, *ИЛИ*) (читается "x_1 или x_2"),

$f_6(x_1, x_2) \;=\; x_1 \oplus x_2$ – *дизъюнкция с исключением* (*сложение по модулю 2*) (читается "x_1 плюс x_2"),

$f_9(x_1, x_2) \;=\; x_1 \sim x_2$ – *эквивалентность* (читается "x_1 эквивалентно x_2"),

$f_8(x_1, x_2) \;=\; x_1 \downarrow x_2$ – *стрелка Пирса* (*НЕ-ИЛИ*) (читается "x_1 стрелка x_2"),

$f_{14}(x_1, x_2) \;=\; x_1 / x_2$ – *штрих Шеффера* (*НЕ-И*) (читается "x_1 штрих x_2"),

$f_{13}(x_1, x_2) \;=\; x_1 \rightarrow x_2$ – *импликация* (*логическое следование*) (читается "x_1 имплицирует x_2"),

$f_2(x_1, x_2) \;=\; x_1 \hookrightarrow x_2$ – *не импликация* (читается "x_1 не имплицирует x_2"),

$f_{11}(x_1, x_2) \;=\; x_1 \leftarrow x_2$ – *обратная импликация* (читается "x_1 обратно имплицирует x_2"),

$f_4(x_1, x_2) \;=\; x_1 \hookleftarrow x_2$ – *не обратная импликация* (читается "x_1 не обратно имплицирует x_2").

Определение. Булевы функции двух и менее аргументов назовем *элементарными булевыми функциями*.

Пары инверсных элементарных функций:

$$0\ 1, \qquad \vee\ \downarrow, \qquad \wedge\ /, \qquad \oplus\ \sim, \qquad \leftarrow \hookleftarrow, \qquad \rightarrow \hookrightarrow,$$

кроме того, пару составляют тождественная функция и инверсия.

3.6. Упражнения

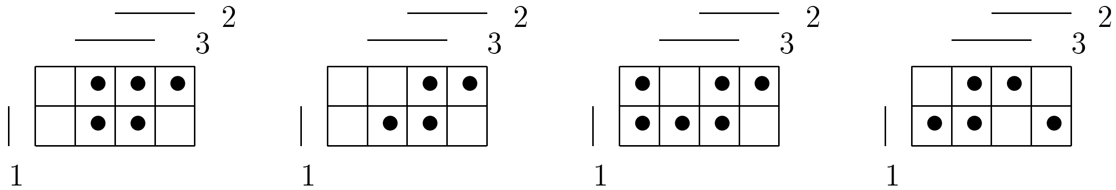
Упр.1. Задать с помощью таблиц истинности, характеристических множеств, векторов, матриц Грея и интервалов следующие булевы функции:

$f_1 : \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}$, функция равна единице на тех и только тех наборах, вес которых больше единицы;

$f_2 : \mathcal{B}^4 \to \mathcal{B}$, функция равна единице на тех и только тех наборах, которые представляют числа большие или равные 7;

$f_3 : \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}$, функция равна нулю на всех наборах с нечетным весом, и только на них.

Упр.2. Определить ядерные точки и интервалы булевых функций.



Упр.3. Привести примеры таблиц истинности булевых функций:

$f_1 : \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}$, функция принимает различные значения на противоположных наборах;

$f_2 : \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B} : f(\alpha) \leq f(\beta)$ если $\alpha \preceq \beta$.

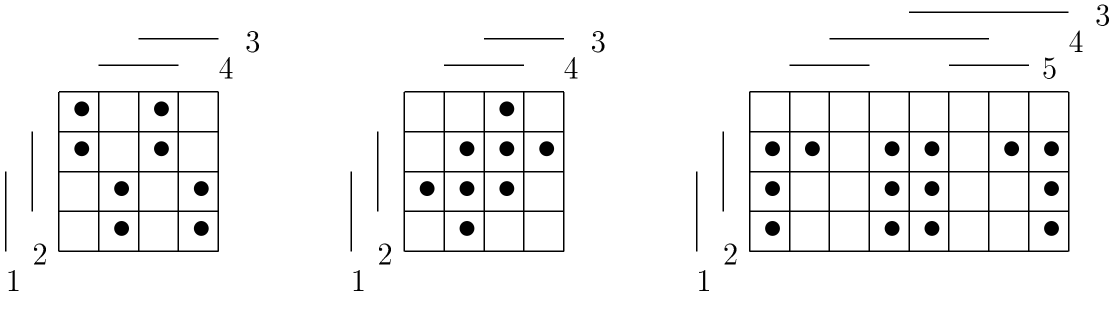
Упр.4. Соревнования обслуживают три судьи, один из них главный. Вес считается поднятым, если "за" проголосовало большинство судей, в том числе и главный. Построить таблицу истинности булевой функции, описывающей такое голосование.

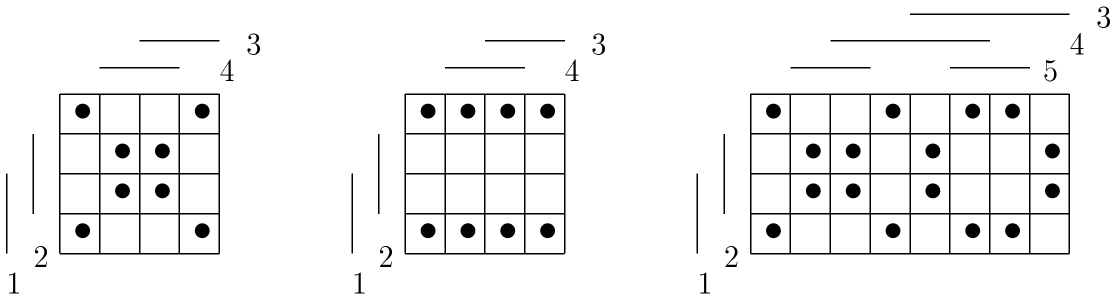
Упр.5. Вдоль длинного коридора размещены лампы. Включение и выключение света управляется тремя выключателями, два из которых расположены в концах коридора, а третий – посередине. При нажатии любого выключателя все лампы включаются, если были выключены, и выключаются, если были включены. Построить таблицу истинности булевой функции, описывающей управление освещением коридора.

Упр.6. Найти и удалить фиктивные переменные булевых функций.

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0

Упр.7. Найти и удалить фиктивные переменные булевых функций.





Упр.8. Представить все элементарные булевы функции матрицами Грея и разбить их на пары инверсных функций.

4. Формулы и равносильности

4.1. Формула как способ задания функции

Определение (индуктивное). Пусть даны $\varPhi$ – множество символов функций и X – множество символов переменных.

База индукции. Если f_i – символ n-местной функции из множества $\varPhi$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – переменные из множества X, то последовательность символов $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *формула над $\varPhi$ и X.*

Индуктивный переход. Если f_j – символ m-местной функции из $\varPhi$, а $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – переменные из X или формулы, то последовательность символов $f_j(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ – *формула над $\varPhi$ и X,* а $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – ее *подформулы.*

Заключительная фраза. Других формул нет.

Если множество $\varPhi = \{0, 1, \ \ , ^{-}, \vee, \wedge, \oplus, \sim, \rightarrow, \leftarrow, \hookrightarrow, \hookleftarrow, \downarrow, /\}$, а множество $X = \{a, b, \ldots, z, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то формулу над данными множествами $\varPhi$ и X договоримся называть просто *формулой* (обратим внимание на "пустой" символ, стоящий в множестве $\varPhi$ после 1 – это символ тождественной функции).

Примеры. $\wedge(c, a)$, $\quad \downarrow(b, c)$, $\quad ^{-}(x)$, $\quad \vee(\oplus(x, y), ^{-}(z))$. •

Эти формулы написаны по всем правилам, оговоренным в определении, но мы будем использовать более привычный и уже введенный нами способ записи формул для элементарных булевых функций: $c \wedge a$, $b \downarrow c$, $\overline{x}$ и т.д.

Чтобы указать порядок подстановки подформул $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в формулу, то есть порядок вычисления значения формулы, будем брать все подформулы, кроме инверсии, в скобки. Договоримся обозначать формулы большими латинскими буквами.

Пример. Последняя формула предыдущего примера примет вид $F = (x \oplus y) \vee \overline{z}$. •

Разрешим опускать скобки вокруг конъюнкции и те скобки, которые бы указывали, что функции вычисляются в порядке их следования слева направо. Кроме того, разрешим опускать знак конъюнкции. Все это означает, что при вычислении по формуле конъюнкция имеет приоритет, а остальные функции вычисляются слева направо, но с учетом скобок.

Пример. Формула $F = (x \oplus (y \wedge z)) \vee (x \to \overline{z})$ примет вид $F = x \oplus yz \vee (x \to \overline{z})$. •

Определение. Будем говорить, что формула F *задает* булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, а функция *реализует* формулу, и в этом случае использовать обозначение F_f.

Пример. Построим таблицу истинности функции f, реализующей предыдущую формулу $F_f = x \oplus yz \vee (x \to \overline{z})$. Порядок вычисления значений подформул обозначен цифрами внизу таблицы. Столбец значений функции выписан справа в рамке.

x	y	z	x	$\oplus$	yz	$\vee$	$(x$	$\to$	$\overline{z})$	$f(x,y,z)$
0	0	0		0	0	1		1	1	1
0	0	1		0	0	1		1	0	1
0	1	0		0	0	1		1	1	1
0	1	1		1	1	1		1	0	1
1	0	0		1	0	1		1	1	1
1	0	1		1	0	1		0	0	1
1	1	0		1	0	1		1	1	1
1	1	1		0	1	0		0	0	0
				2	1	5		4	3	

•

Определение. Формулу назовем *тождественно истинной* (обозначается $F \equiv 1$), если на всех наборах она принимает значение 1, и *тождественно ложной* (обозначается $F \equiv 0$), если на всех наборах она принимает значение 0.

Пример. Исследуем формулу $F = x \vee \overline{x}y \vee \overline{y}$, построив по ней таблицу истинности (здесь мы демонстрируем другой способ построения таблицы истинности – построчный).

x	y	$x \vee \overline{x}y \vee \overline{y}$
0	0	$0 \vee \overline{0}0 \vee \overline{0} = 0 \vee 0 \vee 1 = 1$
0	1	$0 \vee \overline{0}1 \vee \overline{1} = 0 \vee 1 \vee 0 = 1$
1	0	$1 \vee \overline{1}0 \vee \overline{0} = 1 \vee 0 \vee 1 = 1$
1	1	$1 \vee \overline{1}1 \vee \overline{1} = 1 \vee 0 \vee 0 = 1$

Формула является тождественно истинной. •

4.2. Равносильность формул

Определение. Две формулы F' и F'' называются *равносильными*, если они задают равные функции. В этом случае пишут $F' = F''$.

Доказывать равносильности можно с помощью таблиц истинности или рассуждений, опирающихся на свойства элементарных булевых функций.

Пример. Докажем равносильность $\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$, построив таблицы истинности для левой и правой формул.

x	y	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x}\,\overline{y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

●

Пример. $(x \to y) \vee 1 = 1$. Для доказательства этой равносильности можно не строить таблиц истинности, а воспользоваться следующими рассуждениями: так как один из аргументов дизъюнкции равен 1, то левая часть тождественно равна 1 и поэтому равна правой. ●

Кроме предложенных, существуют и другие способы доказательства равносильностей, например, приведением формул к каноническому виду. Этот способ будет рассмотрен позже.

4.3. Основные равносильности

К основным относят следующие равносильности, которые рекомендуется запомнить и применять при упрощении формул.

Свойства 0 *и* 1: $x0 = 0, \quad x1 = x,$

$x \vee 0 = x, \quad x \vee 1 = 1,$

$x \oplus 0 = x, \quad x \oplus 1 = \overline{x}.$

Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x.$

Закон противоречия: $x\,\overline{x} = 0.$

Закон исключенного третьего: $x \vee \overline{x} = 1.$

Законы идемпотентности: $xx = x,$

$x \vee x = x.$

Законы де Моргана: $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y},$

$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}.$

Законы коммутативности: $x \vee y = y \vee x,$

$x \oplus y = y \oplus x,$

$xy = yx.$

Законы ассоциативности: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y \vee z$,
$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus y \oplus z$,
$x(yz) = (xy)z = xyz$.

Законы дистрибутивности: $x(y \vee z) = xy \vee xz$,
$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$,
$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.

Законы поглощения: $x \vee xy = x$,
$x(x \vee y) = x$.

Законы склеивания: $xy \vee \overline{x}y = y$,
$(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = y$.

Закон обобщенного склеивания: $xy \vee \overline{x}z = xy \vee \overline{x}z \vee yz$.

4.4. Свойства 0 и 1

Свойства 0 и 1 для дизъюнкции, конъюнкции и суммы по модулю 2 приведены в списке основных равносильностей. Для остальных функций аналогичные свойства при необходимости можно получать самостоятельно построением таблиц истинности.

Пример. Свойства 0 и 1 для импликации.

x	$x \to 0$	$x \to 1$	$0 \to x$	$1 \to x$
0	1	1	1	0
1	0	1	1	1

Отсюда получаем следующие равносильности:
$x \to 0 = \overline{x}$, $\quad x \to 1 = 1$, $\quad 0 \to x = 1$, $\quad 1 \to x = x$. •

4.5. Упражнения

Упр.1. Построить таблицы истинности функций, заданных формулами:
$F_1 = xy \to (y \vee z)$,
$F_2 = x \to y \vee (x \to z)$,
$F_3 = y \oplus (\overline{x} \vee z)\,(y \sim z)$,
$F_4 = x\,(x \downarrow y) \vee (y \downarrow z)$.

Упр.2. Проверить равносильности:
1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$,
2) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$,
3) $x(y \sim z) = xy \sim xz$,
4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$,

5) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$,

6) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

Упр.3. Доказать основные равносильности, пользуясь различными способами.

Упр.4. Проверить, являются ли формулы тождественно истинными либо тождественно ложными:

$F_1 = x \to yz \vee \overline{y} \vee \overline{z}$,

$F_2 = (x \oplus z)\,(xy \sim z) \to y$;

$F_3 = (x \oplus y \downarrow (y \oplus z))\,\overline{y}z$,

$F_4 = x \downarrow y \downarrow (y \downarrow z) \to xz$.

5. Двойственная функция и двойственная формула

5.1. Двойственная функция

Определение. Булева функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ называется *двойственной булевой функции* $f(x_1, \dots, x_n)$, если она получена из $f(x_1, \dots, x_n)$ инверсией всех аргументов и самой функции, то есть

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n).$$

Пример. Построим функцию, двойственную стрелке Пирса.

x	y	$x \downarrow y$	$\overline{\overline{x} \downarrow \overline{y}}$
0	0	1	$\overline{\overline{0} \downarrow \overline{0}} = 1$
0	1	0	$\overline{\overline{0} \downarrow \overline{1}} = 1$
1	0	0	$\overline{\overline{1} \downarrow \overline{0}} = 1$
1	1	0	$\overline{\overline{1} \downarrow \overline{1}} = 0$

•

Пусть булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задана формулой F_f. Чтобы получить формулу F'_{f^*} для функции $f^*(x_1, \dots, x_n)$, двойственной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, необходимо, согласно определению, проинвертировать все переменные, пользуясь при этом законом двойного отрицания, и саму функцию. При этом формулу F'_{f^*} можно упростить (убрать длинную инверсию над формулой), заменив символ функции, которая вычисляется последней, на символ инверсной ей функции.

Пример. Пусть $F_f = x \downarrow (y \oplus (\overline{x} \vee yz)) \to (y \sim \overline{x})$. Последней должна вычислятьси импликация, инверсная ей функция это обратная импликация, поэтому формула для двойственной функции примет вид:

$$F'_{f^*} = \overline{\overline{x} \downarrow (\overline{y} \oplus (\overline{\overline{x}} \vee \overline{y}\,\overline{z})) \to (\overline{y} \sim \overline{\overline{x}})} = \overline{x} \downarrow (\overline{y} \oplus (x \vee \overline{y}\,\overline{z})) \hookrightarrow (\overline{y} \sim x). \quad \bullet$$

Алгоритм построения таблицы истинности двойственной функции (основан на определении двойственной функции).

Инверсия всех переменных превращает наборы в их антиподы. Поскольку в таблице истинности антипод первого набора расположен последним, антипод второго набора – предпоследним и так далее, то для построения функции $f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ нужно перевернуть вектор-столбец значений исходной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, а для получения функции $\overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ еще и инвертировать компоненты столбца.

Пример. Построим функцию, двойственную стрелке Пирса.

x	y	$x \downarrow y$	$\overline{x} \downarrow \overline{y}$	$\overline{\overline{x} \downarrow \overline{y}}$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0

•

Пары двойственных элементарных функций:

$$0\ 1, \qquad \vee\ \wedge, \qquad \downarrow\ /, \qquad \oplus\ \sim, \qquad \leftarrow\ \hookrightarrow, \qquad \rightarrow\ \hookleftarrow\,.$$

Тождественная функция и инверсия двойственны каждая самой себе.

Для доказательства можно воспользоваться алгоритмом построения таблицы истинности двойственной функции (именно так предыдущий пример демонстрирует, что штрих Шеффера двойственен стрелке Пирса), или применить равносильные преобразования.

Пример. Покажем, что дизъюнкция двойственна конъюнкции (применив законы де Моргана и двойного отрицания):

$$(x \vee y)^* = \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})} = \overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{y}} = x\,y. \quad \bullet$$

5.2. Двойственная формула

Определение. Формула F^* называется *двойственной формуле* F, если она получена из F заменой символов функций на символы двойственных им функций.

Пример.
$$F = x \downarrow (y \oplus (\overline{x} \vee yz)) \rightarrow (y \sim \overline{x}),$$
$$F^* = x/(y \sim \overline{x}(y \vee z)) \hookleftarrow (y \oplus \overline{x}). \ \bullet$$

Теорема (*принцип двойственности*). Если формула F задает булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, то двойственная ей формула F^* задает двойственную функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. По условию теоремы формула F задает булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. По определению формулы F имеем:

$$F = f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Рассмотрим двойственную ей формулу:

$$F^* = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)) =$$

[по определению двойственной функции для $f_i^*(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$]

$$= f_0^*(\overline{f}_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, \overline{f}_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) =$$

[по определению двойственной функции для $f_0^*(y_1, \ldots, y_m)$]

$$= \overline{f}_0(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, \overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) =$$

[по закону двойного отрицания]

$$= \overline{f}_0(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, f_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) =$$

[по определению двойственной функции для $f(x_1, \ldots, x_n)$]

$$= f^*(x_1, \ldots, x_n). \quad \bullet$$

Пример. Рассмотрим формулу $F = \overline{x \vee y}$, задающую булеву функцию НЕ-ИЛИ, то есть стрелку Пирса. Двойственная ей формула $F^* = \overline{xy}$ должна задавать функцию, двойственную стрелке Пирса – это штрих Шеффера: в самом деле $F^* = \overline{xy}$ – это функция НЕ-И, то есть штрих Шеффера. $\bullet$

Следствие из принципа двойственности. Если формулы F_1 и F_2 равносильны, то двойственные им формулы F_1^* и F_2^* также равносильны.

Доказательство. Равносильные формулы F_1 и F_2 задают одну и ту же булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, следовательно, по принципу двойственности, двойственные им формулы F_1^* и F_2^* задают двойственную $f(x_1, \ldots, x_n)$ функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n)$. $\bullet$

Таким образом, можно не доказывать некоторые равносильности (в том числе и основные), а выводить их, пользуясь следствием из принципа двойственности.

Примеры. Исходя из закона склеивания конъюнкций $x\,y \vee \overline{x}\,y = y$ и используя следствие, получим $(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = y$ – закон склеивания дизъюнкций. Исходя из одного закона де Моргана $\overline{x \vee y} = \overline{x}\;\overline{y}$ и используя следствие, получим другой закон де Моргана $\overline{x\,y} = \overline{x} \vee \overline{y}$. $\bullet$

5.3. Способы получения двойственной функции

Из материала, изложенного в предыдущих двух подразделах, следует, что если булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана формулой F_f, то двойственная ей функция $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ может быть получена из F_f следующими тремя способами:

– по определению двойственной функции – инверсией в формуле F_f всех аргументов и самой функции;

– по определению двойственной формулы и принципу двойственности – заменой в формуле F_f символов функций на символы двойственных им функций;

– построением таблицы истинности исходной функции по заданной формуле F_f, а затем переходом к таблице истинности двойственной функции (переворотом и инверсией столбца значений исходной функции).

5.4. Упражнения

Упр.1. Построить формулы для функций, двойственных данным, пользуясь двумя разными способами: определением двойственной функции и принципом двойственности. Сравнить таблицы истинности, построенные по полученным формулам.

$F_1 = x\,y \vee y\,z \vee x\,t \vee z\,t,$
$F_2 = x \oplus 1 \vee y(z\,t \vee 0) \vee \overline{x}\,y\,z,$
$F_3 = (x \to y) \oplus ((x \downarrow y)/(\overline{x} \sim y\,z)),$
$F_4 = (x \vee y \vee (y\overline{z} \oplus 1)) \to 1.$

Упр.2. Построить таблицы истинности по формулам из упр. 1, получить таблицы истинности двойственных функций и сравнить их с результатами предыдущего упражнения.

Упр.3. По таблицам истинности функций $f_1 - f_8$ построить двойственные им функции.

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0

Упр.4. Двойственны ли формулы F_f и G_g? Функции f и g?

1) $F_f = x\,y \oplus x\,z \oplus y\,z \qquad G_g = \overline{\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z}}$,
2) $F_f = x\,y \downarrow x\,z, \qquad G_g = (x \vee y)/(x \vee z)$,
3) $F_f = (\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x), \quad G_g = (x \to y)(\overline{y} \to \overline{x})$.

Упр.5. Показать, что $f^* = g$.

1) $F_f = \overline{x}yz \vee x(y \oplus z)$,
$\varphi_g = 10010111$,

2) $F_f = xy \vee xz \vee yz$,
$F_g = xy \vee xz \vee yz$,

3) $F_f = x \oplus y \oplus z$,
$F_g = x \oplus y \oplus z$,

4) $M_f^1 = \{0101, 0110, 1001, 1010\}$,

$$I_g = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}, \quad \begin{array}{l} I_1 = 0\ 0\ -\ - \\ I_2 = 1\ 1\ -\ - \\ I_3 = -\ -\ 0\ 0 \\ I_4 = -\ -\ 1\ 1 \end{array}$$

6. Контрольная работа 1

Тема контрольной работы: булевы функции, фиктивные переменные, двойственные функции и двойственные формулы.

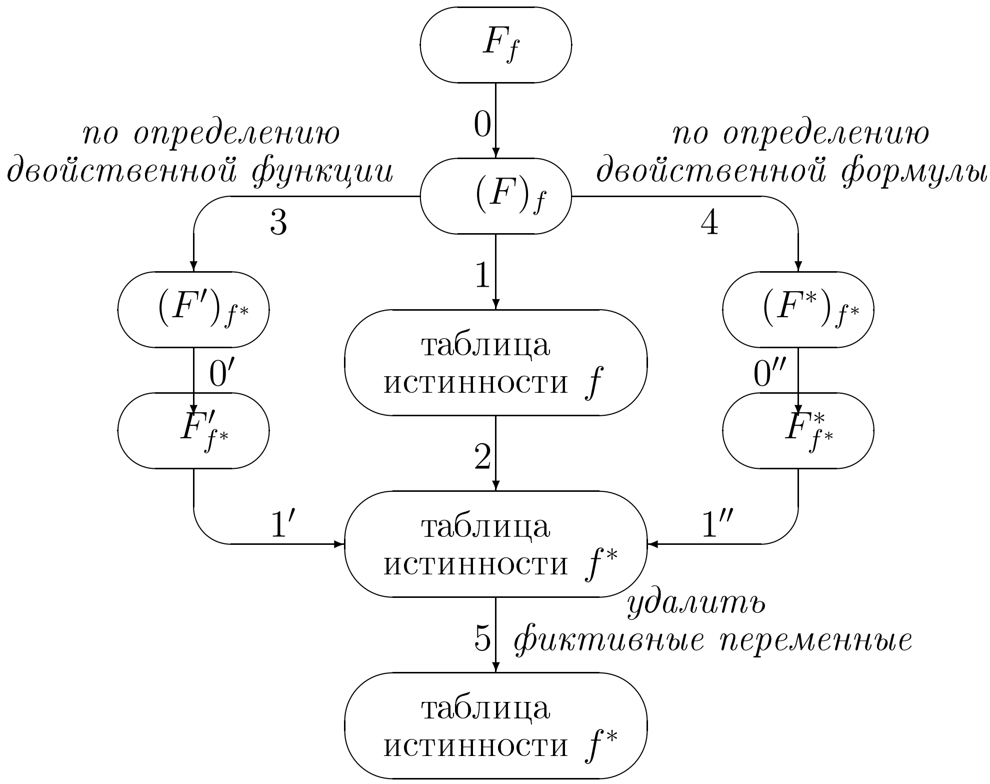


Схема контрольной работы (решение каждой из десяти предложенных здесь задач начинать с постановки задачи и делать вывод из сравнения таблиц истинности функции f^*, полученных разными способами; F обозначает формулу без лишних скобок, (F) – с недостающими скобками).

Задания на контрольную работу (формула F_f)

1) $x \to y \to (z \oplus \overline{x}y)$
2) $x \leftarrow \overline{y} \leftarrow (z \oplus \overline{x}y)$
3) $x/y/(\overline{z} \sim \overline{x}y)$
4) $z \to \overline{y} \to (x \oplus \overline{z}y)$
5) $\overline{x} \to \overline{y} \to (z \sim \overline{x}y)$
6) $x\overline{z} \downarrow y/(y \oplus x)$
7) $z \oplus y \leftarrow (\overline{x} \sim \overline{y})$
8) $x \vee \overline{z} \downarrow y/(y \sim x)$
9) $x\overline{z} \to y \downarrow (y \oplus x)$
10) $x\overline{z} \oplus y \to (x \sim y)$
11) $y \oplus \overline{z} \to \overline{y}(x \downarrow z)$
12) $x \oplus \overline{z} \to \overline{x}(y/z)$
13) $xy \vee \overline{z}/(x \to z)$
14) $y \sim \overline{z} \to \overline{y}(\overline{x}/\overline{z})$
15) $x \to \overline{z}/\overline{x}(y \downarrow z)$
16) $x \to \overline{y} \to (y \oplus \overline{x}z)$
17) $y \leftarrow \overline{y} \leftarrow (z \oplus \overline{x}y)$
18) $\overline{x}/\overline{y} \to (z \sim \overline{x}y)$
19) $z \to x\overline{y} \to (x \oplus \overline{z})$
20) $\overline{x} \to x\overline{y} \to (z \sim y)$
21) $\overline{z} \sim xy \to (\overline{x} \downarrow \overline{y})$
22) $\overline{x}z \downarrow y/x(y \oplus z)$
23) $x \vee y\overline{z} \downarrow (y \sim x)$
24) $z \downarrow xy \sim (\overline{x} \to \overline{z})$
25) $x\overline{y} \downarrow x/(x \oplus y)$
26) $y \oplus \overline{z}y/\overline{y}(x \downarrow \overline{z})$
27) $x/\overline{z} \to \overline{y}(x \downarrow z)$
28) $\overline{x}/\overline{z} \to y(x \to z)$
29) $x \sim \overline{z} \to \overline{y}(x/\overline{z})$
30) $x \to y/\overline{x}(y \downarrow z)$

Пример. Задана формула

$$F_f = z \oplus y \leftarrow (\overline{x} \leftarrow \overline{y}z).$$

0) *Расставим недостающие скобки в формуле F_f.* Возьмем в скобки конъюнкцию, затем остальные подформулы слева направо.

$$(F)_f = (z \oplus y) \leftarrow (\overline{x} \leftarrow (\overline{y}z)).$$

1), 2) *Построим таблицу истинности функции $f(x,y,z)$ по формуле $(F)_f$. Получим таблицу истинности двойственной функции $f^*(x,y,z)$ по таблице истинности функции $f(x,y,z)$*, переворачивая и инвертируя столбец значений функции $f(x,y,z)$.

x	y	z	$(z \oplus y)$	$\leftarrow$	$(\overline{x}$	$\leftarrow$	$(\overline{y}z))$	$f(x,y,z)$	$f^*(x,y,z)$
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
			2	5	3	4	1		

3) *По определению двойственной функции получим из формулы $(F)_f$ формулу двойственой функции $(F')_{f^*}$*, инвертируя переменные и саму функцию f. *Упростим формулу $(F')_{f^*}$*, заменив инверсию функции обратной импликации на не обратную импликацию.

$$(F')_{f^*} = \overline{(\overline{z} \oplus \overline{y}) \leftarrow (x \leftarrow (y\overline{z}))} = (\overline{z} \oplus \overline{y}) \hookleftarrow (x \leftarrow (y\overline{z})).$$

$0'$) *Уберем лишние скобки в формуле* $(F')_{f^*}$ вокруг конъюнкции и первой слева функции $(\oplus)$.

$$F'_{f^*} = \overline{z} \oplus \overline{y} \hookleftarrow (x \leftarrow y\overline{z}).$$

$1'$) *Построим таблицу истинности двойственной функции* $f^*(x, y, z)$ *по формуле* F'_{f^*}.

x	y	z	$\overline{z}$	$\oplus$	$\overline{y}$	$\hookleftarrow$	$(x$	$\leftarrow$	$y\overline{z})$	$f^*(x, y, z)$
0	0	0	1	0	1	1		1	0	1
0	0	1	0	1	1	0		1	0	0
0	1	0	1	1	0	0		0	1	0
0	1	1	0	0	0	1		1	0	1
1	0	0	1	0	1	1		1	0	1
1	0	1	0	1	1	0		1	0	0
1	1	0	1	1	0	0		1	1	0
1	1	1	0	0	0	1		1	0	1
			2	4	3	6		5	1	

4) *Построим формулу, двойственную* $(F)_f$. Заменим в формуле $(F)_f$ символы элементарных функций на символы двойственных им функций.

$$(F^*)_{f^*} = (z \sim y) \hookrightarrow (\overline{x} \hookrightarrow (\overline{y} \vee z)).$$

$0''$) *Уберем лишние скобки в формуле* $(F^*)_{f^*}$. Опустим скобки вокруг первой слева функции $(\sim)$.

$$F^*_{f^*} = z \sim y \hookrightarrow (\overline{x} \hookrightarrow (\overline{y} \vee z)).$$

$1''$) *Построим таблицу истинности двойственной функции* $f^*(x, y, z)$ *по формуле* $F^*_{f^*}$.

x	y	z	$z \sim y$	$\hookrightarrow$	$(\overline{x}$	$\hookrightarrow$	$(\overline{y}$	$\vee\ z))$	$f^*(x, y, z)$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
			1	6	2	5	3	4	

Вывод. Таблицы истинности функции $f^*(x, y, z)$ из 2), $1'$), $1''$) совпадают, значит, все задачи решены верно (кроме, может быть, задачи 0).

5) *Удалим фиктивные переменные функции* $f^*(x, y, z)$ *в ее таблице истинности.* Так как вес столбца значений функции четный, то переменные функции могут быть фиктивными. Рассмотрим переменную x. Верхняя половина столбца значений функции $f^*(x, y, z)$ (1001) равна нижней половине (1001), значит, переменная x является фиктивной. Удаляем из таблицы истинности столбец x и все строки, в которых x принимает значение 0.

y	z	$f^*(y, z)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В полученной таблице истинности верхняя половина столбца значений функции $f^*(y, z)$ (10) не равна нижней половине (01), значит, переменная y существенна. Четвертины первой же половины не равны, значит, переменная z тоже существенна. •

7. Разложение булевой функции по переменным и совершенные нормальные формы

7.1. Разложение Шеннона

Рассмотрим следующее разложение булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i.

Разложение Шеннона.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee \\ \vee \overline{x}_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Доказательство (не умаляя общности, для $i = 1$). При $x_1 = 0$ имеем:

$$f(0, x_2, \ldots, x_n) = 0 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \overline{0} f(0, x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

При $x_1 = 1$ имеем:

$$f(1, x_2, \ldots, x_n) = 1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \overline{1} f(0, x_2, \ldots, x_n) = f(1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следовательно, разложение верно. •

Определение. Сомножитель $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называется *коэффициентом разложения функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *по переменной* x_i *при* x_i, а сомножитель $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ – *коэффициентом разложения функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *по переменной* x_i *при* $\overline{x}_i$.

Пример. Булеву функцию $f(x,y,z) = \overline{y} \sim x\,\overline{z} \to y\,z$ разложим по переменной x:

$$\overline{y} \sim x\,\overline{z} \to y\,z = x(\overline{y} \sim 1\,\overline{z} \to y\,z) \vee \overline{x}\,(\overline{y} \sim 0\,\overline{z} \to y\,z) =$$

[упростим коэффициенты разложения на основе свойств 0 и 1 для конъюнкции]

$$= x(\overline{y} \sim \overline{z} \to y\,z) \vee \overline{x}\,(\overline{y} \sim 0 \to y\,z) =$$

[продолжим упрощение коэффициента при $\overline{x}$ на основе свойства 0 для эквивалентности $a \sim 0 = \overline{a}$ при $a = \overline{y}$; напомним, что способ получения таких свойств был рассмотрен в подразделе 4.4]

$$= x(\overline{y} \sim \overline{z} \to y\,z) \vee \overline{x}\,(y \to y\,z),$$

в результате имеем следующие коффициенты разложения, зависящие лишь от y и z:

$\overline{y} \sim \overline{z} \to y\,z$ – коэффициент разложения функции $f(x,y,z)$ по переменной x при x,

$y \to y\,z$ – коэффициент разложения функции $f(x,y,z)$ по переменной x при $\overline{x}$. •

7.2. Разложение функции по k переменным

Разложим функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ последовательно по двум переменным: сначала саму функцию по переменной x_1, затем коэффициенты разложения по переменной x_2.

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) &= x_1 f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee \overline{x}_1 f(0,x_2,\ldots,x_n) = \\ &= x_1[x_2 f(1,1,x_3,\ldots,x_n) \vee \overline{x}_2 f(1,0,x_3,\ldots,x_n)] \vee \\ &\vee \overline{x}_1[x_2 f(0,1,x_3,\ldots,x_n) \vee \overline{x}_2 f(0,0,x_3,\ldots,x_n)] = \end{aligned}$$

[раскроем скобки по закону дистрибутивности]

$$\begin{aligned} &= x_1x_2 f(1,1,x_3,\ldots,x_n) \vee x_1\overline{x}_2 f(1,0,x_3,\ldots,x_n) \vee \\ &\vee \overline{x}_1 x_2 f(0,1,x_3,\ldots,x_n) \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 f(0,0,x_3,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $x = x^1$, $\overline{x} = x^0$ (условимся читать символы x^c как "x в степени c"). Тогда разложение функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменным x_1, x_2 в свернутой форме примет вид

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{c_1c_2 \in \mathcal{B}^2} x_1^{c_1} x_2^{c_2} f(c_1,c_2,x_3,\ldots,x_n).$$

Пример. Продолжим разложение функции $f(x,y,z)$ из предыдущего примера. Мы уже получили ее разложение по x:

$$f(x,y,z) = \overline{y} \sim x\,\overline{z} \to y\,z = x(\overline{y} \sim \overline{z} \to y\,z) \vee \overline{x}\,(y \to y\,z).$$

Разложим теперь коэффициенты по переменной y:

$$x\,[y(\overline{1} \sim \overline{z} \to 1\,z) \vee \overline{y}(\overline{0} \sim \overline{z} \to 0\,z)] \vee \overline{x}\,[y(1 \to 1\,z) \vee \overline{y}(0 \to 0\,z)] =$$

[используем свойства 0 и 1 и раскроем квадратные скобки]

$$\begin{gathered} = x\,[y(0 \sim \overline{z} \to z) \vee \overline{y}(1 \sim \overline{z} \to 0)] \vee \overline{x}\,[y(1 \to z) \vee \overline{y}(0 \to 0)] = \\ = x\,y(z \to z) \vee x\,\overline{y}(\overline{z} \to 0) \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y} = \\ = x\,y(z \to z) \vee x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}. \quad \bullet \end{gathered}$$

Решим теперь тот же пример, но не последовательным применением разложения Шеннона, а непосредственно по формуле разложения функции по двум переменным.

Пример. Найдем коэффициенты разложения Шеннона булевой функции $f(x,y,z) = \overline{y} \sim x\,\overline{z} \to y\,z$ по переменным x и y:

$$\begin{aligned} &f(1,1,z) = \overline{1} \sim 1\,\overline{z} \to 1\,z = 0 \sim \overline{z} \to z = z \to z; \\ &f(1,0,z) = \overline{0} \sim 1\,\overline{z} \to 0\,z = 1 \sim \overline{z} \to 0 = \overline{z} \to 0 = z; \\ &f(0,1,z) = \overline{1} \sim 0\,\overline{z} \to 1\,z = 0 \sim 0 \to z = 1 \to z = z; \\ &f(0,0,z) = \overline{0} \sim 0\,\overline{z} \to 0\,z = 1 \sim 0 \to 0 = 0 \to 0 = 1. \end{aligned}$$

Подставив коэффициенты разложения в формулу, получим

$$\begin{gathered} f(x,y,z) = x^1\,y^1 f(1,1,z) \vee x^1\,y^0 f(1,0,z) \vee x^0\,y^1 f(0,1,z) \vee \\ \vee x^0\,y^0 f(0,0,z) = x\,y(z \to z) \vee x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}. \quad \bullet \end{gathered}$$

Заметим, что в данном случае оба способа привели к одинаковым формулам. В общем случае формулы могут не совпадать, но они с очевидностью равносильны, ибо задают одну функцию.

Разложение функции по k переменным имеет вид, аналогичный разложению функции по двум переменным.

Разложение функции по k переменным.

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{c_1\ldots c_k \in \mathcal{B}^k} x_1^{c_1}\ldots x_k^{c_k} f(c_1,\ldots,c_k,x_{k+1},\ldots,x_n).$$

Доказательство. Подставим в левую и правую части равенства произвольный набор $a_1\ldots a_n$:

$$f(a_1,\ldots,a_n) = \bigvee_{c_1\ldots c_k \in \mathcal{B}^k} a_1^{c_1}\ldots a_k^{c_k} f(c_1,\ldots,c_k,a_{k+1},\ldots,a_n).$$

Для упрощения правой части докажем сперва вспомогательный результат: $a^c = 1$ тогда и только тогда, когда $a = c$. Действительно, $0^0 = \overline{0} = 1$, $1^1 = 1$, но $0^1 = 0$, $1^0 = \overline{1} = 0$. Следовательно, конъюнкция $a_1^{c_1} \ldots a_k^{c_k} = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 \ldots a_k$ и $c_1 \ldots c_k$ совпадают. Это означает, что конъюнкция не обращает в ноль лишь одно слагаемое правой части, для которого $c_1 = a_1, \ldots, c_k = a_k$, и разложение имеет вид:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1^{a_1} \ldots a_k^{a_k} f(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n). \quad \bullet$$

7.3. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Разложив булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ по k переменным при $k = n$, получим

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{c_1 \ldots c_n \in \mathcal{B}^n} x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n} f(c_1, \ldots, c_n).$$

Поскольку коэффициентами разложения здесь являются значения функции на всевозможных наборах, то возможны два случая:

– либо набор $c_1 \ldots c_n \in M_f^0$, тогда $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$, и поэтому обращается в 0 соответствующее слагаемое правой части;

– либо набор $c_1 \ldots c_n \in M_f^1$, тогда $f(c_1, \ldots, c_n) = 1$, и слагаемое упрощается.

В результате имеем формулу разложения функции по всем переменным

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{c_1 \ldots c_n \in M_f^1} x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}.$$

Пример. Найдем коэффициенты разложения той же булевой функции $f(x, y, z) = \overline{y} \sim x\,\overline{z} \to y\,z$ по всем переменным (для удобства наборы $c_1 \ldots c_n \in \mathcal{B}^n$ будем перебирать в естественном порядке):

$f(0,0,0) = \overline{0} \sim 0\,\overline{0} \to 0\,0 = 1 \sim 0 \to 0 = 0 \to 0 = 1,$
$f(0,0,1) = \overline{0} \sim 0\,\overline{1} \to 0\,1 = 1 \sim 0 \to 0 = 0 \to 0 = 1,$
$f(0,1,0) = \overline{1} \sim 0\,\overline{0} \to 1\,0 = 0 \sim 0 \to 0 = 1 \to 0 = 0,$
$f(0,1,1) = \overline{1} \sim 0\,\overline{1} \to 1\,1 = 0 \sim 0 \to 1 = 1 \to 1 = 1,$
$f(1,0,0) = \overline{0} \sim 1\,\overline{0} \to 0\,0 = 1 \sim 1 \to 0 = 1 \to 0 = 0,$
$f(1,0,1) = \overline{0} \sim 1\,\overline{1} \to 0\,1 = 1 \sim 0 \to 0 = 0 \to 0 = 1,$
$f(1,1,0) = \overline{1} \sim 1\,\overline{0} \to 1\,0 = 0 \sim 1 \to 0 = 0 \to 0 = 1,$
$f(1,1,1) = \overline{1} \sim 1\,\overline{1} \to 1\,1 = 0 \sim 0 \to 1 = 1 \to 1 = 1.$

Подставив коэффициенты в формулу, получим

$$f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z. \quad \bullet$$

Нетрудно заметить, что вычисление коэффициентов разложения функции по всем переменным эквивалентно построчному построению ее таблицы истинности.

Определение. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма* функции $f(x_1, \dots, x_n)$ (*СовДНФ*$_f$) – это формула вида

$$\bigvee_{c_1 \dots c_n \in M_f^1} x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}.$$

Из данной формулы с очевидностью вытекает следующее утверждение.

Утверждение о единственности совершенной ДНФ. Любая булева функция, кроме константы 0, представима совершенной дизъюнктивной нормальной формой, единственной для данной функции.

Алгоритм построения совершенной ДНФ по таблице истинности (основан на определении совершенной ДНФ).

Начало: задана таблица истинности булевой функции.

Шаг 1: в векторе-столбце значений функции выбирается очередная единица. Если единицы исчерпаны, то идем на конец.

Шаг 2: по набору значений аргументов выбранной строки формируется конъюнкция всех аргументов с соблюдением правила: если i-я компонента набора равна 0, то i-я переменная входит в конъюнкцию в степени 0 (с инверсией), иначе – в степени 1 (без инверсии). Полученная конъюнкция добавляется в формулу как очередное слагаемое. Идем на шаг 1.

Конец.

Пример. Применим алгоритм к той же функции (с переименованными аргументами) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2 \sim x_1\overline{x}_3 \to x_2x_3$.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	
0	0	0	1	$x_1^0x_2^0x_3^0 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
0	0	1	1	$x_1^0x_2^0x_3^1 = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$x_1^0x_2^1x_3^1 = \overline{x}_1x_2x_3$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x_1^1x_2^0x_3^1 = x_1\overline{x}_2x_3$
1	1	0	1	$x_1^1x_2^1x_3^0 = x_1x_2\overline{x}_3$
1	1	1	1	$x_1^1x_2^1x_3^1 = x_1x_2x_3$

Соединив полученные конъюнкции знаками дизъюнкции, имеем

$$\text{СовДНФ}_f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3. \quad \bullet$$

Обратим внимание на тот факт, что нам впервые удалось перейти от табличного способа задания функции к формульному!

Решение обратной задачи, то есть построение таблицы истинности по совершенной ДНФ, очевидно: степени переменных конъюнкций совершенной ДНФ задают наборы, на которых функция принимает значение 1. Это гораздо проще, чем построение таблицы истинности по совершенной ДНФ как по произвольной формуле.

7.4. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Пусть задана булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$. Представим ее инверсию $\overline{f}(x_1,\ldots,x_n)$ совершенной ДНФ (учтем, что $M^1_{\overline{f}} = M^0_f$):

$$\overline{f}(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{c_1\ldots c_n\in M^1_{\overline{f}}} x_1^{c_1}\ldots x_n^{c_n} = \bigvee_{c_1\ldots c_n\in M^0_f} x_1^{c_1}\ldots x_n^{c_n}$$

Проинвертируем обе части этого равенства:

$$\overline{\overline{f}}(x_1,\ldots,x_n) = \overline{\bigvee_{c_1\ldots c_n\in M^0_f} x_1^{c_1}\ldots x_n^{c_n}}$$

По законам двойного отрицания и де Моргана имеем:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{c_1\ldots c_n\in M^0_f} \overline{x_1^{c_1}\ldots x_n^{c_n}} = \bigwedge_{c_1\ldots c_n\in M^0_f} \left(\overline{x_1^{c_1}} \vee \ldots \vee \overline{x_n^{c_n}}\right).$$

Заметим, что $\overline{x^c} = x^{\overline{c}}$. Действительно,

$$\overline{x^0} = \overline{\overline{x}} = x = x^1 = x^{\overline{0}}, \qquad \overline{x^1} = \overline{x} = x^0 = x^{\overline{1}}.$$

Учитывая это, получаем следующее представление функции $f(x_1,\ldots,x_n)$:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{c_1\ldots c_n\in M^0_f} \left(x_1^{\overline{c}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{c}_n}\right).$$

Определение. *Совершенная конъюнктивная нормальная форма* функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ (*СовКНФ*$_f$) – это формула вида

$$\bigwedge_{c_1\ldots c_n\in M^0_f} \left(x_1^{\overline{c}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{c}_n}\right).$$

Из данной формулы с очевидностью вытекает следующее утверждение.

Утверждение о единственности совершенной КНФ. Любая булева функция, кроме константы 1, представима совершенной конъюнктивной нормальной формой, единственной для данной функции.

Алгоритм построения совершенной КНФ по таблице истинности (вытекает из определения совершенной КНФ).

Начало: задана таблица истинности булевой функции.

Шаг 1: в векторе-столбце значений функции выбирается очередной ноль. Если нули исчерпаны, то идем на конец.

Шаг 2: по набору значений аргументов выбранной строки формируется дизъюнкция всех аргументов с соблюдением правила: если i-я компонента набора равна 0, то i-я переменная входит в дизъюнкцию в степени 1 (без инверсии), иначе – в степени 0 (с инверсией). Полученная дизъюнкция добавляется в формулу как очередной сомножитель. Идем на шаг 1.

Конец.

Пример. Применим алгоритм к рассмотренной в предыдущих примерах функции $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2 \sim x_1\overline{x}_3 \to x_2x_3$.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	0	$x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^1 = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Соединив полученные дизъюнкции знаками конъюнкции, имеем

$$\text{СовКНФ}_f = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3). \quad \bullet$$

Построение таблицы истинности по совершенной КНФ, так же как и по совершенной ДНФ, выполняется значительно проще, чем по произвольной формуле, так как инверсии степеней переменных дизъюнкций совершенной КНФ задают наборы, на которых функция принимает значение 0.

7.5. Упражнения

Упр.1. Выполнить разложения функций $f_1 - f_4$ по указанным подмножествам переменных двумя способами (последовательным применением разложения Шеннона и непосредственно по формуле разложения функции k по переменным):

$f_1(x, y, z, t) = (x \vee y\,\overline{z}\,t)(\overline{y} \to x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee (x \vee z))$ по $\{x, t\}, \{y, z\}$,

$f_2(x, y, z, t) = (x \to y\,z)(y\,t \oplus z) \to x\,\overline{t} \vee \overline{x}$ по $\{x\}, \{y, z, t\}$,

$f_3(x,y,z) = x \oplus y\,z \to (x \sim z \vee (x \sim y))$ по $\{x\}, \{x,y,z\}$,

$f_4(x,y,z,t) = y\,z \sim x\,t/(x \to z\,t) \oplus (x \vee y \vee z)$ по $\{x,y\}, \{z,t\}$.

Показать равносильность формул, полученных двумя способами.

Упр.2. Построить совершенные ДНФ и совершенные КНФ булевых функций $f_1 - f_8$.

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1

8. Дизъюнктивная нормальная форма

8.1. Элементарная конъюнкция и ДНФ

Пусть имеем множество переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Определение. *Элементарной конъюнкцией* назовем конъюнкцию переменных множества X, в которую каждая переменная входит не более одного раза (с инверсией или без инверсии).

Примеры. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, тогда $x_1\overline{x}_2x_4$, x_1x_3, x_1, 1 являются элементарными конъюнкциями, а $x_1x_1\overline{x}_2$, $x_1x_2\overline{x}_2x_4$ не являются. •

Определение. Число переменных, образующих элементарную конъюнкцию, назовем ее *рангом.*

Примеры. Ранги элементарных конъюнкций $x_1\overline{x}_3x_4$ и 1 равны трем и нулю. •

Определение. *Полной конъюнкцией* назовем элементарную конъюнкцию, состоящую из всех n переменных множества X, то есть конъюнкцию ранга n.

Пример. При $n = 4$ конъюнкция $x_1x_2\overline{x}_3x_4$ – полная. •

Определение. Две конъюнкции называются *ортогональными по переменной* x_i, если эта переменная входит в одну конъюнкцию с инверсией, а в другую без инверсии.

Пример. Конъюнкции $x_1x_2\overline{x}_3$ и $\overline{x}_1x_3\overline{x}_4$ ортогональны по переменным x_1 и x_3. •

Определение. Две конъюнкции называются *смежными*, если они ортогональны по одной и только одной переменной x_i (принято также говорить "*смежны по переменной x_i*").

Пример. Конъюнкции $x_1x_2\overline{x}_3$ и $x_1x_3\overline{x}_4$ являются смежными по переменной x_3 (ортогональны только по x_3). •

Определение. Две конъюнкции называются *соседними*, если они ортогональны по одной и только одной переменной x_i и совпадают по остальным (принято также говорить "*соседние по переменной x_i*").

