Определённый интеграл   (вариант 30 из типовых расчётов
"Сборника заданий по высшей математике" Л.А. Кузнецова, гл. IV)

Вычислить интегралы:

1. $\int_0^1 x^2\cdot\exp(3\cdot x)\,dx = 3.64547$

2. $\int_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = 23.1$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)\cdot(1+\cos(x))}\,dx = 0.46716$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\tan(x))^2}{(4+3\cdot\cos(2\cdot x))}\,dx = 0.19847$

5. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} 2^8\cdot(\cos(x))^8\,dx = 109.95574$

6. $\int_0^3 \frac{\exp\left[\sqrt{\frac{(3-x)}{(3+x)}}\right]}{(3+x)\cdot\sqrt{9-x^2}}\,dx = 0.57276$

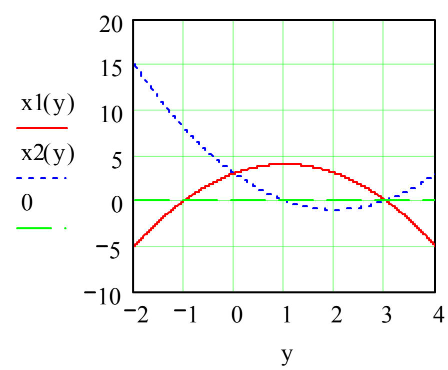
7. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 0.18117$

Вычислить площадь плоской фигуры:

8. Фигура ограничена линиями

$x1(y) := 4-(y-1)^2$ $\qquad$ $x2(y) := y^2-4\cdot y+3$

Поставив курсор на поле графиков функций,
двойным щелчком левой кнопки мыши
открываем окно,
в котором активируем команды Grid Lines,
убираем команды Auto Grid.
Подбираем для команды
Number of Grids такие значения,
чтобы точки пересечения графиков функций
попали на линии координатной сетки.
Находим пределы интегрирования на графике.
(Можно решить систему из уравнений
кривых).



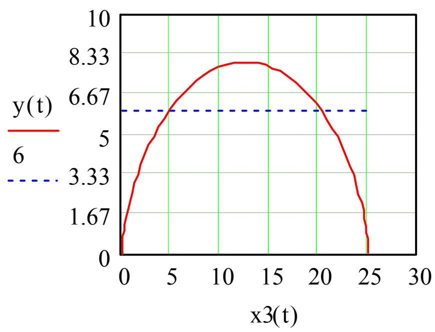
$S := \int_0^3 (x1(y)-x2(y))\,dy$ $\qquad$ Ответ $\quad S = 9$

9. Фигура ограничена циклоидой $\quad x3(t) := 4\cdot(t-\sin(t))$ $\qquad y(t) := 4\cdot(1-\cos(t))$

и прямой $\quad y2 := 6$ $\qquad t := 0, 0.1 .. 2\cdot\pi$

Решив уравнение y(t)=6, найдём пределы интегрирования

$$s1 := \int_{2\cdot\frac{\pi}{3}}^{4\cdot\frac{\pi}{3}} y(t)\cdot\frac{d}{dt}x3(t)\,dt$$



$s1 = 112.619$

От площади s1 отнимем площадь прямоугольника высотой 6 и с таким же основанием, как у криволинейной трапеции.

$$s := s1 - 6\cdot\left(x3\left(4\cdot\frac{\pi}{3}\right) - x3\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

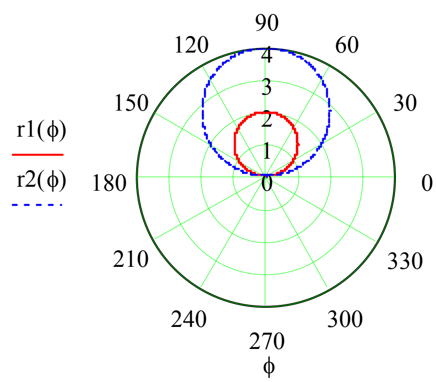
Ответ $s = 20.78461$

10 Кривые (окружности) заданы уравнениями в полярной системе координат

$r1(\phi) := 2\cdot\sin(\phi)$ $r2(\phi) := 4\cdot\sin(\phi)$

$$Sr := \int_0^{\pi} \frac{\left[(r2(\phi))^2 - (r1(\phi))^2\right]}{2}\, d\phi$$

Ответ $Sr = 9.42478$



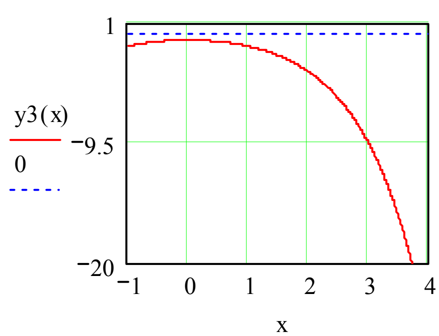
Найти длину дуги плоской кривой:

11

$$y3(x) := \frac{(1 - \exp(x) - \exp(-x))}{2}$$

$$l := \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}y3(x)\right)^2}\, dx$$

Ответ $l = 10.01787$

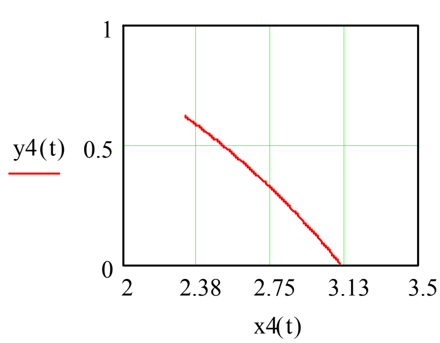


12 Кривая задана параметрически

$x4(t) := \exp(t)\cdot(\cos(t) + \sin(t))$

$y4(t) := \exp(t)\cdot(\cos(t) - \sin(t))$

t меняется от p/6 до p/4: $\frac{\pi}{6} = 0.524$ $t := 0.524, 0.525 .. \frac{\pi}{4}$



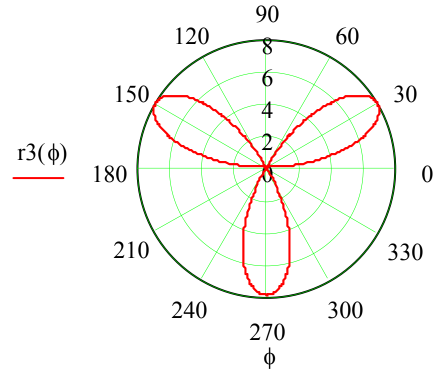
$$L := \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x4(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y4(t)\right)^2}\, dt$$

Ответ $L = 1.01038$

13 Кривая задана уравнением в полярной системе координат (трёхлепестковая роза)

$$r3(\phi) := 8\cdot\sin(3\phi)$$

$$Lr := \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(r3(\phi))^2 + \left(\frac{d}{d\phi} r3(\phi)\right)^2}\, d\phi$$



Ответ $Lr = 17.81986$

Найти объём тела:

14 Тело ограничено эллипсоидом
с полуосями а=4, в=3, с=12
и плоскостями z=0, z=6.

Площадь S(z)
перпендикулярного оси oZ сечения
найдём по формуле
вычисления площади эллипса
произведением полуосей эллипса на р.

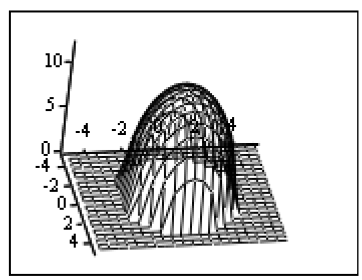
$$S(z) := \pi\sqrt{16\cdot\left(1 - \frac{z^2}{144}\right)}\cdot\sqrt{9\cdot\left(1 - \frac{z^2}{144}\right)}$$

$$v := \int_0^6 S(z)\, dz$$

Ответ $v = 207.34512$

$$Z(x,y) := \mathrm{if}\left[\left(\left(1 - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16}\right)\right) \ge 0, \sqrt{144\cdot\left(1 - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16}\right)}, 0\right]$$

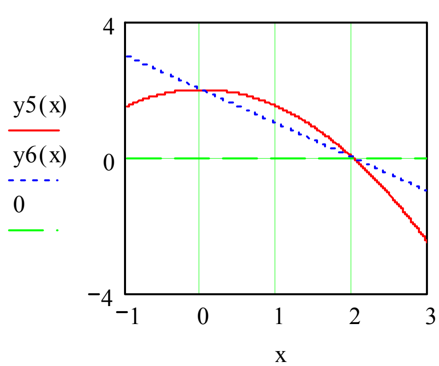
График верхней половины эллипсоида



Z

15 Тело образовано вращением плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y5(x) := 2 - \frac{x^2}{2} \qquad y6(x) := 2 - x$$ вокруг оси оХ.



$$V1 := \int_0^2 \pi\cdot\left[(y5(x))^2\right] dx \qquad V2 := \int_0^2 \pi\cdot(y6(x))^2\, dx$$

$$V := V1 - V2$$

Ответ $V = 5.02655$

Или $\int_0^2 \pi\cdot\left[(y5(x))^2 - (y6(x))^2\right] dx = 5.02655$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

16 $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\left(x^4 + 1\right)} dx = -0.7854$ 17 $\int_0^2 \frac{\left(1 - \sin\left(\sqrt{x}\right)\right)}{\sqrt{x}} dx = 1.14031$ Интегралы сходятся.

18 $\int_1^{\infty} x\cdot\sin(x)\, dx = \blacksquare$ 19 $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)\cdot(x-3)} dx = \blacksquare$ Интегралы расходятся.