Пример. Конъюнкции $x_1x_2\overline{x}_3$ и $x_1x_2x_3$ являются соседними по переменной x_3 (ортогональны только по x_3 и совпадают по x_1 и x_2). •

Законы склеивания и обобщенного склеивания применяются, как нетрудно видеть, к соседним и смежным конъюнкциям соответственно. Поэтому их также называют законами *склеивания соседних конъюнкций* и *обобщенного склеивания смежных конъюкнций* и иногда добавляют, по какой именно переменной.

Примеры. Конъюнкции $x_1x_2\overline{x}_3$ и $x_1x_2x_3$ являются соседними по переменной x_3, следовательно, к ним применим закон склеивания соседних конъюнкций по x_3:

$$x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2.$$

Конъюнкции $x_1x_2\overline{x}_3$ и $x_1x_3\overline{x}_4$ являются смежными по переменной x_3, следовательно, к ним применим закон обобщенного склеивания смежных конъюнкций по x_3:

$$x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_3\overline{x}_4 = x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_4. \quad \bullet$$

Определение. *Дизъюнктивной нормальной формой* (*ДНФ*) булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовем дизъюнкцию различных элементарных конъюнкций, задающую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример. $x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 =$ ДНФ. •

Определение. *Длиной* ДНФ назовем число ее конъюнкций, а *рангом* ДНФ – сумму рангов конъюнкций.

Пример. Длина ДНФ из предыдущего примера равна трем, а ранг – восьми. •

Будем применять обозначение ДНФ$_f$, если захотим отметить, что ДНФ представляет булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что совершенная ДНФ является частным случаем ДНФ, все конъюнкции которой полные. Любая ДНФ может быть преобразована в совершенную ДНФ с использованием основных равносильностей – законов склеивания и поглощения конъюнкций.

8.2. Преобразование ДНФ в совершенную ДНФ

Алгоритм преобразования ДНФ в совершенную ДНФ (основан на законах склеивания $y = xy \vee \overline{x}y$ и идемпотентности $x \vee x = x$).

Начало: задана ДНФ$_f$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Шаг 1: рассматриваем очередную конъюнкцию K исходной ДНФ$_f$. Если все конъюнкции исчерпаны, идем на конец.

Шаг 2: если конъюнкция K не является полной, то выбираем переменную x_i, которая не входит в K, и по закону склеивания заменяем K на дизъюнкцию двух конъюнкций: $K = Kx_i \vee K\overline{x}_i$ (в таком применении будем называть его законом *расклеивания соседних конъюнкций*). Если полученные слагаемые не являются полными конюнкциями, то применяем к каждой из них закон расклеивания (шаг 2) до тех пор, пока не получим из конъюнкции K дизъюнкцию полных конъюнкций. Идем на шаг 1.

Конец: на основании закона идемпотентности приводим подобные среди одинаковых конъюнкций – получаем СовДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример. Пусть ДНФ$_f$ $= x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3$, $n = 3$. Применим закон расклеивания к каждой конъюнкции:

$x_1x_2 = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3,$

$\overline{x}_1\overline{x}_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3,$

$x_3 = x_1x_3 \vee \overline{x}_1x_3 = \underline{x_1x_2x_3} \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \underline{\overline{x}_1\overline{x}_2x_3}.$

В последней строке подчеркнуты конъюнкции, совпадающие с полученными ранее. По закону идемпотентности они не войдут в совершенную ДНФ, которая примет вид

$$\text{СовДНФ}_f = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3. \quad \bullet$$

8.3. Элементарная конъюнкция и интервал

Утверждение о конъюнкции и интервале. Каждая элементарная конъюнкция K ранга r может быть задана интервалом I_K ранга r. Каждый интервал ранга r задает элементарную конъюнкцию ранга r.

Доказательство (конструктивное).

Рассмотрим произвольную конъюнкцию K ранга r: $K = x_{i_1}^{c_1} \ldots x_{i_r}^{c_r}$. Построим характеристическое множество M_K^1.

$$M_K^1 = \left\{a_1 \ldots a_n : \; a_{i_1}^{c_1} \ldots a_{i_r}^{c_r} = 1\right\} = \left\{a_1 \ldots a_n : \; a_{i_1}^{c_1} = 1, \ldots, a_{i_r}^{c_r} = 1\right\}.$$

Следовательно, для компонент с номерами i_j, $j = 1, \ldots, r$, должно выполняться условие $a_{i_j}^{c_j} = 1$, что, как было показано ранее, эквивалентно условию $a_{i_j} = c_j$. Остальные компоненты могут принимать любые значения. Это означает, что множество M_K^1 является интервалом, у которого r компонент являются внешними, а остальные $n-r$ – внутренними.

Рассмотрим произвольный интервал I ранга r. Пусть его компоненты с номерами $i_1, \ldots, i_r$ являются внешними и равны соответственно $c_1, \ldots, c_r$. Если I рассматривать как характеристическое множество M_f^1 булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, то из определения интервала следует, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает на наборе $a_1, \ldots, a_n$ значение 1, если и только если $a_{i_1} = c_1$, ..., $a_{i_r} = c_r$, то есть если и только если $a_{i_1}^{c_1} = 1$, ..., $a_{i_r}^{c_r} = 1$. Отсюда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{c_1} \ldots x_{i_r}^{c_r}. \quad \bullet$$

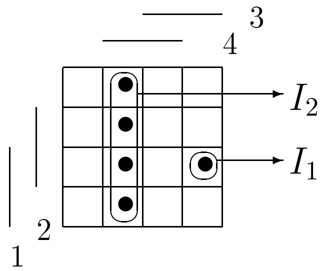
Таким образом, интервал I_K, задающий элементарную конъюнкцию K ранга r, имеет следующий вид:

– если переменная x_i не входит в K, то i-я компонента интервала I_K является внутренней;

– иначе i-я компонента является внешней, она равна 0, если переменная x_i входит в конъюнкцию K с инверсией, и равна 1, если переменная x_i входит в K без инверсии.

Примеры. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Рассмотрим три конъюнкции разных рангов и их задание интервалами, которые представим троичными векторами и на матрице Грея (здесь и везде далее конъюнкции и задающему ее интервалу будем присваивать один и тот же номер).

$K_1 = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_4, \quad I_1 = 1\ 1\ 1\ 0;$
$K_2 = \overline{x}_3 x_4, \quad I_2 = -\,-\,0\ 1.$



Конъюнкция $K_3 = 1$ задается интервалом $I_3 = ----$, то есть всем булевым пространством $\mathcal{B}^4$. Результаты можно проверить построением характеристических множеств M^1 конъюнкций. Так множество M^1 конъюнкции $K_2 = \overline{x}_3 x_4$ (согласно определению конъюнкции) состоит из всех векторов, в которых третья компонента принимает значение 0, четвертая – 1, а значения остальных компонент произвольны, значит $M^1 = -\,-\,0\,1$. $\bullet$

Это взаимно-однозначное соответствие между элементарной конъюнкцией и интервалом позволяет рассматривать, например, закон склеивания соседних конъюнкций $xy \vee \overline{x}y = y$ и операцию склеивания соседних интервалов $I_{xy} \cup I_{\overline{x}y} = I_y$ как один и тот же закон, сформулированный на двух разных языках.

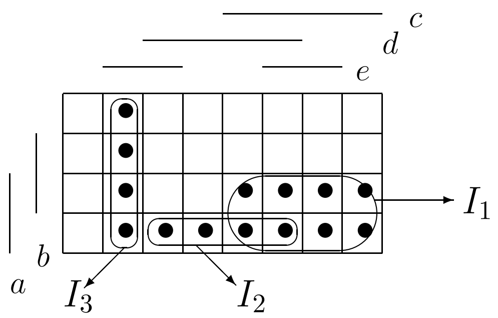
8.4. ДНФ и достаточное множество интервалов

Рассмотрим ДНФ$_f$ $= K_1 \vee \ldots \vee K_m$. По определению дизъюнкции, булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда хотя бы одна из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ принимает значение 1. Это означает, что соответствующие интервалы $I_1, \ldots, I_m$ образуют множество, достаточное для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом и в этом случае можно пользоваться двумя "параллельными" языками: языком ДНФ и языком интервалов. Последний оказывается наиболее наглядным при задании булевых функций матрицами Грея.

8.4.1. Построение матрицы Грея по ДНФ

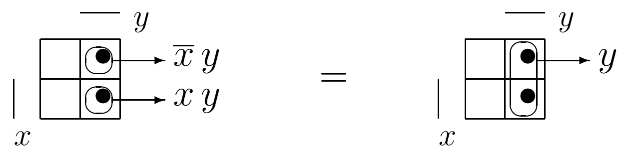
Исходя из предыдущих рассуждений о ДНФ и достаточном множестве интервалов, построение матрицы Грея булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по ее ДНФ$_f$ $= K_1 \vee \ldots \vee K_m$ сводится к выделению на матрице интервалов $I_1, \ldots, I_m$, задающих элементарные конъюнкции $K_1, \ldots, K_m$.

Пример. Построим матрицу Грея булевой функции $f(a, b, c, d, e)$ по ее ДНФ$_f$ $= \underbrace{a\,c}_{K_1} \vee \underbrace{a\,\overline{b}\,d}_{K_2} \vee \underbrace{\overline{c}\,\overline{d}\,e}_{K_3}$.

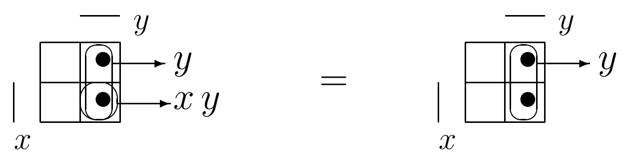


В частности, законы склеивания, обобщенного склеивания и поглощения могут быть продемонстрированы на матрицах Грея следующим образом.

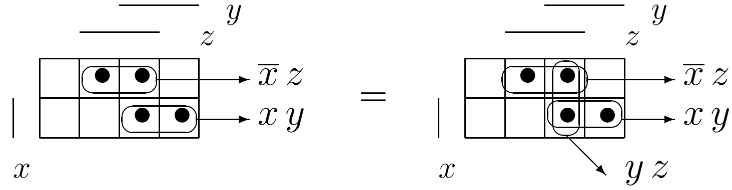
Закон склеивания:
$x\,y \vee \overline{x}\,y = y$



Закон поглощения:
$x\,y \vee y = y$



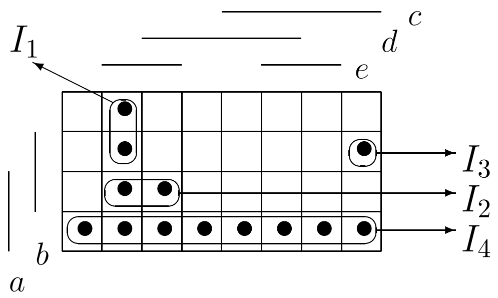
Закон обобщенного склеивания:
$x\,y \vee \overline{x}\,z = x\,y \vee \overline{x}\,z \vee y\,z$



8.4.2. Построение ДНФ по матрице Грея

Пусть булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана матрицей Грея. Выделим на ней достаточное множество интервалов. Запишем дизъюнкцию элементарных конъюнкций, заданных этими интервалами – получим ДНФ $_f$.

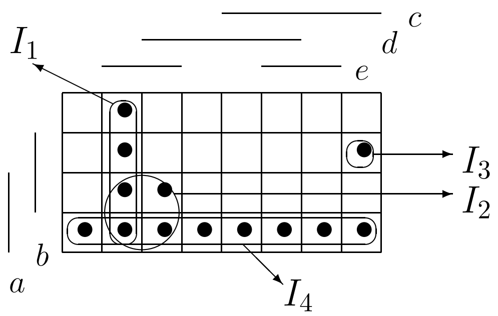
Пример. Рассмотрим булеву функцию пяти переменных, заданную матрицей Грея.



$$\text{ДНФ}_f = \underset{K_1}{\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}\,e} \;\vee\; \underset{K_2}{a\,b\,\overline{c}\,e} \;\vee\; \underset{K_3}{\overline{a}\,b\,c\,\overline{d}\,\overline{e}} \;\vee\; \underset{K_4}{a\,\overline{b}}. \;\bullet$$

В подразделе 3.3 было показано, что булева функция может быть задана различными достаточными множествами интервалов. Из этого следует, что функция в общем случае может быть задана различными ДНФ.

Пример. Рассмотрим функцию из предыдущего примера.



$$\text{ДНФ}'_f = \underset{K_1}{\overline{c}\,\overline{d}\,e} \;\vee\; \underset{K_2}{a\,\overline{c}\,e} \;\vee\; \underset{K_3}{\overline{a}\,b\,c\,\overline{d}\,\overline{e}} \;\vee\; \underset{K_4}{a\,\overline{b}}. \;\bullet$$

Заметим, что ДНФ$'_f$ проще, чем ДНФ$_f$, так как при одинаковой длине ДНФ$'_f$ имеет меньший ранг (13 вместо 15).

8.5. Построение ДНФ по формуле

Пусть булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана формулой. Применим к ней разложение Шеннона по любой переменной (наиболее предпочтительным, как правило, является выбор чаще встречающейся переменной, так как появление большого числа констант приводит к значительному упрощению формул). Если коэффициенты полученной формулы не являются ДНФ, то применим разложение Шеннона к коэффициентам, и так далее до тех пор, пока все очередные коэффициенты не превратятся в ДНФ, затем раскроем скобки – получим ДНФ$_f$.

Пример. Рассмотрим функцию трех переменных

$$f(x,y,z) = (x \to yz)/(x \oplus z).$$

Разложим ее по переменной x (она встречается в формуле чаще y и так же часто как z):

$$f(x,y,z) = x\,[(1 \to yz)/(1 \oplus z)] \vee \overline{x}\,[(0 \to yz)/(0 \oplus z)] =$$

[упростим выражение, используя свойства 0 и 1 для дизъюнкции с исключением ($0 \oplus a = a$, $1 \oplus a = \overline{a}$), для штриха Шеффера ($1/a = \overline{a}$) и для импликации ($0 \to a = 1$, $1 \to a = a$); способ получения этих свойств был рассмотрен в подразделе 4.4]

$$= x\,[yz/\overline{z}] \vee \overline{x}\,[1/z] = x\,[yz/\overline{z}] \vee \overline{x}\,\overline{z} =$$

[разложим коэффициент при x по переменной z (она встречается в подформуле чаще y)]

$$= x\,[z\,(y1/\overline{1}) \vee \overline{z}\,(y0/\overline{0})] \vee \overline{x}\,\overline{z} = x\,[z\,(y/0) \vee \overline{z}\,(0/1)] \vee \overline{x}\,\overline{z} =$$

[используем свойство 0 для штриха Шеффера ($0/a = 1$) и закон исключенного третьего]

$$= x\,[z\,1 \vee \overline{z}\,1] \vee \overline{x}\,\overline{z} = x\,[z \vee \overline{z}] \vee \overline{x}\,\overline{z} = x \vee \overline{x}\,\overline{z}.$$

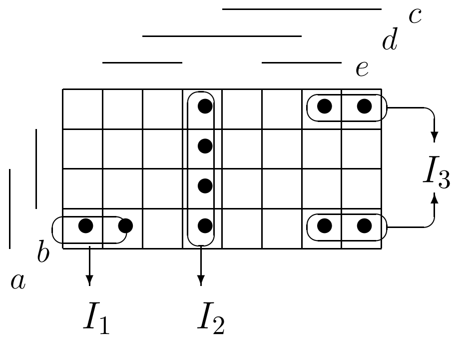
Полученная формула является ДНФ. •

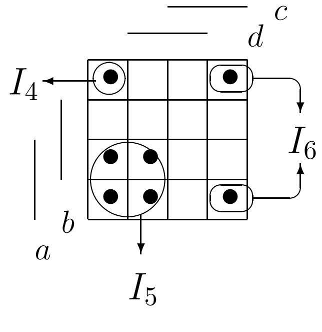
8.6. Упражнения

Упр.1. На матрице Грея для пяти переменных построить интервалы, задающие конъюнкции:

$K_1 = x_1\overline{x}_3x_5$, $K_2 = x_2\overline{x}_4$, $K_3 = x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4x_5$, $K_4 = x_1$, $K_5 = x_2x_3x_4$.

Упр.2. Записать конъюнкции, заданные интервалами I_1 – I_6.





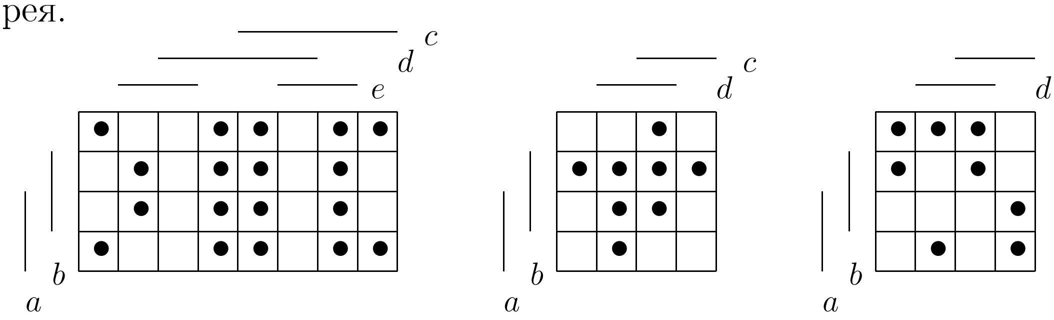
Упр.3. Преобразовать ДНФ$_1$ – ДНФ$_3$ в совершенные ДНФ и проверить результат построением матриц Грея:

ДНФ$_1 = a\,d \vee b\,c\,d \vee a\,\overline{b}\,d$,

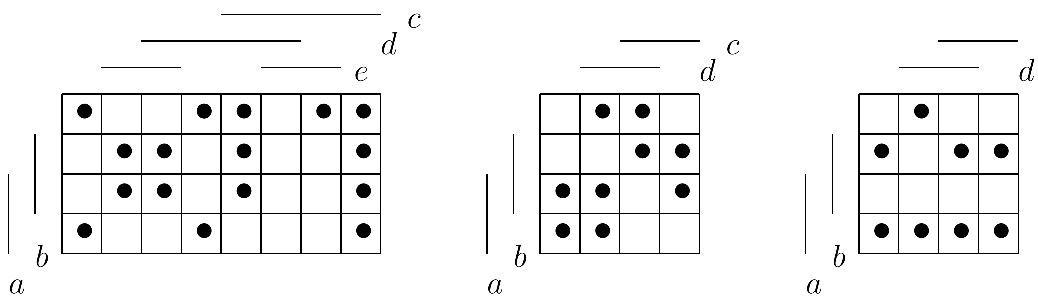
ДНФ$_2 = a\,b \vee a\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}$,

ДНФ$_3 = a\,d \vee b\,d \vee a\,\overline{b}$.

Упр.4. Построить ДНФ из конъюнкций ранга 3 и менее по матрицам Грея.



Упр.5. На каждой матрице Грея выделить достаточное множество максимальных интервалов и построить по ним ДНФ.



Упр.6. Построить ДНФ по формулам F_1 – F_6 и проверить правильность вычислений построением таблиц истинности.

$F_1 = x \to y\,\overline{z} \to x\,\overline{y}$,

$F_2 = x \oplus y \hookleftarrow (x \sim z)$,

$F_3 = y \downarrow (x \sim y\overline{z}) \hookrightarrow y \vee z$,

$F_4 = x\,y / (z \leftarrow \overline{y}) \vee (x\,\overline{t} \sim y)$,

$F_5 = y \to x\,t \to (y \oplus x) \to y\,\overline{t} \vee x\,y\,z$,

$F_6 = z\overline{t} \oplus \overline{y} \to (\overline{x} \downarrow \overline{z}\,t)$.

9. Сокращенная, кратчайшая, минимальная и безызбыточная ДНФ

9.1. Импликанты функции и сокращенная ДНФ

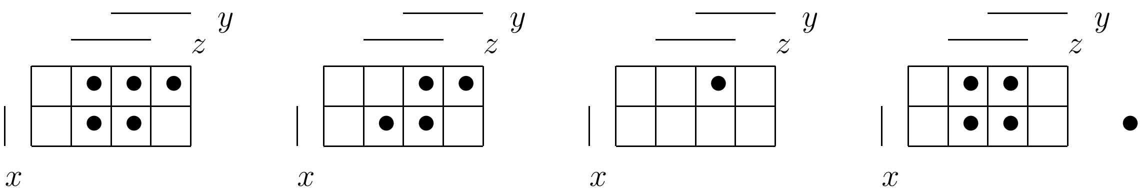
Рассмотрим булевы функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение. Булева функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ называется *импликантой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, если

$$g(x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1.$$

Так как $x \to y = 0$ только на наборе 10, то для того, чтобы функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ была импликантой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ достаточно, чтобы на всех тех наборах α, на которых $g(\alpha) = 1$, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ также принимала значение 1.

Примеры. Пусть функция $f(x, y, z)$ задана матрицей Грея (левая матрица на рисунке). Функция $g(x, y, z)$ и конъюнкции $K_1 = \overline{x}\, y\, z$, $K_2 = z$ (три правые матрицы) – ее импликанты.



$f(x, y, z)$ $\quad$ $g(x, y, z)$ $\quad$ $K_1 = \overline{x}\, y\, z$ $\quad$ $K_2 = z$

Очевидно, что если K – любая конъюнкция ДНФ$_f$, то K является импликантой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и задается допустимым для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ интервалом I_K.

Определение. Элементарная конъюнкция K называется *простой импликантой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, если она является импликантой этой функции, и не существует другой конъюнкции K', которая является импликантой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и поглощает конъюнкцию K.

Примеры. Рассмотрим функцию $f(x, y, z)$ из предыдущего примера. Конъюнкция $K_2 = z$ – простая импликанта данной функции, а конъюнция $K_1 = \overline{x}\, y\, z$ – импликанта, но не простая, так как она поглощается импликантой K_2. •

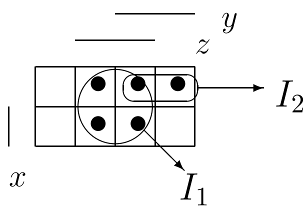
Другими словами, простая импликанта функции – это такая импликанта-конъюкция, которая не может быть упрощена выбрасыванием из нее переменных, то есть *неупрощаемая* конъюнкция. Это означает, что всякая простая импликанта K булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ задается максимальным для этой функции интервалом I_K.

Определение. ДНФ, состоящая из всех простых импликант булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, называется *сокращенной ДНФ* этой функции (или *СокрДНФ*$_f$).

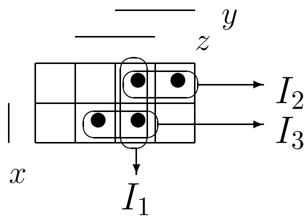
Из определения следует, что сокращенная ДНФ единственна для данной функции, то есть наряду с СовДНФ и СовКНФ она является еще одной канонической формой представления булевой функции.

В общем случае построение сокращенной ДНФ является довольно сложной задачей, которая будет рассмотрена нами далее. Однако для булевой функции небольшого числа аргументов, заданной матрицей Грея, найти сокращенную ДНФ (или, что то же самое, множество всех максимальных интервалов) довольно просто, и мы уже решали такую задачу для мажоритарной функции в подразделе 3.3, изучая интервальный способ задания булевой функции.

Примеры. Найдем сокращенные ДНФ функций из предыдущего примера: $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, и функции $h(x,y,z)$.

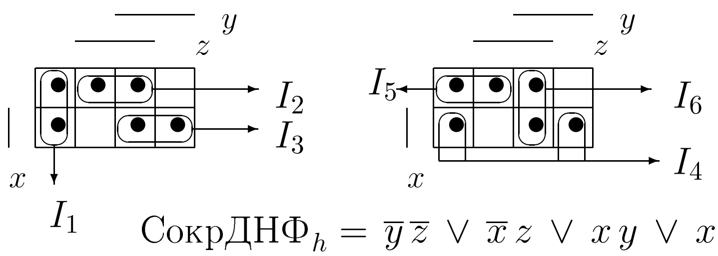


$$\text{СокрДНФ}_f = \underset{K_1}{z} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,y}.$$



$$\text{СокрДНФ}_g = \underset{K_1}{y\,z} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,y} \vee \underset{K_3}{x\,z}.$$

СокрДНФ$_h$ сложнее – она состоит из шести простых импликант, поэтому для наглядности изображена на двух матрицах Грея:



$$\text{СокрДНФ}_h = \underset{K_1}{\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,z} \vee \underset{K_3}{x\,y} \vee \underset{K_4}{x\,\overline{z}} \vee \underset{K_5}{\overline{x}\,\overline{y}} \vee \underset{K_6}{y\,z}. \qquad \bullet$$

Обратим внимание на то, что термин "сокращенная" относится не к длине ДНФ (она может быть большой, значительно больше длины совершенной ДНФ), а к рангам всех ее конъюнкций – ранги неупрощаемых конъюнкций (именно из них состоит сокращенная ДНФ) не могут быть уменьшены.

9.2. Минимальная и кратчайшая ДНФ

Определение. *Минимальной ДНФ* (*МинДНФ*$_f$) булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ называется ДНФ наименьшего ранга из всех ДНФ, задающих функцию $f(x_1,\dots,x_n)$.

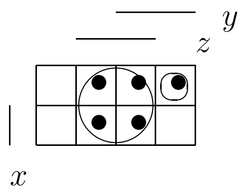
Определение. *Кратчайшей ДНФ* (*КратДНФ*$_f$) булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ называется ДНФ наименьшей длины из всех ДНФ, задающих функцию $f(x_1,\dots,x_n)$.

Методы поиска минимальной и кратчайшей ДНФ будут рассмотрены далее, пока же найдем их визуально по матрице Грея.

Примеры. Для функции $f(x, y, z)$ из предыдущего примера сокращенная ДНФ является и кратчайшей, и минимальной:

$$\text{МинДНФ}_f = \text{КратДНФ}_f = z \vee \overline{x}\, y \quad (\text{длины } 2, \text{ ранга } 3).$$

Однако эта функция имеет еще одну кратчайшую ДНФ:



$$\text{КратДНФ}'_f = z \vee \overline{x}\, y\, \overline{z} \ (\text{длины } 2, \text{ ранга } 4).$$

$\text{КратДНФ}'_f$ отличается от КратДНФ_f тем, что ее вторая конъюнкция не является простой импликантой, ее можно упростить вычеркиванием $\overline{z}$. •

Теорема о кратчайшей ДНФ. Существует кратчайшая ДНФ булевой функции, состоящая из простых импликант.

Доказательство (конструктивное). Рассмотрим произвольную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Докажем сначала вспомогательный результат. Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ – импликанта функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, тогда

$$g(x_1, \ldots, x_n) \vee f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Если $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, то обе части этого выражения равны $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если $g(x_1, \ldots, x_n) = 1$, то и $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (так как $g(x_1, \ldots, x_n)$ – импликанта функции $f(x_1, \ldots, x_n)$), а значит, обе части равны 1. Рассмотрим теперь КратДНФ_f функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\text{КратДНФ}_f = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l.$$

Если все ее конъюнкции являются простыми импликантами функции, то кратчайшая ДНФ, состоящая из простых импликант, найдена. Иначе пусть K_1 – не простая импликанта функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, тогда существует простая импликанта K'_1 такая, что $K_1 \vee K'_1 = K'_1$. По доказанному верно

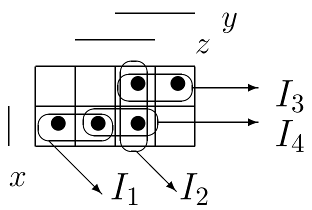
$$\begin{aligned}\text{КратДНФ}_f = K'_1 \vee \text{КратДНФ}_f = K'_1 \vee K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l = \\ = K'_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l = \text{КратДНФ}'_f.\end{aligned}$$

Длина $\text{КратДНФ}'_f$ равна длине КратДНФ_f. Повторив те же рассуждения для всех остальных конъюнкций $\text{КратДНФ}'_f$, мы получим кратчайшую ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, состоящую из простых импликант. •

Определение. Назовем *простой кратчайшей ДНФ* булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ ее кратчайшую ДНФ, состоящую из простых импликант.

Далее из всех кратчайших ДНФ нас будут интересовать только простые кратчайшие ДНФ, так как помимо минимальной длины они имеют и меньший ранг каждой конъюнкции. Однако называть и обозначать простые кратчайшие ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем по-прежнему – КратДНФ$_f$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y, z)$, которая имеет две простые кратчайшие ДНФ.



$$\begin{aligned} \text{КратДНФ}'_f &= \underset{K_1}{x\,\overline{y}} \vee \underset{K_2}{y\,z} \vee \underset{K_3}{\overline{x}\,y}, \\ \text{КратДНФ}''_f &= \underset{K_1}{x\,\overline{y}} \vee \underset{K_3}{\overline{x}\,y} \vee \underset{K_4}{x\,z}. \quad \bullet \end{aligned}$$

Для минимальных ДНФ справедливо более сильное утверждение, чем для кратчайших.

Теорема о минимальных ДНФ. Любая минимальная ДНФ булевой функции состоит из простых импликант.

Доказательство (от противного). Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что в ее минимальной ДНФ по крайней мере одна из конъюнкций не является простой импликантой функции.

$$\text{МинДНФ}_f = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l.$$

Пусть K_1 – не простая импликанта функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, тогда найдется ее простая импликанта K_1' такая, что $K_1 \vee K_1' = K_1'$. Как было показано при доказательстве предыдущей теоремы, если в МинДНФ$_f$ заменить конъюнкцию K_1 на конъюнкцию K_1', то получившаяся ДНФ$_f$ будет равносильна исходной. При этом ДНФ$_f$ будет иметь меньший ранг, чем МинДНФ$_f$, так как конъюнкция K_1' имеет меньший ранг, чем K_1, что противоречит тому, что МинДНФ$_f$ является минимальной ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. $\bullet$

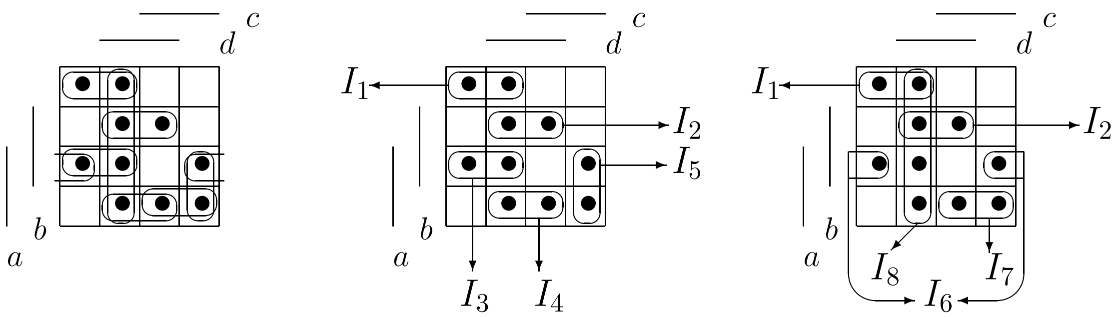
Итак, если булева функция задана матрицей Грея, то:

– для построения сокращенной ДНФ необходимо выделить все максимальные интервалы;

– для построения кратчайшей ДНФ – их достаточное множество минимальной мощности;

– для построения минимальной ДНФ – такое достаточное множество максимальных интервалов, сумма рангов которых минимальна.

Примеры. Найдем сокращенную, кратчайшие и минимальные ДНФ функции $f(a,b,c,d)$:



На левой матрице показано множество всех максимальных интервалов (их номера можно найти на двух других матрицах).

$$\text{СокрДНФ}_f = \underset{K_1}{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}} \vee \underset{K_2}{\overline{a}\,b\,d} \vee \underset{K_3}{a\,b\,\overline{c}} \vee \underset{K_4}{a\,\overline{b}\,d} \vee \underset{K_5}{a\,c\,\overline{d}} \vee \underset{K_6}{a\,b\,\overline{d}} \vee \underset{K_7}{a\,\overline{b}\,c} \vee \underset{K_8}{\overline{c}\,d}.$$

В центре показано достаточное множество из пяти максимальных интервалов $\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$. Никакие четыре из восьми максимальных интервалов не образуют достаточного множества, следовательно, ДНФ, состоящая из конъюнкций, заданных интервалами I_1 – I_5, является кратчайшей (длины 5, ранга 15):

$$\text{КратДНФ}_f = \underset{K_1}{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}} \vee \underset{K_2}{\overline{a}\,b\,d} \vee \underset{K_3}{a\,b\,\overline{c}} \vee \underset{K_4}{a\,\overline{b}\,d} \vee \underset{K_5}{a\,c\,\overline{d}}.$$

Справа показано достаточное множество из пяти максимальных интервалов $\{I_1, I_2, I_6, I_7, I_8\}$. Никакое другое достаточное множество не дает меньшей суммы рангов, следовательно, соответствующая ДНФ является минимальной (длины 5, ранга 14):

$$\text{МинДНФ}_f = \underset{K_1}{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}} \vee \underset{K_2}{\overline{a}\,b\,d} \vee \underset{K_6}{a\,b\,\overline{d}} \vee \underset{K_7}{a\,\overline{b}\,c} \vee \underset{K_8}{\overline{c}\,d}. \bullet$$

Обратим внимание, что в данном случае КратДНФ $_f$ не является минимальной, а МинДНФ$_f$ является кратчайшей. Других кратчайших и минимальных ДНФ эта функция не имеет (напомним, что мы рассматриваем только простые кратчайшие ДНФ).

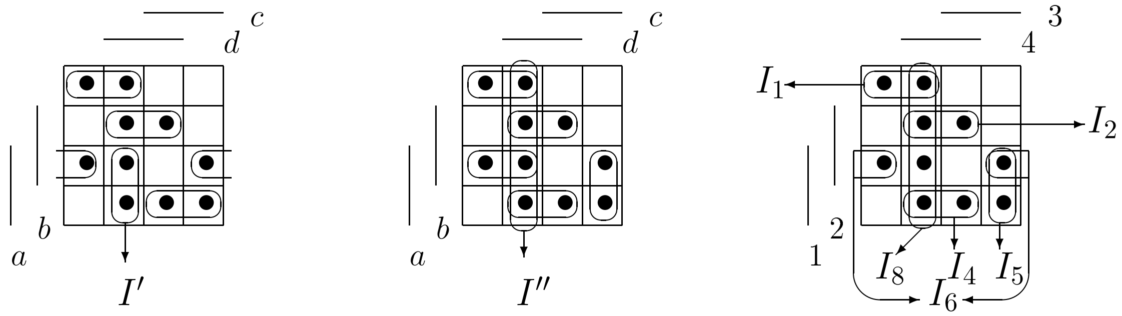
9.3. Безызбыточная ДНФ

Определение. ДНФ булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *безызбыточной ДНФ* (*БезДНФ*$_f$), если из нее нельзя удалить ни одной конъюнкции и ни одной переменной из конъюнкции так, чтобы она оставалась равносильной исходной ДНФ.

В частности, безызбыточной является любая минимальная и любая кратчайшая ДНФ (не простая кратчайшая ДНФ явно избыточна).

Методы поиска безызбыточных ДНФ будут рассмотрены далее. Здесь же мы найдем безызбыточную ДНФ по матрице Грея. Для этого выделим такое достаточное множество максимальных интервалов, чтобы при удалении любого интервала оно переставало быть достаточным.

Примеры. Рассмотрим функцию из предыдущего примера.



Слева выделено достаточное множество из пяти интервалов, ни один из которых нельзя удалить так, чтобы множество оставалось достаточным. Но интервал I' – не максимальный, так как он может быть расширен по первой компоненте, то есть из конъюнкции $K' = a\,\overline{c}\,d$ можно удалить переменную a. Поэтому ДНФ, состоящая из конъюнкций, заданных этими интервалами, не является безызбыточной, но если упростить K', то ДНФ станет безызбыточной и совпадет с МинДНФ из предыдущего примера.

В центре выделено достаточное множество из шести максимальных интервалов, которое является избыточным, так как интервал I'' может быть удален, а множество при этом останется достаточным. Поэтому ДНФ, состоящая из конъюнкций, заданных шестью выделенными интервалами, не является безызбыточной, но если удалить интервал I'', то ДНФ станет безызбыточной и совпадет с кратчайшей ДНФ из предыдущего примера.

Справа выделено достаточное множество I_f из шести максимальных интервалов (с номерами из предыдущего примера). Удаление любого из них приводит к тому, что множество перестает быть достаточным. Поэтому множество I_f задает безызбыточную ДНФ (длины 6, ранга 17):

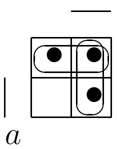
$$\text{БезДНФ}_f = \underset{K_1}{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}} \vee \underset{K_2}{\overline{a}\,b\,d} \vee \underset{K_4}{a\,\overline{b}\,d} \vee \underset{K_5}{a\,c\,\overline{d}} \vee \underset{K_6}{a\,b\,\overline{d}} \vee \underset{K_8}{\overline{c}\,d}. \quad \bullet$$

Сравнение длин и рангов ДНФ из двух последних примеров, показывает, что эта безызбыточная ДНФ не является ни кратчайшей, ни минимальной.

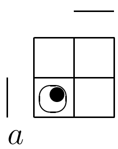
Обратим внимание, что все конъюнкции, задаваемые ядерными интервалами (в нашем примере это интервалы I_1 и I_2), входят во все безызбыточные ДНФ, в том числе во все кратчайшие и минимальные ДНФ.

9.4. Кратчайшие ДНФ элементарных функций

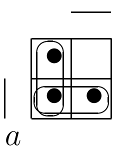
Рассмотрим элементарные булевы функции двух аргументов. Формулы для конъюнкции ab и дизъюнкции $a \vee b$ являются их кратчайшими ДНФ. Представим остальные элементарные функции матрицами Грея и найдем их кратчайшие ДНФ.



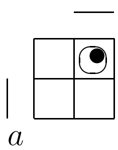
$a \to b = \overline{a} \vee b$



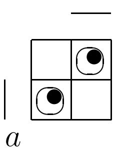
$a \hookrightarrow b = a\overline{b}$



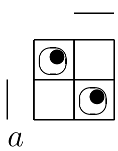
$a \leftarrow b = a \vee \overline{b}$



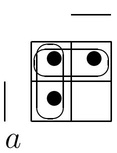
$a \hookleftarrow b = \overline{a}b$



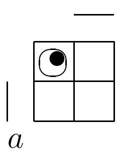
$a \oplus b = a\overline{b} \vee \overline{a}b$



$a \sim b = \overline{a}\overline{b} \vee ab$



$a/b = \overline{a} \vee \overline{b}$



$a \downarrow b = \overline{a}\overline{b}$

Кратчайшие ДНФ элементарных булевых функций можно использовать для получения ДНФ функций, заданных формулами. При этом запоминать кратчайшие ДНФ совсем не обязательно, так как они легко выводятся.

Пример. Пусть булева функция задана формулой

$$f(x, y, z) = (x \to yz)/(x \oplus z).$$

Подставим в формулу КратДНФ штриха Шеффера a/b при $a = (x \to yz)$ и $b = (x \oplus z)$:

$$f(x, y, z) = (x \to yz)/(x \oplus z) = \overline{(x \to yz)} \vee \overline{(x \oplus z)} =$$

[инверсию дизъюнкции с исключением заменим эквивалентностью, а инверсию импликации – не импликацией, подставим их кратчайшие ДНФ]

$$= (x \hookrightarrow yz) \vee (x \sim z) = (x\overline{yz}) \vee (\overline{x}\,\overline{z} \vee x\,z) =$$

[используем законы де Моргана, ассоциативности и дистрибутивности]

$$= x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee (\overline{x}\,\overline{z} \vee x\,z) = x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee x\,z =$$

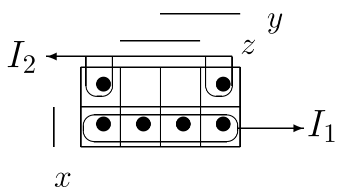
[упростим выражение на основании закона склеивания]

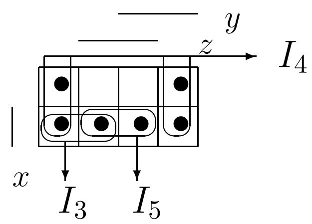
$$= x\overline{y} \vee \overline{z} \vee x\,z = \text{ДНФ}'_f. \quad \bullet$$

В разделе 8.5 для этой же функции разложением Шеннона была получена другая $ДНФ_f = x \vee \overline{x}\,\overline{z}$. В результате имеем

$$ДНФ_f = \underset{K_1}{x} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,\overline{z}} \quad \text{и} \quad ДНФ'_f = \underset{K_3}{x\,\overline{y}} \vee \underset{K_4}{\overline{z}} \vee \underset{K_5}{x\,z}.$$

Убедимся в том, что они равносильны, построив матрицы Грея:





9.5. Упражнения

Упр.1. Определить, являются ли конъюнкции K_1 – K_3 импликантами булевых функций f_1 – f_3 непосредственно по определению импликанты.

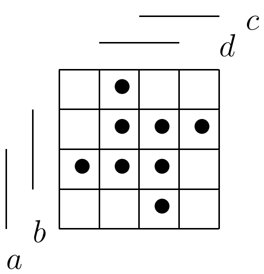
$K_1 = a\,\overline{b}\,c, \quad f_1(a, b, c, d, e) = (a\,(b \oplus c) \oplus d) \to e,$
$K_2 = a\,c\,d, \quad f_2(a, b, c, d, e) = a\,e \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \vee a\,c \vee b\,d\,e,$
$K_3 = \overline{c}\,e, \quad f_3(a, b, c, d, e) = ((a/b) \to \overline{e}) \downarrow (c\,d).$

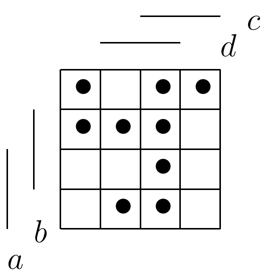
Упр.2. Из заданных множеств элементарных конъюнкций выделить простые импликанты функций f_1 – f_3, представив их матрицами Грея:

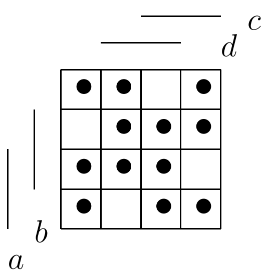
$\{a\overline{c},\ a\,b,\ a\,c, a\}, \quad f_1(a, b, c) = 00101111;$
$\{a\,\overline{b},\ b\,c,\ a\}, \quad f_2(a, b, c) = 01111110;$
$\{b\,\overline{d},\ b\,\overline{c},\ \overline{a}\,\overline{b}\,c\}, \quad f_3(a, b, c, d) = 1010111001011110.$

Найти все простые импликанты функций f_1 – f_3.

Упр.3. Найти сокращенную ДНФ, все кратчайшие ДНФ и все безызбыточные ДНФ следующих булевых функций:







Упр.4. Найти ДНФ булевых функций, заданных формулами $F_1 - F_6$, подстановкой кратчайших ДНФ элементарных булевых функций. Проверить правильность вычислений построением таблиц истинности или сравнением с результатами из упр. 6 подраздела 8.6.

$F_1 = x \to y\,\overline{z} \to x\,\overline{y},$
$F_2 = x \oplus y \hookleftarrow (x \sim z),$

$F_3 = y \downarrow (x \sim y\overline{z}) \hookrightarrow y \vee z,$
$F_4 = x\, y/(z \leftarrow \overline{y}) \vee (x\,\overline{t} \sim y),$
$F_5 = y \to x\, t \to (y \oplus x) \to y\,\overline{t} \vee x\, y\, z,$
$F_6 = z\overline{t} \oplus \overline{y} \to (\overline{x} \downarrow \overline{z}\, t).$

10. Контрольная работа 2

Тема контрольной работы: дизъюнктивная нормальная форма, совершенная, сокращенная и кратчайшая ДНФ.

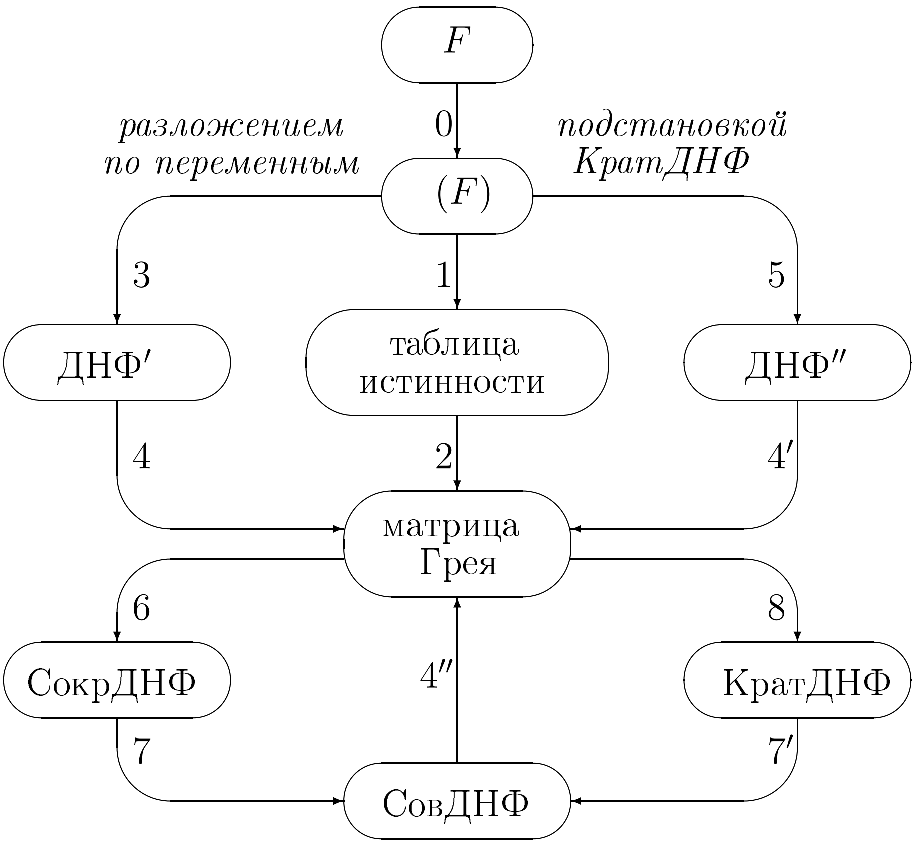


Схема контрольной работы (решение каждой из двенадцати предложенных здесь задач начинать с постановки задачи и делать вывод из сравнения матриц Грея, полученных разными способами; F обозначает формулу без лишних скобок, (F) – с недостающими скобками).

Задания на контрольную работу (формула F)

1) $x \to y \to (\overline{x} \oplus z) \to xy \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}$
2) $z \to y \to (z \sim x) \to yz \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
3) $x \to yz \to (\overline{x} \sim \overline{z}) \vee \overline{x}\,\overline{y}\, z$
4) $yz \leftarrow x \to (x \sim \overline{z}) \vee xy\overline{z}$
5) $z \sim y \to (x \downarrow yz) \vee x\,\overline{y}\, z$
6) $y \leftarrow x \to (\overline{z} \oplus x) \to xy \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
7) $yz \leftarrow x \to (z \oplus x) \vee x\,\overline{y}\, z$
8) $x \to yz \to (x \oplus z) \vee \overline{x}\,\overline{y}\, z$
9) $z \sim y \to (\overline{x} \leftarrow yz) \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
10) $x \leftarrow yz/(x \sim y) \vee xyz$

11) $xy \to z/(z \sim y) \vee xyz$
12) $\overline{z} \oplus y \to (x \downarrow yz) \vee xy\overline{z}$
13) $y \sim z \to (yz \to \overline{x}) \vee x\,y\,\overline{z}$
14) $y \leftarrow x \to (z \sim \overline{x}) \to xy \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}$
15) $x \leftarrow yz \to (\overline{x} \sim y) \vee xyz$
16) $x \leftarrow y\overline{z} \to (x \sim \overline{y}) \vee xy\overline{z}$
17) $z \oplus \overline{y} \to (yz \to \overline{x}) \vee x\overline{y}z$
18) $yz/\overline{x} \to (x \oplus y) \vee xyz$
19) $xy \to z/(\overline{z} \oplus y) \vee xyz$
20) $\overline{z} \oplus \overline{y} \to (x \downarrow \overline{y}z) \vee x\,y\,z$
21) $x \leftarrow yz/(x \oplus \overline{y}) \vee xyz$
22) $\overline{z} \oplus y \to (\overline{x} \leftarrow yz) \vee \overline{x}y\overline{z}$
23) $xy \to z/(\overline{z} \oplus y) \vee xyz$
24) $yz/\overline{x} \to (x \oplus y) \vee xyz$
25) $x/\overline{y} \to (x \oplus z) \to xy \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}$
26) $x/y \to (x \oplus z) \to xy \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
27) $yz \leftarrow x \to (z \oplus x) \vee x\,\overline{y}\,z$
28) $y \leftarrow x \to (z \sim \overline{x}) \to xy \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}$
29) $\overline{z} \oplus y \to (yz \to \overline{x}) \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
30) $yz \to x/(x \oplus \overline{z}) \vee xyz$

Пример. Задана формула

$$F = \overline{x} \to \overline{y}z/(y \sim \overline{z}) \vee x\overline{y}z.$$

0) *Расставим скобки в формуле* F. Возьмем в скобки конъюнкции, затем остальные подформулы слева направо.

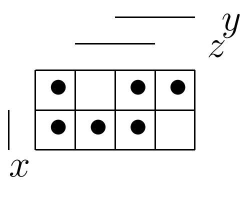
$$(F) = ((\overline{x} \to (\overline{y}z))/(y \sim \overline{z})) \vee (x\overline{y}z).$$

Далее при преобразовании формул для упрощения записи мы будем опускать скобки вокруг конъюнкций.

1) *Построим таблицу истинности функции по формуле* (F).

x	y	z	$((\overline{x}$	$\to$	$(\overline{y}z))$	$/$	$(y$	$\sim$	$\overline{z}))$	$\vee$	$(x\overline{y}z)$	f
0	0	0	1	0	0	1		0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0		1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1		1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1		0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1		0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0		1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0		1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1		0	0	1	0	1
			3	4	1	7		6	5	8	2	

2) *Построим матрицу Грея функции* $f(x, y, z)$ *по таблице истинности.* Отметим на матрице наборы, на которых $f(x, y, z)$=1.



3) *Получим ДНФ$'$ по формуле (F) разложением по переменным.* Применим к подформуле $(\overline{x} \to \overline{y}z)/(y \sim \overline{z})$ разложение Шеннона по переменной y (эта переменная встречается чаще x и так же часто, как z).

$$(F) = ((\overline{x} \to \overline{y}z)/(y \sim \overline{z})) \vee x\overline{y}z =$$
$$= y[(\overline{x} \to \overline{1}z)/(1 \sim \overline{z})] \vee \overline{y}[(\overline{x} \to \overline{0}z)/(0 \sim \overline{z})] \vee x\overline{y}z =$$

[применим свойства 0 и 1 для конъюнкции]

$$= y[(\overline{x} \to 0)/(1 \sim \overline{z})] \vee \overline{y}[(\overline{x} \to z)/(0 \sim \overline{z})] \vee x\overline{y}z =$$

[выведем свойства 0 и 1 для импликации и эквивалентности

a	$a \to 0$	$1 \sim a$	$0 \sim a$
0	1	0	1
1	0	1	0

$$a \to 0 = \overline{a}$$
$$1 \sim a = a$$
$$0 \sim a = \overline{a}$$

и упростим выражение]

$$= y[x/\overline{z}] \vee \overline{y}[(\overline{x} \to z)/z] \vee x\overline{y}z =$$

[разложим коэффициенты при y и $\overline{y}$ по переменной z]

$$= y\,[z\,(x/\overline{1}) \vee \overline{z}\,(x/\overline{0})] \vee \overline{y}\,[z\,((\overline{x} \to 1)/1) \vee \overline{z}\,((\overline{x} \to 0)/0)] \vee x\,\overline{y}\,z =$$
$$= y\,[z\,(x/0) \vee \overline{z}\,(x/1)] \vee \overline{y}\,[z\,((\overline{x} \to 1)/1) \vee \overline{z}\,((\overline{x} \to 0)/0)] \vee x\,\overline{y}\,z =$$

[выведем свойства 0 и 1 для импликации и штриха Шеффера

a	$a \to 1$	$a/0$	$a/1$
0	1	1	1
1	1	1	0

$$a \to 1 = 1$$
$$a/0 = 1$$
$$a/1 = \overline{a}$$

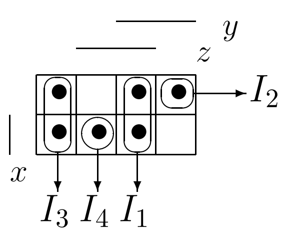
и упростим выражение]

$$= y\,[z1 \vee \overline{z}\,\overline{x}] \vee \overline{y}\,[z(1/1) \vee \overline{z}(x/0)] \vee x\,\overline{y}\,z =$$
$$= y\,[z \vee \overline{z}\,\overline{x}] \vee \overline{y}\,[z0 \vee \overline{z}1] \vee x\,\overline{y}\,z =$$

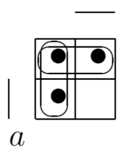
[используем свойства 0 и 1 и закон дистрибутивности]

$$= \underset{K_1}{y\,z} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,y\,\overline{z}} \vee \underset{K_3}{\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_4}{x\,\overline{y}\,z} = \text{ДНФ}'.$$

4) *Построим матрицу Грея по ДНФ$\,'$.*



5) *Получим ДНФ$''$ по формуле (F) подстановкой кратчайших ДНФ элементарных функций*. Заменим штрих Шеффера a/b кратчайшей ДНФ при $a = \overline{x} \to \overline{y}z$, $b = y \sim \overline{z}$:



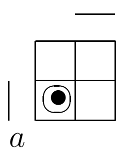
$a/b = \overline{a} \vee \overline{b}$

$$(F) = ((\overline{x} \to \overline{y}z)/(y \sim \overline{z})) \vee x\overline{y}z = (\overline{(\overline{x} \to \overline{y}z)} \vee \overline{(y \sim \overline{z})}) \vee x\overline{y}z =$$

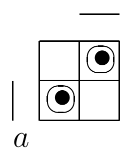
[заменим инверсию импликации на не импликацию и инверсию эквивалентности на дизъюнкцию с исключением]

$$= (\overline{x} \hookrightarrow \overline{y}z) \vee (y \oplus \overline{z}) \vee x\overline{y}z =$$

[найдем кратчайшие ДНФ не импликации и дизъюнкции с исключением



$a \hookrightarrow b = a\overline{b}$



$a \oplus b = a\,\overline{b} \vee \overline{a}\,b$

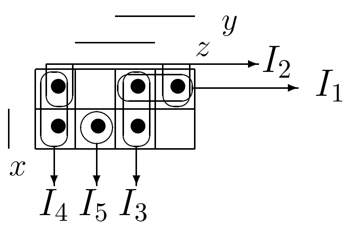
и подставим их в формулу]

$$= \overline{x}\,(\overline{\overline{y}\,z}) \vee (y\,z \vee \overline{y}\,\overline{z}) \vee x\,\overline{y}\,z =$$

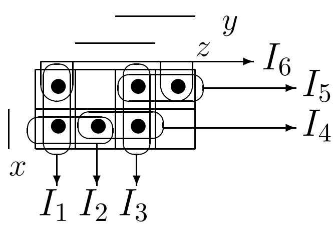
[применим законы де Моргана, дистрибутивности и ассоциативности]

$$= \overline{x}\,(y \vee \overline{z}) \vee y\,z \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z =$$
$$= \underset{K_1}{\overline{x}\,y} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,\overline{z}} \vee \underset{K_3}{y\,z} \vee \underset{K_4}{\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_5}{x\,\overline{y}\,z} = \text{ДНФ}''.$$

4$'$) *Построим матрицу Грея по ДНФ$\,''$.*



6) *Построим сокращенную ДНФ по матрице Грея*. Выделим все максимальные интервалы, они зададут конъюнкции сокращенной ДНФ.

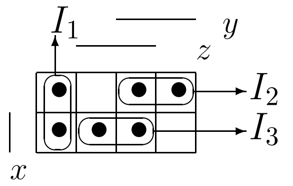


$$\text{СокрДНФ} = \underset{K_1}{\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_2}{x\,\overline{y}} \vee \underset{K_3}{y\,z} \vee \underset{K_4}{x\,z} \vee \underset{K_5}{\overline{x}\,y} \vee \underset{K_6}{\overline{x}\,\overline{z}}.$$

7) *Преобразуем сокращенную ДНФ в совершенную ДНФ.* Используем закон расклеивания неполных конъюнкций, подчеркнем конъюнкции, совпадающие с полученными ранее, и по закону идемпотентности удалим их:

$$\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y} \vee y\,z \vee x\,z \vee \overline{x}\,y \vee \overline{x}\,\overline{z} = x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee \underline{x\,\overline{y}\,\overline{z}} \vee$$
$$\vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee \underline{x\,y\,z} \vee \underline{x\,\overline{y}\,z} \vee \underline{\overline{x}\,y\,z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \underline{\overline{x}\,y\,\overline{z}} \vee \underline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}} =$$
$$= \underset{K_1}{x\,\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_3}{x\,\overline{y}\,z} \vee \underset{K_4}{x\,y\,z} \vee \underset{K_5}{\overline{x}\,y\,z} \vee \underset{K_6}{\overline{x}\,y\,\overline{z}} = \text{СовДНФ}.$$

8) *Построим кратчайшую ДНФ по матрице Грея.* Для этого выделим на матрице минимальное число максимальных интервалов, образующих достаточное множество, и по нему построим кратчайшую ДНФ.



$$\text{КратДНФ} = \underset{K_1}{\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,y} \vee \underset{K_3}{x\,z}.$$

7′) *Преобразуем кратчайшую ДНФ в совершенную ДНФ.*

$$\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y \vee x\,z = \underset{K_1}{x\,\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}} \vee \underset{K_5}{\overline{x}\,y\,z} \vee \underset{K_6}{\overline{x}\,y\,\overline{z}} \vee \underset{K_4}{x\,y\,z} \vee \underset{K_3}{x\,\overline{y}\,z} = \text{СовДНФ}.$$

Здесь конъюнкциям присвоены номера из совершенной ДНФ задачи 7), сравнение показывает, что совершенные ДНФ совпали.

4″) *Построим матрицу Грея по совершенной ДНФ.* Каждая полная конъюнкция задается точкой, которая на матрице обозначена номером конъюнкции в совершенной ДНФ.

y (над двумя правыми столбцами), z (над двумя средними столбцами), x (у нижней строки)

2		5	6
1	3	4	

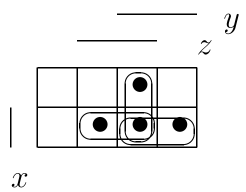
Вывод. Матрицы Грея, полученные при решении задач 2), 4), 4′), 4″), совпадают, следовательно, ошибок при выполнении контрольной работы не было (кроме, может быть, неправильной расстановки скобок). ●

11. Минимизация булевых функций.

В предыдущем разделе мы познакомились с различными типами ДНФ и научились их находить визуально по матрице Грея. Перейдем к изучению формальных методов построения сокращенной, безызбыточных, минимальных и кратчайших ДНФ булевой функции, заданной совершенной или произвольной ДНФ.

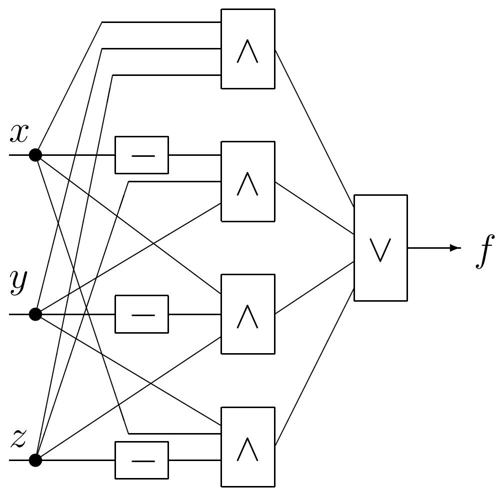
Интерес к кратчайшим и минимальным ДНФ основан на их оптимальности (по длине и рангу соответственно), которая положительно проявляется, по крайней мере, в следующих двух случаях. Во-первых, с оптимальными ДНФ легче оперировать, то есть вычислять значения функции, строить матрицу Грея и подставлять в другие формулы. Во-вторых, оптимальные ДНФ более предпочтительны для построения по ним схем из логических элементов: дизъюнкторов, конъюнкторов и инверторов.

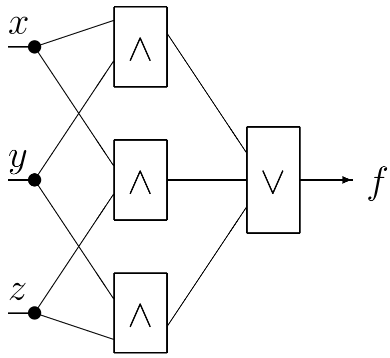
Пример. Рассмотрим мажоритарную функцию.



$$\text{СовДНФ}_f = \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z}$$
$$\text{КратДНФ}_f = x\,y \vee x\,z \vee y\,z$$

Нарисуем схемы по совершенной и кратчайшей ДНФ. Логические элементы изобразим в виде соответственно обозначенных прямоугольников.





Схема, построенная по кратчайшей ДНФ (справа), оказалась проще: она содержит меньше элементов. •

Интерес к сокращенной ДНФ вызван тем, что она является промежуточной при построении кратчайших, минимальных и безызбыточных ДНФ.

Безызбыточные ДНФ интересны как сами по себе, так как часто оказываются близкими к оптимальным, так и тем, что среди них находятся все минимальные и простые кратчайшие ДНФ.

Определение. *Минимизировать булеву функцию* это значит построить ее кратчайшую или минимальную ДНФ или все кратчайшие или все минимальные ДНФ (постановка задачи уточняется дополнительно).

Рассмотрим двухэтапный подход к минимизации булевой функции, основанный на теоремах о кратчайшей и минимальных ДНФ (подраздел 9.2), утверждающих, что все минимальные и хотя бы одна из кратчайших ДНФ состоят из простых импликант.

Первый этап: найдем все простые импликанты функции, то есть конъюнкции ее сокращенной ДНФ.

Второй этап: из сокращенной ДНФ выделим конъюнкции искомых ДНФ (кратчайших или минимальных).

Далее наряду с языком ДНФ будем использовать язык интервалов как более наглядный при визуальном решении и более удобный при компьютерной реализации алгоритмов. Напомним аналогию между рядом понятий (относящихся к одной и той же булевой функции) на упомянутых языках.

Язык ДНФ	**Язык интервалов**
полная конъюнкция-импликанта	точка
элементарная конъюнкция-импликанта	допустимый интервал
простая импликанта	максимальный интервал
ДНФ	достаточное множество интервалов
совершенная ДНФ	множество всех точек
сокращенная ДНФ	множество всех максимальных интервалов
кратчайшая ДНФ	достаточное множество из минимального числа максимальных интервалов
минимальная ДНФ	достаточное множество максимальных интервалов с минимальной суммой рангов
безызбыточная ДНФ	достаточное множество максимальных интервалов, которое при удалении любого интервала перестает быть достаточным

11.1. Получение сокращенной ДНФ – первый этап минимизации

Изучим два метода получения сокращенной ДНФ, но прежде вспомним законы поглощения и склеивания конъюнкций и добавим к ним закон неполного склеивания.

Закон поглощения: $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.

Закон склеивания: $xK \vee \overline{x}K = K$.

Закон неполного склеивания: $xK \vee \overline{x}K = xK \vee \overline{x}K \vee K$.

Закон обобщенного склеивания: $xK_1 \vee \overline{x}K_2 = xK_1 \vee \overline{x}K_2 \vee K_1K_2$.

Очевидно, что закон неполного склеивания следует из закона обобщенного склеивания (при $K_1 = K_2 = K$), а закон склеивания – из закона неполного склеивания (если в последнем выполнить поглощения конъюнкций).

Переведем эти законы на язык интервалов, используя интервалы и представляющие их троичные векторы как синонимы.

Закон поглощения говорит о том, что если объединение двух интервалов I и I' совпадает с I, то интервал I' содержится в интервале I (поглощается им). Значит, поглощаемый вектор должен получаться из поглощающего заменой некоторых его внутренних компонент (–) на внешние (0 или 1).

Пример. В паре троичных векторов $\begin{array}{l}\alpha = -\,1-0\,- \\ \beta = 0\;1-0\;1\end{array}$ вектор β поглощается вектором α. •

Закон склеивания объединяет два соседних интервала в один. Напомним, что соседние интервалы совпадают по номерам внешних компонент, но различаются по значению ровно одной из них (ортогональной). При склеивании получается интервал, который отличается от исходных лишь в ортогональной компоненте – она становится внутренней (операция склеивания соседних интервалов уже рассматривалась в подразделе 2.2.3).

Пример. Результатом склеивания соседних векторов α и β является вектор γ:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0\;0\;1-,\\ \beta &= 0\;1\;1-,\\ \gamma &= 0-1-.\ \bullet\end{aligned}$$

Закон неполного склеивания объединяет два соседних интервала и добавляет к результату исходные интервалы.

Пример. Результатом неполного склеивания векторов α и β из предыдущего примера являются три вектора: α, β и γ. •

Закон обобщенного склеивания объединяет соседние части двух смежных интервалов. Смежные интервалы могут не совпадать по номерам внешних компонент, но должны быть ортогональны ровно по одной из них. Результатом обобщенного склеивания являются три интервала: два исходных и третий, который строится следующим образом:

– компоненты, по которым исходные векторы совпадают, сохраняют свои значения;

– компоненты, которые в одном из векторов являются внешними, а в другом – внутренними, принимают значения внешних компонент;

– ортогональная компонента становится внутренней.

Пример. Результатом обобщенного склеивания смежных векторов α и β являются векторы α, β и γ:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0\;0\;1-0-1-,\\ \beta &= 1\;0\;1--0-1,\\ \gamma &= -\,0\;1-0\;0\;1\;1.\ \bullet\end{aligned}$$

11.1.1. Теорема Квайна и алгоритм Квайна–МакКласки

Первый метод построения сокращенной ДНФ булевой функции основан на следующей теореме.

Теорема (Квайна). Чтобы получить сокращенную ДНФ булевой функции из ее совершенной ДНФ, надо выполнить всевозможные неполные склеивания соседних конъюнкций, а затем всевозможные поглощения конъюнкций.

Опираясь на теорему Квайна, МакКласки сформулировал алгоритм, который организует построение сокращенной ДНФ более эффективно, чем это предложено в теореме.

Во-первых, конъюнкции в алгоритме представляются булевыми и троичными векторами, что делает вычисления более простыми и более приспособленными для компьютерной реализации.

Во-вторых, соседние векторы отличаются по весу (числу единичных компонент) ровно на единицу. Поэтому в алгоритме не проверяются на возможность склеивания векторы, чьи веса равны или отличаются более чем на единицу.

В-третьих, соседние вектора поглощаются результатом их склеивания. Поэтому отметка склеиваемых соседей (но не вычеркивание их, так как один и тот же вектор может быть соседом нескольким векторам) позволяет свести поглощение к выписыванию неотмеченных векторов.

Алгоритм Квайна–МакКласки.

Начало. Задана совершенная ДНФ булевой функции.

Шаг 1. Построим список всех точек функции (булевых векторов) и упорядочим их по неубыванию числа единиц – веса.

Шаг 2. Разобьем список на подмножества (классы) векторов одинакового веса. Обозначим через C_i класс векторов веса i.

Шаг 3. Выполним неполные склеивания всех соседних векторов классов C_i и C_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Участвующие в склеивании векторы (α и β) отметим, а полученные векторы (γ) занесем в новый список и приведем в нем подобные.

Шаг 4. Если новый список векторов не пуст, возвратимся с ним на шаг 2 (заметим, что троичные векторы списка оказываются уже упорядоченными по числу единиц).

Конец. Выписав из всех списков неотмеченные векторы, получим множество всех максимальных интервалов, оно задает сокращенную ДНФ исходной функции.

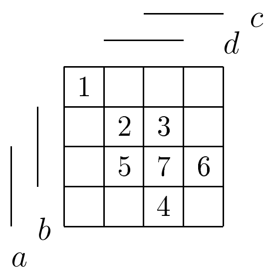
Пример. Продемонстрируем выполнение алгоритма, для наглядности сопровождая его шаги матрицами Грея.

Начало. Задана совершенная ДНФ булевой функции:

$$\text{СовДНФ} = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,b\,c\,d \vee a\,b\,\overline{c}\,d \vee a\,b\,c\,d \vee a\,b\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,c\,d.$$

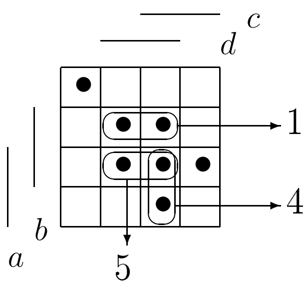
Шаги 1, 2. Совершенную ДНФ представляем списком точек, упорядочиваем их по весу и разбиваем на классы.

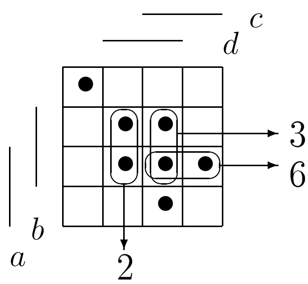
Список 0		Список 0 (упорядоченный)
0 0 0 0	C_0	1) 0 0 0 0
0 1 0 1	C_2	2) 0 1 0 1
0 1 1 1	C_3	3) 0 1 1 1
1 1 0 1		4) 1 0 1 1
1 1 1 1		5) 1 1 0 1
1 1 1 0		6) 1 1 1 0
1 0 1 1	C_4	7) 1 1 1 1



Шаг 3. Выполняя неполные склеивания векторов из классов C_2 и C_3, а затем C_3 и C_4, и отмечая в упорядоченном списке 0 склеиваемые векторы символом $*$, получаем список 1 – список интервалов, состоящих из двух точек. Справа в новом списке указаны номера векторов – участников склеивания. Интервалы списка изображены на двух матрицах Грея.

	Список 0		Список 1
C_0	1) 0 0 0 0		1) 0 1 – 1 (2,3)
C_2	2) 0 1 0 1	$*$	2) – 1 0 1 (2,5)
C_3	3) 0 1 1 1	$*$	3) – 1 1 1 (3,7)
	4) 1 0 1 1	$*$	4) 1 – 1 1 (4,7)
	5) 1 1 0 1	$*$	5) 1 1 – 1 (5,7)
	6) 1 1 1 0	$*$	6) 1 1 1 – (6,7)
C_4	7) 1 1 1 1	$*$	

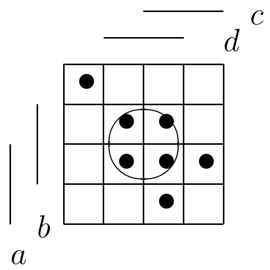




Шаг 4. Список 1 не пуст, поэтому идем на шаг 2 (так как склеивания производились в строгом порядке "сверху вниз", векторы в новом списке уже упорядочены по весу).

Шаги 2, 3. Разбиваем полученный список на классы C_2, C_3. Выполняя склеивания векторов из классов C_2 и C_3, получаем список интервалов, состоящих из четырех точек (список 2). Приводим в нем подобные.

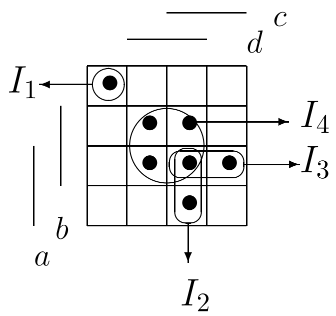
	Список 1		Список 2
C_2	1) 0 1 – 1 *		1) – 1 – 1 (1,5)
	2) – 1 0 1 *		~~2) – 1 – 1 (2,3)~~
C_3	3) – 1 1 1 *		
	4) 1 – 1 1		
	5) 1 1 – 1 *		
	6) 1 1 1 –		



Шаг 4. Список 2 не пуст, но дальнейшее склеивание невозможно, поэтому список 3 окажется пустым, идем на конец.

Конец. Выписываем из всех списков неотмеченные векторы. Они задают сокращенную ДНФ:

$I_1 = 0\ 0\ 0\ 0$
$I_2 = 1\ –\ 1\ 1$
$I_3 = 1\ 1\ 1\ –$
$I_4 = –\ 1\ –\ 1$



$$\text{СокрДНФ} = \underset{K_1}{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}} \vee \underset{K_2}{a\,c\,d} \vee \underset{K_3}{a\,b\,c} \vee \underset{K_4}{b\,d}. \ \bullet$$

11.1.2. Теорема Блейка и алгоритм Блейка–Порецкого

Второй метод построения сокращенной ДНФ булевой функции основан на следующей теореме.

Теорема (Блейка). Чтобы получить сокращенную ДНФ булевой функции из произвольной ДНФ, надо выполнить всевозможные обобщенные склеивания смежных конъюнкций, а затем всевозможные поглощения конъюнкций.

Рассмотрим основанный на теореме Блейка алгоритм, который организует поиск сокращенной ДНФ эффективнее, чем это предложено в теореме.

Алгоритм Блейка–Порецкого.

Начало. Задана произвольная ДНФ булевой функции.

Шаг 1. Построим список троичных векторов, представляющих конъюнкции ДНФ. Удалим из списка все векторы, поглощаемые другими. Если останется лишь один вектор, пойдем на конец. Иначе обозначим второй из оставшихся векторов через α.

Шаг 2. Найдем для вектора α очередной смежный вектор β среди векторов, расположенных в списке выше α. Если такого вектора β нет, то идем на шаг 5. Иначе обобщенно склеим α и β и полученный вектор γ припишем к списку последним.

Шаг 3. Если вектор γ поглощается хотя бы одним вектором из списка, то удалим γ (в частном случае γ может совпадать с одним из векторов списка, тогда удалим именно приписанный вектор γ, иначе произойдет "зацикливание"алгоритма, так как вектор γ будет вновь появляться в списке) и идем на шаг 2. Если вектор γ не поглощается, то удалим все векторы, поглощаемые им.

Шаг 4. Если вектор α не удален, то идем на шаг 2.

Шаг 5. Если вектор α был не последним в списке, то выберем в качестве нового α следующий по списку вектор и вернемся на шаг 2.

Конец. Неудаленные векторы задают сокращенную ДНФ функции.

Алгоритм Блейка-Порецкого отличается от рассмотренного ранее алгоритма Квайна-МакКласки прежде всего тем, что оперирует с произвольной ДНФ, в то время как алгоритм Квайна-МакКласки требует на входе совершенную ДНФ. Конечно, можно перейти от произвольной ДНФ к совершенной, как показано в подразделе 8.2, но она может быть очень длинной, и применение алгоритма Квайна-МакКласки станет неэффективным.

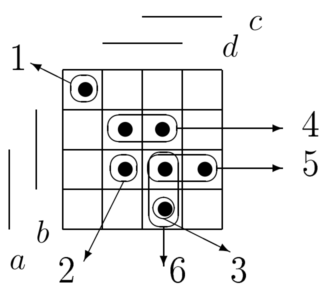
Пример. Продемонстрируем алгоритм Блейка-Порецкого, сопровождая его выполнение матрицами Грея.

Начало. Задана произвольная ДНФ функции из примера к алгоритму Квайна–МакКласки:

$$\text{ДНФ} = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,b\,\overline{c}\,d \vee a\,\overline{b}\,c\,d \vee \overline{a}\,b\,d \vee a\,b\,c \vee a\,c\,d.$$

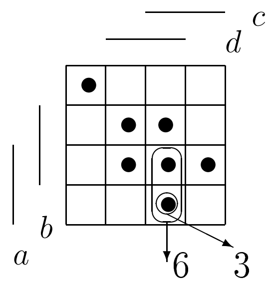
Шаг 1. ДНФ представляем списком векторов и нумеруем их.

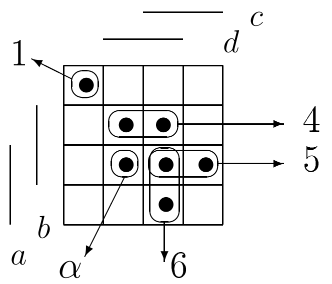
1) 0 0 0 0
2) 1 1 0 1
3) 1 0 1 1
4) 0 1 – 1
5) 1 1 1 –
6) 1 – 1 1



Вычеркиваем из списка третий вектор, поглощаемый шестым (левая из матриц на следующей странице демонстрирует это поглощение). Остальные векторы не поглощаются (правая матрица демонстрирует состояние списка). Выбираем в качестве α второй вектор.

1) 0 0 0 0
α $\boxed{2)\ 1\ 1\ 0\ 1}$
~~3) 1 0 1 1~~
4) 0 1 – 1
5) 1 1 1 –
6) 1 – 1 1



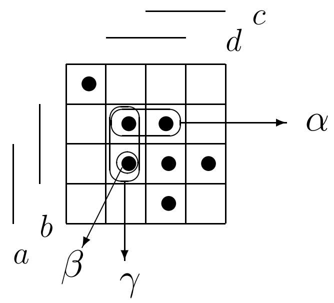


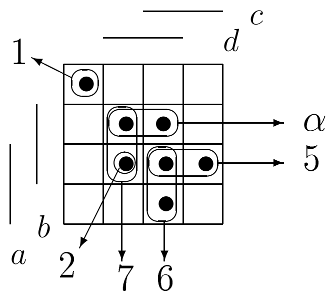
Шаг 2. Для α нет смежного вектора среди предыдущих, идем на шаг 5.

Шаг 5. Так как вектор α был не последним в списке, то в качестве нового α рассматриваем следующий по списку (четвертый) вектор (см. ниже) и возвращаемся на шаг 2.

Шаг 2. Вектор α не смежен первому вектору, но смежен второму (по первой компоненте). Обозначаем второй вектор через β. Обобщенно склеиваем α и β и записываем результат – вектор γ в список седьмым. Отмечаем, что он получен из четвертого и второго (левая нижняя матрица показывает склеивание).

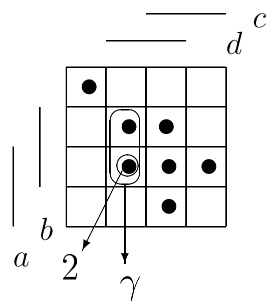
1) 0 0 0 0
β 2) 1 1 0 1
α $\boxed{4)\ 0\ 1\ -\ 1}$
5) 1 1 1 –
6) 1 – 1 1
γ 7) – 1 0 1 (4,2)

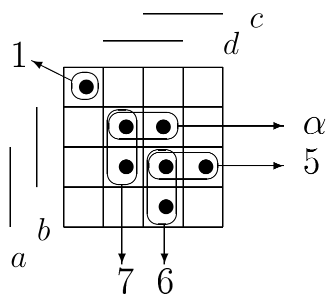




Шаг 3. Вектор γ не поглощается ни одним вектором, поэтому остается в списке. Удаляется второй вектор как поглощаемый вектором γ.

1) 0 0 0 0
~~2) 1 1 0 1~~
α $\boxed{4)\ 0\ 1\ -\ 1}$
5) 1 1 1 –
6) 1 – 1 1
7) – 1 0 1





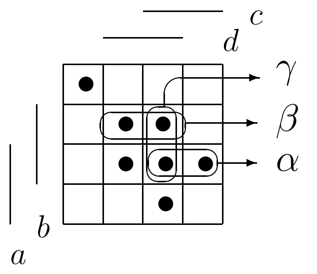
Шаг 4. Так как вектор α не был удален, идем на шаг 2.

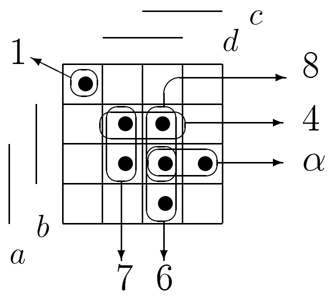
Шаги 2, 5. Так как для вектора α перебраны все предыдущие, то идем на шаг 5. Так как α был не последним в списке, то в качестве нового α рассматриваем пятый вектор (см. следующую страницу) и возвращаемся на шаг 2.

Шаги 2–4. Вектор α не смежен первому, но смежен четвертому вектору β. Обобщенно склеиваем α и β и записываем результат γ в список восьмым.

Вектор γ не поглощается ни одним вектором, поэтому остается в списке. Вектор γ не поглощает ни один вектор, в том числе α. Идем на шаг 2.

$1)\ 0\ 0\ 0\ 0$
$\beta\ 4)\ 0\ 1\ -\ 1$
$\alpha\ \boxed{5)\ 1\ 1\ 1\ -}$
$6)\ 1\ -\ 1\ 1$
$7)\ -\ 1\ 0\ 1$
$\gamma\ 8)\ -\ 1\ 1\ 1\ (5{,}4)$

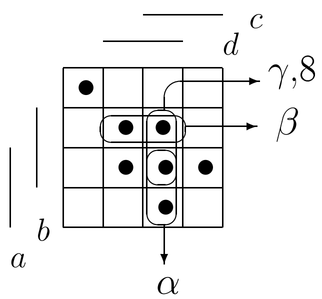


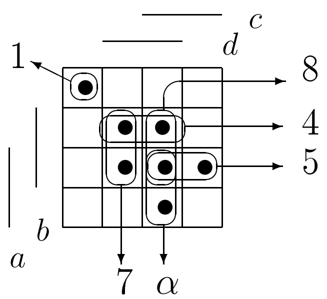


Шаги 2, 5. Для вектора α перебраны все предыдущие, поэтому новым α становится шестой вектор, идем на шаг 2.

Шаги 2–3. Вектор α смежен четвертому вектору β (см. ниже). Обобщенно склеиваем α и β и записываем результат γ в список девятым. Вектор γ совпадает с восьмым вектором, то есть поглощается им, поэтому тут же удаляем вектор γ из списка. Идем на шаг 2.

$1)\ 0\ 0\ 0\ 0$
$\beta\ 4)\ 0\ 1\ -\ 1$
$5)\ 1\ 1\ 1\ -$
$\alpha\ \boxed{6)\ 1\ -\ 1\ 1}$
$7)\ -\ 1\ 0\ 1$
$8)\ -\ 1\ 1\ 1$
$\cancel{\gamma\ 9)\ -\ 1\ 1\ 1}\ (6{,}4)$

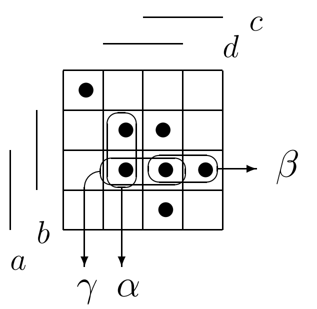


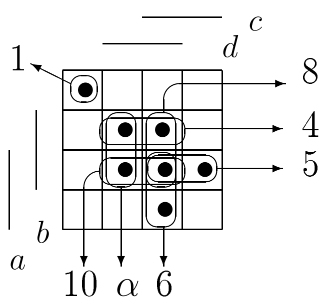


Шаги 2, 5. Для вектора α больше нет смежных среди предыдущих, поэтому новым α будет седьмой вектор, идем на шаг 2.

Шаги 2–4. Вектор α смежен пятому вектору β. Обобщенно склеиваем их и записываем результат γ в список десятым. Вектор γ не поглощается ни одним из предыдущими векторов списка и не поглощает ни один вектор, поэтому идем на шаг 2.

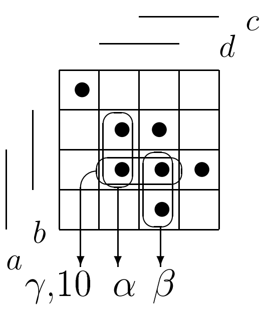
$1)\ 0\ 0\ 0\ 0$
$4)\ 0\ 1\ -\ 1$
$\beta\ 5)\ 1\ 1\ 1\ -$
$6)\ 1\ -\ 1\ 1$
$\alpha\ \boxed{7)\ -\ 1\ 0\ 1}$
$8)\ -\ 1\ 1\ 1$
$\gamma\ 10)\ 1\ 1\ -\ 1\ (7{,}5)$

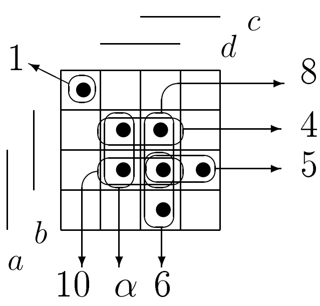




Шаги 2–3. Вектор α смежен шестому вектору β. Обобщенно склеиваем их и записываем результат γ в список одиннадцатым. Вектор γ совпадает с десятым вектором, поэтому тут же удаляем γ из списка. Идем на шаг 2.

1) 0 0 0 0
4) 0 1 − 1
5) 1 1 1 −
β 6) 1 − 1 1
α $\boxed{7)\ -\ 1\ 0\ 1}$
8) − 1 1 1
10) 1 1 − 1
γ ~~11) 1 1 − 1~~ (7,6)

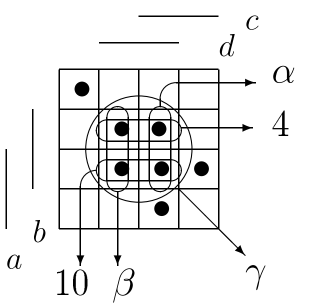


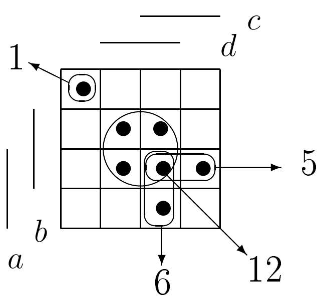


Шаги 2, 5. Так как для α перебраны все предыдущие, то в качестве нового α рассматриваем восьмой вектор и идем на шаг 2.

Шаги 2–4. Вектор α смежен только седьмому вектору β. Обобщенно склеиваем их и записываем результат γ в список двенадцатым. Вектор γ поглощает четвертый, седьмой, восьмой и десятый векторы, поэтому удаляем их из списка. Так как вектор α оказался вычеркнутым, идем на шаг 5.

1) 0 0 0 0
~~4) 0 1 − 1~~
5) 1 1 1 −
6) 1 − 1 1
β ~~7) − 1 0 1~~
α $\boxed{\cancel{8)\ -\ 1\ 1\ 1}}$
~~10) 1 1 − 1~~
γ 12) − 1 − 1 (8,7)





Шаг 5. Выбираем в качестве нового α двенадцатый вектор и идем на шаг 2.

Шаги 2, 5. Так как для двенадцатого вектора нет смежных среди предыдущих, то идем на шаг 5. Вектор был последним в списке, поэтому идем на конец.

Конец. Невычеркнутые из списка векторы задают сокращенную ДНФ:

$$\begin{array}{l} I_1 = 0\ 0\ 0\ 0 \\ I_2 = 1\ 1\ 1\ - \\ I_3 = 1\ -\ 1\ 1 \\ I_4 = -\ 1\ -\ 1 \end{array} \qquad \text{СокрДНФ} = \underbrace{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}}_{K_1} \vee \underbrace{a\,b\,c}_{K_2} \vee \underbrace{a\,c\,d}_{K_3} \vee \underbrace{b\,d}_{K_4}. \ \bullet$$

Результат совпадает с сокращенной ДНФ, полученной ранее (стр. 67) алгоритмом Квайна-МакКласки, и это естественно, так как сокращенная ДНФ булевой функции единственна.

Демонстрируя алгоритм на примере, мы многократно переписывали списки, незначительно изменяя их на каждом шаге. Покажем, как можно ограничиться одним списком, вычеркивая поглощаемые векторы и добавляя новые. Договоримся при вычеркивании вектора сообщать номер поглощающего его вектора.

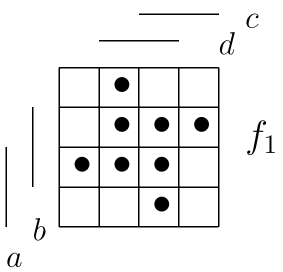
1) 0 0 0 0
~~2) 1 1 0 1~~ 7
~~3) 1 0 1 1~~ 6
~~4) 0 1 – 1~~ 12
5) 1 1 1 –
6) 1 – 1 1
~~7) – 1 0 1 (4,2)~~ 12
~~8) – 1 1 1 (5,4)~~ 12
~~9) – 1 1 1 (6,4)~~ 8
~~10) 1 1 – 1 (7,5)~~ 12
~~11) 1 1 – 1 (7,6)~~ 10
12) – 1 – 1 (8,7)

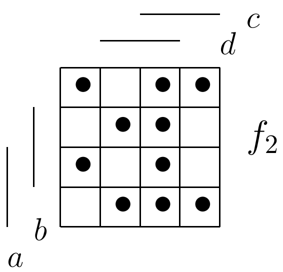
Оставшиеся в списке векторы образуют решение. •

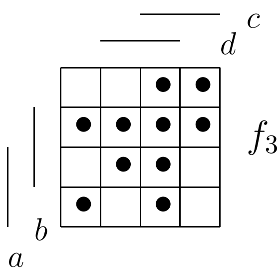
Итак, нами изучен первый этап минимизации булевых функций – построение сокращенной ДНФ:
– из совершенной ДНФ (алгоритм Квайна-МакКласки);
– из произвольной ДНФ (алгоритм Блейка–Порецкого).

11.1.3. Упражнения

Упр. 1. Получить сокращенные ДНФ функций алгоритмом Квайна-МакКласки и сравнить их с сокращенными ДНФ, найденными визуально.







$$f_4(a,b,c,d) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,b\,c\,d \vee \overline{a}\,b\,\overline{c}\,\overline{d} \vee$$
$$\vee\, \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d \vee a\,b\,\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,b\,c\,d \vee a\,\overline{b}\,c\,d \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d},$$
$$f_5(a,b,c,d) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,b\,c\,d \vee \overline{a}\,b\,c\,\overline{d} \vee a\,b\,\overline{c}\,d \vee$$
$$\vee\, a\,b\,c\,d \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,d \vee a\,\overline{b}\,c\,\overline{d},$$
$$f_6(a,b,c,d) = \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d \vee a\,\overline{b}\,c\,d \vee a\,b\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,d \vee$$
$$\vee\, a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,b\,\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,b\,c\,d \vee \overline{a}\,b\,c\,d.$$

Упр. 2. Получить сокращенные ДНФ функций алгоритмом Блейка-Порецкого и сравнить их с сокращенными ДНФ, найденными визуально.

$f_1(a,b,c,d) = \overline{a}\,b\,\overline{c} \vee a\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,b\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,c\,d \vee b\,c\,d,$

$f_2(a,b,c,d) = \overline{a}\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,b\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,d \vee a\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c,$

$f_3(a,b,c,d) = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,b\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}\,b\,\overline{c}.$

Упр. 3. Получить сокращенные ДНФ функций алгоритмами Квайна-МакКласки и Блейка-Порецкого и сравнить результаты (ДНФ для второго алгоритма найти любым способом). Проверить, представляют ли сокращенные ДНФ исходные функции, построением таблиц истинности.

$f_1(x,y,z,t) = x \oplus y\,\overline{t} \to (x \hookleftarrow z) \to \overline{x}\,\overline{t} \oplus \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t;$

$f_2(x,y,z,t) = x\,y\,z \vee (y \to x\,t \to (y \oplus x) \to y\,\overline{t});$

$f_3(x,y,z,t) = x\,t \downarrow y \to (x\,t \sim \overline{z}) \to x\,\overline{t} \vee x\,y\,z.$

11.2. Построение таблицы Квайна и поиск ее покрытий – второй этап минимизации

Решая задачу минимизации булевых функций и научившись на первом этапе строить сокращенную ДНФ (множество всех максимальных интервалов), перейдем к рассмотрению второго этапа. На этом этапе из сокращенной ДНФ будем получать кратчайшие или минимальные ДНФ (из множества всех максимальных интервалов будем выбирать достаточные подмножества либо из минимального числа интервалов, либо из интервалов с минимальной суммой рангов).

11.2.1. Таблица Квайна

Определение. *Булевой матрицей* назовем матрицу, элементами которой являются булевы константы (другими словами, строками и столбцами которой являются булевы векторы).

Прежде всего рассмотрим, как в явном виде показать, используя булеву матрицу, из каких точек функции состоят ее максимальные интервалы.

Определение. *Таблицей Квайна* булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ назовем булеву матрицу, строкам которой поставим в соответствие конъюнкции сокращенной ДНФ$_f$ (все максимальные интервалы функции), а столбцам – конъюнкции совершенной ДНФ$_f$ (все точки). Элемент матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, положим равным единице тогда и только тогда, когда i-я конъюнкция сокращенной ДНФ поглощает j-ю конъюнкцию совершенной ДНФ (i-й максимальный интервал функции содержит ее j-ю точку).

Пример. Рассмотрим булеву функцию $f(a,b,c,d)$, для которой в подразделах 9.2–9.3 визуально были найдены различные ДНФ. Построим для нее таблицу Квайна. Точки функции пронумеруем на левой матрице, а все максимальные интервалы изобразим на остальных двух матрицах.

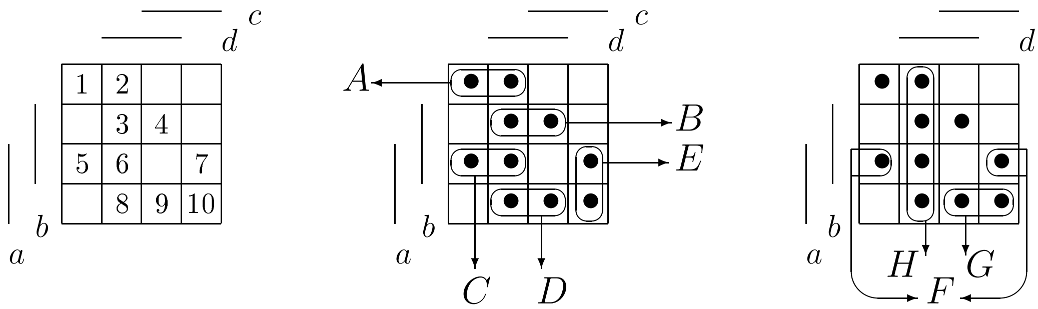


Таблица Квайна данной функции имеет следующий вид (нули в ней для наглядности опущены):

	0000	0001	0101	0111	1100	1101	1110	1001	1011	1010	
$000-$	1	1									A
$01-1$			1	1							B
$110-$					1	1					C
$10-1$								1	1		D
$1-10$							1			1	E
$11-0$					1		1				F
$101-$									1	1	G
$--01$		1	1			1		1			H
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Обозначим полученную таблицу через Q, и будем демонстрировать на ней материал следующих разделов. •

11.2.2. Покрытия таблицы Квайна и ДНФ

Определение. Будем говорить, что строка таблицы Квайна *покрывает* столбец, если она содержит единицу в этом столбце.

Пример. Строка H покрывает второй, третий, шестой и восьмой столбцы таблицы Q. •

Определение. *Покрытием* таблицы Квайна назовем подмножество таких ее строк, которые в совокупности покрывают все столбцы таблицы.

Примеры. Покрытиями таблицы Q являются: все восемь ее строк; семь строк: A, B, C, D, F, G, H, первые шесть строк; первые пять строк; однако не удается найти ни одного четырехстрочного покрытия. •

Любое покрытие таблицы Квайна функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ задает ее достаточное подмножество максимальных интервалов. Другими словами, *любое покрытие таблицы Квайна задает ДНФ$_f$*. В частности, покрытие, состоящее из всех строк таблицы, задает сокращенную ДНФ.

Определение. *Длиной покрытия* назовем количество строк, образующих покрытие.

Примеры. Длины покрытий из предыдущего примера равны соответственно 8, 7, 6 и 5. •

Определение. Покрытие таблицы Квайна называется *безызбыточным*, если при удалении из него хотя бы одной строки оно перестает быть покрытием.

Примеры. Множество из первых шести строк таблицы Квайна Q не является безызбыточным покрытием, поскольку при удалении шестой строки оно остается покрытием. Первые пять строк образуют безызбыточное покрытие, и оно не единственное – шесть строк A, B, C, D, F, G тоже образуют безызбыточное покрытие. •

В общем случае таблица Квайна функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет несколько безызбыточных покрытий, и *любое безызбыточное покрытие задает безызбыточную ДНФ$_f$*, так как из нее нельзя выбросить ни одной конъюнкции (из безызбыточного покрытия нельзя выбросить ни одной строки) и ни одной буквы из какой-либо конъюнкции (строкам приписаны простые импликанты) так, чтобы полученная ДНФ оставалась равносильной исходной ДНФ.

Определение. *Кратчайшим* покрытием таблицы Квайна назовем покрытие минимальной длины.

Примеры. Первые пять строк таблицы Квайна Q, а также пять строк A, B, F, G, H образуют ее кратчайшие покрытия. •

Очевидно, что *каждое кратчайшее покрытие таблицы Квайна функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ задает кратчайшую ДНФ$_f$.*

Определение. *Рангом строки* таблицы Квайна назовем ранг приписанной ей простой импликанты.

Пример. Ранг строки H (конъюнкции $\overline{c}\, d$) таблицы Квайна Q равен двум, ранги остальных строк равны трем. •

Определение. *Минимальным* покрытием таблицы Квайна назовем покрытие с минимальной суммой рангов строк.

Пример. Строки A, B, F, G, H таблицы Квайна Q образуют минимальное покрытие, так как сумма их рангов равна 14, а все остальные покрытия имеют больший суммарный ранг строк. •

Нетрудно видеть, что *минимальное покрытие таблицы Квайна функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ задает минимальную ДНФ$_f$.*

Таким образом, задача минимизации булевой функции решается построением таблицы Квайна и поиском ее кратчайших или минимальных покрытий (в зависимости от постановки задачи).

Отвлечемся на время от задачи минимизации и покажем, что совсем иные задачи сводятся к поиску тех или иных покрытий булевых матриц.

Задача 1. Пусть в некотором устройстве возможны 10 неисправностей, и пусть имеется 8 тестов, каждый из которых обнаруживает свое подмножество неисправностей:

Тесты:	A	B	C	D	E	F	G	H
Неисправности:	1, 2	3, 4	5, 6	8, 9	7, 10	5, 7	9, 10	2, 3, 6, 8

Требуется подобрать кратчайший полный тест, то есть набор из минимального числа тестов, обнаруживающих все неисправности.

Построим матрицу, строкам которой припишем тесты, а столбцам – неисправности. Элемент матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, положим равным единице тогда и только тогда, когда i-й тест обнаруживает j-ю неисправность.

1	1									A
		1	1							B
				1	1					C
							1	1		D
						1			1	E
				1		1				F
								1	1	G
	1	1			1		1			H
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Матрица полностью совпадает с таблицей Q, а ее кратчайшее покрытие является решением задачи о кратчайшем полном тесте.

Пусть теперь проверка каждого теста требует определенных временных затрат, например, тест H требует двух единиц времени, а остальные – трех. Тогда имеет смысл искать минимальный полный тест, то есть набор тестов, который обнаруживает все неисправности за минимальное время. Решение задачи сводится к поиску минимального покрытия той же матрицы, если рангом строки считать временные затраты на проверку теста.

Задача 2. Имеется группа переводчиков с иностранных языков на русский. О каждом переводчике известно, какими иностранными языками он владеет. Требуется выбрать минимальное число переводчиков, знающих в совокупности все языки. И снова мы приходим к мысли о построении булевой матрицы и поиске ее кратчайшего покрытия.

Учитывая это, будем абстрагироваться от задач, породивших матрицы, и говорить лишь об их строках, столбцах и элементах.

11.2.3. Поиск всех безызбыточных покрытий

Очевидно, что все кратчайшие и минимальные покрытия матрицы безызбыточны. Поэтому поиск всех таких покрытий можно свести к построению всех безызбыточных покрытий и выделению из них кратчайших и минимальных. Тривиальный метод поиска всех безызбыточных покрытий состоит в переборе и анализе всех подмножеств строк матрицы. Однако, число перебираемых подмножеств велико (2^m, где m – число строк матрицы), поэтому остановимся на другом, более эффективном методе.

Будем предполагать, что матрица имеет покрытие, то есть не содержит столбцов, целиком состоящих из нулей (для таблицы Квайна это условие всегда выполняется), и прежде всего попытаемся упростить матрицу.

Определение. Столбец булевой матрицы назовем *ядерным*, если он содержит ровно одну единицу. Строку булевой матрицы назовем *ядерной*, если она покрывает ядерный столбец.

Пример. В матрице Q на странице 74 ядерными являются столбцы 1, 4 и строки A, B. •

Очевидно, что ядерные строки входят в любое покрытие, что дает возможность сформулировать следующее правило упрощения матрицы.

Правило ядерной строки. Если в матрице есть ядерная строка, то она включается в любое искомое покрытие и удаляется из матрицы вместе со всеми столбцами, которые ядерная строка покрывает. Удаляются также пустые строки (состоящие из нулей), которые при этом могут появиться.

Пример. Применим правило ядерной строки дважды к знакомой нам матрице Q. В результате строки A и B будут включены в покрытие, а матрица упростится.

$$Q' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
1 & 1 & & & & & C \\ \hline
 & & & 1 & 1 & & D \\ \hline
 & & 1 & & & 1 & E \\ \hline
1 & & 1 & & & & F \\ \hline
 & & & & 1 & 1 & G \\ \hline
 & 1 & & 1 & & & H \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} & \multicolumn{1}{c}{9} & \multicolumn{1}{c}{10} &
\end{array} \quad \bullet$$

В частности, если все столбцы матрицы покрываются ядерными строками, то эти строки образуют единственное ее безызбыточное покрытие.

Упростив булеву матрицу по правилу ядерной строки, и оставив в ней по одному из одинаковых столбцов (что, очевидно, не повлияет на решение), продолжим поиск всех безызбыточных покрытий упрощенной матрицы.

Припишем ее строкам булевы переменные $s_1, \ldots, s_m$, обозначим через S произвольное подмножество строк и положим $s_i = 1$, если и только если i-я строка принадлежит множеству S, то есть будем задавать подмножество S строк матрицы набором σ значений переменных $s_1, \ldots, s_m$.

Определение. Булеву функцию $p(s_1, \ldots, s_m)$, принимающую значение единицы на тех и только тех наборах σ, которые задают покрытия матрицы, назовем *функцией покрытия матрицы*.

Пример. Зададим формулой функцию покрытия предыдущей матрицы Q', исходя из следующих рассуждений.

Первый столбец покрывается подмножеством строк S, если и только если в S входят:
– либо строка C (переменная $C = 1$),
– либо строка F (переменная $F = 1$),
– либо обе строки одновременно ($C = 1$ и $F = 1$),
то есть если и только если $C \vee F = 1$.

Аналогично второй столбец покрывается подмножеством S, если и только если $C \vee H = 1$, и так далее для всех столбцов.

Все столбцы покрываются подмножеством строк S, то есть $p(\sigma) = 1$, если и только если одновременно выполняются все перечисленные условия, то есть $(C \vee F)(C \vee H) \ldots = 1$. Это означает, что функцию покрытия матрицы Q' можно задать формулой:

$$p(C, \ldots, H) = (C \vee F)(C \vee H)(E \vee F)(D \vee H)(D \vee G)(E \vee G). \bullet$$

В общем случае для матрицы с k столбцами функция покрытия задается конъюнкцией вида $D_1 \cdot \ldots \cdot D_k$, где D_j – дизъюнкция всех переменных, приписанных строкам с единицей в j-м столбце. Будем называть полученную формулу *конъюнктивной нормальной формой* (*КНФ*) функции покрытия:

$$p(s_1, \ldots, s_m) = D_1 \cdot \ldots \cdot D_k = \text{КНФ}_p.$$

Так как каждое слагаемое дизъюнкции D_j задает безызбыточное покрытие j-го столбца, то, перемножив дизъюнкции D_i и D_j, мы получим все безызбыточные покрытия столбцов i и j (но не только безызбыточные).

Пример. Перемножим первые две дизъюнкции предыдущего примера:

$$(C \vee F)(C \vee H) = C \vee CH \vee CF \vee FH.$$

Получены не только все безызбыточные покрытия первых двух столбцов: $\{C\}$ и $\{F, H\}$, но и покрытия $\{C, H\}$ и $\{C, F\}$, которые содержат строку C, поэтому не являются безызбыточными (это эквивалентно тому, что конъюнкции CH и CF поглощаются конъюнкцией C). $\bullet$

Обобщая приведенные рассуждения на все столбцы булевой матрицы, приходим к выводу, что для построения всех безызбыточных покрытий матрицы надо перемножать все дизъюнкции КНФ функции покрытия, выполняя при этом все возможные поглощения. В результате будет получена ДНФ, конъюнкции которой зададут все безызбыточные покрытия.

Алгоритм поиска всех безызбыточных покрытий булевой матрицы (основан на построении КНФ функции покрытия и преобразовании ее в ДНФ с выполнением поглощений).

Начало. Задана булева матрица.

Шаг 1. Применим к матрице правило ядерной строки многократно, пока это возможно. Если матрица стала пустой, то идем на конец. Иначе из равных столбцов оставим по одному, пронумеруем столбцы упрощенной матрицы и припишем строкам булевы переменные $s_1, \ldots, s_m$.

Шаг 2. Выберем очередной (j-й) столбец матрицы. Если столбцы исчерпаны, идем на шаг 3. Иначе построим дизъюнкцию D_j переменных, приписанных строкам, покрывающим j-й столбец, и идем на шаг 2.

Шаг 3. Из полученных дизъюнкций построим конъюнктивную нормальную форму $D_1 \cdot \ldots \cdot D_k$.

Шаг 4. Раскроем скобки в КНФ, выполняя поглощения конъюнкций. Получим ДНФ$=K_1 \vee \ldots \vee K_t$.

Конец. Конъюнкции $K_1, \ldots, K_t$ задают все безызбыточные покрытия упрощенной матрицы. Добавив к каждому из них ядерные строки (выделенные на первом шаге), получим все безызбыточные покрытия исходной матрицы.

Пример. Продемонстрируем алгоритм на знакомой нам булевой матрице Q со страницы 74. Для нее уже выполнен шаг 1 (страница 78): строки A и B выделены как ядерные и удалены вместе с первыми четырьмя столбцами. В результате (страница 79) получена упрощенная матрица и построена КНФ функции ее покрытия (шаг 2 повторен 6 раз и выполнен шаг 3):

1	1					C
			1	1		D
		1			1	E
1		1				F
				1	1	G
	1		1			H
5	6	7	8	9	10	

$$\text{КНФ} = (C \vee F)(C \vee H)(E \vee F)(D \vee H)(D \vee G)(E \vee G).$$

Шаг 4. Перемножив скобки в КНФ (удобнее перемножать первую на вторую, третью на шестую и четвертую на пятую скобки) и выполнив поглощения, получим ДНФ.

$$(C \vee FH)(E \vee FG)(D \vee GH) = (CE \vee CFG \vee EFH \vee FGH)(D \vee GH) =$$
$$= CDE \vee CEGH \vee CDFG \vee CFGH \vee$$
$$\vee DEFH \vee EFGH \vee DFGH \vee FGH =$$
$$= CDE \vee CEGH \vee CDFG \vee DEFH \vee FGH = \text{ДНФ}.$$

Конец. Конъюнкции ДНФ задают все безызбыточные покрытия упрощенной матрицы:

$\{C, D, E\}$, $\{C, E, G, H\}$, $\{C, D, F, G\}$, $\{D, E, F, H\}$, и $\{F, G, H\}$.

Добавив к каждому из них ядерные строки A и B, выделенные на первом шаге, получим все безызбыточные покрытия исходной матрицы (два покрытия длины 5 и три покрытия длины 6):

$\{A, B, C, D, E\}$, $\{A, B, F, G, H\}$

$\{A, B, C, E, G, H\}$, $\{A, B, C, D, F, G\}$, $\{A, B, D, E, F, H\}$. •

11.2.4. Поиск минимальных и кратчайших покрытий

Зная все безызбыточные покрытия матрицы, выбрать из них кратчайшие или минимальные не составляет труда.

Пример. Из пяти найденных в предыдущем примере безызбыточных покрытий матрицы Q только два являются кратчайшими: $\{A, B, C, D, E\}$ и $\{A, B, F, G, H\}$, а минимальным лишь одно – $\{A, B, F, G, H\}$, так как ранг строки H равен двум, а ранги остальных строк – трем. Эти покрытия задают те же две кратчайшие и одну минимальную ДНФ функции $f(a, b, c, d)$, которые были получены в подразделе 9.2 визуально. •

Однако поиск всех безызбыточных покрытий булевой матрицы становится излишне трудоемким, если требуется найти одно кратчайшее покрытие. В этом случае можно ограничиться поиском только некоторых безызбыточных покрытий, лишь бы среди них содержалось хотя бы одно кратчайшее. Тогда применимы следующие два правила упрощения матрицы.

Правило строки-предшественницы. Если в булевой матрице есть такие строки α и β, что $\alpha \preceq \beta$, то строка-предшественница α удаляется из матрицы (при этом кратчайшее покрытие не теряется, так как в любом покрытии строку α можно заменить строкой β, и оно останется покрытием).

Правило столбца-последователя. Если в булевой матрице есть такие столбцы γ и δ, что $\gamma \preceq \delta$, то столбец-последователь δ удаляется из матрицы (так как любое покрытие столбца γ одновременно покрывает столбец δ).

Заметим, что удаление столбцов-последователей может привести к появлению строк-предшественниц, и наоборот, поэтому эти два правила стоит выполнять "циклически" друг за другом.

Определение. Булеву матрицу, не содержащую ни ядерных строк, ни строк-предшественниц, ни столбцов-последователей, назовем *циклическим остатком.*

Примеры к правилам и определению циклического остатка будут приведены чуть позже, на страницах 82–83. ●

Алгоритм поиска одного кратчайшего покрытия булевой матрицы (основан на построении циклического остатка и поиске всех его безызбыточных покрытий).

Начало. Задана булева матрица.

Шаг 1. Если в матрице есть однострочное покрытие, то включим его в искомое покрытие, идем на конец.

Шаг 2. Применим правило ядерной строки. Если ядерная строка обнаружилась, идем на шаг 1.

Шаг 3. Применим правило строки-предшественницы. Если такая строка обнаружилась, идем на шаг 2.

Шаг 4. Применим правило столбца-последователя. Если такой столбец обнаружился, идем на шаг 3.

Шаг 5. Построим КНФ функции покрытия циклического остатка и преобразуем КНФ в ДНФ, раскрывая скобки и выполняя поглощения.

Шаг 6. Конъюнкция минимального ранга полученной ДНФ задает кратчайшее покрытие циклического остатка. Добавим к этому покрытию ядерные строки, выделенные на шаге 2.

Конец. Получено кратчайшее покрытие исходной матрицы.

Примеры. Все та же матрица Q со страницы 74 сократилась до циклического остатка сразу после удаления ядерных строк (страница 80), что не дает возможности продемонстрировать шаги 3 и 4 алгоритма. Рассмотрим в связи с этим другую матрицу – Q''.

$$
Q'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & & & A \\ \hline
 & 1 & 1 & & & & & & B \\ \hline
1 & & & 1 & & 1 & & & C \\ \hline
1 & & & & & & 1 & 1 & D \\ \hline
1 & & & 1 & & & 1 & & E \\ \hline
 & & & & 1 & 1 & & 1 & F \\ \hline
 & & & & 1 & & 1 & 1 & G \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} &
\end{array}
$$

Шаги 1, 2. Матрица Q'' не имеет однострочного покрытия, но в ней есть ядерная строка B. Включаем ее в покрытие и удаляем из матрицы вместе со вторым и третьим столбцами, которые она покрывает. Получаем матрицу Q''_1 и идем на шаг 1.

$$Q''_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
 & 1 & & 1 & & & A \\ \hline
1 & 1 & & 1 & & & C \\ \hline
1 & & & & 1 & 1 & D \\ \hline
1 & 1 & & & 1 & & E \\ \hline
 & & 1 & 1 & & 1 & F \\ \hline
 & & 1 & & 1 & 1 & G \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} &
\end{array}$$

Шаги 1–3. В матрице Q''_1 нет однострочного покрытия и ядерной строки, но есть строка-предшественница: $A \preceq C$. Удаляем строку A, получаем матрицу Q''_2. Идем на шаг 2.

Шаги 2–4. В матрице Q''_2 нет ядерной строки и строки-предшественницы, но первый столбец следует за четвертым. Удаляем первый столбец, получаем матрицу Q''_3. Идем на шаг 3.

$$Q''_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
1 & 1 & & 1 & & & C \\ \hline
1 & & & & 1 & 1 & D \\ \hline
1 & 1 & & & 1 & & E \\ \hline
 & & 1 & 1 & & 1 & F \\ \hline
 & & 1 & & 1 & 1 & G \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} &
\end{array}
\qquad
Q''_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|l}
\hline
1 & & 1 & & & C \\ \hline
 & & & 1 & 1 & D \\ \hline
1 & & & 1 & & E \\ \hline
 & 1 & 1 & & 1 & F \\ \hline
 & 1 & & 1 & 1 & G \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} &
\end{array}$$

Шаги 3–4. В матрице Q''_3 появилась строка-предшественница: $D \preceq G$. Удалив D, получаем матрицу Q''_4 и идем на шаг 2.

Шаг 3. В матрице Q''_4 нет ядерных строк и строк-предшественниц, но восьмой столбец совпадает с пятым (то есть следует за ним). Удалив восьмой столбец, получаем матрицу Q''_5.

$$Q''_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|l}
\hline
1 & & 1 & & & C \\ \hline
1 & & & 1 & & E \\ \hline
 & 1 & 1 & & 1 & F \\ \hline
 & 1 & & 1 & 1 & G \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} &
\end{array}
\qquad
Q''_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|l}
\hline
1 & & 1 & & C \\ \hline
1 & & & 1 & E \\ \hline
 & 1 & 1 & & F \\ \hline
 & 1 & & 1 & G \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} &
\end{array}$$

Шаги 2–5. В матрице Q''_5 нет ни ядерных строк, ни строк-предшественниц, ни столбцов-последователей, значит, получен циклический остаток. Строим КНФ функции его покрытия:

$$\text{КНФ} = (C \vee E)\,(F \vee G)\,(C \vee F)\,(E \vee G) =$$

[преобразуем КНФ в ДНФ: для удобства умножаем первую скобку на третью, вторую на четвертую и выполняем поглощения]

$$= (C \vee EF)\,(G \vee EF) = CG \vee EF = \text{ДНФ}.$$

Шаг 6. Обе конъюнкции имеют минимальный ранг, поэтому выбираем любую из них, CG, она задает кратчайшее покрытие циклического остатка. Добавив ядерную строку B, получаем кратчайшее покрытие исходной булевой матрицы: $\{B, C, G\}$. •

Итак, нами изучен второй этап минимизации булевых функций, на котором из сокращенной ДНФ получаются либо все минимальные и кратчайшие, либо одна кратчайшая ДНФ.

11.2.5. Упражнения

Упр. 1. Найти все безызбыточные покрытия матрицы Q'' (стр. 82).

В упражнениях 2–3 применять двухэтапный метод минимизации (сокращенную ДНФ находить любым алгоритмом).

Упр. 2. Получить все кратчайшие и минимальные ДНФ функций $f_4 - f_6$ из упр.1 на странице 73 и следующих функций:

$f_1(a, b, c) = a \oplus b/(b \sim \overline{c})$,
$f_2(a, b, c, d) = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,\overline{c}\,d \vee b\,\overline{c} \vee a\,b\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee c\,d \vee a\,\overline{b}\,c$,
$f_3(a, b, c, d) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee b\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,b\,\overline{c} \vee a\,b\,c\,d \vee a\,\overline{b}\,\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d}$.

Упр. 3. Получить одну кратчайшую ДНФ булевых функций:

$f_1(a, b, c, d) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,b\,\overline{c}\,\overline{d} \vee b\,d \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c \vee a\,\overline{c}\,d$,
$f_2(a, b, c, d) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,d \vee a\,b\,c \vee a\,\overline{b}\,d \vee \overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee c\,\overline{d} \vee b\,\overline{c}\,d$,
$f_3(a, b, c, d) = \overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,d \vee \overline{a}\,b\,c \vee c\,\overline{d} \vee b\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,d$.

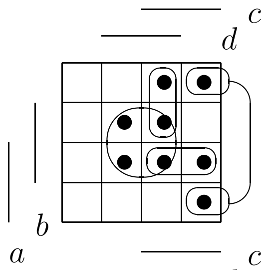
11.3. Приближенная кратчайшая ДНФ

Двухэтапный метод минимизации булевых функций оказывается довольно трудоемким. Однако существуют ситуации, в которых имеет смысл согласиться с "приближенным" решением задачи минимизации, то есть искать не обязательно оптимальные решения, но достаточно близкие к ним, лишь бы эти решения находились существенно быстрее, чем оптимальные. Естественно, что при этом приходится идти на компромисс между точностью решения и временем его поиска. Алгоритмы, ориентированные на быстрый поиск приближенных решений, называются *приближенными*.

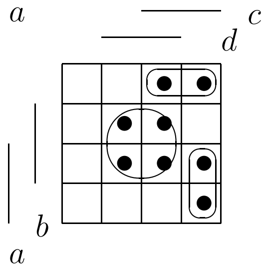
Определение. Назовем *приближенной кратчайшей ДНФ* (*ПриКрат-ДНФ*$_f$) булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ такую ее ДНФ, которая не обязательно является кратчайшей, но достаточно близка к ней по длине.

Заметим, что любую ДНФ (в частности, безызбыточную) можно считать приближенной кратчайшей, так как в определении не уточняется, что значит "достаточно близка" по длине.

Пример. Найдем две приближенные кратчайшие ДНФ одной и той же булевой функции.



$$\text{ПриКратДНФ}' = \overline{a}\,c\,d \vee \overline{b}\,c\,\overline{d} \vee b\,d \vee a\,b\,c,$$



$$\text{ПриКратДНФ}'' = \overline{a}\,\overline{b}\,c \vee b\,d \vee a\,c\,\overline{d}.$$

Вторая из найденных ДНФ оказывается к тому же кратчайшей. •

11.3.1. Алгоритм Закревского

Остановимся лишь на одном из методов поиска приближенных кратчайших ДНФ. Как показало его тестирование на функциях небольшого числа аргументов, метод находит чаще всего либо кратчайшую ДНФ, либо отличающуюся от кратчайшей только на одну конъюнкцию.

Алгоритм Закревского (ориентирован на матричное представление функции и визуальный способ решения).

Начало. Задана матрица Грея булевой функции.

Шаг 1. Для каждой точки вычислим *цену* – количество соседних ей точек. Все точки будем считать неотмеченными.

Шаг 2. Среди неотмеченных точек рассмотрим точку минимальной цены и найдем все содержащие ее максимальные интервалы. Выберем из них тот, который содержит наибольшее число неотмеченных точек. Если таких интервалов несколько, то выберем из них интервал наибольшей мощности.

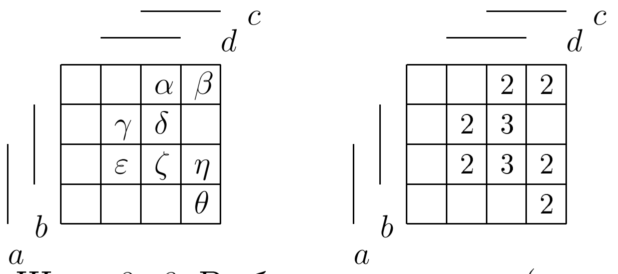
Шаг 3. Включим выбранный интервал в решение и отметим на матрице его точки. Если не все точки отмечены, то идем на шаг 2.

Конец. Включенные в решение интервалы задают приближенную кратчайшую ДНФ.

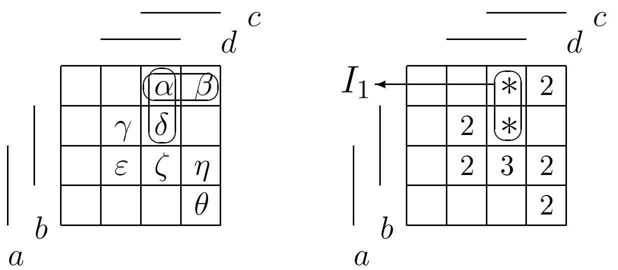
Пример. Рассмотрим матрицу Грея функции из последнего примера.

Начало. Точки обозначаем греческими буквами (левая матрица).

Шаг 1. Вычисляем цены точек (правая матрица).

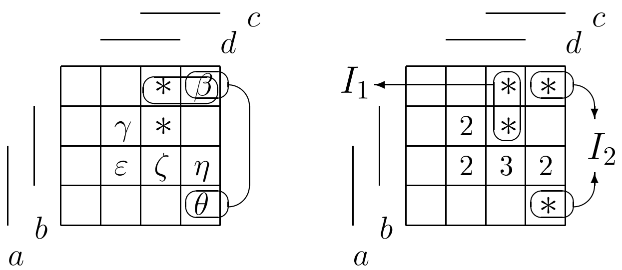


Шаги 2, 3. Выбираем точку α (минимальной цены 2). Она входит в два максимальных интервала (левая матрица). Оба интервала содержат по две неотмеченные точки и имеют одинаковые мощности, поэтому включаем в решение любой из них и отмечаем его точки (правая матрица).



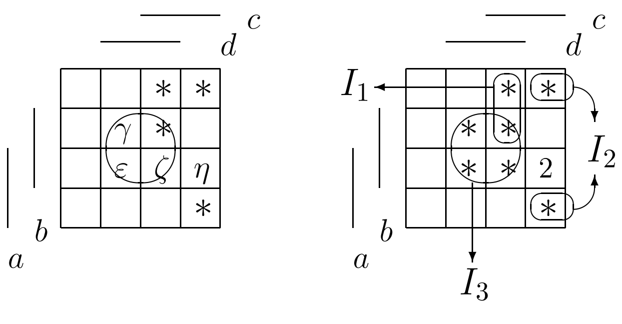
Поскольку не все точки отмечены, идем на шаг 2.

Шаги 2, 3. Выбираем неотмеченную точку β (цены 2). Она входит в два максимальных интервала (с одной и двумя неотмеченными точками), поэтому включаем в решение интервал I_2 с двумя неотмеченными точками и отмечаем их.



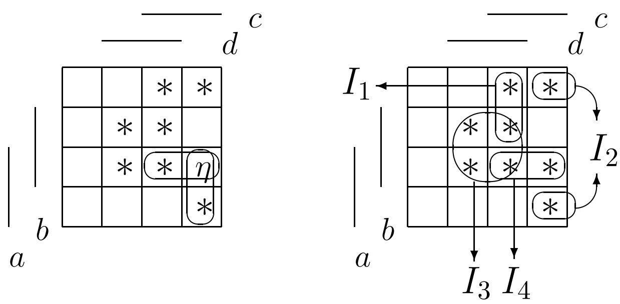
Поскольку не все точки отмечены, идем на шаг 2.

Шаги 2, 3. Выбираем неотмеченную точку γ (цены 2). Она входит в один максимальный интервал, включаем его в решение и отмечаем точки.



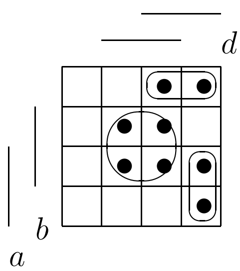
Поскольку не все точки отмечены, идем на шаг 2.

Шаги 2, 3. Выбираем неотмеченную точку η (цены 2). Она входит в два максимальных интервала, содержащих по одной неотмеченной точке. Мощности интервалов равны, поэтому включаем в решение любой интервал и отмечаем его точки. Поскольку все точки функции отмечены, идем на конец.



Конец. ПриКратДНФ $= \overline{a}\,c\,d \vee \overline{b}\,c\,\overline{d} \vee b\,d \vee a\,b\,c$. $\bullet$

Полученная ДНФ не является кратчайшей для рассмотренной функции (см. страницу 84), но кратчайшая ДНФ могла быть получена данным алгоритмом, если бы при первом выполнении шага 2 вместо I_1 в решение был включен другой максимальный интервал (проверьте эту возможность самостоятельно).

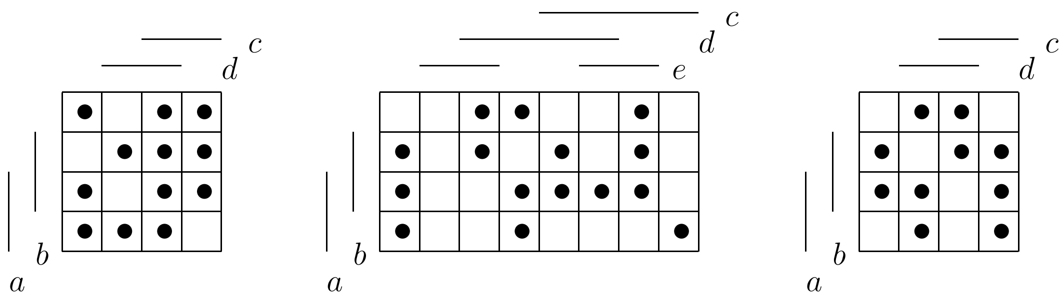


ПриКратДНФ $= \overline{a}\,\overline{b}\,c \vee b\,d \vee a\,c\,\overline{d} =$ КратДНФ.

Рассмотренный пример еще раз подчеркивает приближенный характер алгоритма Закревского. Поэтому при его использовании стоит проверить полученную ДНФ на безызбыточность. $\bullet$

11.3.2. Упражнения

Найти приближенные кратчайшие ДНФ булевых функций алгоритмом Закревского. Найти визуально кратчайшие ДНФ этих же функций и сравнить полученные результаты.



11.4. Контрольная работа 3

Тема контрольной работы: минимизация булевых функций.

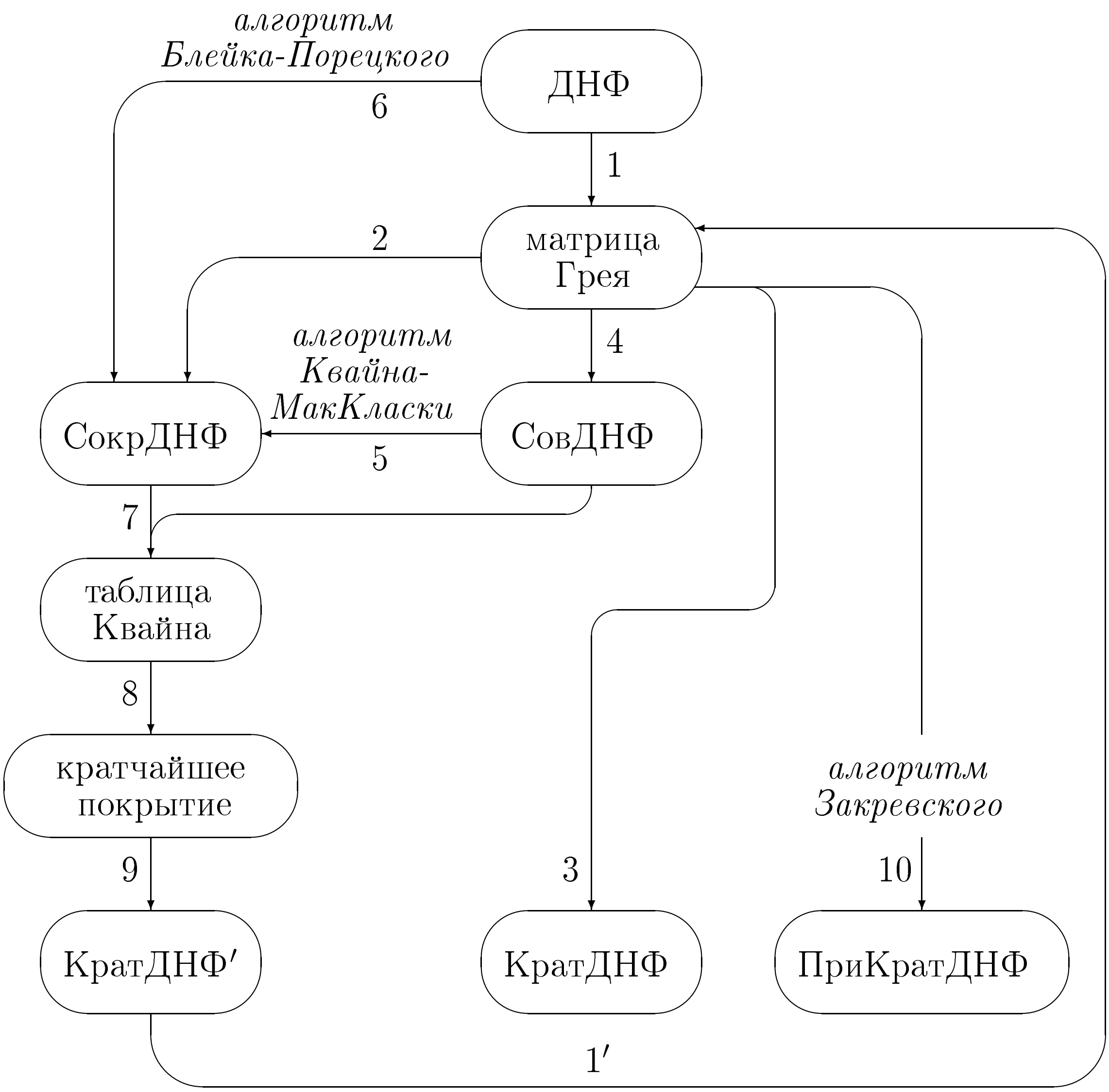


Схема контрольной работы (решение каждой из 11 задач начинать с постановки задачи и делать выводы из сравнения полученных разными способами сокращенных ДНФ, матриц Грея, кратчайших и приближенной кратчайшей ДНФ).

Задания на контрольную работу (ДНФ)

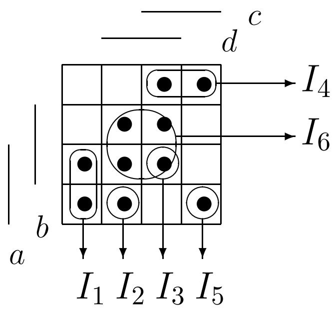
1) $a\,b\,c\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \vee \overline{a}\,b\,d \vee \overline{a}\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{b}\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}$
2) $\overline{a}\,b\,\overline{c} \vee \overline{a}\,c\,\overline{d} \vee b\,c\,\overline{d} \vee a\,b\,c\,d \vee a\,c\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,d$
3) $a\,b\,c\,d \vee a\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,b\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}$
4) $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,b\,\overline{c} \vee \overline{a}\,c\,d \vee a\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c \vee a\,c\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,d$
5) $\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \overline{a}\,c\,d \vee b\,c\,d \vee a\,b\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee a\,b\,\overline{c}\,d \vee \overline{b}\,c\,\overline{d}$

6) $a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee abd \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee ac\overline{d} \vee a\overline{c}d.$
7) $\overline{a}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}bd \vee a\overline{c}d \vee a\overline{b}cd \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee a\overline{b}\overline{c}$
8) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}b\overline{c}d \vee \overline{a}bc \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee \overline{a}c\overline{d} \vee ab\overline{c}\overline{d} \vee acd$
9) $\overline{a}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}c\overline{d} \vee \overline{a}cd \vee \overline{a}bd \vee \overline{a}\overline{b}cd \vee abc\overline{d} \vee a\overline{b}d$
10) $abcd \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee b\overline{c}\overline{d} \vee bcd \vee abd \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee a\overline{b}c\overline{d}$
11) $\overline{a}\overline{c}\overline{d} \vee abcd \vee \overline{a}b\overline{c} \vee bcd \vee a\overline{b}d \vee \overline{a}\overline{b}c\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}d$
12) $\overline{a}\overline{b}c \vee a\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}bcd \vee abcd \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee abc \vee acd$
13) $ab\overline{c} \vee acd \vee b\overline{c}d \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}\overline{b}cd \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee abc\overline{d}$
14) $\overline{a}\overline{c}d \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}bc \vee \overline{a}b\overline{c}d \vee ac\overline{d} \vee a\overline{b}\overline{c}d \vee \overline{a}\overline{b}c\overline{d}$
15) $\overline{a}c\overline{d} \vee \overline{a}\overline{c}d \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}bc \vee ab\overline{c} \vee a\overline{b}d$
16) $b\overline{c}d \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}d \vee acd \vee a\overline{b}c \vee abcd \vee \overline{b}\overline{c}\overline{d}$
17) $a\overline{c}\overline{d} \vee b\overline{c}\overline{d} \vee abc \vee a\overline{b}d \vee a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}c\overline{d}$
18) $a\overline{c}\overline{d} \vee ab\overline{c} \vee acd \vee a\overline{b}cd \vee \overline{a}bc \vee a\overline{b}c\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}d$
19) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}b\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}c\overline{d} \vee abc \vee a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee a\overline{b}d \vee ac\overline{d}$
20) $acd \vee abd \vee bc\overline{d} \vee \overline{a}b\overline{c} \vee abcd \vee a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}cd$
21) $a\overline{b}c\overline{d} \vee abcd \vee \overline{a}b\overline{c} \vee cd \vee a\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}\overline{b}cd \vee \overline{a}\overline{c}\overline{d}$
22) $a\overline{b}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}bd \vee b\overline{c}d \vee a\overline{b}c\overline{d} \vee ab\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}c\overline{d}$
23) $\overline{a}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{d} \vee a\overline{b}\overline{c}d \vee ab\overline{c} \vee \overline{b}\overline{c}d \vee \overline{a}bc \vee a\overline{b}c\overline{d}$
24) $bcd \vee \overline{a}bd \vee a\overline{b}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}c \vee a\overline{b}c\overline{d} \vee abc\overline{d} \vee ab\overline{c}d$
25) $b\overline{c}\overline{d} \vee a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee a\overline{b}d \vee abc\overline{d} \vee \overline{a}bc \vee \overline{a}cd \vee a\overline{b}cd$
26) $abd \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee \overline{a}cd \vee abcd \vee \overline{a}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}d \vee a\overline{b}c\overline{d}$
27) $\overline{a}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}bc \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee a\overline{b}cd \vee a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee acd \vee \overline{a}\overline{b}cd$
28) $ac\overline{d} \vee a\overline{b}\overline{c}d \vee \overline{a}\overline{b}cd \vee \overline{a}cd \vee \overline{a}\overline{b}c \vee abcd \vee b\overline{c}\overline{d}$
29) $a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee a\overline{c}d \vee abd \vee a\overline{b}c\overline{d} \vee ac\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$
30) $a\overline{b}d \vee \overline{a}b\overline{c} \vee ac\overline{d} \vee ab\overline{c}\overline{d} \vee abd \vee \overline{a}\overline{b} \vee \overline{a}bc\overline{d}$

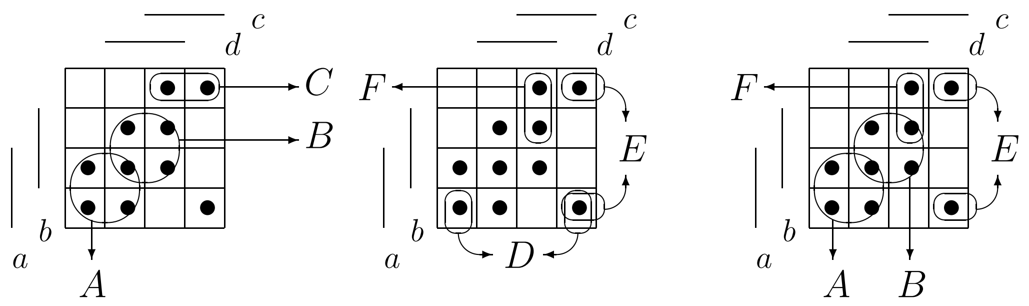
Пример. Задана ДНФ булевой функции.

$$\text{ДНФ} = \underset{K_1}{a\overline{c}\overline{d}} \vee \underset{K_2}{a\overline{b}\overline{c}d} \vee \underset{K_3}{abcd} \vee \underset{K_4}{\overline{a}\overline{b}c} \vee \underset{K_5}{a\overline{b}c\overline{d}} \vee \underset{K_6}{bd}.$$

1) *Построим матрицу Грея функции по заданной ДНФ.*



2, 3) *Найдем сокращенную и кратчайшую ДНФ по матрице Грея.* Все максимальные интервалы A–E (левая и средняя матрицы) задают сокращенную ДНФ. Достаточное множество из минимального числа максимальных интервалов (правая матрица) задает кратчайшую ДНФ.



$$\text{СокрДНФ} = \underset{A}{a\,\overline{c}} \vee \underset{B}{b\,d} \vee \underset{C}{\overline{a}\,\overline{b}\,c} \vee \underset{D}{a\,\overline{b}\,\overline{d}} \vee \underset{E}{\overline{b}\,c\,\overline{d}} \vee \underset{F}{\overline{a}\,c\,d}.$$

$$\text{КратДНФ} = \underset{A}{a\,\overline{c}} \vee \underset{B}{b\,d} \vee \underset{E}{\overline{b}\,c\,\overline{d}} \vee \underset{F}{\overline{a}\,c\,d}.$$

4) *Построим совершенную ДНФ функции по матрице Грея.* Каждая точка задает конъюнкцию совершенной ДНФ.

$$\begin{aligned}\text{СовДНФ} = {} & \overline{a}\,\overline{b}\,c\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} \vee \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,b\,c\,d \vee a\,b\,\overline{c}\,\overline{d} \vee \\ & \vee a\,b\,\overline{c}\,d \vee a\,b\,c\,d \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee a\,\overline{b}\,\overline{c}\,d \vee a\,\overline{b}\,c\,\overline{d}.\end{aligned}$$

5) *Построим сокращенную ДНФ функции из совершенной ДНФ алгоритмом Квайна-МакКласки.* Представляем совершенную ДНФ списком точек, упорядочиваем их по весу и разбиваем на классы.

Список 0	Список 0 (упорядоченный)			
0 0 1 1	C_1	1)	0 0 1 0	∗
0 0 1 0		2)	1 0 0 0	∗
0 1 0 1	C_2	3)	0 0 1 1	∗
0 1 1 1		4)	0 1 0 1	∗
1 1 0 0		5)	1 1 0 0	∗
1 1 0 1		6)	1 0 0 1	∗
1 1 1 1		7)	1 0 1 0	∗
1 0 0 0	C_3	8)	0 1 1 1	∗
1 0 0 1		9)	1 1 0 1	∗
1 0 1 0	C_4	10)	1 1 1 1	∗

Выполняем все неполные склеивания векторов классов C_i и C_{i+1}, $i = 1, 2, 3$, отмечая участников склеивания. Результаты заносим в список 1 (с номерами склеиваемых векторов). Повторяя аналогичные действия для списка 1, получаем список 2 и приводим в нем подобные. Склеивание векторов из списка 2 невозможно.

Список 1

C_1	1)	0 0 1 –	(1,3)	
	2)	– 0 1 0	(1,7)	
	3)	1 – 0 0	(2,5)	*
	4)	1 0 0 –	(2,6)	*
	5)	1 0 – 0	(2,7)	
C_2	6)	0 – 1 1	(3,8)	
	7)	0 1 – 1	(4,8)	*
	8)	– 1 0 1	(4,9)	*
	9)	1 1 0 –	(5,9)	*
	10)	1 – 0 1	(6,9)	*
C_3	11)	– 1 1 1	(8,10)	*
	12)	1 1 – 1	(9,10)	*

Список 2

1)	1 – 0 –	(3,10)
2)	~~1 – 0 –~~	~~(4,9)~~
3)	– 1 – 1	(7,12)
4)	~~– 1 – 1~~	~~(8,11)~~

Список 3

пуст

Неотмеченные векторы всех списков задают сокращенную ДНФ (обозначения конъюнкций взяты из задачи 2).

$$\text{СокрДНФ} = \underset{C}{\overline{a}\,\overline{b}\,c} \vee \underset{E}{\overline{b}\,c\,\overline{d}} \vee \underset{D}{a\,\overline{b}\,\overline{d}} \vee \underset{F}{\overline{a}\,c\,d} \vee \underset{A}{a\,\overline{c}} \vee \underset{B}{b\,d}.$$

6) *Построим сокращенную ДНФ функции из исходной ДНФ алгоритмом Блейка-Порецкого.* Представляем ДНФ списком троичных векторов, удаляем третий вектор, как поглощаемый шестым. Затем, обобщенно склеивая каждый очередной вектор со всеми предыдущими, получаем, как видно из списка, векторы с седьмого по пятнадцатый. Они либо поглощаются предыдущими, либо остаются в списке, поглощая некоторые из предыдущих векторов.

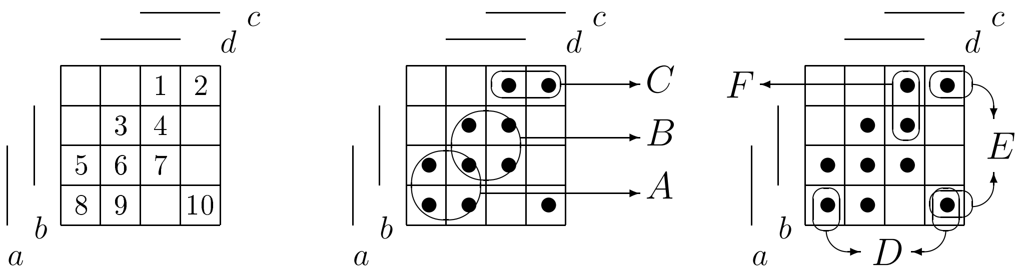
1)	~~1 – 0 0~~		12
2)	~~1 0 0 1~~		7
3)	~~1 1 1 1~~		6
4)	0 0 1 –		
5)	~~1 0 1 0~~		8
6)	– 1 – 1		
7)	~~1 0 0 –~~	~~(2,1)~~	12
8)	~~1 0 – 0~~	(5,1)	14
9)	~~1 1 0 –~~	~~(6,1)~~	12
10)	0 – 1 1	(6,4)	
11)	– 0 1 0	(8,4)	
12)	1 – 0 –	(9,7)	
13)	~~0 0 1 –~~	~~(11,10)~~	4
14)	1 0 – 0	(12,11)	
15)	~~– 0 1 0~~	~~(14,4)~~	11

Решение образуют шесть непоглощенных векторов, они задают сокращенную ДНФ (обозначения конъюнкций взяты из задачи 2).

$$\text{СокрДНФ} = \underset{C}{\overline{a}\,\overline{b}\,c} \vee \underset{B}{b\,d} \vee \underset{F}{\overline{a}\,c\,d} \vee \underset{E}{\overline{b}\,c\,\overline{d}} \vee \underset{A}{a\,\overline{c}} \vee \underset{D}{a\,\overline{b}\,\overline{d}}.$$

Вывод. Сокращенные ДНФ, полученные в задачах 2), 5), 6), совпадают, следовательно, они найдены верно.

7) *Построим таблицу Квайна функции по ее совершенной и сокращенной ДНФ.* На левой матрице нумеруем точки, на остальных повторяем все максимальные интервалы из задачи 2).



Проверяя принадлежность точек максимальным интервалам, строим таблицу Квайна:

	0011	0010	0101	0111	1100	1101	1111	1000	1001	1010	
$1-0-$					1	1		1	1		A
$-1-1$			1	1		1	1				B
$0\,0\,1-$	1	1									C
$1\,0-0$								1		1	D
$-0\,1\,0$		1								1	E
$0-1\,1$	1			1							F
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

8) *Найдем кратчайшее покрытие таблицы Квайна.* В ней нет однострочного покрытия, но строки A и B – ядерные, включаем их в покрытие и вычеркиваем из матрицы вместе с покрытыми столбцами (с третьего по девятый), получаем матрицу Q_1. В ней нет однострочных покрытий и ядерных столбцов, но есть строка-предшественница: $D \preceq E$, поэтому удаляем строку D. В новой матрице Q_2 появилась ядерная строка E, включаем ее в покрытие и удаляем из матрицы вместе со вторым и десятым столбцами, получаем матрицу Q_3.

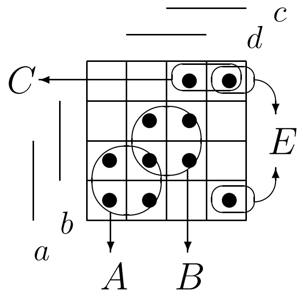
$$Q_1 = \begin{array}{|c|c|c|l} \hline 1 & 1 & & C \\ \hline & & 1 & D \\ \hline & 1 & 1 & E \\ \hline 1 & & & F \\ \hline \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{10} & \end{array} \quad Q_2 = \begin{array}{|c|c|c|l} \hline 1 & 1 & & C \\ \hline & 1 & 1 & E \\ \hline 1 & & & F \\ \hline \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{10} & \end{array} \quad Q_3 = \begin{array}{|c|l} \hline 1 & C \\ \hline 1 & F \\ \hline \multicolumn{1}{c}{1} & \end{array}$$

Строка C образует однострочное покрытие матрицы Q_3. Включив ее в решение, получаем кратчайшее покрытие $\{A, B, C, E\}$.

9) *Запишем кратчайшую ДНФ по кратчайшему покрытию таблицы Квайна.*

$$\text{КратДНФ}' = \underset{A}{a\,\overline{c}} \vee \underset{B}{b\,d} \vee \underset{C}{\overline{a}\,\overline{b}\,c} \vee \underset{E}{\overline{b}\,c\,\overline{d}}.$$

1′) *Построим матрицу Грея по полученной кратчайшей ДНФ.*



Вывод. Матрицы Грея, из задач 1) и 1′) совпали, значит, кратчайшая ДНФ из задачи 9) задает исходную функцию. Кроме того, длины кратчайших ДНФ из задач 3) и 9) равны, значит, эти задачи решены верно.

10) *Построим приближенную кратчайшую ДНФ по матрице Грея алгоритмом Закревского.* На левой матрице показываем цены точек, на правой обозначаем точки.

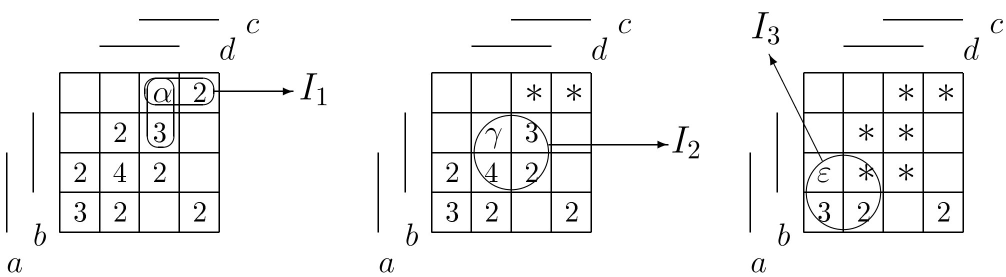
		2	2
	2	3	
2	4	2	
3	2		2

		α	β
	γ	δ	
ε	ζ	η	
θ	κ		λ

Выбираем точку α минимальной цены 2. Она входит в два максимальных интервала (левая матрица внизу). Оба интервала содержат по две неотмеченных точки, и оба одинаковой мощности, поэтому в решение включаем любой из них. Отмечаем точки (на средней матрице).

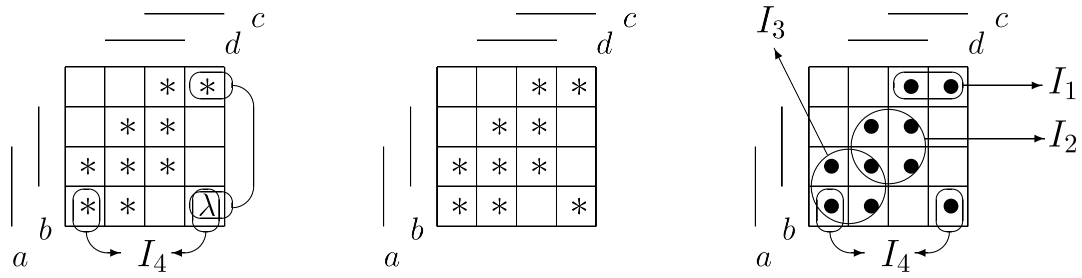
Выбираем неотмеченную точку γ минимальной цены 2. Она входит в один максимальный интервал (средняя матрица), включаем его в решение и отмечаем точки (на правой матрице).

Выбираем неотмеченную точку ε минимальной цены 2. Она входит в один максимальный интервал (правая матрица), включаем его в решение и отмечаем точки (на следующей матрице).



Выбираем неотмеченную точку λ минимальной цены 2. Она входит в два максимальных интервала. Оба содержат по одной неотмеченной точке, и оба одинаковой мощности, поэтому в решение включаем любой из них и отмечаем его точки.

Поскольку все точки отмечены, идем на конец.



$$\text{ПриКратДНФ} = \underset{K_1}{\overline{a}\,\overline{b}\,c} \vee \underset{K_2}{b\,d} \vee \underset{K_3}{a\,\overline{c}} \vee \underset{K_4}{a\,\overline{b}\,\overline{d}}.$$

Вывод. Так как приближенная кратчайшая ДНФ задает исходную функцию, и ее длина не меньше длин кратчайших ДНФ из задач 3) и 9), то приближенная кратчайшая ДНФ найдена верно. •

12. Неполностью определенные (частичные) булевы функции

12.1. Неполностью определенная булева функция и способы ее задания

Определение. *Неполностью определенной* (*частичной*) *булевой функцией* $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$ назовем однозначное отображение подмножества M булева пространства $\mathcal{B}^n$ в булево множество $\mathcal{B}$, т.е. $f : M \to \mathcal{B}$, $M \subseteq \mathcal{B}^n$.

Как видно из определения, частным случаем неполностью определенной булевой функции является булева функция: ее областью определения является все булево пространство. Булеву функцию также можно называть *полностью определенной булевой функцией*.

Неполностью определенная булева функция может быть задана различными способами, аналогичными способам задания булевой функции, в частности, таблицей истинности, матрицей Грея и характеристическими множествами.

1) Задание частичной булевой функции таблицей истинности. В левой части таблицы истинности представляются, как и раньше, все векторы булева пространства, а в ее правой части либо перечисляются значения функции, либо указывается специальный символ $\times$ (если набор в область определения не входит).

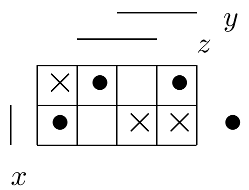
2) Задание частичной булевой функции характеристическими множествами. К двум известным нам характеристическим множествам $M^1_{f_\times}$ и $M^0_{f_\times}$ добавляатся третье, $M^\times_{f_\times}$, состоящее из наборов, на которых функция не определена (для задания функции достаточно указать любые два из трех множеств).

3) Задание частичной булевой функции матрицей Грея. В матрице Грея тем же символом $\times$ отмечаются клетки, не входящие в область определения.

Пример. Пусть функция $f_\times(x, y, z)$ задана на множестве булевых векторов, представляющих целые числа от 1 до 5, и принимает значение 1, если и только если заданное число есть 2^k, где k – целое. Ее таблица истинности, характеристические множества и матрица Грея имеют вид:

$x\ y\ z$	$f_\times(x, y, z)$
0 0 0	$\times$
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	$\times$
1 1 1	$\times$

$M^1_{f_\times} = \{001, 010, 100\}$
$M^0_{f_\times} = \{011, 101\}$
$M^\times_{f_\times} = \{000, 110, 111\}$



12.2. Минимизация неполностью определенных булевых функций

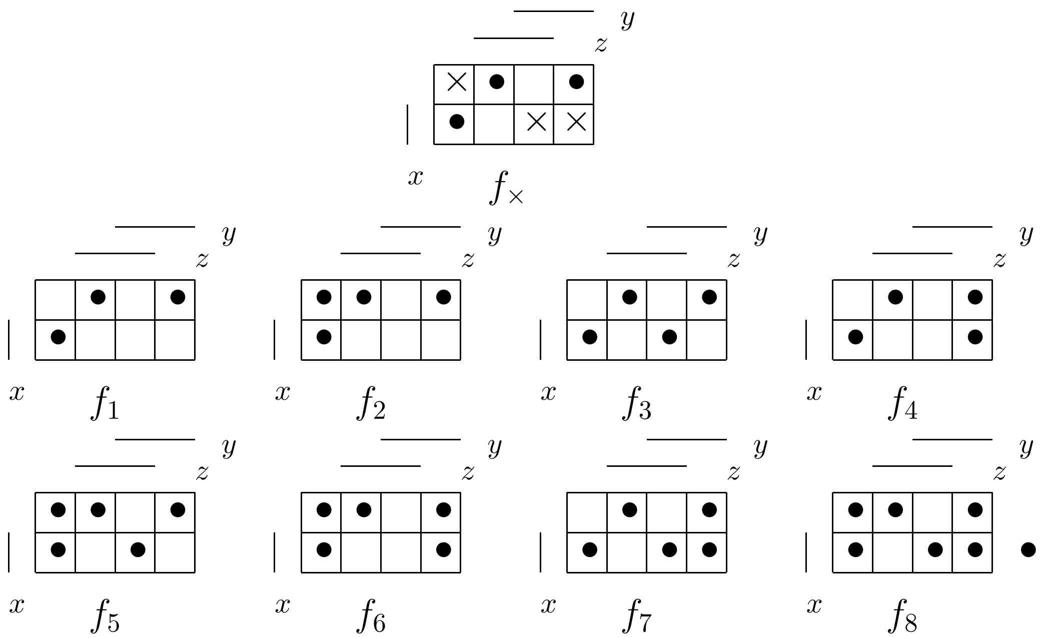
Определение. Назовем *доопределением* неполностью определенной булевой функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$ любую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую условиям:

$$M^1_{f_\times} \subseteq M^1_f, \qquad M^0_{f_\times} \subseteq M^0_f.$$

Это означает, что значения любого доопределения должны совпадать со значениями функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$ на наборах из множеств $M^1_{f_\times}$ и $M^0_{f_\times}$, и доопределение может принимать любые значения на наборах из $M^\times_{f_\times}$. Из этого и из теоремы о числе векторов с очевидностью следует утверждение.

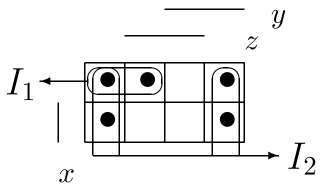
Утверждение о числе доопределений. Число различных доопределений неполностью определенной булевой функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$ равно 2^k, где $k = \left|M^\times_{f_\times}\right|$.

Пример. Рассмотренная в предыдущем примере неполностью определенная булева функция имеет восемь доопределений.



Определение. *Минимизировать неполностью определенную булеву функцию* – это значит выбрать среди кратчайших ДНФ всех ее доопределений самую короткую ДНФ.

Пример. Для рассмотренной в предыдущем примере функции $f_\times(x, y, z)$ самой короткой оказывается кратчайшая ДНФ доопределения $f_6(x, y, z)$.



$$\text{КратДНФ} = \underset{K_1}{\overline{z}} \vee \underset{K_2}{\overline{x}\,\overline{y}}. \bullet$$

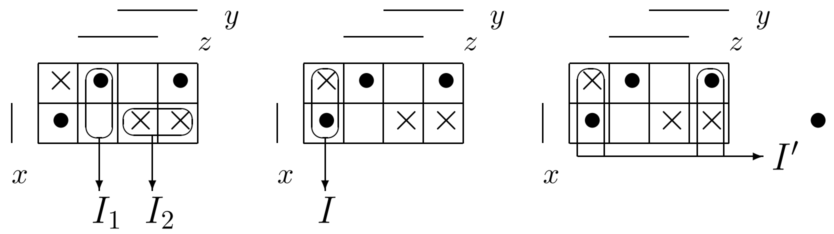
Таким образом, тот факт, что неполностью определенная булева функция задается не на всем булевом пространстве, а лишь на его подмножестве, мы используем для такого "выгодного" доопределения функции, которое приводит к наиболее короткой ДНФ и (согласно рассуждениям со стр. 62) к наиболее простой схеме, реализующей функцию.

Конечно, как и в случае полностью определенной булевой функции, возможны другие постановки задачи минимизации неполностью определенной функции – например, найти ее приближенную кратчайшую ДНФ.

Определение. Интервал I назовем *допустимым* для неполностью определенной булевой функции $f_\times(x1, \ldots, x_n)$, если он удовлетворяет условиям: $I \subseteq M^1_{f_\times} \cup M^\times_{f_\times}$, $I \cap M^1_{f_\times} \neq \emptyset$.

Определение. Интервал I назовем *максимальным* для неполностью определенной булевой функции, если он допустим для этой функции, и не существует другого допустимого для нее интервала I' такого, что $I \subset I'$.

Пример. На левой матрице Грея изображены два недопустимых интервала $I_1 = -01$ и $I_2 = 01-$, на средней – допустимый интервал $I = -00$ (но не максимальный), на правой – максимальный $I' = --0$.



12.2.1. Поиск кратчайшей ДНФ неполностью определенной булевой функции

Для поиска кратчайшей ДНФ неполностью определенной булевой функции можно использовать двухэтапный метод минимизации булевой функции, изложенный в разделе 11, с некоторыми модификациями. Напомним суть метода: на первом этапе находятся все простые импликанты функции (то есть все ее максимальные интервалы), а затем на втором этапе из них выделяются конъюнкции искомых ДНФ (кратчайших или минимальных). Задача второго этапа решается при помощи построения таблицы Квайна булевой функции и поиска ее покрытий.

Для нахождения всех максимальных интервалов неполностью определенной функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$ можно применить алгоритм Квайна-Мак-Класки или алгоритм Блейка-Порецкого к ее доопределению $f(x_1, \ldots, x_n)$, которое удовлетворяет условию: $M_f^1 = M_{f_\times}^1 \cup M_{f_\times}^\times$, а затем исключить из найденных интервалов те, которые не содержат ни одной точки функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$. Таблица Квайна неполностью определенной функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$ строится аналогично таблице Квайна булевой функции.

Алгоритм поиска кратчайшей ДНФ неполностью определенной булевой функции (основан на нахождении всех максимальных интервалов функции, построении таблицы Квайна и поиске кратчайшего покрытия этой таблицы).

Начало. Задана частичная булева функция $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$.

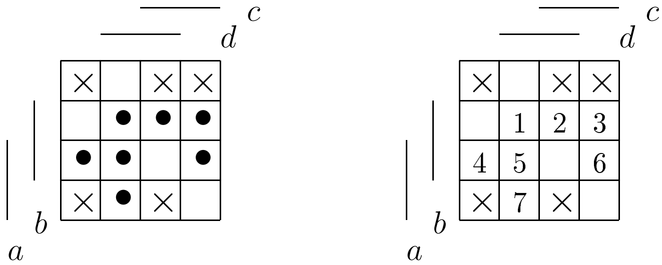
Шаг 1. Находим все максимальные интервалы функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$.

Шаг 2. Строим таблицу Квайна функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$.

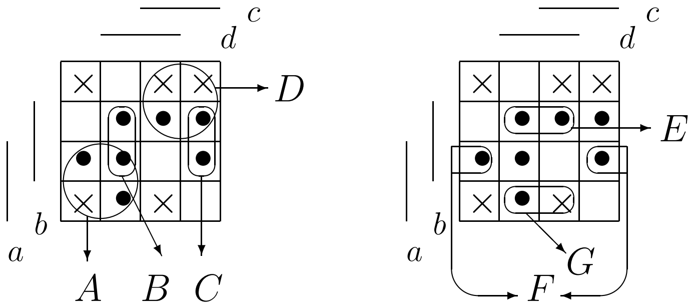
Шаг 3. Находим кратчайшее покрытие таблицы Квайна, а по покрытию – кратчайшую ДНФ функции $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$.

Конец.

Пример. Рассмотрим частичную булеву функцию $f_{\times}(a,b,c,d)$, заданную матрицей Грея, и для удобства пронумеруем ее точки.



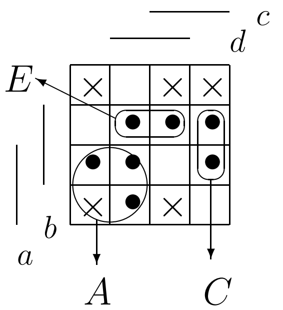
Шаг 1. Найдем все максимальные интервалы функции $f_{\times}(a,b,c,d)$, обозначим их буквами от A до G и изобразим для наглядности на двух матрицах.



Шаг 2. Построим таблицу Квайна функции $f_{\times}(a,b,c,d)$, используя введенные обозначения точек и интервалов.

	0101	0111	0110	1100	1101	1110	1001	
1–0–				1	1		1	A
–101	1				1			B
–110			1			1		C
0–1–		1	1					D
01–1	1	1						E
11–0				1		1		F
10–1							1	G
	1	2	3	4	5	6	7	

Шаг 3. Кратчайшее покрытие таблицы образуют строки $\{A, C, E\}$. Построим по ним кратчайшую ДНФ функции $f_{\times}(a,b,c,d)$.

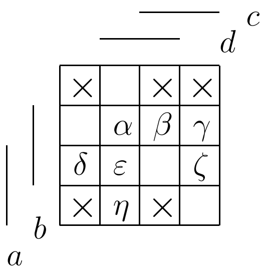


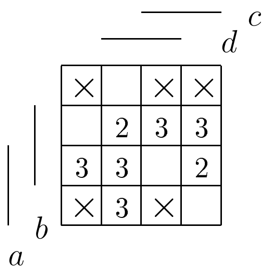
$$\text{КратДНФ} = \underbrace{a\,\overline{c}}_{A} \vee \underbrace{b\,c\,\overline{d}}_{C} \vee \underbrace{\overline{a}\,b\,d}_{E}. \ \bullet$$

12.2.2. Поиск приближенной кратчайшей ДНФ неполностью определенной булевой функции

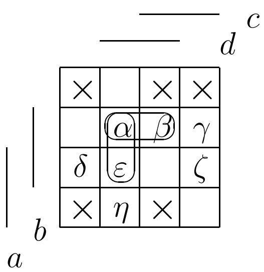
В этом разделе будут рассмотрены два алгоритма поиска приближенной кратчайшей ДНФ частичной булевой функции. Первый из них является обобщением рассмотренного в подразделе 11.3 алгоритма Закревского (стр. 85). Шаги алгоритма остаются теми же, отличие заключается лишь в том, что цена точки определяется как количество соседних ей векторов из множества $M^1_{f_\times} \cup M^\times_{f_\times}$.

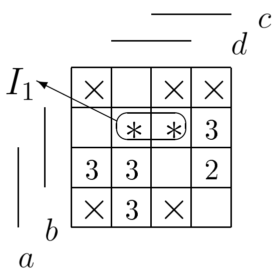
Пример. Применим алгоритм к матрице Грея из последнего примера.
Начало. Точки обозначаем греческими буквами (левая матрица).
Шаг 1. Вычисляем цены точек (правая матрица).



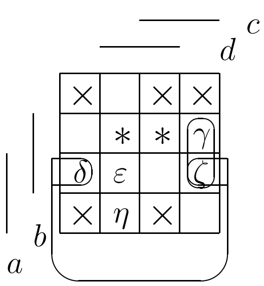


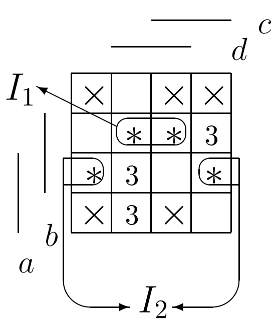
Шаги 2, 3. Выбираем точку α (минимальной цены 2). Она входит в два максимальных интервала (левая матрица). Оба интервала содержат по две неотмеченные точки и имеют одинаковые мощности, поэтому включаем в решение любой из них и отмечаем его точки (правая матрица).



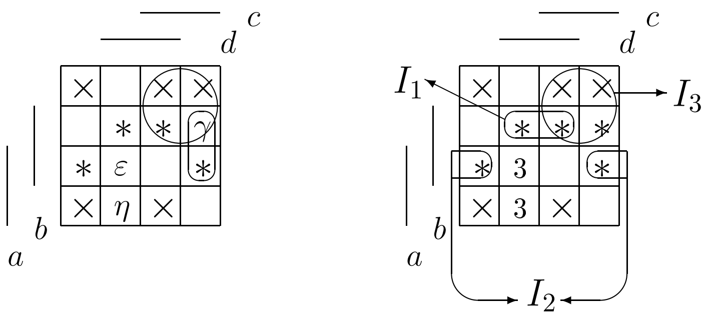


Шаги 2, 3. Выбираем неотмеченную точку ζ (цены 2). Она также входит в два максимальных интервала. Оба интервала содержат по две неотмеченные точки и имеют одинаковые мощности, поэтому включаем в решение любой из них и отмечаем его точки.

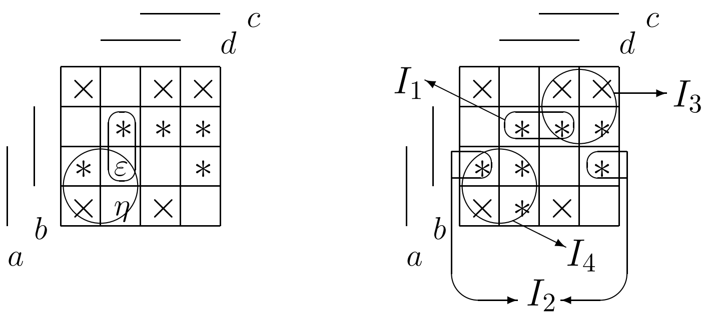




Шаги 2, 3. Найдем следующую неотмеченную точку γ (цены 3). Она входит в два максимальных интервала, содержащих по одной неотмеченной точке. Включаем в решение интервал большей мощности I_3 и отмечаем его точки.



Шаги 2, 3. Найдем следующую неотмеченную точку ε (цены 3). Она входит в два максимальных интервала (с одной и двумя неотмеченными точками), поэтому включаем в решение интервал I_4 с двумя неотмеченными точками и отмечаем их.



Конец. ПриКратДНФ $= \underset{K_1}{\overline{a}\,b\,d} \vee \underset{K_2}{a\,b\,\overline{d}} \vee \underset{K_3}{\overline{a}\,c} \vee \underset{K_4}{a\,\overline{c}}$. •

Приближенная кратчайшая ДНФ оказалась длиннее кратчайшей ДНФ, найденной ранее точным алгоритмом, на одну конъюнкцию. Мы могли бы получить и точную кратчайшую ДНФ, если бы на второй итерации шага 2 выбрали другой равноценный вариант интервала (проверьте эту возможность самостоятельно).

Метод конкурирующих интервалов. Изучим еще один метод поиска приближенной кратчайшей ДНФ неполностью определенной булевой функции, который не ориентирован на ее представление матрицей в коде Грея, а значит, может применяться к булевой функции большого числа переменных.

Перед описанием алгоритма введем необходимые определения. Рассмотрим неполностью определенную булеву функцию $f_\times(x_1, \ldots, x_n)$, ее точку α и допустимый интервал I.

Определение. *Минимальным расширением интервала I до точки α* (обозначается $[I,\alpha]$) называется интервал I' минимальной мощности, удовлетворяющий условиям: $I \subset I'$, $\alpha \subset I'$.

Как следует из определения, интервал $[I,\alpha]$ строится так:

– внутренние компоненты интервала I остаются внутренними и в интервале $[I,\alpha]$,

– внешние компоненты интервала I сохраняют свое значение в интервале $[I,\alpha]$, если они совпадают с соответствующими компонентами α,

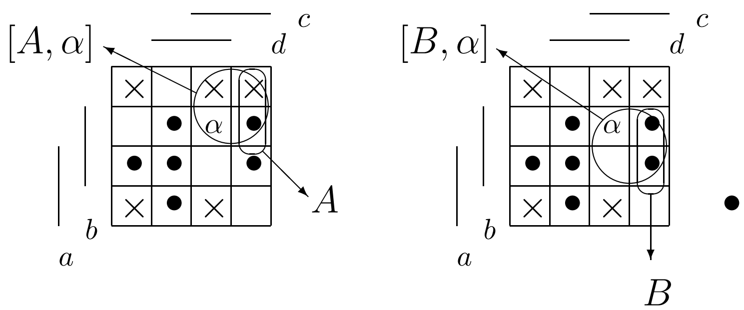
– внешние компоненты интервала I становятся внутренними в интервале $[I,\alpha]$, если они ортогональны соответствующим компонентам α.

Пример.

$$I = --1\,0\,10,$$
$$\alpha = 1\,0\,0\,1\,10,$$
$$[I,\alpha] = ----10. \bullet$$

Определение. Интервал I и точка α называются *совместимыми*, если интервал $[I,\alpha]$ является допустимым для функции $f_\times(x_1,\ldots,x_n)$.

Пример. Для функции из предыдущего примера интервал $A = 0{-}10$ и точка $\alpha = 0111$ совместимы, так как интервал $[A,\alpha] = 0{-}1{-}$ является допустимым для функции (левая матрица). Интервал $B = {-}110$ и та же точка α несовместимы, так как интервал $[B,\alpha] = {-}11{-}$ не допустимый для функции (правая матрица).



Если число переменных функции слишком велико для ее представления на матрице Грея, то проверить интервал I на совместимость с точкой α можно следующим образом: если хотя бы один вектор из $M^0_{f_\times}$ принадлежит интервалу $[I,\alpha]$, то интервал I и точка α несовместимы, иначе они совместимы.

Пример. Для функции из предыдущего примера интервал $B = {-}110$ и точка $\alpha = 0111$ несовместимы, так как существует вектор $\beta = 1111$ из множества $M^0_{f_\times}$, принадлежащий интервалу $[B,\alpha] = {-}11{-}$. $\bullet$

Перейдем теперь к изложению метода конкурирующих интервалов. Метод является итерационным. На каждой итерации метода имеется некоторое частичное решение поставленной задачи, которое улучшается по определенным правилам. В данном случае частичным решением является множество допустимых интервалов функции. На каждой итерации будем изменять решение, либо добавляя в него новый интервал, либо расширяя один из имеющихся интервалов. При этом желательно как можно меньше изменять частичное решение, то есть добавлять интервал наименьшей мощности или расширять интервал по наименьшему числу компонент.

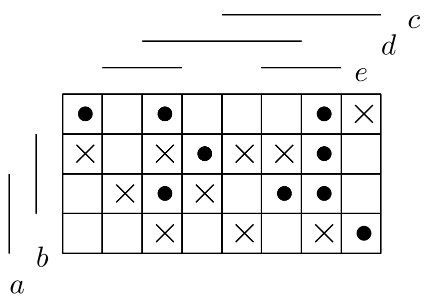
Пусть на k-й итерации имеются частичное решение U_k и множество M_k точек функции, не содержащихся ни в одном интервале из U_k (на первой итерации $U_1 = \emptyset$, $M_1 = M^1_{f_\times}$). Построим булеву *матрицу совместимости* R_k, строкам которой сопоставим точки из M_k, а столбцам – интервалы из U_k. Элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен единице, если i-я точка совместима с j-м интервалом.

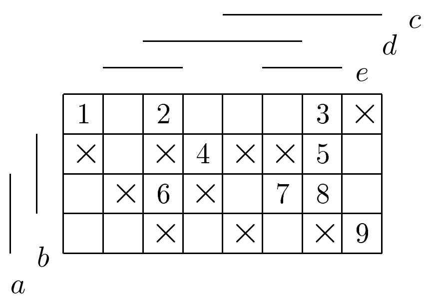
Далее будем обозначать строки и столбцы матрицы совместимости символами сопоставленных им точек и интервалов.

Пусть строка α матрицы совместимости не содержит единиц. Это означает, что в множестве U_k нет ни одного интервала, совместимого с точкой α, то есть ни один интервал не может быть расширен на множестве $M^1_{f_\times} \cup M^\times_{f_\times}$ так, чтобы расширение включало точку α. Значит, в множество U_k следует добавить интервал, совместимый с α. Такой интервал наименьшей мощности это сама точка. Отсюда вытекает следующее правило.

Правило строки без единиц. Если в матрице совместимости есть строка, не содержащая ни одной единицы, то она удаляется из матрицы. В матрицу добавляется столбец, которому сопоставляется вектор из удаленной строки.

Пример. Рассмотрим неполностью определенную булеву функцию пяти переменных и пронумеруем для наглядности ее точки.



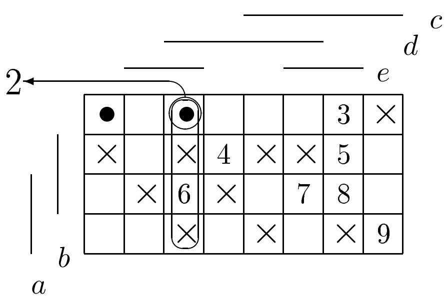


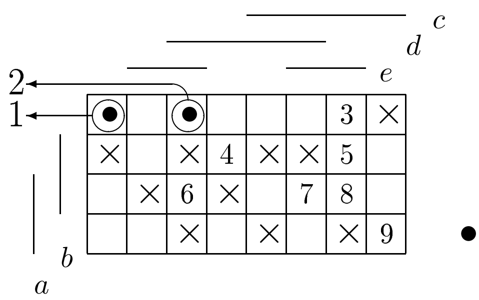
На первой итерации (матрица совместимости R_1 на следующей странице) $U_1 = \emptyset$, $M_1 = M^1_{f_\times}$. Ни одна строка не содержит единиц, следовательно, можно применить правило строки без единиц к первой строке (договоримся здесь и далее среди равноценных строчек выбирать верхнюю). Первый интервал 00000 не совместим ни с одной точкой функции (матрица R_2). Еще раз применяем правило ко второй строке (матрица R_3). Второй интервал 00011 совместим только с шестой точкой, содержащий их допустимый интервал наименьшей мощности показан на матрице Грея слева. Текущее решение показано на матрице Грея справа. Здесь и далее мы выделяем интервалы из текущего частичного решения и содержащиеся в них точки.

R_1	
1) 00000	
2) 00011	
3) 00101	
4) 01010	
5) 01101	
6) 11011	
8) 11111	
8) 11101	
9) 10100	

R_2	00000
2) 00011	0
3) 00101	0
4) 01010	0
5) 01101	0
6) 11011	0
7) 11111	0
8) 11101	0
9) 10100	0
	1

R_3	00000	00011
3) 00101	0	0
4) 01010	0	0
5) 01101	0	0
6) 11011	0	1
7) 11111	0	0
8) 11101	0	0
9) 10100	0	0
	1	2





Пусть столбец I матрицы совместимости не содержит единиц. Это означает, что в множестве M_k нет ни одной точки, совместимой с интервалом I, то есть данный интервал не может быть расширен на множестве $M^1_{f_\times} \cup M^\times_{f_\times}$ таким образом, чтобы расширение включало точку из M_k. Следовательно, интервал I, предварительно расширенный до максимального, может быть добавлен в окончательное решение. Отсюда вытекает следующее правило.

Правило столбца без единиц. Если в матрице совместимости есть столбец, не содержащий ни одной единицы, то он удаляется из матрицы. Интервал из удаленного столбца расширяется до максимального и добавляется в окончательное решение.

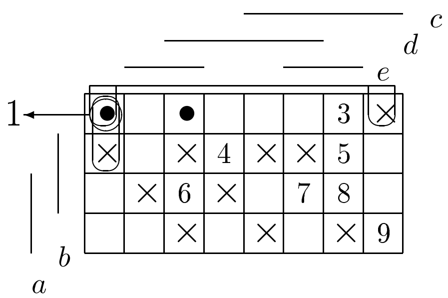
Если существует несколько способов расширения интервала до максимального, то из них можно выбрать тот, который приводит к расширению наибольшей мощности.

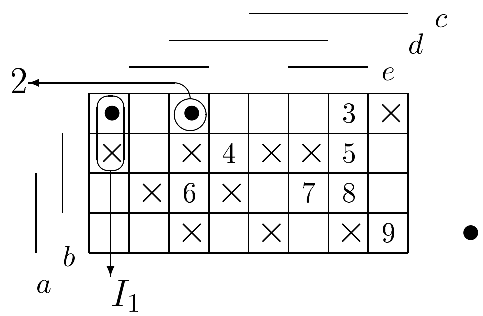
Пример. Применим это правило к первому столбцу построенной в предыдущем примере матрицы совместимости R_3. В результате получим матрицу R_4.

R_3	00000	00011
3) 00101	0	0
4) 01010	0	0
5) 01101	0	0
6) 11011	0	1
7) 11111	0	0
8) 11101	0	0
9) 10100	0	0
	1	2

R_4	00011
3) 00101	0
4) 01010	0
5) 01101	0
6) 11011	1
7) 11111	0
8) 11101	0
9) 10100	0
	2

На матрице Грея слева показаны два допустимых расширения интервала 00000 одинаковой мощности, включаем в окончательное решение интервал $I_1 = 0{-}000$. Текущее решение показано на матрице справа.





Пусть столбец I содержит ровно одну единицу. Это означает, что в множестве M_k есть единственная точка α, совместимая с интервалом I, то есть интервал может быть единственым образом расширен на множестве $M^1_{f_\times} \cup M^\times_{f_\times}$ так, чтобы расширение включало точку из M_k. Значит, интервал I необходимо заменить на его минимальное расширение до точки α. При этом точка α удаляется из M_k. Отсюда вытекает следующее правило.

Правило столбца с одной единицей. Если в матрице совместимости есть столбец I, содержащий ровно одну единицу (в строке α), то эта строка удаляется из матрицы, а интервал I заменяется на $[I, \alpha]$.

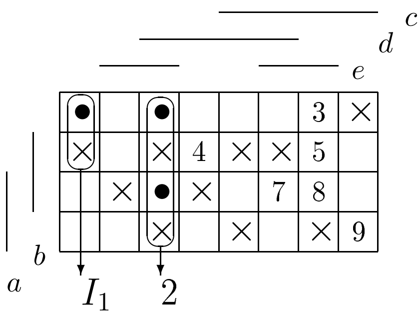
Заметим, что после применения правила столбца с одной единицей в матрице появляется столбец без единиц, к которому можно применить соответствующее правило.

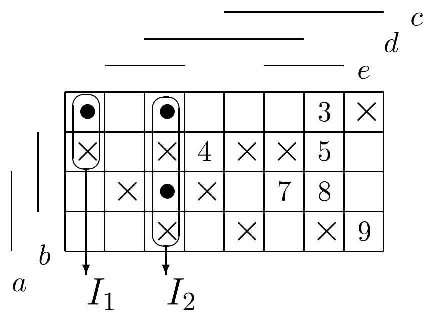
Пример. Применим правило столбца с одной единицей ко второму столбцу полученной в предыдущем примере матрицы R_4. Интервал 00011, совместимый только с шестой точкой 11011, заменим на интервал $[00011, 11011] = --011$, а шестую строку удалим из матрицы, получим матрицу R_5. Текущее решение показано на матрице Грея слева. Затем к тому же столбцу применим правило столбца без единиц, получим матрицу R_6 и включим в окончательное решение интервал I_2 (матрица Грея справа).

R_4	00011
3) 00101	0
4) 01010	0
5) 01101	0
6) 11011	1
7) 11111	0
8) 11101	0
9) 10100	0
	2

R_5	$--011$
3) 00101	0
4) 01010	0
5) 01101	0
7) 11111	0
8) 11101	0
9) 10100	0
	2

R_6	
3) 00101	
4) 01010	
5) 01101	
7) 11111	
8) 11101	
9) 10100	





•

Применение этих правил не ухудшает окончательное решение, то есть не увеличивает длину ПриКратДНФ, поэтому их можно использовать в любом порядке.

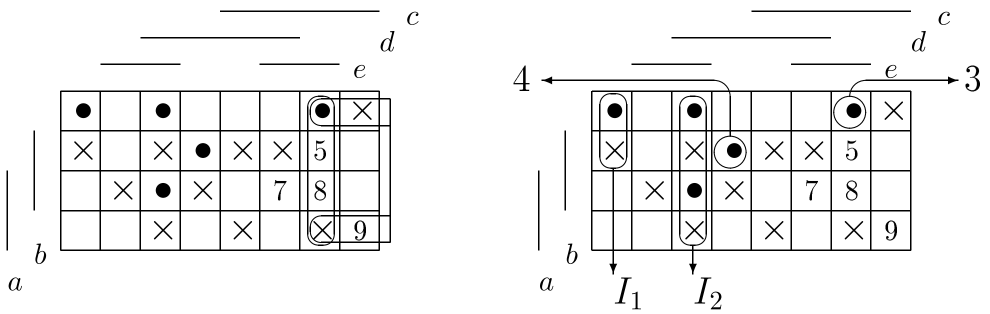
Пример. Продолжим процесс минимизации функции. Применим к матрице R_6 дважды правило строки без единиц: сначала к третьей, затем к четвертой строкам.

R_6	
3) 00101	
4) 01010	
5) 01101	
7) 11111	
8) 11101	
9) 10100	

R_7	00101
4) 01010	0
5) 01101	1
7) 11111	0
8) 11101	1
9) 10100	1
	3

R_8	00101	01010
5) 01101	1	0
7) 11111	0	0
8) 11101	1	0
9) 10100	1	0
	3	4

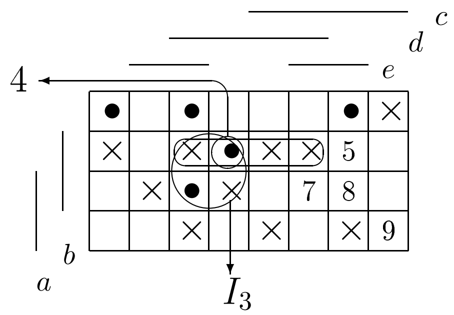
Третий интервал 00101 совместим с пятой, восьмой и девятой точками функции, что показано на матрице Грея слева. Текущее решение представлено на матрице справа.



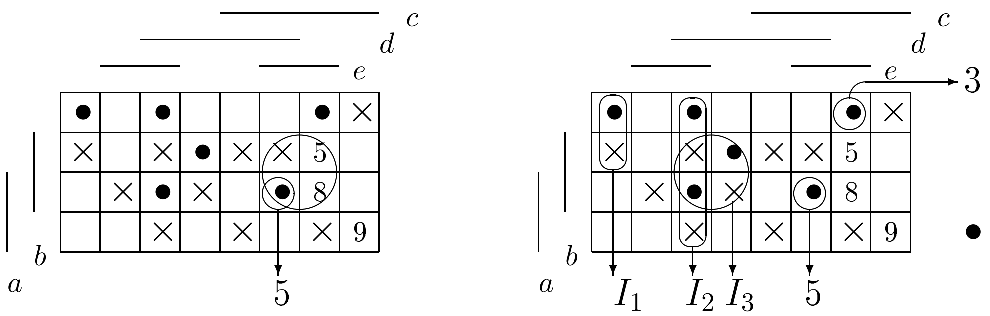
Применяем к четвертому столбцу матрицы R_8 правило столбца без единиц. На матрице Грея представлены допустимые расширения четвертого интервала 01010. Получаем матрицу R_9 и включаем в решение интервал I_3. Применяем правило строки без единиц, получаем матрицу R_{10}.

R_9	00101
5) 01101	1
7) 11111	0
8) 11101	1
9) 10100	1
	3

R_{10}	00101	11111
5) 01101	1	1
8) 11101	0	1
9) 10100	1	0
	3	5



На матрице Грея слева продемонстрирована совместимость пятого интервала 11111 с пятой и восьмой точками, на матрице Грея справа – текущее решение.



К последней матрице совместимости не применимо ни одно из рассмотренных правил. Это означает, что каждая точка совместима с каким-либо интервалом частичного решения, и существует не единственная возможность расширить любой интервал из U_k на множестве $M^1_{f_\times} \cup M^\times_{f_\times}$ так, чтобы расширение включало точку из M_k.

В этом случае необходимо расширить один из интервалов так, чтобы расширение содержало какую-либо из совместимых с ним точек. Было показано, что наилучшим в данном случае является выбор интервала наибольшего ранга и его расширение по минимальному числу компонент.

Определение. *Рангом столбца матрицы совместимости* назовем ранг сопоставленного столбцу интервала.

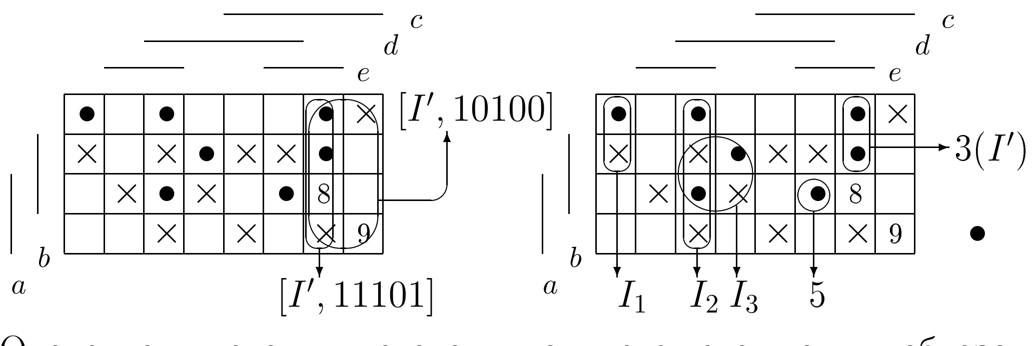
Правило столбца наибольшего ранга. Если к матрице совместимости не применимо ни одно из трех предыдущих правил, то в ней выбирается столбец I наибольшего ранга. Среди совместимых с ним точек находится точка α с минимальным числом компонент, ортогональных внешним компонентам интервала I. Из матрицы удаляются строки, которым сопоставлены точки из $[I, \alpha]$. Интервал I заменяется на $[I, \alpha]$ и столбец I пересчитывается.

Заметим, что если интервал I не является совместимым с точкой β, то и интервал $[I, \alpha]$ и точка β также несовместимы, то есть нули в столбце I останутся нулями и в столбце $[I, \alpha]$. Значит, необходимо проверить совместимость интервала $[I, \alpha]$ лишь с точками, совместимыми с интервалом I (некоторые единицы могут стать нулями).

Пример. Применим правило к матрице R_{10}. Выберем третий столбец максимального ранга 5. Точка 01101 ортогональна интервалу 00101 лишь по одной компоненте, следовательно, заменим интервал в третьем столбце $I' = [00101, 01101] = 0{-}101$ и удалим пятую строку. Расширение I' остается совместимым с восьмой точкой 11101 и перестает быть совместимым с девятой 10101, что показано на матрице Грея слева.

R_{10}	00101	11111
5) 01101	1	1
8) 11101	1	1
9) 10100	1	0
	3	5

R_{11}	0−101	11111
8) 11101	1	1
9) 10100	0	0
	3	5



Очередная итерация метода выполняется следующим образом: если это возможно, к матрице совместимости применяются правила строки без единиц, столбца без единиц, столбца с одной единицей; иначе – правило столбца наибольшего ранга. Алгоритм заканчивает работу, когда матрица совместимости пуста.

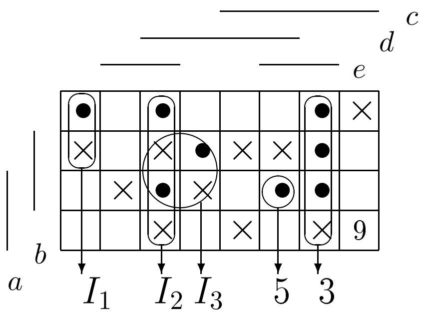
Пример. Закончим минимизацию функции. К третьему столбцу матрицы R_{11} применяем правило столбца с одной единицей, получаем матрицу R_{12}. (текущее решение на матрице Грея слева). К третьему столбцу матрицы R_{12} применяем правило столбца без единиц, получаем R_{13} и включаем в решение интервал I_4. (матрица Грея справа).

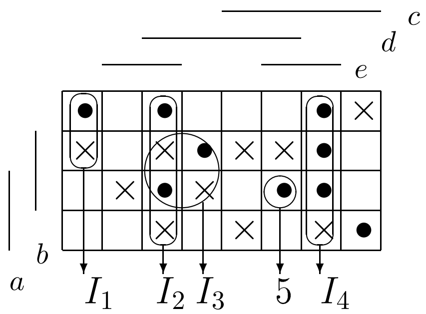
R_{12}

	−−101	11111
9) 10100	0	0
	3	5

R_{13}

	11111
9) 10100	0
	5





К матрице R_{13} применяем правило столбца без единиц, получаем матрицу R_{14} и включаем в решение интервал I_5. Применяем к R_{14} правило строки без единиц, получаем матрицу R_{15}, не содержащую ни одной строки. Значит, все точки функции содержатся в интервалах частичного решения (на матрице Грея слева). Применяем к R_{15} правило столбца без единиц и включаем в решение интервал I_6. Получаем пустую матрицу R_{16}, минимизация функции закончена. Решение показано на матрице Грея справа.

R_{13}

	11111
9) 10100	0
	5

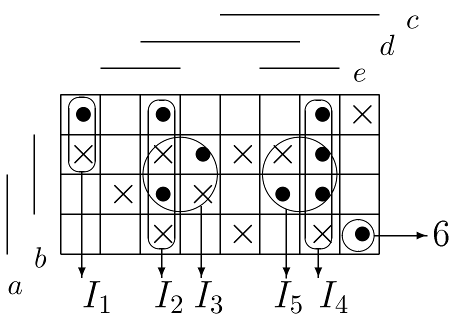
R_{14}

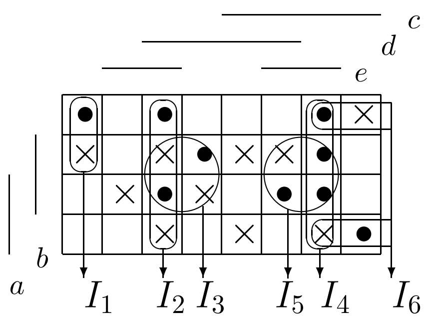
9) 10100

R_{15}

10100
6

R_{16}





Выпишем приближенную кратчайшую ДНФ, заданную интервалами $I_1 - I_6$ окончательного решения.

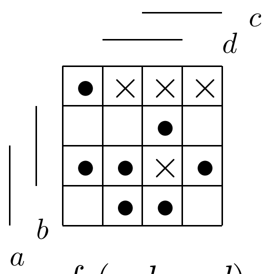
$$\text{ПриКратДНФ} = \underset{K_1}{\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}\,\overline{e}} \vee \underset{K_2}{\overline{c}\,d\,e} \vee \underset{K_3}{b\,\overline{c}\,d} \vee \underset{K_4}{c\,\overline{d}\,e} \vee \underset{K_5}{b\,c\,e} \vee \underset{K_6}{\overline{b}\,c\,\overline{d}}.$$

Длина полученной ДНФ равна 6, ранг 19. •

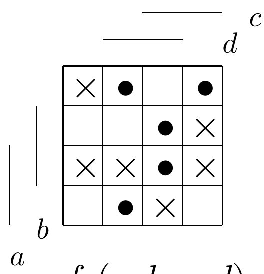
Как видно из последней матрицы Грея, решение избыточно: интервал I_4 можно удалить. Мы могли бы получить точное решение, если бы в матрице R_{10} из двух столбцов одинакового ранга выбрали бы не третий, а пятый столбец (проверьте это самостоятельно). Кроме того, вместо интервала I_5 мы могли взять другое расширение интервала 11111 и получить безызбыточную ДНФ. Все это подчеркивает приближенность метода, которая связана с применением правила столбца наибольшего ранга.

12.4. Упражнения

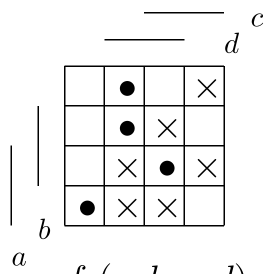
Упр. 1. Найти кратчайшие ДНФ неполностью определенных булевых функций, пользуясь двухэтапным методом.



$f_1(a,b,c,d)$

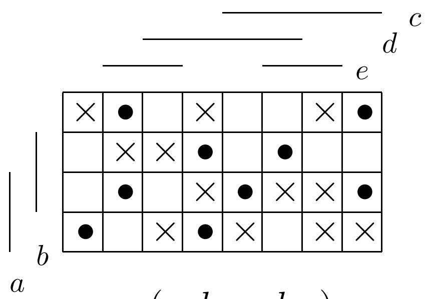


$f_2(a,b,c,d)$

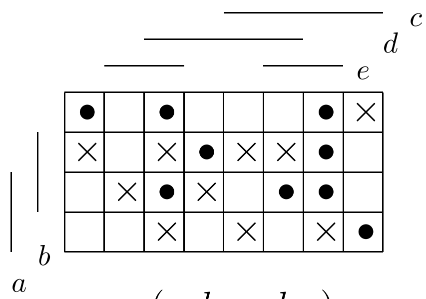


$f_3(a,b,c,d)$

Упр. 2. Найти методом Закревского приближенные кратчайшие ДНФ неполностью определенных булевых функций $f_1(a,b,c,d) - f_3(a,b,c,d)$ из упр. 1 и следующих функций:



$g_1(a,b,c,d,e)$



$g_2(a,b,c,d,e)$

Упр. 3. Пользуясь методом конкурирующих интервалов, найти приближенные кратчайшие ДНФ функций $g_1(a,b,c,d,e)$, $g_2(a,b,c,d,e)$ из упр.2 и функции $h(a,b,c,d,e,f)$.

$$\begin{aligned}M_h^1 = \{&000000, 000101, 011010, 011110, 011101, 010010, 010101, 010100,\\ &110000, 110010, 111111, 101001, 100001, 100101, 100100\}\\ M_h^\times = \{&000001, 000010, 000100, 001010, 001111, 011111, 010000, 010110,\\ &010111, 110110, 110100, 111110, 101011, 101111, 101101, 100000,\\ &100111\}\end{aligned}$$

13. Система булевых функций

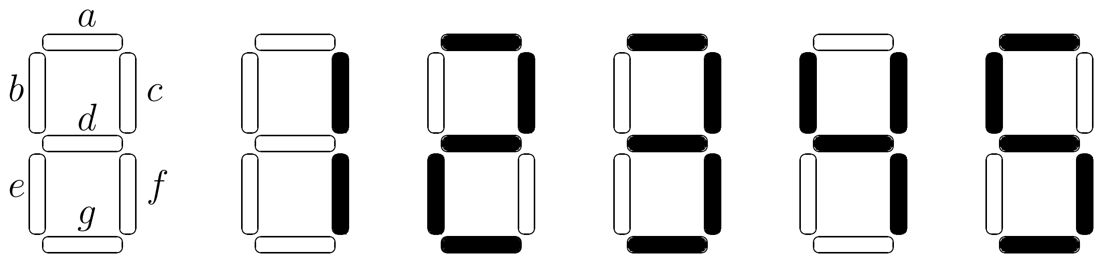
13.1. Определение системы булевых функций

Определение. Множество булевых функций,

$$\mathcal{F} = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$$

зависящих от одних и тех же переменных и рассматриваемых как единый объект, называется *системой булевых функций*.

Пример. Рассмотрим электронное табло, на вход которого поступают сигналы от трех датчиков. На табло отображается цифра от 1 до 5, представление которой в виде булева вектора считывается с датчиков.



001 010 011 100 101

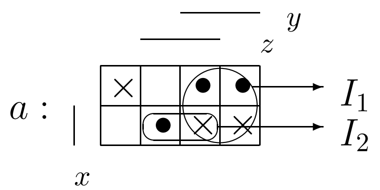
На левом рисунке изображено табло и латинскими буквами обозначены его фрагменты. На остальных рисунках представлены цифры от 1 до 5 и записаны значения датчиков x, y, z, соответствующие данной цифре. Каждому фрагменту табло $a, \ldots, g$ сопоставим булеву функцию, зависящую от x, y и z, и равную 1, если при данном наборе значений переменных фрагмент табло светится, и нулю в противном случае. Ясно, что все функции являются частичными, так как они не определены на наборах 000, 110, 111. Представим систему функций $\mathcal{F} = \{a, \ldots, g\}$ общей таблицей истинности (аргументы опущены для упрощения записи).

$x\ y\ z$	a	b	c	d	e	f	g
0 0 0	×	×	×	×	×	×	×
0 0 1	0	0	1	0	0	1	0
0 1 0	1	0	1	1	1	0	1
0 1 1	1	0	1	1	0	1	1
1 0 0	0	1	1	1	0	1	0
1 0 1	1	1	0	1	0	1	1
1 1 0	×	×	×	×	×	×	×
1 1 1	×	×	×	×	×	×	×

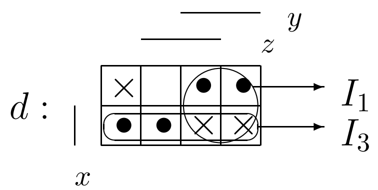
•

Система булевых функций может рассматриваться как математическая модель дискретного устройства. В этом случае ставится задача построения схемы из логических элементов, реализующей эту систему функций.

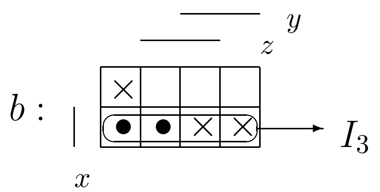
Пример. Построим схему устройства из предыдущего примера. Представим булевы функции $a(x,y,z) - f(x,y,z)$ матрицами Грея и получим систему кратчайших ДНФ, задающих эти функции. Обратим внимание, что $a(x,y,z) = g(x,y,z)$, значит, задающие эти функции ДНФ также совпадут.



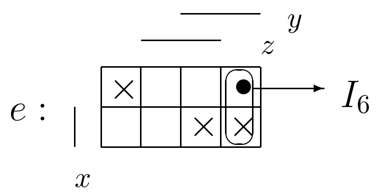
$\text{КратДНФ}_a = \underbrace{y}_{K_1} \vee \underbrace{x\,z}_{K_2}.$



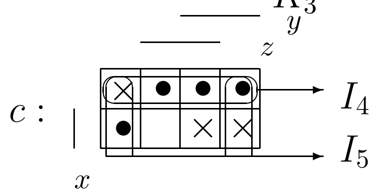
$\text{КратДНФ}_d = \underbrace{y}_{K_1} \vee \underbrace{x}_{K_3}.$



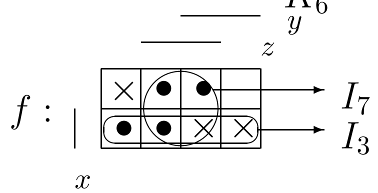
$\text{КратДНФ}_b = \underbrace{x}_{K_3}.$



$\text{КратДНФ}_e = \underbrace{y\,\overline{z}}_{K_6}.$

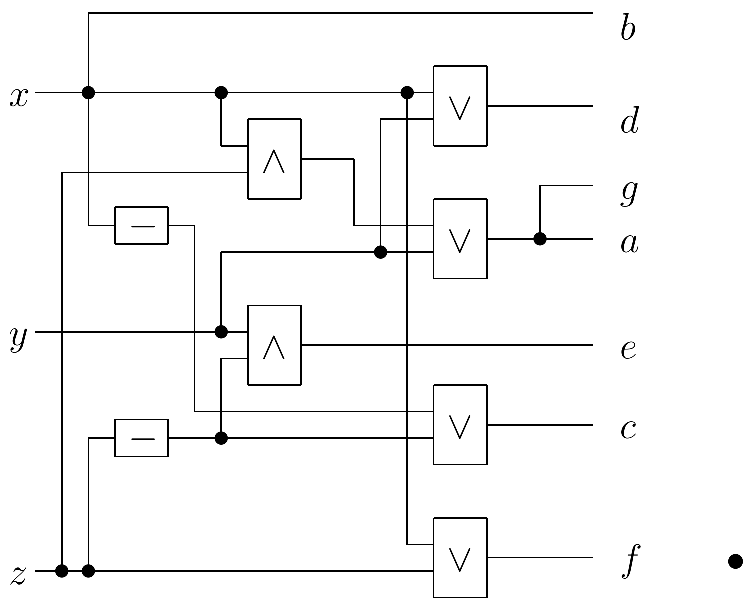


$\text{КратДНФ}_c = \underbrace{\overline{x}}_{K_4} \vee \underbrace{\overline{z}}_{K_5}.$



$\text{КратДНФ}_f = \underbrace{x}_{K_3} \vee \underbrace{z}_{K_7}.$

Построим по данной системе ДНФ логическую схему.



13.2. Кратчайшая и безызбыточная системы ДНФ

Определение. *Длиной системы ДНФ* называется число различных конъюнкций, входящих во все ДНФ системы.

Определение. *Рангом системы ДНФ* называется сумма рангов различных конъюнкций, входящих во все ДНФ системы.

Пример. Рассмотрим систему ДНФ.

$$\text{ДНФ}_1 = \underset{K_1}{\overline{x}\,y\,\overline{z}} \vee \underset{K_2}{\overline{y}\,z} \vee \underset{K_3}{x\,y\,z} \vee \underset{K_4}{\overline{x}\,\overline{y}\,z}, \quad \text{ДНФ}_2 = \underset{K_1}{\overline{x}\,y\,\overline{z}} \vee \underset{K_4}{\overline{x}\,\overline{y}\,z} \vee \underset{K_5}{x\,y} \vee \underset{K_6}{x\,z}.$$

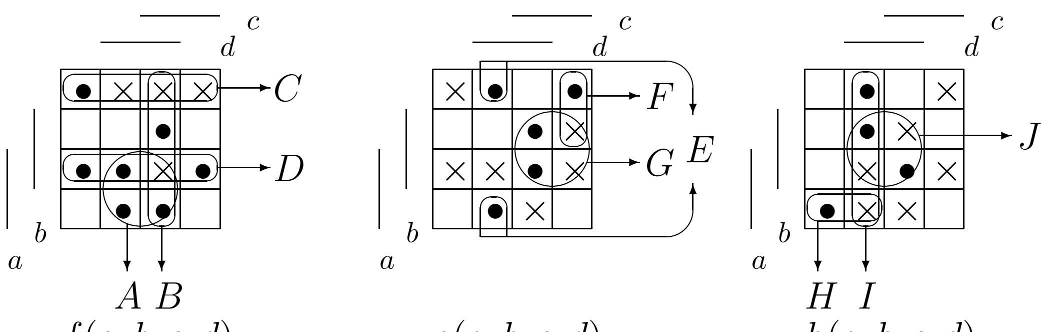
В ДНФ системы входят 6 различных конъюнкций $K_1, \ldots, K_6$ с суммой рангов 15. Значит, длина этой системы 6, ранг 15. •

Далее будем говорить, что система ДНФ $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ задает систему функций $\mathcal{F} = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$, если ДНФ D_i задает функцию $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$.

Определение. *Кратчайшей системой ДНФ* ($\mathcal{D}_{\text{крат}}$) системы булевых функций $\mathcal{F} = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$ называется система ДНФ наименьшей длины из всех систем ДНФ, задающих систему $\mathcal{F}$.

Следует отметить, что понятия "кратчайшая система ДНФ" и "система кратчайших ДНФ" не являются эквивалентными. Система, построенная из кратчайших ДНФ булевых функций системы $\mathcal{F}$, может не быть кратчайшей системой ДНФ, и наоборот, не все ДНФ кратчайшей системы ДНФ должны быть простыми кратчайшими и даже кратчайшими ДНФ.

Пример. Рассмотрим систему неполностью определенных булевых функций $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$. Построим систему кратчайших ДНФ этих функций, рассматривая каждую функцию в отдельности.

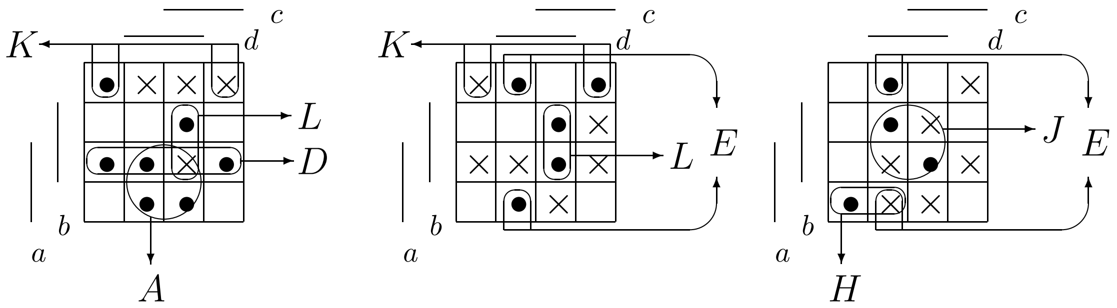


$f(a, b, c, d)$ $\quad$ $g(a, b, c, d)$ $\quad$ $h(a, b, c, d)$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \text{КратДНФ}_f = \underset{A}{a\,d} \vee \underset{B}{c\,d} \vee \underset{C}{\overline{a}\,\overline{b}} \vee \underset{D}{a\,b}, \\ \text{КратДНФ}_g = \underset{E}{\overline{b}\,\overline{c}\,d} \vee \underset{F}{\overline{a}\,c\,\overline{d}} \vee \underset{G}{b\,c}. \\ \text{КратДНФ}_h = \underset{H}{a\,\overline{b}\,\overline{c}} \vee \underset{I}{\overline{c}\,d} \vee \underset{J}{b\,d}. \end{cases}$$

Длина системы $\mathcal{D}$ равна 10, ранг 25. Система не является кратчайшей. Например, интервал A в достаточном множестве функции $f(a,b,c,d)$ можно заменить на E, и длина получившейся системы ДНФ будет равна 9.

Построим теперь кратчайшую систему ДНФ для $\mathcal{F}$.

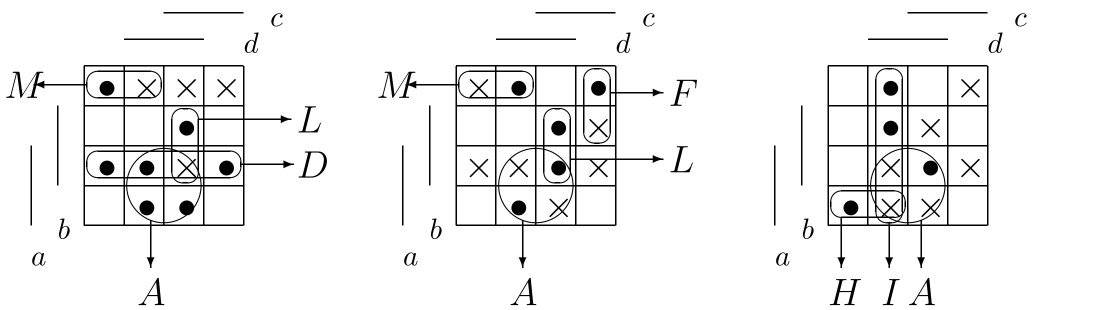


$f(a,b,c,d)$ $\qquad$ $g(a,b,c,d)$ $\qquad$ $h(a,b,c,d)$

$$\mathcal{D}_{\text{крат}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ДНФ}_f = a\,d \vee a\,b \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d} \vee b\,c\,d, \\ \qquad\quad A \quad\; D \quad\;\; K \qquad L \\ \text{ДНФ}_g = \overline{b}\,\overline{c}\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d} \vee b\,c\,d, \\ \qquad\quad E \qquad K \qquad L \\ \text{ДНФ}_h = \overline{b}\,\overline{c}\,d \vee a\,\overline{b}\,\overline{c} \vee b\,d. \\ \qquad\quad E \qquad H \qquad J \end{array} \right\}$$

Длина этой системы ДНФ равна 7, ранг 18. Все ДНФ из системы $\mathcal{D}_{\text{крат}}$ кратчайшие, но не простые кратчайшие: интервал L не является максимальным для функций $f(a,b,c,d)$ и $g(a,b,c,d)$, интервал K не максимальный для $f(a,b,c,d)$, E не максимальный для $h(a,b,c,d)$.

Построим еще одну кратчайшую систему ДНФ для $\mathcal{F}$.



$f(a,b,c,d)$ $\qquad$ $g(a,b,c,d)$ $\qquad$ $h(a,b,c,d)$

$$\mathcal{D}'_{\text{крат}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ДНФ}'_f = a\,d \vee a\,b \vee b\,c\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}, \\ \qquad\quad A \quad\; D \qquad L \qquad M \\ \text{ДНФ}'_g = a\,d \vee \overline{a}\,c\,\overline{d} \vee b\,c\,d \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}. \\ \qquad\quad A \qquad F \qquad L \qquad M \\ \text{ДНФ}'_h = a\,d \vee a\,\overline{b}\,\overline{c} \vee \overline{c}\,d. \\ \qquad\quad A \qquad H \qquad I \end{array} \right\}$$

Длина системы $\mathcal{D}'_{\text{крат}}$ равна 7, ранг 18. ДНФ$'_g$ не является кратчайшей, так как имеет длину 4, а КратДНФ$_g$ – длину 3. •

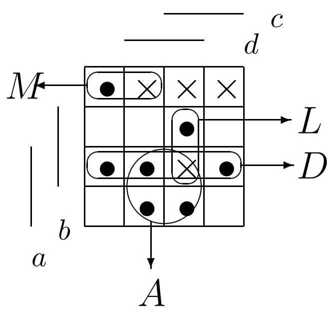
Определение. *Безызбыточной системой ДНФ* ($\mathcal{D}_{\text{без}}$) системы булевых функций $\mathcal{F} = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$ называется система ДНФ $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$, такая, что:

– удаление любой конъюнкции K из любой ДНФ D_i приводит к тому, что D_i перестает задавать функцию $f_i(x_1, \ldots, x_n)$,

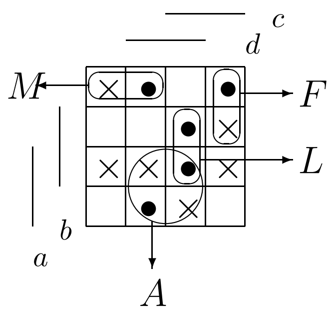
– если конъюнкция K входит в ДНФ $D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}$, то удаление любой буквы из K приводит к тому, что по крайней мере одна из этих ДНФ D_{i_j}, $1 \le j \le k$, перестает задавать функцию $f_{i_j}(x_1, \ldots, x_n)$.

Понятно, что система безызбыточных ДНФ будет также и безызбыточной системой ДНФ, обратное же не всегда верно.

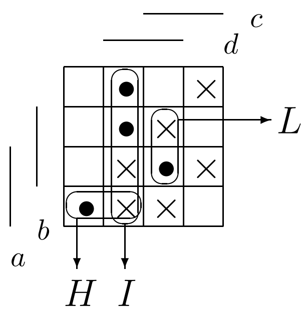
Пример. Построим безызбыточную систему ДНФ для системы функций из предыдущего примера.



$f(a,b,c,d)$



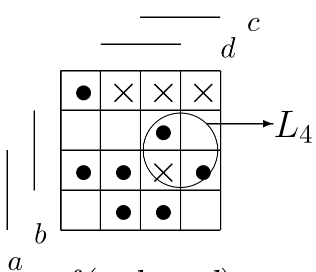
$g(a,b,c,d)$



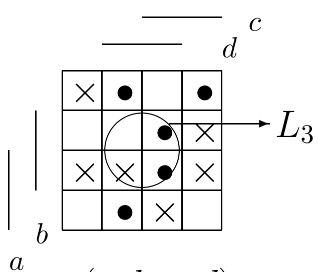
$h(a,b,c,d)$

$$\mathcal{D}_{\text{без}} = \left\{\begin{aligned} &\text{ДНФ}''_f = \underset{A}{a\,d} \vee \underset{D}{a\,b} \vee \underset{L}{b\,c\,d} \vee \underset{M}{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}, \\ &\text{ДНФ}''_g = \underset{A}{a\,d} \vee \underset{F}{\overline{a}\,c\,\overline{d}} \vee \underset{L}{b\,c\,d} \vee \underset{M}{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}. \\ &\text{ДНФ}''_h = \underset{H}{a\,\overline{b}\,\overline{c}} \vee \underset{I}{\overline{c}\,d} \vee \underset{L}{b\,c\,d}. \end{aligned}\right\}$$

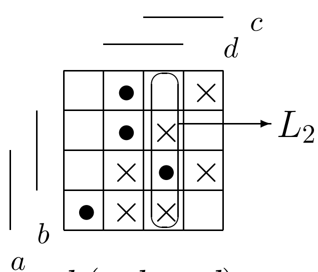
Интервал L не является максимальным (конъюнкция $b\,c\,d$ не является простой импликантой) ни для одной функции. Однако любое расширение этого интервала не является допустимым по крайней мере для одной из функций, что показано на матрицах Грея. Здесь L_2, L_3, L_4 – расширения интервала L по второй, третьей и четвертой компонентам соответственно.



$f(a,b,c,d)$



$g(a,b,c,d)$



$h(a,b,c,d)$

Интервал M является максимальным для функции $g(a, b, c, d)$, а значит, не может быть расширен. Остальные интервалы максимальные для функций, в чьи достаточные множества они включены. Ни один интервал нельзя удалить из достаточного множества любой функции так, чтобы множество осталось достаточным. Поэтому, хотя ни одна ДНФ не является безызбыточной, система $\mathcal{D}_{\text{без}}$ является безызбыточной системой ДНФ. •

13.3. Минимизация систем булевых функций

Определение. *Минимизировать систему булевых функций* это значит построить ее кратчайшую систему ДНФ.

Конечно, как и в случае одной булевой функции, возможны и другие постановки задач: построить все кратчайшие системы ДНФ, систему наименьшего ранга и так далее. Кроме того, так как минимизация системы булевых функций более сложна, чем минимизация одной функции, часто на практике строится *приближенная кратчайшая система ДНФ*, то есть система ДНФ, близкая по длине к кратчайшей.

Кроме того, часто ставится задача построения безызбыточной системы ДНФ. Это связано как с тем, что безызбыточные системы ДНФ часто оказываются близкими по длине к кратчайшим, так и с тем, что схемы, построенные по безызбыточным системам ДНФ, удобны для диагностики.

Как было показано ранее, кратчайшая система ДНФ и система кратчайших ДНФ не являются равнозначными понятиями. Поэтому при минимизации системы булевых функций все функции необходимо рассматривать как единый объект. Как правило, для решения этой задачи модифицируются методы минимизации одной булевой функции. Рассмотрим метод конкурирующих интервалов в применении к системе булевых функций.

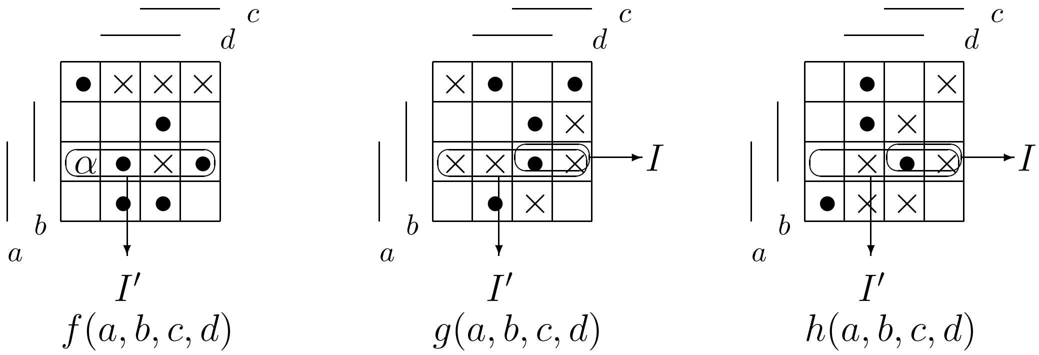
Пусть $\mathcal{F} = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$ – система булевых функций. Для ее минимизации в метод конкурирующих интервалов вносятся следующие изменения.

Во-первых, точки и интервалы сопровождаются обозначениями или номерами функций. Так, запись $\alpha(1)$ означает точку α функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, а запись $I(1, 3)$ – интервал I, допустимый для функций $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_3(x_1, \ldots, x_n)$ и включенный в достаточное множество этих функций.

Во-вторых, расширение интервала $I(j_1, \ldots, j_k)$ до точки $\alpha(i)$ сопровождается номерами функций $(i, j_1, \ldots, j_k)$.

В-третьих, интервал $I(j_1, \ldots, j_k)$ и точка $\alpha(i)$ совместимы, если и только если интервал $I'(i, j_1, \ldots, j_k) = [I(j_1, \ldots, j_k), \alpha(i)]$ допустим для функций $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_{j_1}(x_1, \ldots, x_n)$,..., $f_{j_k}(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример. Рассмотрим систему неполностью определенных булевых функций $\mathcal{F}$ из предыдущих примеров.

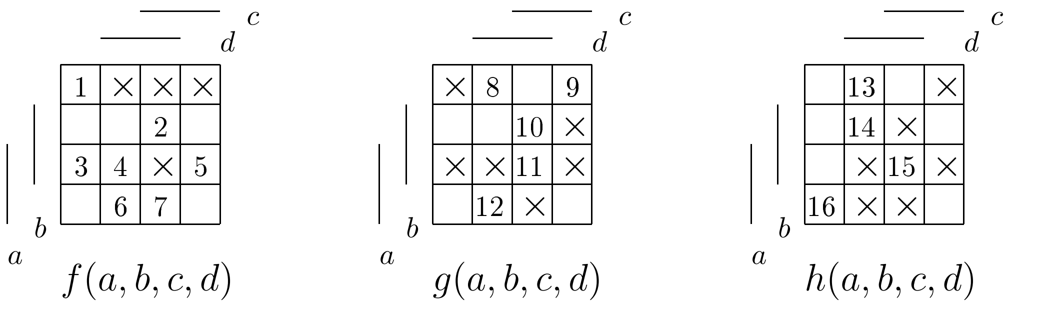


Рассмотрим точку $\alpha(f) = 1100$ и интервал $I(g,h) = 111-$. Минимальное расширение интервала $I(g,h)$ до точки $\alpha(f)$ (интервал $I'(f,g,h) = 11--$) не является допустимым для функции $h(a,b,c,d)$ и, следовательно, не может быть включен в решение. Но если рассмотреть интервал $I(g) = 111-$ и ту же точку $\alpha(f)$, то интервал $I'(f,g) = [I(g), \alpha(f)] = 11--$ будет допустимым для функций $f(a,b,c,d)$, $g(a,b,c,d)$ и может быть включен в решение для этих функций. •

В-четвертых, интервал $I(j_1,\ldots,j_k)$ при применении правила столбца без единиц расширяется таким образом, чтобы он оставался допустимым для всех функций $f_{j_1}(x_1,\ldots,x_n)$,..., $f_{j_k}(x_1,\ldots,x_n)$, номера которых перечислены в скобках.

Остальные понятия и правила алгоритма остаются без изменений.

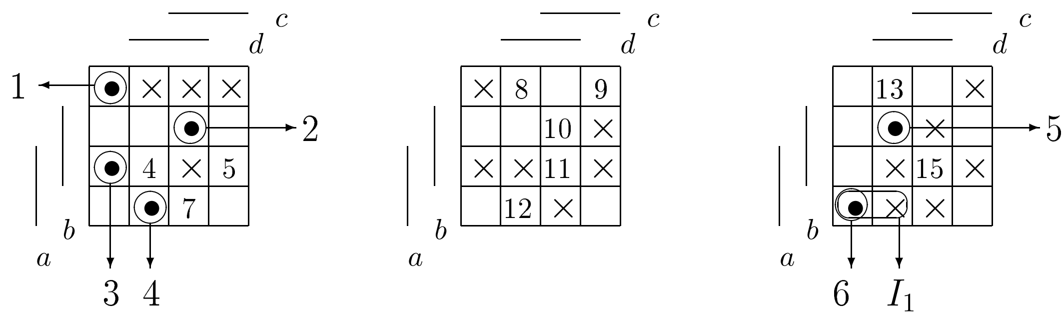
Пример. Применим алгоритм для минимизации той же системы булевых функций. Пронумеруем для наглядности точки функций.



В матрице совместимости на следующей странице представлен результат многократного применения правила строки без единиц. На этот раз мы для сокращения записи не переписываем матрицу каждый раз после применения какого-либо правила, а вычеркиваем удаляемые строки или столбцы. Применяем правило до тех пор, пока в матрице не появится столбец без единиц.

	0000(f)	0111(f)	1100(f)	1001(f)	0101(h)	1000(h)
~~1) 0000(f)~~						
~~2) 0111(f)~~	~~0~~					
~~3) 1100(f)~~	~~0~~	~~0~~				
4) 1101(f)	0	0	1	1	0	0
5) 1110(f)	0	0	1	0	0	0
~~6) 1001(f)~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~			
7) 1011(f)	0	1	0	1	0	0
8) 0001(g)	1	0	0	1	0	0
9) 0010(g)	1	0	0	0	0	0
10) 0111(g)	0	1	0	0	0	0
11) 1111(g)	0	1	1	1	0	0
12) 1001(g)	0	0	0	1	0	0
13) 0001(h)	0	0	0	1	1	0
~~14) 0101(h)~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~		
15) 1111(h)	0	1	0	1	1	0
~~16) 1000(h)~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
	1	2	3	4	5	6

Применяем к шестому столбцу матрицы правило столбца без единиц. В результате в решение включается интервал $I_1 = 101{-}(h)$. Здесь и далее на матрицах Грея мы выделяем интервалы из текущего частичного решения и содержащиеся в них точки.

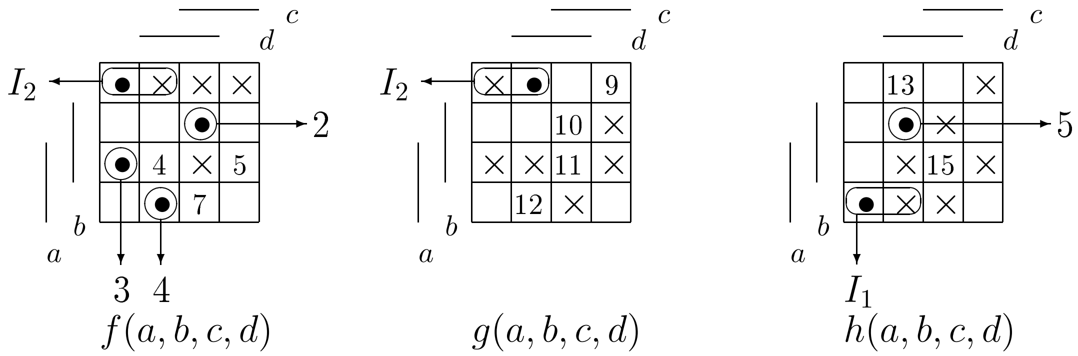


$f(a,b,c,d)$ $g(a,b,c,d)$ $h(a,b,c,d)$

В результате получаем матрицу совместимости на следующей странице. В ней нет строк без единиц, столбцов без единиц и столбцов с одной единицей, поэтому применяем к первому столбцу правило столбца наибольшего ранга. Расширяем интервал 0000(f) до восьмой точки 0001(g), получаем интервал $000{-}(f,g)$ и добавляем его в частичное решение. Пересчитываем первый столбец и записываем его в матрицу последним. Удаляем из матрицы восьмую строку.

	$0000(f)$	$0111(f)$	$1100(f)$	$1001(f)$	$0101(h)$	$000{-}(f,g)$
4) $1101(f)$	0	0	1	1	0	0
5) $1110(f)$	0	0	1	0	0	0
7) $1011(f)$	0	1	0	1	0	0
~~8) $0001(g)$~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	
9) $0010(g)$	1	0	0	0	0	0
10) $0111(g)$	0	1	0	0	0	0
11) $1111(g)$	0	1	1	1	0	0
12) $1001(g)$	0	0	0	1	0	0
13) $0001(h)$	0	0	0	1	1	0
15) $1111(h)$	0	1	0	1	1	0
	1	2	3	4	5	1

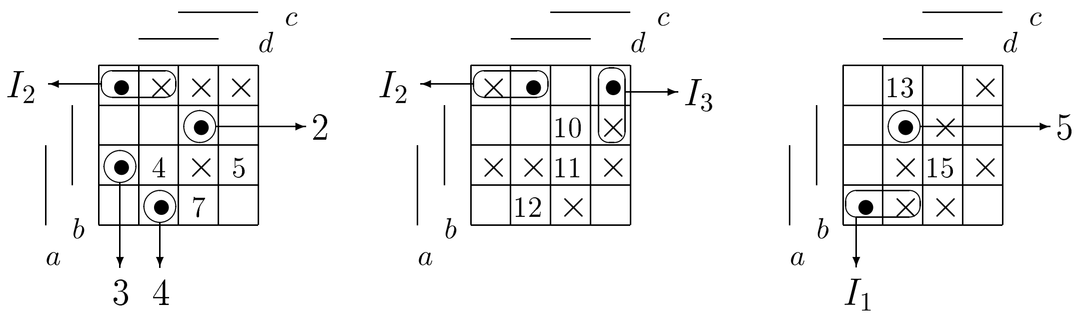
Первый столбец теперь не содержит единиц, применяем соответствующее правило. Интервал $I_2 = 000{-}(f,g)$ нельзя расширить, поэтому добавляем его в окончательное решение и удаляем первый столбец из матрицы. Получившаяся матрица совместимости представлена ниже на этой странице. Текущее решение показано на матрицах Грея.



Затем применяем к девятой строке (точка $0010(g)$) правило строки без единиц. В матрице появляется седьмой столбец $0010(g)$.

	$0111(f)$	$1100(f)$	$1001(f)$	$0101(h)$	$0010(g)$
4) $1101(f)$	0	1	1	0	0
5) $1110(f)$	0	1	0	0	0
7) $1011(f)$	1	0	1	0	0
10) $0111(g)$	1	0	0	0	0
11) $1111(g)$	1	1	1	0	0
12) $1001(g)$	0	0	1	0	0
13) $0001(h)$	0	0	1	1	0
15) $1111(h)$	1	0	1	1	0
	2	3	4	5	7

Седьмой столбец не содержит единиц, применяем к нему соответствующее правило. Расширяем интервал $0010(g)$ до интервала $I_3 = 0{-}10(g)$, который включаем в решение. Седьмой столбец удаляем из матрицы.

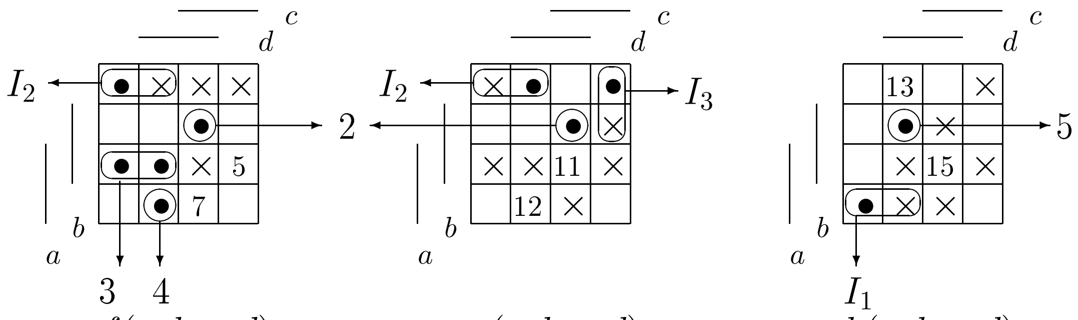


$f(a,b,c,d)$ $\qquad$ $g(a,b,c,d)$ $\qquad$ $h(a,b,c,d)$

Затем применяем ко второму столбцу правило столбца наибольшего ранга. Расширяем интервал $0111(f)$ до десятой точки $0111(g)$, получаем интервал $0111(f,g)$. Пересчитываем второй столбец. Затем применяем к третьему столбцу то же правило, расширяем интервал $1100(f)$ до четвертой точки $1101(f)$, получаем интервал $110{-}(f)$ и пересчитываем третий столбец.

	$0111(f)$	$1100(f)$	$1001(f)$	$0101(h)$	$0111(f,g)$	$110{-}(f)$
~~4) $1101(f)$~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	
5) $1110(f)$	0	1	0	0	0	1
7) $1011(f)$	1	0	1	0	0	0
~~10) $0111(g)$~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~		
11) $1111(g)$	1	1	1	0	1	1
12) $1001(g)$	0	0	1	0	0	0
13) $0001(h)$	0	0	1	1	0	0
15) $1111(h)$	1	0	1	1	1	0
	2	3	4	5	2	3

Частичное решение выглядит следующим образом.

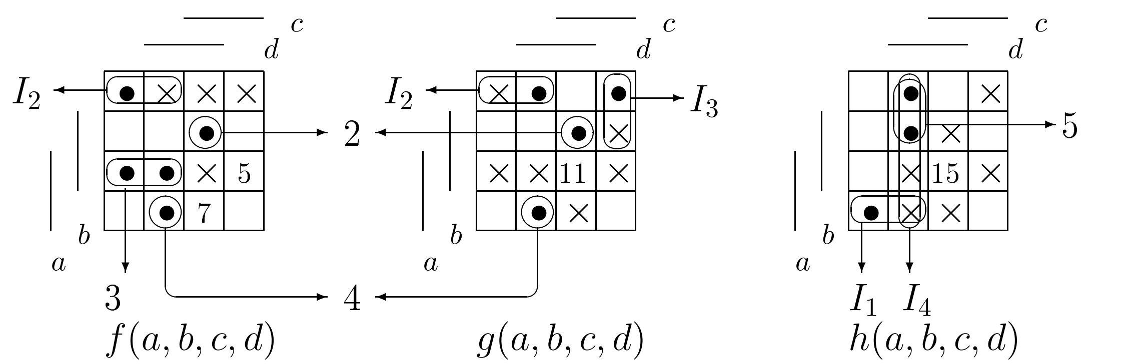


$f(a,b,c,d)$ $\qquad$ $g(a,b,c,d)$ $\qquad$ $h(a,b,c,d)$

Далее применяем правило столбца наибольшего ранга к четвертому столбцу и расширяем интервал $1001(f)$ до двенадцатой точки $1001(g)$, получаем интервал $1001(f,g)$. Удаляем двенадцатую строку и пересчитываем четвертый столбец. Затем применяем это же правило к пятому столбцу и расширяем интервал $0101(h)$ до тринадцатой точки $0001(h)$, получаем интервал $0{-}01(h)$. Удаляем тринадцатую строку и пересчитываем пятый столбец.

	$1001(f)$	$0101(h)$	$0111(f,g)$	$110{-}(f)$	$1001(f,g)$	$0{-}01(h)$
5) $1110(f)$	0	0	0	1	0	0
7) $1011(f)$	1	0	0	0	1	0
11) $1111(g)$	1	0	1	1	1	0
~~12) $1001(g)$~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~		
~~13) $0001(h)$~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
15) $1111(h)$	1	1	1	0	1	0
	4	5	2	3	4	5

Применяем к пятому столбцу правило столбца без единиц. Добавляем в решение интервал $I_4 = {-}{-}01(h)$ и удаляем пятый столбец из матрицы. Частичное решение принимает вид.



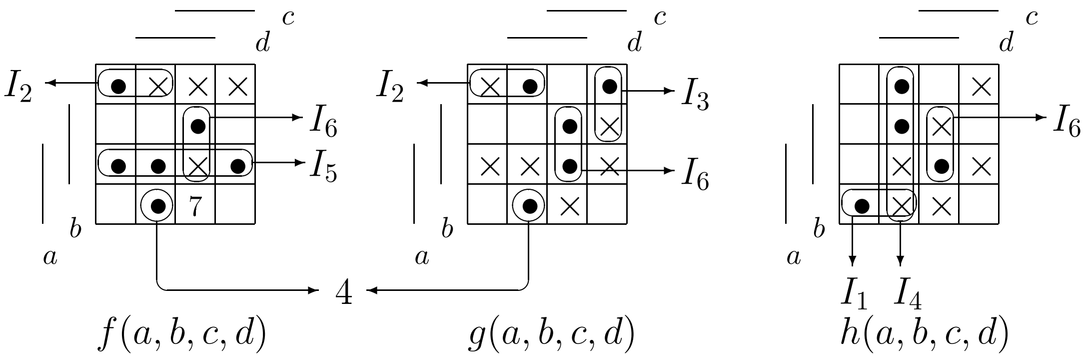
Применяем ко второму столбцу правило столбца наибольшего ранга. Расширяем интервал $0111(f,g)$ до одиннадцатой точки $1111(g)$, получаем интервал ${-}111(f,g)$. Пересчитываем второй столбец и удаляем одиннадцатую строку.

	$0111(f,g)$	$110{-}(f)$	$1001(f,g)$	${-}111(f,g)$
5) $1110(f)$	0	1	0	0
7) $1011(f)$	0	0	1	0
~~11) $1111(g)$~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	
15) $1111(h)$	1	0	1	1
	2	3	4	2

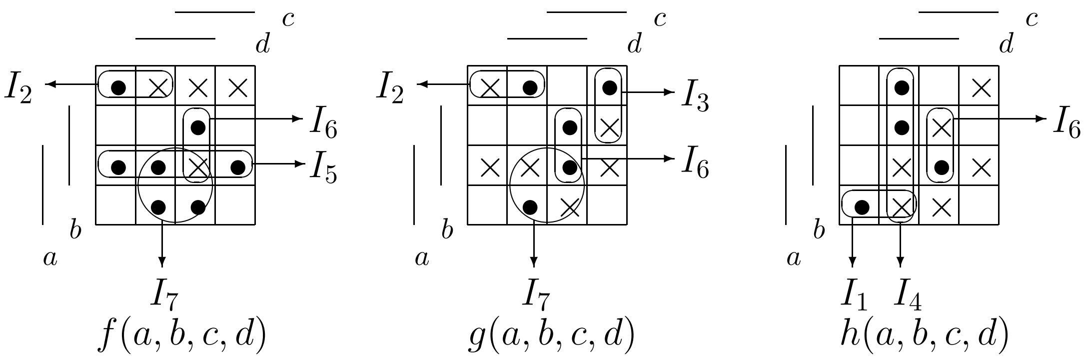
Применяем к третьему столбцу правило столбца с одной единицей. Расширяем интервал $110{-}(f)$ до точки $1110(f)$ (пятая), получаем интервал $I_5 = 11{-}{-}(f)$, который является максимальным для функции $f(a,b,c,d)$. Третий столбец теперь не содержит единиц, применяем к нему соответствующее правило и включаем I_5 в решение. Применяем правило столбца с одной единицей ко второму столбцу. Расширяем интервал ${-}111(f,g)$ до точки $1111(h)$ (пятнадцатая), получаем интервал ${-}111(f,g,h)$.

	$110-(f)$	$1001(f,g)$	$-111(f,g)$	$11--(f)$	$-111(f,g,h)$
~~5) $1110(f)$~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~		
7) $1011(f)$	0	1	0	0	0
~~15) $1111(h)$~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	
	3	4	2	3	2

Второй столбец теперь не содержит единиц, и сопоставленный ему интервал $I_6 = -111(f,g,h)$ нельзя расширить так, чтобы он оставался допустимым для всех функций, включаем I_6 в решение.



Применяем к четвертому столбцу правило столбца с одной единицей. Расширяем интервал $1001(f,g)$ до седьмой точки $1011(f)$, получаем интервал $10{-}1(f,g)$. Расширяя его так, чтобы он оставался допустимым для $f(a,b,c,d)$ и $g(a,b,c,d)$, получаем интервал $I_7 = 1{-}{-}1(f,g)$, который включаем в решение. Получаем пустую матрицу. Система ДНФ $\mathcal{D}$, задающая систему булевых функций $\mathcal{F}$, построена.

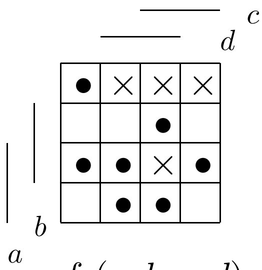


$$\mathcal{D} = \left\{\begin{aligned} \text{ДНФ}_f &= \underbrace{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}_{K_2} \vee \underbrace{a\,b}_{K_5} \vee \underbrace{b\,c\,d}_{K_6} \vee \underbrace{a\,d}_{K_7},\\ \text{ДНФ}_g &= \underbrace{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}_{K_2} \vee \underbrace{\overline{a}\,c\,\overline{d}}_{K_3} \vee \underbrace{b\,c\,d}_{K_6} \vee \underbrace{a\,d}_{K_7},\\ \text{ДНФ}_h &= \underbrace{a\,\overline{b}\,\overline{c}}_{K_1} \vee \underbrace{\overline{c}\,d}_{K_4} \vee \underbrace{b\,c\,d}_{K_6}. \end{aligned}\right\}$$

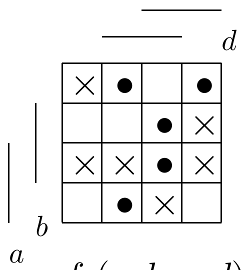
Длина этой системы 7, ранг 18. Как нетрудно убедиться, система является кратчайшей и безызбыточной. ●

13.4. Упражнения

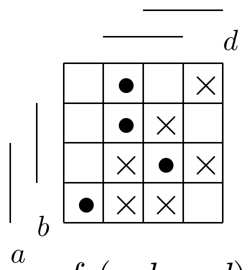
Построить кратчайшие системы ДНФ для систем неполностью определенных булевых функций $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ и $\mathcal{G} = \{g_1, g_2\}$ по матрицам Грея. Минимизировать те же системы, пользуясь методом конкурирующих интервалов, и сравнить полученные результаты.



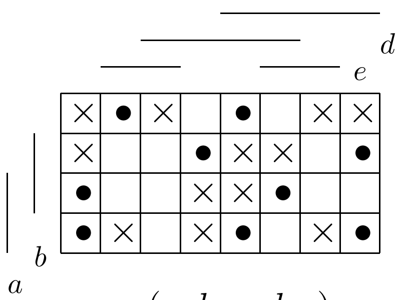
$f_1(a, b, c, d)$



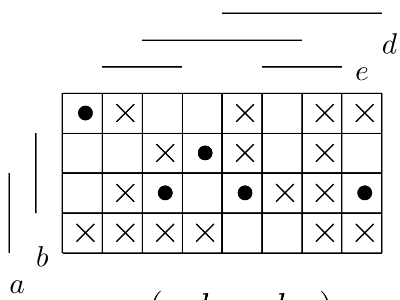
$f_2(a, b, c, d)$



$f_3(a, b, c, d)$



$g_1(a, b, c, d, e)$



$g_2(a, b, c, d, e)$

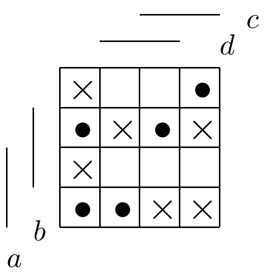
14. Контрольная работа 4

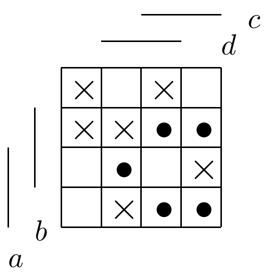
Тема контрольной работы: минимизация систем неполностью определенных булевых функций.

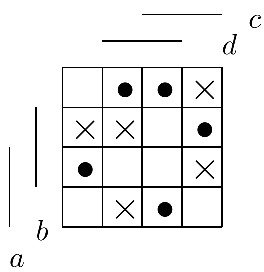
Дана система функций $\mathcal{F}$. Минимизировать ее визуально и методом конкурирующих интервалов, сравнить результаты.

Задания на контрольную работу (система функций $\mathcal{F}$)

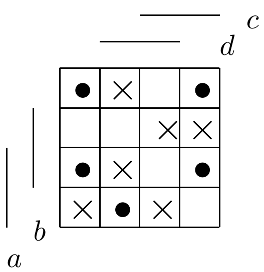
1)

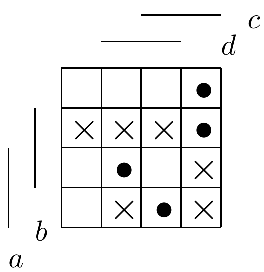


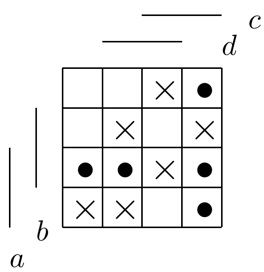




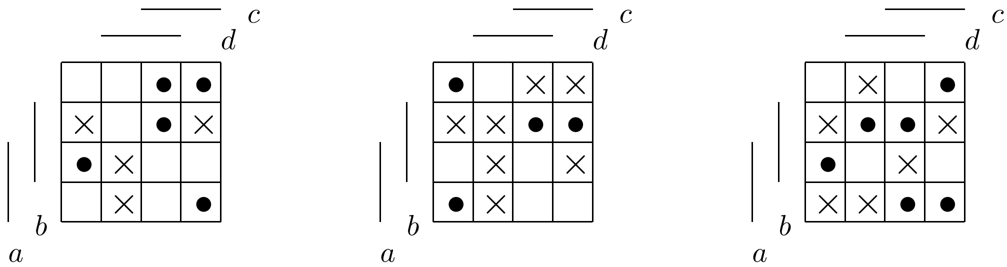
2)



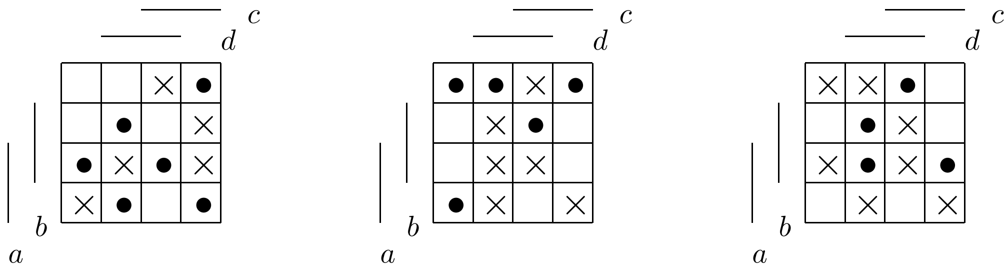




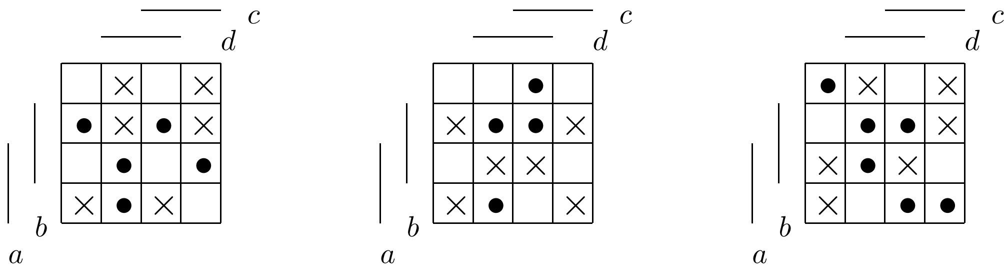
3)



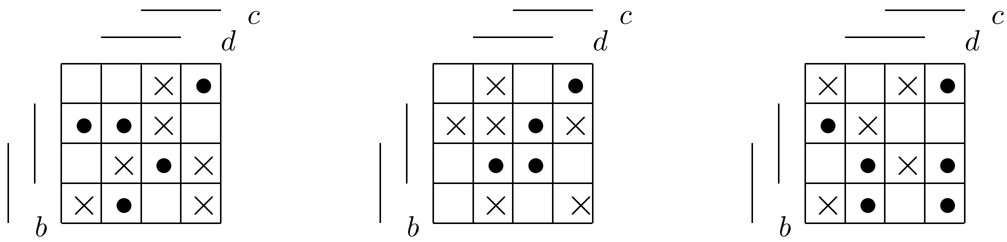
4)



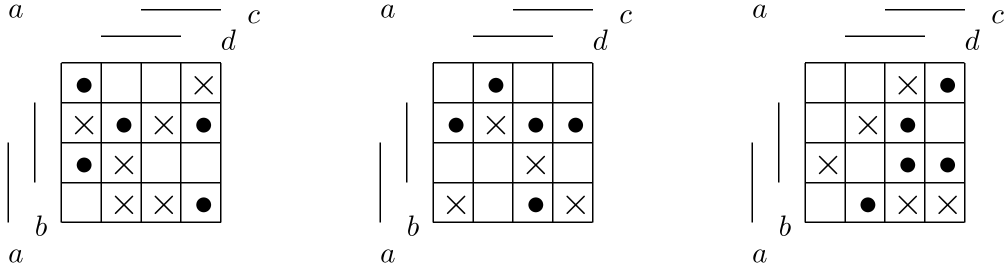
5)



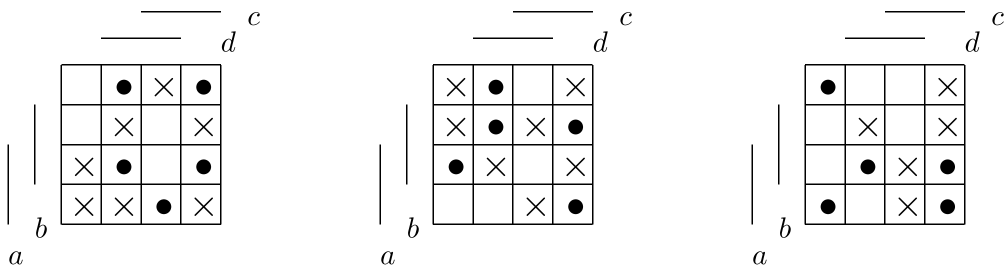
6)



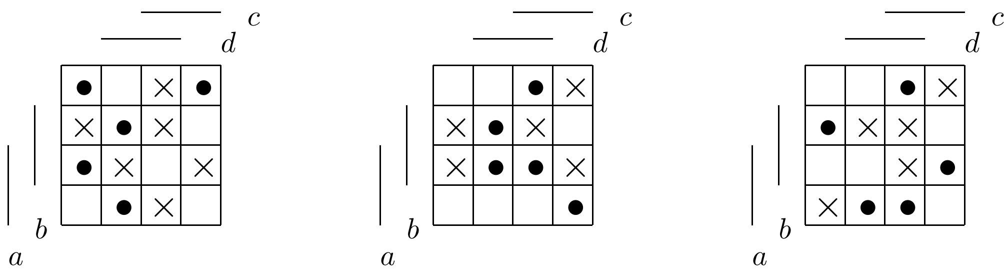
7)



8)



9)



10)

c d

●		×	●
×	●		
	×	●	×
		×	●

b a

c d

		×	×
●	×		
●	●	×	●
		●	×

b a

c d

	●	×	●
×		●	
●	×	×	
●			×

b a

11)

c d

●	●		×
×	×		●
	●	×	×
	×	●	×

b a

c d

		●	×
	×	●	
		×	●
●	×	●	×

b a

c d

	×		●
×	×	●	
	●	●	×
×	●		×

b a

12)

c d

●		●	×
		×	●
×	●	●	
●		×	×

b a

c d

		×	●
	×	×	●
●	●		
×		●	×

b a

c d

●		×	●
×	×	×	
	×	●	
●	×		×

b a

13)

c d

●		×	
×		●	×
●	×		●
×		×	●

b a

c d

×		●	
●	×		●
×	●		×
	×	●	

b a

c d

×			●
×		×	●
●		×	×
●	×	●	

b a

14)

c d

●		×	●
	●	×	
	×	●	×
×		×	●

b a

c d

	×		●
×		●	
●	×	×	●
		●	×

b a

c d

×			●
●		●	×
×		●	
×	×	●	

b a

15)

c d

×	●	×	
	×	●	×
	×		●
●	●	×	

b a

c d

×	●	×	
	×	×	●
●		●	×
●	×	×	

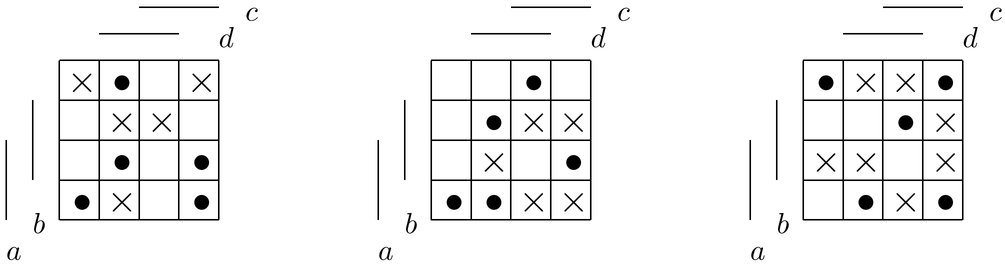
b a

c d

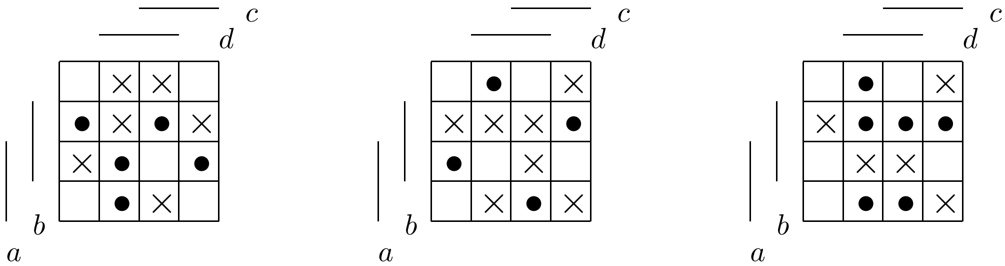
	×	●	×
	●	×	
●		●	×
×		●	

b a

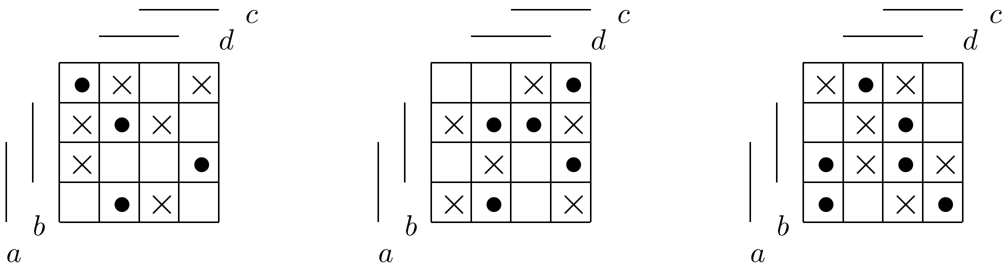
16)



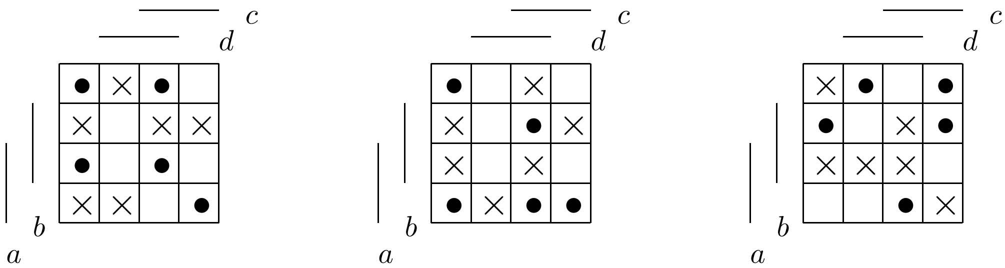
17)



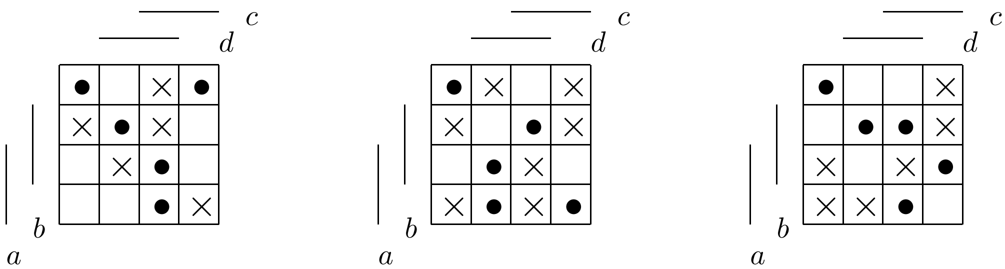
18)



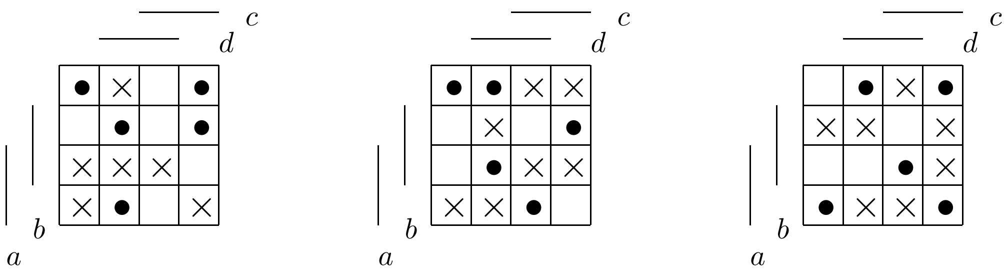
19)



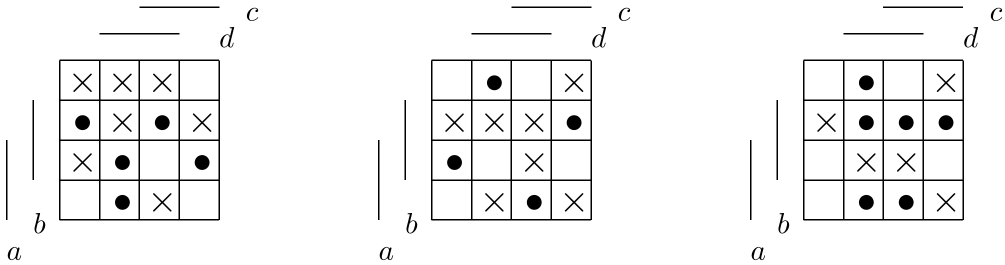
20)



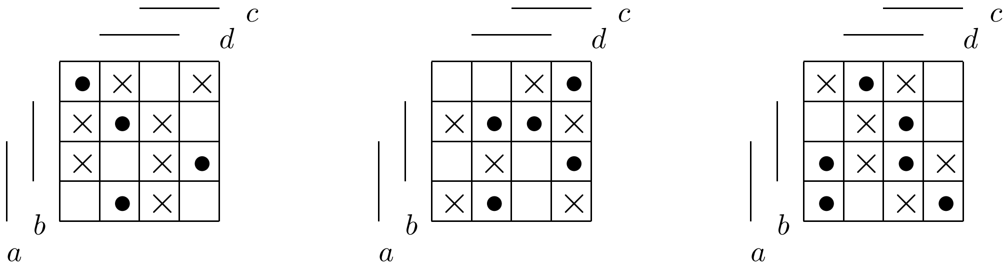
21)



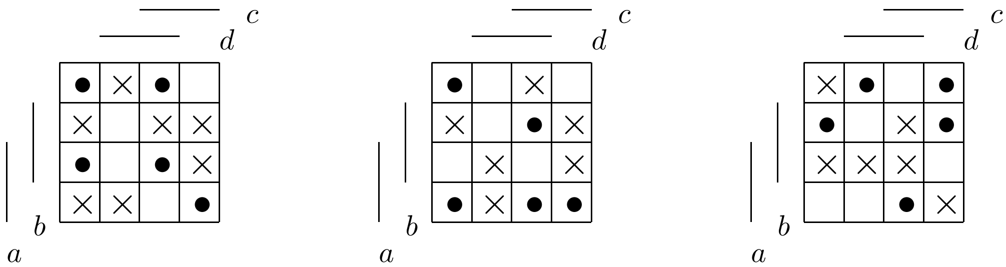
22)



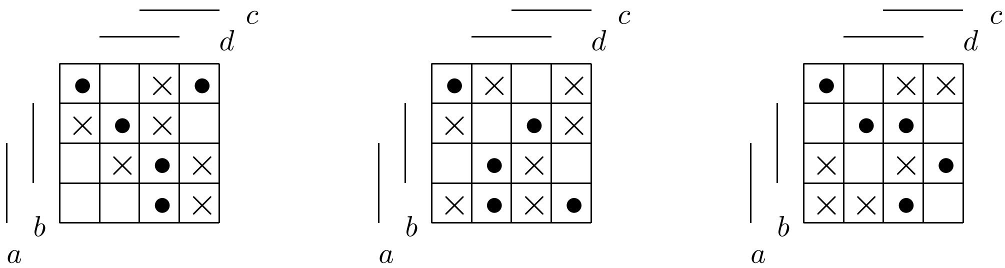
23)



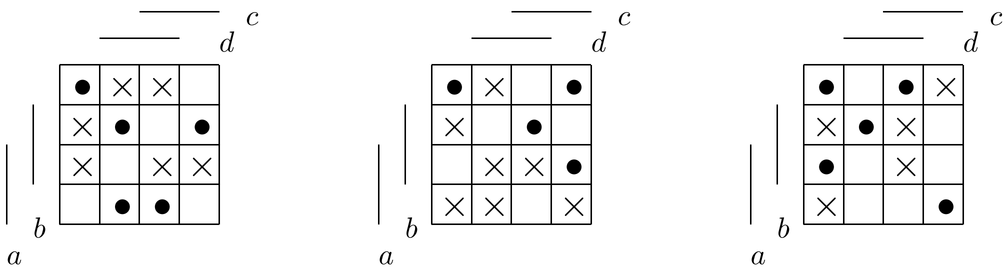
24)



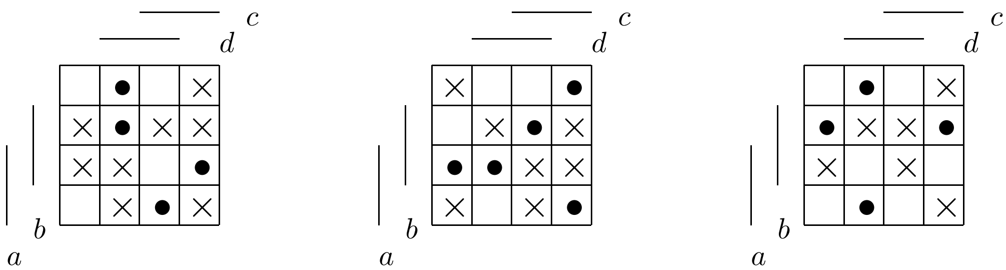
25)

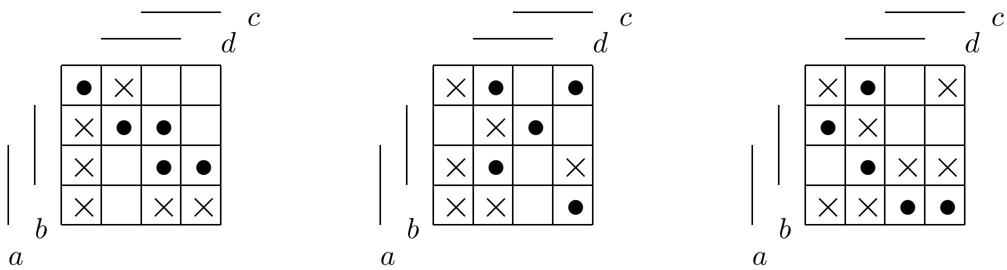


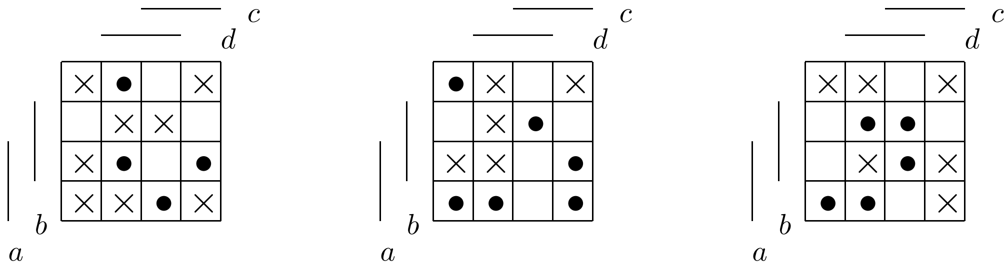
26)

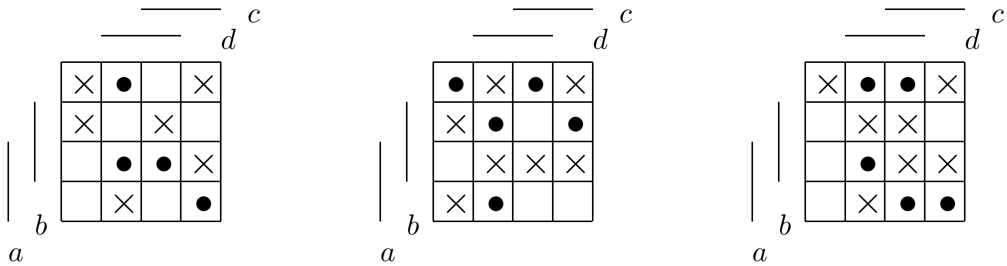


27)



28) 

29) 

30) 

15. Важнейшие замкнутые классы булевых функций

Определение. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *суперпозицией* булевых функций

$$f_0(y_1, \ldots, y_m), \quad f_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad f_m(x_1, \ldots, x_n),$$

если $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима через них формулой

$$F = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Пример. Пусть заданы булевы функции:

$$f_0(y_1, y_2, y_3) = y_1\overline{y}_2 \to y_3 \oplus \overline{y}_1,$$

$$f_1(a, b) = a \vee b, \quad f_2(a, b, c) = b \downarrow ac, \quad f_3(a, b, c) = a \to b \to c.$$

Их суперпозицией является функция

$$f(a, b, c) = (a \vee b)(\overline{b \downarrow ac}) \to (a \to b \to c) \oplus (\overline{a \vee b}). \bullet$$

Определение. Множество булевых функций $\mathcal{K}$ называется *замкнутым классом*, если суперпозиция любых функций из множества $\mathcal{K}$ принадлежит этому же множеству $\mathcal{K}$.

Множество всех булевых функций является замкнутым классом, так как суперпозиция любых булевых функций есть булева функция. Более того, некоторые подмножества булевых функций также являются замкнутыми классами. Пять из них, как наиболее важных для нас, мы рассмотрим в данном разделе.

15.1. Класс булевых функций, сохраняющих константу 0

Определение. Булева функция *сохраняет константу 0* (*принадлежит классу* $\mathcal{T}^0$), если на наборе из всех нулей функция принимает значение ноль.

Примеры. Мажоритарная булева функция сохраняет константу 0 (принадлежит классу $\mathcal{T}^0$):

$x\ y\ z$	$f(x,y,z)$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Из элементарных булевых функций классу $\mathcal{T}^0$ принадлежат, например, конъюнкция и тождественная функция; не принадлежат классу $\mathcal{T}^0$, например, штрих Шеффера и стрелка Пирса. ●

Утверждение о числе булевых функций класса $\mathcal{T}^0$. Число различных булевых функций, зависящих от n переменных и сохраняющих константу 0, равно 2^{2^n-1}.

Доказательство. Число различных булевых функций n аргументов равно 2^{2^n} (по теореме о числе булевых функций). В векторном представлении булевых функций первая компонента задает значение функции на наборе из всех нулей. Ровно половина из 2^{2^n} векторов содержит в первой компоненте ноль, поэтому число функций, сохраняющих константу 0, есть $2^{2^n}/2 = 2^{2^n-1}$. ●

Пример. Из всех 16 булевых функций двух аргументов x_1, x_2 8 функций (2^{2^2-1}) принадлежат классу $\mathcal{T}^0$: 0, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\hookrightarrow$, $\hookleftarrow$ и тождественные функции x_1 и x_2. ●

Теорема о замкнутости класса $\mathcal{T}^0$. Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 0, является замкнутым классом.

Доказательство. Рассмотрим суперпозицию любых булевых функций из $\mathcal{T}^0$, то есть функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

и покажем, что на наборе из всех нулей суперпозиция принимает значение ноль.

$$f(0, \ldots, 0) = f_0(f_1(0, \ldots, 0), \ldots, f_m(0, \ldots, 0)) =$$

[учтем, что $f_1(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{T}^0, \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{T}^0$]

$$= f_0(0, \ldots, 0) = [\text{ учтем, что } f_0(y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{T}^0\ ] = 0.$$

Из этого следует, что суперпозиция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $\mathcal{T}^0$, значит, класс $\mathcal{T}^0$ замкнут. •

Лемма о булевой функции, не сохраняющей константу 0. Если булева функция не сохраняет константу 0, то из нее подстановкой вместо каждого аргумента переменной x можно получить либо константу 1, либо инверсию $\overline{x}$.

Доказательство. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, не сохраняющую константу 0. Заменив каждый ее аргумент x_i на x (такая подстановка допустима по условию леммы), получим функцию одного аргумента $g(x) = f(x, \ldots, x)$. Исследуем ее.

$$g(0) = f(0, \ldots, 0) = 1, \text{ так как } f(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathcal{T}^0.$$

Если $g(1) = 1$, то $g(x)$ – константа 1. Если $g(1) = 0$, то $g(x) = \overline{x}$. •

Примеры. Рассмотрим две функции, не сохраняющие константу 0: стрелку Пирса $a \downarrow b$ и импликацию $a \to b$. Подставляя в них вместо аргументов переменную x, получаем:

$$x \downarrow x = \overline{x}, \quad x \to x = 1. \bullet$$

15.2. Класс булевых функций, сохраняющих константу 1

Определение. Булева функция *сохраняет константу 1* (*принадлежит классу* $\mathcal{T}^1$), если на наборе из всех единиц функция принимает значение единица.

Примеры. Мажоритарная булева функция сохраняет константу 1. Из элементарных булевых функций таковыми являются, например, дизъюнкция и конъюнкция. Не сохраняют константу 1, например, штрих Шеффера и стрелка Пирса. •

Утверждение о числе булевых функций класса $\mathcal{T}^1$. Число различных булевых функций, зависящих от n переменных и сохраняющих константу 1, равно 2^{2^n-1}.

Пример. Из всех 16 булевых функций двух аргументов x_1, x_2 8 функций (2^{2^2-1}) принадлежат классу $\mathcal{T}^1$: 1, $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\to$, $\leftarrow$ и тождественные функции x_1 и x_2. •

Теорема о замкнутости класса $\mathcal{T}^1$. Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 1, является замкнутым классом.

Доказательства утверждения и теоремы аналогичны доказательствам соответствующих результатов для класса $\mathcal{T}^0$.

15.3. Класс линейных булевых функций

15.3.1. Полином Жегалкина

Определение. *Положительной конъюнкцией* называется элементарная конъюнкция, не содержащая инверсий переменных. Договоримся обозначать положительную конъюнкцию через K^+.

Примеры. $K_1^+ = x_1x_2x_3$, $K_2^+ = x_4$, $K_3^+ = 1$. •

Определение. *Полиномом Жегалкина*, или *алгебраической нормальной формой (АНФ)*, булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется дизъюнкция с исключением различных положительных конъюнкций переменных из множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то есть формула вида

$$P = K_1^+ \oplus \ldots \oplus K_p^+,$$

задающая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример. $P = x_1x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_2 \oplus 1$ – полином Жегалкина. •

Определение. *Длиной полинома Жегалкина* назовем количество конъюнкций в полиноме, а его *степенью* – наибольший из рангов конъюнкций, входящих в полином.

Пример. Длина полинома Жегалкина из предыдущего примера равна 4, а степень – 3. •

Условимся считать константу 0 полиномом длины и степени 0.

Определение. Полином Жегалкина называется *линейным*, если его степень не превышает единицы.

Примеры. $P_1 = 1$, $P_2 = x \oplus y \oplus 1$ – линейные полиномы. •

Напомним основные равносильности для дизъюнкции с исключением (С.25–26), необходимые для дальнейших рассуждений.

Свойства 0 и 1:	$x \oplus 0 = x, \quad x \oplus 1 = \overline{x}.$
Закон коммутативности:	$x \oplus y = y \oplus x.$
Закон ассоциативности:	$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus y \oplus z.$
Закон дистрибутивности:	$x(y \oplus z) = xy \oplus xz.$

Добавим к ним еще две равносильности (первая очевидна, доказательство второй предоставляется читателю):

$$x \oplus x = 0,$$
$$x \vee y = x \oplus y \oplus xy.$$

Если в последней равносильности переменные заменить конюнкциями, то получим:

$$K_1 \vee K_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus K_1 K_2.$$

Для ортогональных конъюнкций равносильность примет вид:

$$K_1 \vee K_2 = K_1 \oplus K_2.$$

В частности, совершенная ДНФ булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ состоит из попарно ортогональных конъюнкций, значит

$$f(x_1, \ldots, x_n) \; = \bigvee_{c_1 \ldots c_n \in M_f^1} x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n} \; = \bigoplus_{c_1 \ldots c_n \in M_f^1} x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}.$$

Теорема о существовании полинома Жегалкина. Любая булева функция представима полиномом Жегалкина.

Доказательство. Константа 0 – это полином Жегалкина по договоренности. Любая другая булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима совершенной ДНФ (С. 38), а значит, как только что было показано, и формулой вида:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{c_1 \ldots c_n \in M_f^1} x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}.$$

Эта формула не является полиномом Жегалкина, если содержит переменные с инверсиями. От инверсий можно избавиться, используя равносильность $\overline{x} = x \oplus 1$. Раскрыв в полученной формуле скобки на основе закона дистрибутивности, получим сумму положительных конъюнкций, которая не является полиномом Жегалкина, если в ней конъюнкции повторяются. Используя равносильности $x \oplus x = 0$ и $x \oplus 0 = x$, удалим пары одинаковых конъюнкций. В результате получим полином Жегалкина. •

Лемма о числе положительных конъюнкций. Число различных положительных конъюнкций переменных из множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ равно 2^n.

Доказательство. Каждая положительная конъюнкция состоит из подмножества переменных из X, то есть представляется булевым вектором длины n, и наоборот, каждый вектор длины n задает положительную конъюнкцию подмножества переменных X. Значит, число различных положительных конъюнкций равно числу векторов длины n, то есть равно 2^n. •

Определение. Форму представления полинома Жегалкина

$$P = c_0 K_0^+ \oplus c_1 K_1^+ \oplus \ldots \oplus c_{2^n-1} K_{2^n-1}^+$$

булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, где c_i – булевы константы, назовем *формой с коэффициентами.*

Число 2^n положительных конъюнкций K_i^+ определяется леммой. Договоримся однозначно связывать с номером конъюнкции K_i^+ ее вид по следующему правилу: число i представлять булевым вектором $a_1 \ldots a_n$, который, в свою очередь, задаст подмножество переменных, составляющих конъюнкцию K_i^+.

Пример. При $n = 3$ конъюнкция $K_5^+ = x_1 x_3$, так как число 5 представляется булевым вектором 101, который задает подмножество переменных $\{x_1, x_3\}$ множества $\{x_1, x_2, x_3\}$. •

Таким образом, полином Жегалкина булевой функции n аргументов однозначно определяется вектором своих коэффициентов $\pi = c_0 c_1 \ldots c_{2^n-1}$, и наоборот, любой булев вектор длины 2^n однозначно определяет полином Жегалкина функции n аргументов.

Пример. Полином Жегалкина

$$\begin{aligned} P = 1 \oplus x \oplus xz \oplus yz \oplus xyz = K_0^+ \oplus K_4^+ \oplus K_5^+ \oplus K_3^+ \oplus K_7^+ = \\ = 1K_0^+ \oplus 0K_1^+ \oplus 0K_2^+ \oplus 1K_3^+ \oplus 1K_4^+ \oplus 1K_5^+ \oplus 0K_6^+ \oplus 1K_7^+ \end{aligned}$$

представляется вектором коэффициентов $\pi = 10011101$. •

Из последних рассуждений следует, что число различных полиномов Жегалкина булевых функций n аргументов равно числу различных булевых векторов длины 2^n.

Теорема о единственности полинома Жегалкина. Каждая булева функция имеет единственный полином Жегалкина.

Доказательство. Как только что было замечено, число различных полиномов Жегалкина булевых функций n аргументов равно числу булевых векторов длины 2^n, то есть равно 2^{2^n}. Но количество различных булевых функций n аргументов тоже равно 2^{2^n} (по теореме о числе булевых функций), и каждая булева функция представима полиномом Жегалкина (по теореме о существовании полинома), следовательно, на каждую булеву функцию приходится ровно по одному полиному Жегалкина. •

Таким образом, наряду с совершенной ДНФ, совершенной КНФ и сокращенной ДНФ, полином Жегалкина является еще одной канонической формой представления булевых функций.

15.3.2. Алгоритмы построения полинома Жегалкина

Рассмотрим алгоритмы построения полинома Жегалкина булевой функции, заданной различными способами, а именно: совершенной ДНФ, произвольной ДНФ, формулой и таблицей истинности.

Алгоритм построения полинома Жегалкина по СовДНФ (основан на доказательстве теоремы о существовании полинома Жегалкина).

Начало. Задана совершенная ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Шаг 1. Заменяем каждый символ дизъюнкции на символ дизюнкции с исключением.

Шаг 2. Заменяем каждую переменную с инверсией $\overline{x}$ равносильной формулой $x \oplus 1$.

Шаг 3. Раскрываем скобки.

Шаг 4. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых.

Конец. Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример. Найдем полином Жегалкина мажоритарной булевой функции по ее совершенной ДНФ.

$$
\begin{gathered}
\text{СовДНФ} = \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z = \\
= \overline{x}\,y\,z \oplus x\,\overline{y}\,z \oplus x\,y\,\overline{z} \oplus x\,y\,z = \\
= (1 \oplus x)\,y\,z \oplus x\,(1 \oplus y)\,z \oplus x\,y\,(1 \oplus z) \oplus x\,y\,z = \\
= y\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,y \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus \cancel{x\,y\,z} = \\
= y\,z \oplus x\,z \oplus x\,y = P. \bullet
\end{gathered}
$$

Алгоритм построения полинома Жегалкина по ДНФ (основан на равносильности $K_1 \vee K_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus K_1 K_2$).

Начало. Задана произвольная ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Шаг 1. Разбиваем ДНФ на пары конъюнкций, предпочтительно ортогональных (если число конъюнкций нечетно, одна из них остается без пары).

Шаг 2. Заменяем дизъюнкцию каждой пары конъюнкций $K_1 \vee K_2$ формулой $K_1 \oplus K_2 \oplus K_1 K_2$ или формулой $K_1 \oplus K_2$, если K_1 и K_2 ортогональны.

Шаг 3. В полученной формуле находим очередную дизъюнкцию $A_1 \vee A_2$ и заменяем ее формулой $A_1 \oplus A_2 \oplus A_1 A_2$. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока это возможно.

Шаг 4. Заменяем каждую переменную с инверсией $\overline{x}$ равносильной формулой $x \oplus 1$.

Шаг 5. Раскрываем скобки.

Шаг 6. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых.

Конец. Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример. Найдем полином Жегалкина мажоритарной функции по ДНФ.

$$\begin{aligned}
\text{ДНФ} &= x\,y\,\overline{z} \vee x\,z \vee y\,z = (x\,y\,\overline{z} \vee x\,z) \vee y\,z = \\
&= (x\,y\,\overline{z} \oplus x\,z) \vee y\,z = (x\,y\,\overline{z} \oplus x\,z) \oplus y\,z \oplus (x\,y\,\overline{z} \oplus x\,z)\,y\,z = \\
&= x\,y\,\overline{z} \oplus x\,z \oplus y\,z \oplus x\,y\,z = x\,y\,(1 \oplus z) \oplus x\,z \oplus y\,z \oplus x\,y\,z = \\
&= x\,y \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,z \oplus y\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} = x\,y \oplus x\,z \oplus y\,z = P. \bullet
\end{aligned}$$

Отметим, что полиномы мажоритарной функции, полученные в двух последних примерах, совпадают с точностью до порядка конъюнкций, и это естественно (по теореме о единственности полинома Жегалкина).

Алгоритмы построения полинома Жегалкина по формуле.

Способ 1 основан на предварительном преобразовании формулы в ДНФ (любым известным нам способом). Затем ДНФ преобразуется в полином Жегалкина по только что изученному алгоритму.

Примеры. Получим полиномы Жегалкина двух элементарных булевых функций: импликации и эквивалентности, представив их предварительно кратчайшими ДНФ.

$$\begin{aligned}
a \to b &= \overline{a} \vee b = \overline{a} \oplus b \oplus \overline{a}\,b = (1 \oplus a) \oplus b \oplus (1 \oplus a)b = \\
&= 1 \oplus a \oplus \cancel{b} \oplus \cancel{b} \oplus a\,b = 1 \oplus a \oplus a\,b; \\
a \sim b &= \overline{a}\,\overline{b} \vee a\,b = \overline{a}\,\overline{b} \oplus a\,b = (1 \oplus a)(1 \oplus b) \oplus a\,b = \\
&= 1 \oplus a \oplus b \oplus \cancel{a\,b} \oplus \cancel{a\,b} = 1 \oplus a \oplus b. \bullet
\end{aligned}$$

Аналогично можно получить полиномы Жегалкина всех элементарных булевых функций (оставим читателю их вывод).

$$
\begin{array}{ll}
a \vee b = a \oplus b \oplus a\,b & a \to b = 1 \oplus a \oplus a\,b \\
a \sim b = 1 \oplus a \oplus b & a \leftarrow b = 1 \oplus b \oplus a\,b \\
a \downarrow b = 1 \oplus a \oplus b \oplus a\,b & a \hookrightarrow b = a \oplus a\,b \\
a / b = 1 \oplus a\,b & a \hookleftarrow b = b \oplus a\,b
\end{array}
$$

Константы 0 и 1, тождественная функция, а также конъюнкция $a\,b$ и дизъюнкция с исключением $a \oplus b$ уже являются полиномами Жегалкина. Полином Жегалкина инверсии $\overline{a} = 1 \oplus a$.

Заметим, что некоторые из приведенных полиномов могут быть получены гораздо проще, в частности,

$$a \sim b = \overline{a \oplus b} = 1 \oplus a \oplus b.$$

Способ 2. Если булева функций задана произвольной формулой, то ее полином Жегалкина можно получить подстановкой в формулу вместо элементарных булевых функций их полиномов.

Пример. Найдем полином Жегалкина мажоритарной функции, заданной формулой:

$$F = x \sim y \leftarrow z \,/\, (x \to \overline{y}) = ((x \sim y) \leftarrow z) \,/\, (x \to \overline{y}) =$$

[подставим в формулу полином Жегалкина штриха Шеффера $1 \oplus ab$ при $a = (x \sim y) \leftarrow z$, $b = x \to \overline{y}$]

$$= 1 \oplus ((x \sim y) \leftarrow z)\,(x \to \overline{y}) =$$

[подставим полиномы Жегалкина обратной импликации $1 \oplus b \oplus ab$ при $a = x \sim y$, $b = z$ и импликации $1 \oplus a \oplus ab$ при $a = x$, $b = \overline{y}$]

$$= 1 \oplus (1 \oplus z \oplus (x \sim y)\,z)\,(1 \oplus x \oplus x\overline{y}) =$$

[подставим полином Жегалкина эквивалентности $1 \oplus x \oplus y$, раскроем скобки, и вычеркнем появившиеся при этом пары одинаковых слагаемых]

$$
\begin{gathered}
= 1 \oplus (1 \oplus z \oplus (1 \oplus x \oplus y)\,z)\,(1 \oplus x \oplus x\overline{y}) = \\
= 1 \oplus (1 \oplus \cancel{z} \oplus \cancel{z} \oplus x\,z \oplus y\,z)\,(1 \oplus x \oplus x\overline{y}) = \\
= 1 \oplus (1 \oplus x\,z \oplus y\,z)\,(1 \oplus x \oplus x\overline{y}) = \\
= \cancel{1} \oplus \cancel{1} \oplus \cancel{x\,z} \oplus y\,z \oplus x \oplus \cancel{x\,z} \oplus x\,y\,z \oplus x\,\overline{y} \oplus x\,\overline{y}\,z =
\end{gathered}
$$

[заменим инверсию ее полиномом Жегалкина, раскроем скобки и вычеркнем пары одинаковых слагаемых]

$$\begin{aligned} &= y\,z \oplus x \oplus x\,y\,z \oplus x\,(1 \oplus y) \oplus x\,(1 \oplus y)\,z = \\ &= y\,z \oplus \cancel{x \oplus} \cancel{x\,y\,z} \oplus \cancel{x \oplus} x\,y \oplus x\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} = \\ &= y\,z \oplus x\,y \oplus x\,z = P.\bullet \end{aligned}$$

Полином, естественно, совпадает с полученными ранее по совершенной и произвольной ДНФ.

Способ 3. Если булева функций задана произвольной формулой, то ее полином Жегалкина можно получить, используя специальное разложение функции.

Определение. *Разложением Дэвио* называется следующее разложение булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменной x_i:

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) = x_i\, f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) \oplus \\ \oplus (1 \oplus x_i)\, f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Разложение Дэвио непосредственно следует из разложения Шеннона, если учесть, что слагаемые в последнем ортогональны, и что $\overline{x}_i = x_i \oplus 1$.

Пример. Найдем разложение Дэвио по переменной x мажоритарной булевой функции, заданной формулой.

$$\begin{gathered} F = ((x \sim y) \leftarrow z) \,/\, (x \to \overline{y}) = \\ = x\,[((1 \sim y) \leftarrow z) \,/\, (1 \to \overline{y})] \oplus (1 \oplus x)\,[((0 \sim y) \leftarrow z) \,/\, (0 \to \overline{y})] = \\ = x\,[(y \leftarrow z) \,/\, \overline{y}] \oplus (1 \oplus x)\,[\overline{y} \hookleftarrow z].\ \bullet \end{gathered}$$

Для получения полинома Жегалкина необходимо продолжить разложение подформул, не являющихся дизъюнкцией с исключением элементарных конъюнкций, пока не получится формула над $\{\oplus, \wedge, ^{-}\}$. Если в такой формуле заменить инверсии $\overline{x}$ на $x \oplus 1$, раскрыть скобки и вычеркнуть пары одинаковых слагаемых, то получится полином Жегалкина.

Пример. Продолжив предыдущий пример, получим полином Жегалкина мажоритарной функции. Для этого разложим подформулы $(y \leftarrow z) \,/\, \overline{y}$ и $\overline{y} \hookleftarrow z$ по переменной y:

$$\begin{gathered} x\,[(y \leftarrow z) \,/\, \overline{y}] \oplus (1 \oplus x)\,[\overline{y} \hookleftarrow z] = \\ = x\,[y\,[(1 \leftarrow z) \,/\, 0] \oplus (1 \oplus y)\,[(0 \leftarrow z) \,/\, 1]\,] \oplus \\ \oplus (1 \oplus x)\,[y\,[0 \hookleftarrow z] \oplus (1 \oplus y)\,[1 \hookleftarrow z]\,] = \\ = x\,[y \oplus (1 \oplus y)\,z] \oplus (1 \oplus x)\,[y\,z] = \\ = x\,y \oplus x\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus y\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} = x\,y \oplus x\,z \oplus y\,z = P.\ \bullet \end{gathered}$$

Полином Жегалкина, естественно, совпадает с полученными ранее.

Алгоритм построения полинома Жегалкина по таблице истинности (основан на методе неопределенных коэффициентов).

Продемонстрируем идею метода на примере произвольной булевой функции двух аргументов $f(x, y)$. Представим ее полиномом Жегалкина в форме с коэффициентами

$$P_f = c_0 \oplus c_1 y \oplus c_2 x \oplus c_3 xy.$$

Подставив в данное равенство наборы значений аргументов, получим систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными коэффициентами: c_0, c_1, c_2, c_3.

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 0 \oplus c_3 00 = c_0 \\
f(0,1) &= c_0 \oplus c_1 1 \oplus c_2 0 \oplus c_3 01 = c_0 \oplus c_1 \\
f(1,0) &= c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 1 \oplus c_3 10 = c_0 \oplus c_2 \\
f(1,1) &= c_0 \oplus c_1 1 \oplus c_2 1 \oplus c_3 11 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3
\end{aligned}$$

Заметим, что наборы подставлены в равенство в естественном порядке, и система имеет треугольный вид: в первом уравнении обратились в ноль все слагаемые, следующие за c_0, во втором – следующие за c_1, и так далее. Значит, коэффициент c_0 можно получить из первого уравнения и подставить его в остальные. Тогда c_1 можно получить из второго уравнения, и так далее.

В общем случае для функции n аргументов получается система треугольного вида из 2^n линейных уравнений с 2^n неизвестными – коэффициентами полинома Жегалкина.

Пример. Найдем полином Жегалкина мажоритарной булевой функции, заданной таблицей истинности, последовательно вычисляя коэффициенты полинома и подставляя их в остальные уравнения.

$x\ y\ z$	$f = c_0 \oplus c_1 z \oplus c_2 y \oplus c_3 yz \oplus c_4 x \oplus c_5 xz \oplus c_6 xy \oplus c_7 xyz$
0 0 0	$0 = c_0$
0 0 1	$0 = 0 \oplus c_1$
0 1 0	$0 = 0 \oplus 0 \oplus c_2$
0 1 1	$1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus c_3$
1 0 0	$0 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 100 \oplus c_4$
1 0 1	$1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 101 \oplus 0 \oplus c_5$
1 1 0	$1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 110 \oplus 0 \oplus 110 \oplus c_6$
1 1 1	$1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 111 \oplus 0 \oplus 111 \oplus 111 \oplus c_7$

Из первого уравнения следует, что $c_0 = 0$. Из второго и третьего уравнений следует, что $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, значит, $c_1 z$ и $c_2 y$ тождественно равны нулю. Из четвертого уравнения получаем $c_3 = 1$, значит, надо вычислять значения конъюнкции c_3yz в остальных уравнениях. Аналогично получаем $c_4 = 0$, $c_5 = 1$, $c_6 = 1$ и $c_7 = 0$. Найден вектор коэффициентов полинома Жегалкина мажоритарной функции $\pi = 00010110$, и сам полином $P = yz \oplus xz \oplus xy$, который, естественно, совпадает с полученными ранее. •

15.3.3. Линейные булевы функции

Определение. Булева функция называется *линейной* (*принадлежит классу* $\mathcal{L}$), если ее полином Жегалкина линеен.

Примеры. Мажоритарная функция не является линейной: степень ее полинома Жегалкина $(xy \oplus xz \oplus yz)$ равна 2. Из элементарных булевых функций линейными являются, например, инверсия и эквивалентность. Не являются линейными, например, штрих Шеффера и стрелка Пирса. •

Утверждение о числе булевых функций класса $\mathcal{L}$. Число различных линейных булевых функций, зависящих от n переменных, равно 2^{n+1}.

Доказательство. Полином Жегалкина линейной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид:

$$P = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \dots \oplus a_nx_n,$$

где $a_0, \dots, a_n$ – булевы константы. Таким образом, каждый линейный полином определяется булевым вектором $a_0 \dots a_n$ длины $n+1$, и наоборот, каждый булев вектор длины $n+1$ задает линейный полином Жегалкина некоторой функции n аргументов. Следовательно, число линейных полиномов (а значит, и число различных линейных функций n аргументов) равно числу булевых векторов длины $n+1$, то есть равно 2^{n+1}. •

Пример. Из всех 16 булевых функций двух аргументов x_1, x_2 8 функций (2^{2+1}) принадлежат классу $\mathcal{L}$: 0, 1, $\oplus$, $\sim$, тождественные функции x_1 и x_2 и их инверсии $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. •

Теорема о замкнутости класса $\mathcal{L}$. Множество всех линейных булевых функций является замкнутым классом.

Доказательство. Рассмотрим суперпозицию любых булевых функций из $\mathcal{L}$, то есть функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

и покажем, что она является линейной. Представим каждую из функций, образующих суперпозицию, полиномом Жегалкина:

$$f_0(y_1,\dots,y_m)=\alpha_0\oplus\alpha_1y_1\oplus\dots\oplus\alpha_my_m,$$
$$f_1(x_1,\dots,x_n)=\beta_0^1\oplus\beta_1^1x_1\oplus\dots\oplus\beta_n^1x_n,$$
$$\dots,$$
$$f_m(x_1,\dots,x_n)=\beta_0^m\oplus\beta_1^mx_1\oplus\dots\oplus\beta_n^mx_n.$$

Подставив эти полиномы в суперпозицию, получим:

$$\begin{gathered}f(x_1,\dots,x_n)=\alpha_0\oplus\alpha_1f_1(x_1,\dots,x_n)\oplus\dots\oplus\alpha_mf_m(x_1,\dots,x_n)=\\=\alpha_0\oplus\alpha_1(\beta_0^1\oplus\beta_1^1x_1\oplus\dots\oplus\beta_n^1x_n)\oplus\dots\\\dots\oplus\alpha_m(\beta_0^m\oplus\beta_1^mx_1\oplus\dots\oplus\beta_n^mx_n)=\\=(\alpha_0\oplus\alpha_1\beta_0^1\oplus\dots\oplus\alpha_m\beta_0^m)\oplus\\\oplus(\alpha_1\beta_1^1\oplus\dots\oplus\alpha_m\beta_1^m)x_1\oplus\dots\oplus(\alpha_1\beta_n^1\oplus\dots\oplus\alpha_m\beta_n^m)x_n.\end{gathered}$$

Поскольку в последней формуле каждая скобка есть булева константа, то получен линейный полином Жегалкина. Значит, функция $f(x_1,\dots,x_n)$ линейная, и класс $\mathcal{L}$ замкнут. •

Лемма о нелинейной булевой функции. Если булева функция нелинейная, то из нее подстановкой вместо аргументов констант, переменных x, y, их инверсий $\overline{x}$, $\overline{y}$ и, возможно, инверсией самой функции можно получить конъюнкцию $x\,y$.

Доказательство. Рассмотрим полином Жегалкина нелинейной функции $f(x_1,\dots,x_n)$. Выберем в нем конъюнкцию K ранга больше единицы (такая конъюнкция существует, так как функция нелинейна). Не умаляя общности, можно считать, что K содержит переменные x_1, x_2. Разобьем множество конъюнкций полинома на четыре группы:
– первую образуем из конъюнкций, содержащих x_1 и x_2,
– вторую – из конъюнкций, содержащих x_1 и не содержащих x_2,
– третью – из конъюнкций, содержащих x_2 и не содержащих x_1,
– остальные конъюнкции отнесем к четвертой группе.

В первых трех группах вынесем за скобки соответственно x_1x_2, x_1 и x_2:

$$\begin{gathered}f(x_1,\dots,x_n)=x_1x_2p(x_3,\dots,x_n)\oplus x_1q(x_3,\dots,x_n)\oplus\\\oplus x_2r(x_3,\dots,x_n)\oplus s(x_3,\dots,x_n).\end{gathered}$$

Первая группа не пуста, так как есть по крайней мере одна конъюнкция K, содержащая x_1 и x_2. Значит, найдется набор $a_3\dots a_n$ такой, что $p(a_3,\dots,a_n)=1$. Подставим его в функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ (подстановка констант допустима по условию теоремы):

$$\begin{gathered}f(x_1,x_2,a_3,\dots,a_n)=x_1x_2\oplus x_1q(a_3,\dots,a_n)\oplus x_2r(a_3,\dots,a_n)\oplus\\\oplus s(a_3,\dots,a_n)=x_1x_2\oplus x_1a\oplus x_2b\oplus c,\end{gathered}$$

где a, b, c – булевы константы.

Если $a = b = c = 0$, конъюнкция получена. Иначе положим в последней формуле $x_1 = x \oplus b$, и $x_2 = y \oplus a$ (подстановка переменных x, y и их инверсий $x \oplus 1$, $y \oplus 1$ допустима по условию теоремы), раскроем скобки и удалим пары одинаковых конъюнкций:

$$\begin{gathered}(x \oplus b)(y \oplus a) \oplus (x \oplus b)a \oplus (y \oplus a)b \oplus c = \\ = xy \oplus \cancel{ax} \oplus \cancel{by} \oplus \cancel{ab} \oplus \cancel{ax} \oplus \cancel{ab} \oplus \cancel{by} \oplus ab \oplus c = \\ = xy \oplus ab \oplus c = xy \oplus d = g(x, y).\end{gathered}$$

Если булева константа $d = 0$, конъюнкция xy получена. Иначе функция $g(x, y) = \overline{xy}$. Тогда, инвертировав исходную функцию (что допустимо по условию теоремы), получим конъюнкцию xy. •

Пример. Рассмотрим нелинейную булеву функцию, заданную полиномом Жегалкина.

$$P = x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_2x_4 \oplus x_1x_3 \oplus x_3x_4 \oplus 1 =$$

[выберем первую конъюнкцию $x_1x_2x_3x_4$, в ней выберем переменные x_1, x_2 и сгруппируем конъюнкции]

$$= x_1x_2\underset{p}{(x_3x_4 \oplus x_3)} \oplus x_1\underset{q}{(x_4 \oplus x_3)} \oplus \underset{r}{x_2x_4} \oplus \underset{s}{(x_3x_4 \oplus 1)} =$$

[$p(x_3, x_4) = 1$ при $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, подставим эти значения переменных в формулу]

$$= x_1x_2 \oplus x_1\underset{a}{(0 \oplus 1)} \oplus x_2\underset{b}{0} \oplus \underset{c}{(10 \oplus 1)} = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1 =$$

[положим $x_1 = x \oplus b = x$, $x_2 = y \oplus a = y \oplus 1$]

$$= x(y \oplus 1) \oplus x \oplus 1 = xy \oplus x \oplus x \oplus 1 = xy \oplus \underset{d}{1}.$$

Инвертировав исходную функцию, получим конъюнкцию xy. •

15.4. Класс самодвойственных булевых функций

Определение. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *самодвойственна* (*принадлежит классу* $\mathcal{S}$), если она равна двойственной себе функции, то есть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n).$$

Примеры. Мажоритарная функция самодвойственна:

$x\ y\ z$	$f(x,y,z)$	$f^*(x,y,z)$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	1	1
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	1	1

Из элементарных функций самодвойственными являются лишь тождественная функция и инверсия. Остальные функции, в частности, штрих Шеффера и стрелка Пирса, несамодвойственны. •

Алгоритм распознавания самодвойственной функции, заданной таблицей истинности. Очевидно, что для проверки самодвойственности булевой функции можно не получать двойственную ей функцию в явном виде, а лишь сравнивать значения исходной функции на противоположных наборах. Функция самодвойственна, если и только если на противоположных наборах принимает противоположые значения.

Достаточное условие несамодвойственности булевой функции. Если число единиц в столбце значений функции не совпадает с числом нулей, то функция не является самодвойственной.

Доказательство очевидно. •

Примеры. Рассмотрим три булевы функции.

$x\ y\ z$	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$	$h(x,y,z)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	0	0	0
0 1 0	0	0	0
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	0	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	1	0

Для функции $f(x, y, z)$ выполняется достаточное условие несамодвойственности. Для остальных оно не выполняется, при этом функция $g(x, y, z)$ несамодвойственна, так как на первом и последнем наборах принимает одинаковые значения, а функция $h(x, y, z)$ самодвойственна. •

> **Утверждение о числе самодвойственных булевых функций.** Число различных самодвойственных булевых функций, зависящих от n переменных, равно $2^{2^{n-1}}$.

Доказательство. Рассмотрим самодвойственную функцию n аргументов, заданную таблицей истинности. Если на первом наборе она принимает значение a, то, согласно свойству самодвойственной функции, на последнем наборе (противоположном первому) она принимает значение $\overline{a}$. То же можно сказать о втором и предпоследнем наборах, и так далее. Таким образом, сасодвойственная функция полностью определяется верхней половиной своего столбца значений, то есть булевым вектором длины $2^n/2 = 2^{n-1}$. Следовательно, число различных самодвойственных функций n переменных равно $2^{2^{n-1}}$. •

Пример. Из всех 16 булевых функций двух аргументов x_1, x_2 4 функции ($2^{2^{2-1}}$) принадлежат классу $\mathcal{S}$: тождественные функции x_1 и x_2 и их инверсии $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. •

> **Теорема о замкнутости класса $\mathcal{S}$.** Множество всех самодвойственных булевых функций является замкнутым классом.

Доказательство. Рассмотрим суперпозицию любых булевых функций из $\mathcal{S}$, то есть функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

и покажем, что она самодвойственна. Пользуясь принципом двойственности, получим функцию, двойственную $f(x_1, \ldots, x_n)$.

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)) =$$

[учтем, что каждая из функций, образующих суперпозицию, самодвойственна]

$$= f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Итак, мы показали, что $f^*(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, значит, $f(x_1, \ldots, x_n)$ самодвойственна, и класс $\mathcal{S}$ замкнут. •

Лемма о несамодвойственной булевой функции. Если булева функция несамодвойственна, то из нее подстановкой вместо аргументов переменной x и ее инверсии $\overline{x}$ можно получить либо константу 0, либо константу 1.

Доказательство. Рассмотрим несамодвойственную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Для нее существует такой набор $a_1 \ldots a_n$, что

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n).$$

Заменим каждый аргумент x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на x^{a_i}, (подстановка переменной x и ее инверсии $\overline{x}$ допустима по условию теоремы). В результате получим функцию одного аргумента

$$g(x) = f(x^{a_1}, \ldots, x^{a_n}).$$

Покажем, что она является константой. Заметим, что $0^a = \overline{a}$, $1^a = a$ (проверка предоставляется читателю).

$$\begin{gathered} g(0) = f(0^{a_1}, \ldots, 0^{a_n}) = f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n), \\ g(1) = f(1^{a_1}, \ldots, 1^{a_n}) = f(a_1, \ldots, a_n). \end{gathered}$$

Но набор $a_1 \ldots a_n$ выбран так, что правые части равны, следовательно, $g(0) = g(1)$, и константа получена. •

Примеры. Рассмотрим функцию $f(y, z) = y \downarrow z$. Она несамодвойственна, так как на противоположных наборах 01 и 10 принимает одно и то же значение 0. В качестве набора a_1a_2 возьмем набор 01. Положим $y = x^0 = \overline{x}$ и $z = x^1 = x$, получим

$$g(x) = f(\overline{x}, x) = \overline{x} \downarrow x = 0.$$

Аналогично, рассмотрев функцию $h(y, z) = y/z$, которая на тех же противоположных наборах принимает значение 1, получим:

$$g(x) = h(\overline{x}, x) = \overline{x}/x = 1. \bullet$$

15.5. Класс монотонных булевых функций

Определение. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной* (*принадлежит классу* $\mathcal{M}$), если для любой пары наборов α и β таких, что $\alpha \preceq \beta$, выполняется условие $f(\alpha) \leq f(\beta)$ (назовем его *условием монотонности*).

Примеры. Исследуем мажоритарную булеву функцию.

x y z	$f(x, y, z)$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Перебор пар начнем с наборов $\alpha = 000$ и $\beta = 001$: для них $\alpha \preceq \beta$ и выполнено условие монотонности $f(000) = f(001)$. Отметим, что набор α таков, что любой другой набор β является последователем α, и, казалось бы, следует анализировать каждую из этих пар. Однако $f(\alpha) = 0$, поэтому условие $f(\alpha) \leq f(\beta)$ будет выполнено для любого набора β. Значит, в качестве α достаточно рассмотреть лишь те наборы, на которых функция принимает значение единица: 011, 101, 110 и 111. Кроме того, наборы в таблице истинности расположены в естественном порядке, значит, наборы-последователи лежат ниже предшественников. Набор $\alpha = 011$ имеет единственного последователя $\beta = 111$ и $f(011) = f(111)$, то есть условие монотонности для этой пары не нарушено. Рассмотрим остальные возможные пары наборов: $\alpha = 101$, $\beta = 111$ и $\alpha = 110$, $\beta = 111$ (набор $\alpha = 111$ последователей не имеет). Для них условие монотонности также не нарушено. Значит, мажоритарная функция монотонна.

Из элементарных булевых функций монотонными являются, например, конъюнкция и дизъюнкция. Не являются монотонными, например, штрих Шеффера и стрелка Пирса. •

В общем случае набор имеет несколько последователей, и для всех таких пар надо проверять выполнение условия монотонности. Чтобы сформулировать более простой алгоритм распознавания монотонной функции, докажем утверждение, которое к тому же будет использовано при доказательстве леммы о немонотонной функции.

Утверждение о условии немонотонности. Для любой пары наборов α и β таких, что $\alpha \preceq \beta$ и $f(\alpha) > f(\beta)$, найдется пара соседних наборов α', β' с теми же свойствами: $\alpha' \preceq \beta'$ и $f(\alpha') > f(\beta')$.

Доказательство. Если α и β – соседи, то утверждение верно ($\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$). Иначе вычислим расстояние d (по Хэммингу) между наборами

$\alpha = a_1 \ldots a_n$ и $\beta = b_1 \ldots b_n$ и начнем строить цепочку наборов $\gamma_0, \ldots, \gamma_d$ такую, что

$$\alpha = \gamma_0 \preceq \gamma_1 \preceq \ldots \preceq \gamma_{d-1} \preceq \gamma_d = \beta,$$

и любые два расположенных рядом набора γ_{i-1}, γ_i $(i = 1, \ldots, d)$ являются соседями. Очередной набор γ_i получим из предыдущего набора γ_{i-1} заменой значения одной из ортогональных компонент наборов γ_{i-1} и β (это будет замена 0 на 1, так как $\alpha \preceq \beta$), затем проверим *условие немонотонности* $f(\gamma_{i-1}) > f(\gamma_i)$. Если оно выполнено, утверждение доказано ($\alpha' = \gamma_{i-1}$, $\beta' = \gamma_i$). Иначе получим и исследуем очередной набор. В худшем случае, когда постоянно выполняется условие монотонности, имеем

$$f(\alpha) = f(\gamma_1) = \ldots = f(\gamma_{d-1}),$$

но тогда $f(\gamma_{d-1}) = 1$ и $f(\beta) = 0$, значит, условие немонотонности выполнится для последней пары: $\alpha' = \gamma_{d-1}$ и $\beta' = \gamma_d = \beta$. •

Пример. Пусть задана пара булевых векторов $\begin{matrix}\alpha = 1000001 \\ \beta = 1110111\end{matrix}$, тогда цепочка соседей может иметь следующий вид:

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 1000001 = \gamma_0 \\ & 1100001 = \gamma_1 \\ & 1110001 = \gamma_2 \\ & 1110101 = \gamma_3 \\ \beta = & 1110111 = \gamma_4 \end{array} \qquad \gamma_0 \preceq \gamma_1 \preceq \gamma_2 \preceq \gamma_3 \preceq \gamma_4$$

Если $f(\alpha) > f(\beta)$, то смена значения функции с 1 на 0 произойдет по крайней мере на одной из четырех пар соседей. •

Алгоритм распознавания монотонной булевой функции (основан на утверждении о условии немонотонности).

Начало. Задана таблица истинности булевой функции.

Шаг 1. Сравниваем значения функции на наборах, соседних по первой переменной, то есть верхнюю половину столбца значений функции (вектор φ_1) с нижней половиной (вектор ψ_1). Если условие $\varphi_1 \preceq \psi_1$ нарушено, то функция не монотонна, идем на конец.

Шаг 2. Сравниваем значения функции на наборах, соседних по второй переменной, то есть верхние четвертины столбца значений функции (векторы φ_2', φ_2'') с нижними четвертинами (векторами ψ_2', ψ_2'') в каждой половине. Если хотя бы одно из условий $\varphi_2' \preceq \psi_2'$ и $\varphi_2'' \preceq \psi_2''$ нарушено, то функция не монотонна, идем на конец.

Шаги 3–n. Аналогично сравниваем восьмые, шестнадцатые части, и так далее. Если ни одно из проверяемых условий не нарушено, то функция монотонна.

Конец.

Примеры. Рассмотрим две булевых функции (первая – мажоритарная).

$x\ y\ z$	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$		
0 0 0	0	0		
0 0 1	0	1	φ_2'	
0 1 0	0	1	ψ_2'	
0 1 1	1	0		φ_1
1 0 0	0	0		ψ_1
1 0 1	1	1	φ_2''	
1 1 0	1	1	ψ_2''	
1 1 1	1	1		

Проверим на монотонность мажоритарную функцию. Сравниваем половины столбца значений: $\varphi_1 = 0001 \preceq 0111 = \psi_1$. Сравниваем четвертины: $\varphi_2' = 00 \preceq 01 = \psi_2'$, $\varphi_2'' = 01 \preceq 11 = \psi_2''$. Сравниваем осьмушки: $0 \preceq 0$, $0 \preceq 1$, $0 \preceq 1$, $1 \preceq 1$. Следовательно, мажоритарная функция монотонна.

Проверим на монотонность функцию $g(x,y,z)$. Сравниваем половины столбца значений: $\varphi_1 = 0110 \preceq 0111 = \psi_1$. Сравниваем четвертины: так как $\varphi_2' = 01$ не предшествует $\psi_2' = 10$, функция $g(x,y,z)$ не монотонна. •

Теорема о замкнутости класса $\mathcal{M}$. Множество всех монотонных булевых функций является замкнутым классом.

Доказательство. Рассмотрим суперпозицию любых булевых функций из $\mathcal{M}$, то есть функцию

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f_0(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)),$$

и покажем, что она монотонна. Подставим в суперпозицию любую пару наборов α и β таких, что $\alpha \preceq \beta$, получим:

$$f(\alpha) = f_0(f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)) = f_0(\gamma),$$
$$f(\beta) = f_0(f_1(\beta),\ldots,f_m(\beta)) = f_0(\delta),$$

где γ и δ – булевы векторы. Так как $\alpha \preceq \beta$, и булевы функции $f_1(x_1,\ldots,x_n)$, $\ldots$,$f_m(x_1,\ldots,x_n)$ монотонны, то $\gamma \preceq \delta$. Поскольку функция $f_0(y_1,\ldots,y_m)$ также монотонна, то $f_0(\gamma) \le f_0(\delta)$, следовательно, $f(\alpha) \le f(\beta)$, то есть $f(x_1,\ldots,x_n)$ монотонна, и класс $\mathcal{M}$ замкнут. •

Лемма о немонотонной булевой функции. Если булева функция немонотонна, то из нее подстановкой вместо аргументов констант 0 и 1 и переменной x можно получить инверсию переменной $\overline{x}$.

Доказательство. Рассмотрим немонотонную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Согласно утверждению о условии немонотонности, существует пара соседних наборов $\alpha = a_1 \ldots a_n$ и $\beta = b_1 \ldots b_n$ таких, что $\alpha \preceq \beta$ и $f(\alpha) > f(\beta)$, то есть

$$f(\alpha) = 1, \qquad f(\beta) = 0.$$

Пусть α и β – соседи по k-й компоненте, тогда

$$a_k = 0, \qquad b_k = 1.$$

Подставим в функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ вместо каждого аргумента x_i либо константу a_i, если $i \neq k$, либо переменную x, если $i = k$ (подстановка константы и переменной допустима по условию теоремы). В результате получим функцию одного аргумента

$$g(x) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Покажем, что $g(x) = \overline{x}$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(a_1, \ldots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n) = [\text{ учтем, что } a_k = 0\ ] = \\ &= f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = f(\alpha) = 1, \\ g(1) &= f(a_1, \ldots, a_{k-1}, 1, a_{k+1}, \ldots, a_n) = [\text{ учтем, что } b_k = 1\ ] = \\ &= f(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n) = f(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Итак, инверсия $\overline{x}$ получена. •

Пример. Рассмотрим функцию $f(y, z) = y \downarrow z$.

y z	$y \downarrow z$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

Она немонотонна, так как существует пара наборов $\alpha = 00$ и $\beta = 10$ таких, что $\alpha \preceq \beta$ и $f(\alpha) > f(\beta)$. Так как α и β – соседи по первой компоненте, то, согласно доказательству леммы, положим $y = x$ и подставим вместо z константу 0, получим:

$$g(x) = f(x, 0) = x \downarrow 0 = \overline{x}. \bullet$$

15.6. Таблица непринадлежности элементарных булевых функций замкнутым классам

Построим таблицу, строкам которой поставим в соответствие элементарные булевы функции, а столбцам – замкнутые классы. Знаком минус отметим непринадлежность функции соответствующему классу.

	$\mathcal{T}^0$	$\mathcal{T}^1$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{M}$
0		–		–	
1	–			–	
x					
$\overline{x}$	–	–			–
xy			–	–	
$x \vee y$			–	–	
$x \oplus y$		–		–	–

	$\mathcal{T}^0$	$\mathcal{T}^1$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{M}$
$x \sim y$	–			–	–
$x \to y$	–		–	–	–
$x \hookrightarrow y$		–	–	–	–
$x \leftarrow y$	–		–	–	–
$x \hookleftarrow y$		–	–	–	–
$x \downarrow y$	–	–	–	–	–
x/y	–	–	–	–	–

Заметим, что тождественная функция принадлежит всем замкнутым классам, а штрих Шеффера и стрелка Пирса не принадлежат ни одному.

15.7. Упражнения

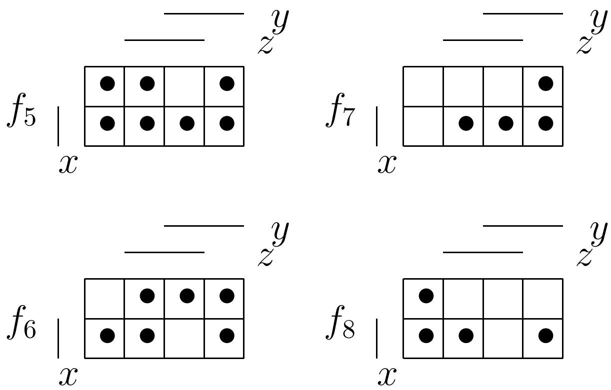
Упр. 1. Проверить таблицу непринадлежности элементарных функций замкнутым классам.

Упр. 2. Может ли быть монотонной функция, не сохраняющая константу 0 и не сохраняющая константу 1?

Упр. 3. Может ли быть самодвойственной функция, сохраняющая константу 0 и не сохраняющая константу 1?

Упр. 4. Выяснить, принадлежат ли классам $\mathcal{T}^0$ и $\mathcal{T}^1$ функции:

$x\ y\ z$	f_1	f_2	f_3	f_4
0 0 0	0	0	1	1
0 0 1	1	0	0	0
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	0	1	1
1 0 0	0	0	1	0
1 0 1	0	1	1	0
1 1 0	1	1	1	1
1 1 1	1	0	1	0



$F_9 = x \downarrow y \hookleftarrow (x \sim z)$ $\quad F_{11} = y \downarrow (\overline{x} \sim y\overline{z}) \hookrightarrow z$

$F_{10} = \overline{x} \oplus \overline{y} \oplus z$ $\quad F_{12} = \overline{x}/(z \leftarrow \overline{y}) \vee xy$

Упр. 5. Являются ли самодвойственными функции из упр. 4?

Упр. 6. Являются ли монотонными функции из упр. 4?

Упр. 7. Получить полиномы Жегалкина элементарных булевых функций двумя различными способами.

Упр. 8. Найти полиномы Жегалкина функций, заданных таблицами истинности из упр. 4, используя метод неопределенных коэффициентов. Определить, какие из них являются линейными.

Упр. 9. Найти совершенные ДНФ функций, заданных матрицами Грея из упр. 4, и получить из них полиномы Жегалкина. Определить, какие из функций принадлежат классу $\mathcal{L}$.

Упр. 10. Найти кратчайшие ДНФ функций, заданных матрицами Грея из упр. 4, и получить из них полиномы Жегалкина. Сравнить их с полиномами, полученными в упр. 9.

Упр. 11. Получить полиномы Жегалкина функций, заданных формулами из упр. 4, используя разложение Дэвио. Определить, какие из функций являются линейными.

Упр. 12. Получить полиномы Жегалкина функций, заданных формулами из упр. 4, подстановкой полиномов элементарных булевых функций. Сравнить их с результатами из упр. 11.

Упр. 13. Найти ДНФ функций, заданных формулами из упр. 4, и получить из них полиномы Жегалкина. Сравнить их с полиномами, полученными в упр. 11, 12.

16. Функциональная полнота системы булевых функций

Определение. Множество функций $\mathcal{N}$ называется *функционально полной системой* (ФПС), если любая булева функция представима суперпозицией функций из $\mathcal{N}$.

Договоримся опускать аргументы при перечислении функций множества $\mathcal{N}$ и рассматривать термин "система" в данном контексте как синоним множества.

Пример 1. Множество $\mathcal{N}_1 = \{\vee, \wedge, ^-\}$ является функционально полной системой, так как любую булеву функцию, кроме константы 0, можно представить совершенной ДНФ, то есть суперпозицией функций из $\mathcal{N}_1$, а константу 0 – формулой $x\overline{x}$. •

Пример 2. Множество $\mathcal{N}_2 = \{\wedge, \oplus, 1\}$ является ФПС, так как любую булеву функцию можно представить полиномом Жегалкина, то есть суперпозицией функций из $\mathcal{N}_2$, а полином 0 – формулой $1 \oplus 1$. •

Следующая теорема позволяет сводить вопрос о функциональной полноте одних систем к вопросу о полноте других систем.

Теорема о двух функционально полных системах. Если даны два множества $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ булевых функций и известно, что $\mathcal{N}_1$ – функционально полная система, а каждая функция из $\mathcal{N}_1$ представима суперпозицией функций из $\mathcal{N}_2$, то $\mathcal{N}_2$ тоже является функционально полной системой.

Доказательство. Рассмотрим произвольную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Она может быть представлена суперпозицией функций из множества $\mathcal{N}_1 = \{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$, так как $\mathcal{N}_1$ – ФПС:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

По условию теоремы каждая из функций f_0, f_1, …, f_m может быть представлена суперпозицией функций из $\mathcal{N}_2$, значит, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима суперпозицией функций из $\mathcal{N}_2$, следовательно, $\mathcal{N}_2$ – ФПС. •

Пример 1. $\mathcal{N}_1 = \{\wedge, ^-, \vee\}$, $\mathcal{N}_2 = \{\wedge, ^-\}$. Как показано ранее, $\mathcal{N}_1$ – ФПС. Конъюнкция и инверсия содержатся в $\mathcal{N}_2$, а дизъюнкция представима суперпозицией функций из $\mathcal{N}_2$: $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$, значит, $\mathcal{N}_2$ – ФПС. •

Пример 2. $\mathcal{N}_1 = \{\wedge, ^-\}$, $\mathcal{N}_2 = \{\downarrow\}$. Как показано в предыдущем примере, $\mathcal{N}_1$ – ФПС. Инверсия и конъюнкция могут быть представлены суперпозицией стрелки Пирса: $\overline{x} = x \downarrow x$, $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$, следовательно $\mathcal{N}_2$ – ФПС. •

16.1. Необходимые и достаточные условия функциональной полноты

Перейдем к рассмотрению одного из основных вопросов теории булевых функций – вопроса о необходимых и достаточных условиях полноты систем булевых функций. Этот вопрос важен как с теоретической точки зрения, ибо математика всегда интересует вопрос о возможности выражения одних функций через другие, так и с практической точки зрения, при выборе так называемой элементной базы для построения логических схем. База должна быть функционально полной, чтобы из ее элементов можно было построить схемы, реализующие любые булевы функции.

Пример. Любую булеву функцию можно реализовать логической схемой из стрелок Пирса, так как множество $\mathcal{N} = \{\downarrow\}$, как показано в предыдущем примере, функционально полно. •

Теорема Поста–Яблонского. Для того, чтобы система булевых функций $\mathcal{N}$ была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из пяти замкнутых классов $\mathcal{T}^0$, $\mathcal{T}^1$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{M}$, то есть чтобы система булевых функций $\mathcal{N}$ содержала хотя бы одну функцию, не сохраняющую константу 0, хотя бы одну функцию, не сохраняющую константу 1, хотя бы одну нелинейную, хотя бы одну несамодвойственную и хотя бы одну немонотонную функции.

Доказательство необходимости. Дано: функционально полная система $\mathcal{N}$. Доказать, что множество $\mathcal{N}$ не содержится целиком ни в одном из пяти замкнутых классов.

Докажем сначала, что $\mathcal{N}$ содержит хотя бы одну несамодвойственную функцию. Предположим противное, пусть в $\mathcal{N}$ все функции самодвойственны. Так как класс самодвойственных функций замкнут, то любая суперпозиция самодвойственных функций является самодвойственной, и никакая несамодвойственная функция не может быть представлена такой суперпозицией. Следовательно, $\mathcal{N}$ не является ФПС, что противоречит условию теоремы. Это означает, что $\mathcal{N}$ содержит хотя бы одну несамодвойственную функцию.

Аналогично можно показать, что $\mathcal{N}$ содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую константу 0, хотя бы одну функцию, не сохраняющую константу 1, хотя бы одну нелинейную, и хотя бы одну немонотонную функции.

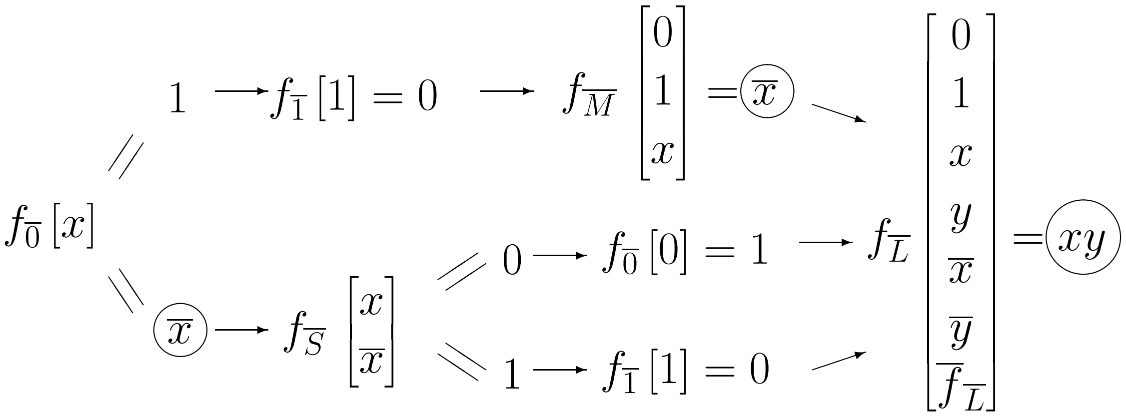
Доказательство достаточности. Дано: множество $\mathcal{N}$, которое не содержится целиком ни в одном из пяти замкнутых классов. Доказать, что $\mathcal{N}$ – ФПС.

Введем следующие обозначения для функций множества $\mathcal{N}$:

$f_{\overline{0}}$ – функция, не сохраняющая константу 0;
$f_{\overline{1}}$ – функция, не сохраняющая константу 1;
$f_{\overline{L}}$ – нелинейная функция;
$f_{\overline{S}}$ – несамодвойственная функция;
$f_{\overline{M}}$ – немонотонная функция.

Рассмотрим два множества функций: $\mathcal{N}_1 = \{\wedge, ^{-}\}$ и заданное множество $\mathcal{N}$, и применим к ним теорему о двух ФПС. $\mathcal{N}_1$ является ФПС, как было показано в одном из предыдущих примеров; $\mathcal{N}$ будет ФПС, если каждая из функций $\mathcal{N}_1$ представима суперпозицией функций из $\mathcal{N}$. Покажем, что конъюнкцию и инверсию можно выразить через функции $f_{\overline{0}}$, $f_{\overline{1}}$, $f_{\overline{L}}$, $f_{\overline{S}}$, $f_{\overline{M}}$, используя леммы о функции, не сохраняющей константу 0, о нелинейной, несамодвойственной и немонотонной функциях.

Следующая схема наглядно демонстрирует доказательство. В ней следом за знаком функции в квадратных скобках показаны допустимые по условиям леммы подстановки, а после знака равенства – получаемый по лемме результат.



Начнем с функции $f_{\overline{0}}$: по лемме о функции, не сохраняющей константу 0, подстановкой вместо аргументов функции переменной x получим либо константу 1, либо $\overline{x}$.

Проанализируем первый случай (верхняя ветвь схемы). Имея константу 1 и подставляя ее вместо каждого аргумента функции $f_{\overline{1}}$, получим константу 0. Затем по лемме о немонотонной функции, подставляя в функцию $f_{\overline{M}}$ вместо аргументов полученные константы и переменную x, получим $\overline{x}$. Таким образом, инверсия выражена суперпозицией функций $f_{\overline{0}}$, $f_{\overline{1}}$ и $f_{\overline{M}}$.

Перейдем ко второму случаю (нижняя ветвь схемы). Инверсия уже получена из функции $f_{\overline{0}}$. По лемме о несамодвойственной функции, подставляя в $f_{\overline{S}}$ вместо аргументов переменную x и ее инверсию $\overline{x}$, получим либо константу 0, либо константу 1. Если имеем константу 0, то, подставляя ее вместо каждого аргумента функции $f_{\overline{0}}$, получим константу 1 (средняя ветвь). Если имеем константу 1, то, подставляя ее вместо каждого аргумента функции $f_{\overline{1}}$, получим константу 0 (нижняя ветвь).

Таким образом, следуя по любой из трех ветвей схемы, мы получаем константы 0 и 1 и инверсию. Далее по лемме о нелинейной функции, подставляя в функцию $f_{\overline{L}}$ константы 0 и 1, переменные x, y и их инверсии $\overline{x}$, $\overline{y}$ и, возможно, инвертируя саму функцию, получим конъюнкцию xy.

Итак, мы показали, что конъюнкция и инверсия представимы суперпозицией функций из $\mathcal{N}$, значит, $\mathcal{N}$ – ФПС. •

Пример 1. Ранее мы получили, что $\mathcal{N}_1 = \{\downarrow\}$ является ФПС, значит, по теореме Поста-Яблонского стрелка Пирса не должна принадлежать ни одному из замкнутых классов, и это действительно так. •

Пример 2. Как показано в таблице непринадлежности элементарных функций замкнутым классам, штрих Шеффера, как и стрелка Пирса, не принадлежит ни одному замкнутому классу, значит, $\mathcal{N}_2 = \{/\}$ – ФПС. •

Пример 3. Рассмотрим множество $\mathcal{N}_3 = \{0, \to\}$. Импликация принадлежит только классу $\mathcal{T}^1$, поэтому вместе с константой 0, не принадлежащей этому классу, образует ФПС $\mathcal{N}_3$. •

Пример 4. Рассмотрим теперь множество неэлементарных булевых функций $\mathcal{N}_4 = \{f, g\}$.

$x\ y\ z$	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$
0 0 0	0	1
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	1	1
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	1	0

Непринадлежность функций f и g пяти замкнутым классам представлена таблицей (мажоритарная функция f рассматривалась нами в примерах к пяти замкнутым классам, исследование функции g оставляем читателям).

	$\mathcal{T}^0$	$\mathcal{T}^1$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{M}$
f			–		
g	–	–			–

Так как обе функции являются самодвойственными, то система $\mathcal{N}_4$ не является функционально полной. Но если к ней добавить несамодвойственную функцию, например, константу 1, то получим ФПС $\mathcal{N}_5 = \{f, g, 1\}$. •

16.2. Упражнения

Упр. 1. Используя теорему о двух ФПС, показать, что системы функций являются функционально полными:

$\mathcal{N}_1 = \{x \sim yz,\ 0\}$,

$\mathcal{N}_3 = \{x \hookrightarrow y,\ x \oplus y \oplus \overline{z}\}$,

$\mathcal{N}_2 = \{x \to (y \to \overline{z})\}$,

$\mathcal{N}_4 = \{x \to y,\ 0\}$.

Упр. 2. Исследовать функцию $g(x, y, z)$ из последнего примера на ее непринадлежность пяти замкнутым классам.

Упр. 3. Построить таблицы непринадлежности функций каждого из заданных множеств замкнутым классам и проверить, являются ли множества функционально полными.

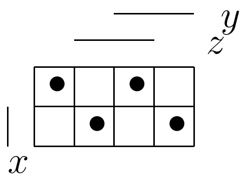
$\mathcal{N}_1 = \{F_f = x \to y,\ P_g = x \oplus y \oplus z\}$,

$\mathcal{N}_2 = \{\varphi_f = 00011000,\ G_g = x/y/z\}$,

$\mathcal{N}_3 = \{F_f = x \hookleftarrow y,\ \varphi_g = 10000001\}$,

$\mathcal{N}_4 = \big\{M_f^1 = \{000, 111\},\ G_g = x \to y,\ \varphi_h = 01111111\big\}$,

$\mathcal{N}_5 = \{F_f = x \sim y,\ P_g = x \oplus y \oplus xy,\ H_h = 0\}$,

$\mathcal{N}_6 = \Big\{ F_f = \overline{x},\ \ g :$


$\Big\}.$

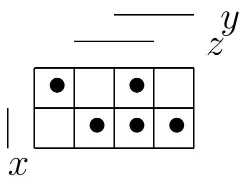
Упр. 4. Какие элементарные булевы функции необходимо добавить в системы, чтобы они стали функционально полными? Не использовать штрих Шеффера и стрелку Пирса.

$\mathcal{N}_1 = \{F_f = x \to y,\ G_g = x \leftarrow y\}$,

$\mathcal{N}_2 = \{\varphi_f = 01101001,\ G_g = 0,\ H_h = \overline{x}\}$,

$\mathcal{N}_3 = \{\varphi_f = 10000001\}$,

$\mathcal{N}_4 = \{P_f = x \oplus y \oplus xy,\ G_g = x \vee y \vee z\}$,

$\mathcal{N}_5 = \Big\{ F_f = x \hookrightarrow \overline{y},\ \ g :$


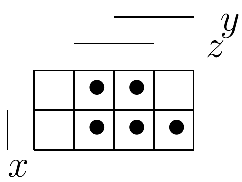
$\Big\}.$

Упр. 5. Проверить функциональную полноту систем булевых функций. Удалить из каждой системы максимальное количество функции таким образом, чтобы она оставалась функционально полной.

$\mathcal{N}_1 = \Big\{M_1^f = \{000, 011, 111\},\ G_g = x \to y \to z,\ H_h = 1,\ P_p = 0\Big\}$,

$\mathcal{N}_2 = \{F_f = xy,\ G_g = 0,\ H_h = 1,\ P_p = x \oplus y \oplus z\}$,

$\mathcal{N}_3 = \big\{F_f = x \oplus \overline{y},\ \varphi_g = 10010111,\ H_h = x \to (\overline{y} \downarrow z),\ M_p^1 = \{000\}\big\}$,

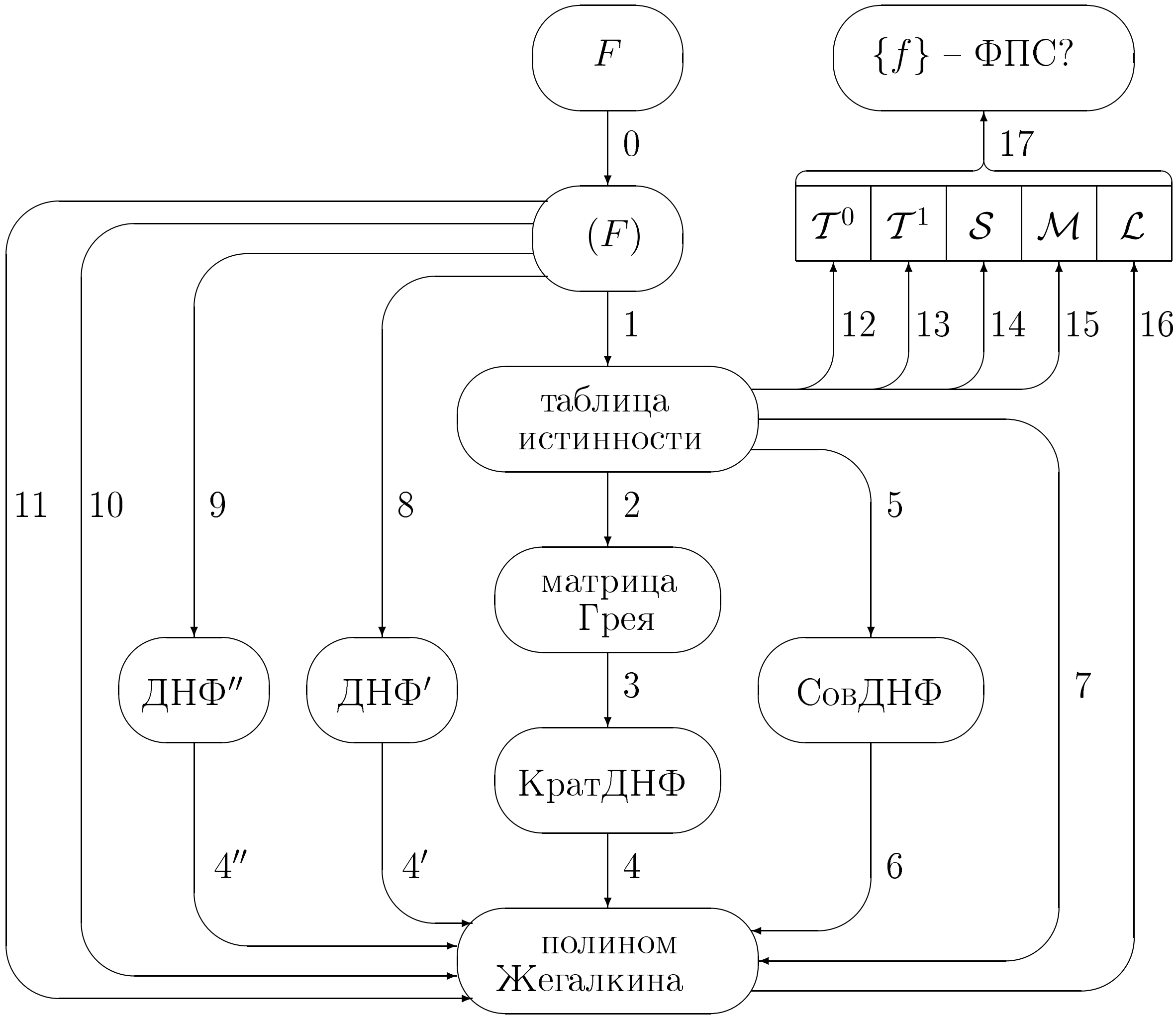
$\mathcal{N}_4 = \left\{ F_f = \overline{x},\ P_g = x \oplus y,\ I_h = \begin{Bmatrix} 0\,0- \\ 0\,1\,1 \\ 1\,1- \\ -1\,0 \end{Bmatrix},\ p : \right.$


$\Big\}.$

Упр. 6. Проверить правильность построения таблицы непринадлежности элементарных булевых функций пяти замкнутым классам.

17. Контрольная работа 5

Темы контрольной работы: полиномы Жегалкина, замкнутые классы, функциональная полнота.



8 – *подстановка кратчайших ДНФ элементарных функций*
9 – *разложение Шеннона*
10 – *подстановка полиномов Жегалкина элементарных функций*
11 – *разложение Дэвио*

Схема контрольной работы (решение каждой из 20 предложенных здесь задач начинать с постановки задачи и делать вывод из сравнения полиномов Жегалкина, полученных разными способами; F означает формулу без лишних скобок, (F) – с недостающими скобками).

Задание на контрольную работу (формула F)

1) $x \downarrow y \sim \overline{x}z$	11) $x/y \to y\overline{z}$	21) $x \sim y/\overline{y}z$
2) $x \to y \sim \overline{x}z$	12) $x \downarrow y \to \overline{x}z$	22) $x/y \sim \overline{y}z$
3) $x \sim y \downarrow y\overline{z}$	13) $x \to y/\overline{x}z$	23) $x \sim y \to \overline{y}z$
4) $x \to y \downarrow x\overline{z}$	14) $x\overline{y} \to z/y$	24) $\overline{x}y \sim z/\overline{y}$
5) $x/\overline{y} \sim \overline{x}z$	15) $x \to y \to y\overline{z}$	25) $x/\overline{y} \sim \overline{x}z$
6) $x \downarrow y \leftarrow \overline{y}z$	16) $x \leftarrow \overline{y} \to xz$	26) $x \sim y/y\overline{z}$
7) $x \leftarrow y/\overline{y}z$	17) $x/y \to \overline{y}z$	27) $x \to y \leftarrow x\overline{z}$
8) $x\overline{y} \to z \downarrow y$	18) $\overline{x}y \sim z \to \overline{y}$	28) $\overline{x}y \to \overline{z} \to \overline{y}$
9) $yz \leftarrow x \sim y$	19) $xy \sim \overline{z} \leftarrow \overline{y}$	29) $xy \downarrow \overline{z} \to \overline{y}$
10) $\overline{x}y \to \overline{y} \to z$	20) $x\overline{z} \downarrow y/x$	30) $x \to y\overline{z} \sim x$

Пример. Задана формула

$$F = x \downarrow \overline{z} \sim \overline{x}\,\overline{y}.$$

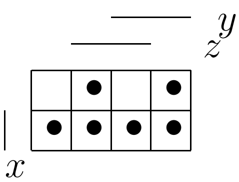
0) *Расставим скобки в формуле F.*

$$(F) = (x \downarrow \overline{z}) \sim (\overline{x}\,\overline{y}).$$

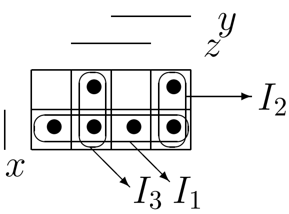
1) *Построим таблицу истинности функции $f(x, y, z)$ по формуле (F).*

x	y	z	$(x \downarrow \overline{z})$	$\sim$	$(\overline{x}\,\overline{y})$	f
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

2) *Построим матрицу Грея по таблице истинности.*



3) *Получим кратчайшую ДНФ функции по ее матрице Грея.*



$$\text{КратДНФ} = \underset{K_1}{x} \vee \underset{K_2}{y\,\overline{z}} \vee \underset{K_3}{\overline{y}\,z}.$$

4) *Получим полином Жегалкина функции по кратчайшей ДНФ.*

$$\text{КратДНФ } = x \vee y\,\overline{z} \vee \overline{y}\,z =$$

[дизъюнкцию пары ортогональных конъюнкций $y\,\overline{z} \vee \overline{y}\,z$ заменим на их дизъюнкцию с исключением]

$$= x \vee (y\,\overline{z} \oplus \overline{y}\,z) =$$

[применим равносильность $A_1 \vee A_2 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_1 A_2$ при $A_1 = x$, $A_2 = y\,\overline{z} \oplus \overline{y}\,z$]

$$= x \oplus y\overline{z} \oplus \overline{y}\,z \oplus x\,(y\,\overline{z} \oplus \overline{y}\,z) = x \oplus y\,\overline{z} \oplus \overline{y}\,z \oplus x\,y\,\overline{z} \oplus x\,\overline{y}\,z =$$

[заменим каждую переменную с инверсией $\overline{a}$ равносильной формулой $a \oplus 1$, раскроем скобки и удалим пары одинаковых конъюнкций]

$$\begin{gathered}
= x \oplus y\,(z \oplus 1) \oplus (y \oplus 1)\,z \oplus x\,y\,(z \oplus 1) \oplus x\,(y \oplus 1)\,z = \\
= x \oplus \cancel{y\,z} \oplus y \oplus \cancel{y\,z} \oplus z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,y \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,z = \\
= \underset{K_4^+}{x} \oplus \underset{K_2^+}{y} \oplus \underset{K_1^+}{z} \oplus \underset{K_6^+}{x\,y} \oplus \underset{K_5^+}{x\,z} = P.
\end{gathered}$$

Конъюнкции здесь и во всех последующих задачах пронумерованы согласно представлению полинома Жегалкина в форме с коэффициентами.

5) *Получим совершенную ДНФ по таблице истинности.*

$$\text{СовДНФ} = \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z.$$

6) *Получим полином Жегалкина по совершенной ДНФ.*

$$\text{СовДНФ} = \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z =$$

[заменим все знаки дизъюнкции на знаки дизъюнкции с исключением]

$$= \overline{x}\,\overline{y}\,z \oplus \overline{x}\,y\,\overline{z} \oplus x\,\overline{y}\,\overline{z} \oplus x\,\overline{y}\,z \oplus x\,y\,\overline{z} \oplus x\,y\,z =$$

[заменим каждую переменную с инверсией $\overline{a}$ равносильной формулой $a \oplus 1$, раскроем скобки и удалим пары одинаковых конъюнкций]

$$\begin{gathered}
= (x \oplus 1)\,(y \oplus 1)\,z \oplus (x \oplus 1)\,y\,(z \oplus 1) \oplus x\,(y \oplus 1)\,(z \oplus 1) \oplus \\
\oplus x\,(y \oplus 1)\,z \oplus x\,y\,(z \oplus 1) \oplus x\,y\,z = \\
= \cancel{x\,y\,z} \oplus \cancel{x\,z} \oplus \cancel{y\,z} \oplus z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus \cancel{x\,y} \oplus \cancel{y\,z} \oplus y \oplus \\
\oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus \cancel{x\,y} \oplus \cancel{x\,z} \oplus x \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,z \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,y \oplus \cancel{x\,y\,z} = \\
= \underset{K_1^+}{z} \oplus \underset{K_2^+}{y} \oplus \underset{K_4^+}{x} \oplus \underset{K_5^+}{x\,z} \oplus \underset{K_6^+}{x\,y} = P.
\end{gathered}$$

7) *Получим полином Жегалкина по таблице истинности*. Используем метод неопределенных коэффициентов, последовательно вычисляя коэффициенты полинома и подставляя их в остальные уравнения. Вектор коэффициентов π полинома выпишем под таблицей.

$x\ y\ z$	$f =$	c_0	$\oplus\, c_1 z$	$\oplus\, c_2 y$	$\oplus\, c_3 yz$	$\oplus\, c_4 x$	$\oplus\, c_5 xz$	$\oplus\, c_6 xy$	$\oplus\, c_7 xyz$
0 0 0	$0 =$	c_0							
0 0 1	$1 =$	0	$\oplus\, c_1$						
0 1 0	$1 =$	0	$\oplus\, 10$	$\oplus\, c_2$					
0 1 1	$0 =$	0	$\oplus\, 11$	$\oplus\, 11$	$\oplus\, c_3$				
1 0 0	$1 =$	0	$\oplus\, 10$	$\oplus\, 10$	$\oplus\, 0$	$\oplus\, c_4$			
1 0 1	$1 =$	0	$\oplus\, 11$	$\oplus\, 10$	$\oplus\, 0$	$\oplus\, 11$	$\oplus\, c_5$		
1 1 0	$1 =$	0	$\oplus\, 10$	$\oplus\, 11$	$\oplus\, 0$	$\oplus\, 11$	$\oplus\, 110$	$\oplus\, c_6$	
1 1 1	$1 =$	0	$\oplus\, 11$	$\oplus\, 11$	$\oplus\, 0$	$\oplus\, 11$	$\oplus\, 111$	$\oplus\, 111$	$\oplus\, c_7$
π	$=$	0	1	1	0	1	1	1	0

$$P = \underset{K_1^+}{z} \oplus \underset{K_2^+}{y} \oplus \underset{K_4^+}{x} \oplus \underset{K_5^+}{x\,z} \oplus \underset{K_6^+}{x\,y}.$$

8) *Получим ДНФ′ по формуле* (F) *подстановкой кратчайших ДНФ элементарных булевых функций.*

$$\begin{aligned}(F) &= (x \downarrow \overline{z}) \sim (\overline{x}\,\overline{y}) = (x \downarrow \overline{z})(\overline{x}\,\overline{y}) \vee \overline{(x \downarrow \overline{z})}\ \overline{(\overline{x}\,\overline{y})} = \\ &= \overline{x}\,z\,\overline{x}\,\overline{y} \vee (x \vee \overline{z})(x \vee y) = \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x \vee x\,y \vee x\,\overline{z} \vee y\,\overline{z} = \\ &= \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x \vee y\,\overline{z} = \text{ДНФ}'.\end{aligned}$$

4′) *Получим полином Жегалкина функции по ДНФ′* (как в задаче 4).

$$\begin{aligned}\text{ДНФ}' &= \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x \vee y\,\overline{z} = (\overline{x}\,\overline{y}\,z \oplus x) \vee y\,\overline{z} = \\ &= \overline{x}\,\overline{y}\,z \oplus x \oplus y\,\overline{z} \oplus x\,y\,\overline{z} = \\ &= (x \oplus 1)\,(y \oplus 1)\,z \oplus x \oplus y\,(z \oplus 1) \oplus x\,y\,(z \oplus 1) = \\ &= \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,z \oplus \cancel{y\,z} \oplus z \oplus x \oplus \cancel{y\,z} \oplus y \oplus \cancel{x\,y\,z} \oplus x\,y = \\ &= \underset{K_5^+}{x\,z} \oplus \underset{K_1^+}{z} \oplus \underset{K_4^+}{x} \oplus \underset{K_2^+}{y} \oplus \underset{K_6^+}{x\,y} = P.\end{aligned}$$

9) *Получим ДНФ″ по формуле* (F) *разложением Шеннона.*

$$\begin{aligned}(F) &= (x \downarrow \overline{z}) \sim (\overline{x}\,\overline{y}) = x[(1 \downarrow \overline{z}) \sim (0\,\overline{y})] \vee \overline{x}\,[(0 \downarrow \overline{z}) \sim (1\,\overline{y})] = \\ &= x\,[0 \sim 0] \vee \overline{x}\,[z \sim \overline{y}] = x \vee \overline{x}\,[z(1 \sim \overline{y}) \vee \overline{z}(0 \sim \overline{y})] = \\ &= x \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} = \text{ДНФ}'.\end{aligned}$$

4″) *Получим полином Жегалкина функции по ДНФ″* (аналогично задаче 4 и учитывая, что все конъюнкции попарно ортогональны).

$$
\begin{gathered}
\text{ДНФ}'' = x \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} = x \oplus \overline{x}\,\overline{y}\,z \oplus \overline{x}\,y\,\overline{z} = \\
= x \oplus (x \oplus 1)\,(y \oplus 1)\,z \oplus (x \oplus 1)\,y\,(z \oplus 1) = \\
= x \oplus \cancel{xyz} \oplus x\,z \oplus \cancel{yz} \oplus z \oplus \cancel{xyz} \oplus x\,y \oplus \cancel{yz} \oplus y = \\
= \underset{K_4^+}{x} \oplus \underset{K_5^+}{x\,z} \oplus \underset{K_1^+}{z} \oplus \underset{K_6^+}{x\,y} \oplus \underset{K_2^+}{y} = P.
\end{gathered}
$$

10) *Получим полином Жегалкина по формуле* (F) *подстановкой полиномов Жегалкина элементарных булевых функций.*

$$(F) = (x \downarrow \overline{z}) \sim (\overline{x}\,\overline{y}) =$$

[найдем полином Жегалкина стрелки Пирса

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = 1 \oplus a \oplus b \oplus ab$$

и подставим его в формулу при $a = x$, $b = \overline{z}$]

$$= (1 \oplus x \oplus \overline{z} \oplus x\,\overline{z}) \sim (\overline{x}\,\overline{y}) =$$

[найдем полином Жегалкина эквивалентности

$$a \sim b = \overline{a \oplus b} = 1 \oplus a \oplus b$$

и подставим его в формулу при $a = 1 \oplus x \oplus z \oplus x\,\overline{z}$, $b = \overline{x}\,\overline{y}$]

$$= 1 \oplus (1 \oplus x \oplus \overline{z} \oplus x\,\overline{z}) \oplus (\overline{x}\,\overline{y}) =$$

[избавимся от скобок, инверсий и пар одинаковых конъюнкций]

$$
\begin{gathered}
= \cancel{1} \oplus \cancel{1} \oplus \cancel{x} \oplus z \oplus \cancel{1} \oplus x\,z \oplus \cancel{x} \oplus x\,y \oplus x \oplus y \oplus \cancel{1} = \\
= \underset{K_1^+}{z} \oplus \underset{K_5^+}{x\,z} \oplus \underset{K_6^+}{x\,y} \oplus \underset{K_4^+}{x} \oplus \underset{K_2^+}{y} = P.
\end{gathered}
$$

11) *Получим полином Жегалкина по формуле* (F) *разложением Дэвио.*

$$
\begin{gathered}
(F) = (x \downarrow \overline{z}) \sim (\overline{x}\,\overline{y}) = x[(1 \downarrow \overline{z}) \sim (0\,\overline{y})] \oplus (x \oplus 1)\,[(0 \downarrow \overline{z}) \sim (1\,\overline{y})] = \\
= x\,[0 \sim 0] \oplus (x \oplus 1)\,[z \sim \overline{y}] = \\
= x \oplus (x \oplus 1)\,[z(1 \sim \overline{y}) \oplus (z \oplus 1)(0 \sim \overline{y})] = \\
= x \oplus (x \oplus 1)\,[z\overline{y} \oplus (z \oplus 1)y] = x \oplus (x \oplus 1)\,[z(y \oplus 1) \oplus (z \oplus 1)y] = \\
= x \oplus (x \oplus 1)\,[\,\cancel{zy} \oplus z \oplus \cancel{zy} \oplus y\,] = \\
= \underset{K_4^+}{x} \oplus \underset{K_5^+}{x\,z} \oplus \underset{K_6^+}{x\,y} \oplus \underset{K_1^+}{z} \oplus \underset{K_2^+}{y} = P.
\end{gathered}
$$

Вывод. Полиномы Жегалкина, полученные семью различными способами, совпадают, следовательно, задачи 1)–11) с большой вероятностью решены верно.

12–15) *Определим, принадлежит ли функция замкнутым классам $\mathcal{T}^0$, $\mathcal{T}^1$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{M}$, по таблице истинности.*

$x\ y\ z$	$f(x,y,z)$		
0 0 0	0		
0 0 1	1	φ_2'	
0 1 0	1	ψ_2'	
0 1 1	0		φ_1
1 0 0	1		ψ_1
1 0 1	1	φ_2''	
1 1 0	1	ψ_2''	
1 1 1	1		

Так как $f(0,0,0) = 0$, то функция сохраняет константу 0, $f(x,y,z) \in \mathcal{T}^0$.

Так как $f(1,1,1) = 1$, то функция сохраняет константу 1, $f(x,y,z) \in \mathcal{T}^1$.

Число единиц в столбце значений функции не равно числу нулей, значит, выполняется достаточное условие несамодвойственности, $f(x,y,z) \notin \mathcal{S}$.

Верхняя половина столбца значений функции предшествует нижней: $\varphi_1 = 0110 \preceq 1111 = \psi_1$, но четвертина $\varphi_2' = 01$ не предшествует четвертине $\psi_2' = 10$, значит, функция не монотонна, $f(x,y,z) \notin \mathcal{M}$.

16) *Определим, принадлежит ли функция классу $\mathcal{L}$ по полиному Жегалкина.* $P = z \oplus y \oplus x \oplus xz \oplus xy$, степень полинома равна двум, значит, функция нелинейна, $f(x,y,z) \notin \mathcal{L}$.

17) *Определим, образует ли функция $f(x,y,z)$ функционально полную систему.* Из задач 12)–16) следует, что вектор непринадлежности функции замкнутым классам имеет вид:

$\mathcal{T}^0$	$\mathcal{T}^1$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{M}$
		–	–	–

Функция не образует функционально полную систему по теореме Поста-Яблонского, так как принадлежит классам $\mathcal{T}^0$ и $\mathcal{T}^1$. •

Содержание