Ответы к § 1. Первообразная функция и неопределённый интеграл

1.1.

Определение первообразной функции	Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на промежутке X (отрезке, интервале, полуинтервале), если 1) $F(x)$ непрерывна на промежутке X 2) во всех внутренних точках промежутка X $F^{/}(x) = f(x)$.

1.2. Производная от первообразной функции $F(x)$ должна быть равна функции $f(x)$ на промежутке X: $\boldsymbol{F^{/}(x) = f(x)}$.

1.3.

$F(x)$	$f(x)$	Проверка	Ответ
$\cos mx$	$-\sin mx$	$F^{/}(x) = -m\sin mx \neq f(x)$	Не является
e^{kx}	ke^{kx}	$F^{/}(x) = ke^{kx} = f(x)$	Является
$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$, $m \neq -1$	x^{m}	$F^{/}(x) = \dfrac{(m+1)x^{m+1}}{m+1} = f(x)$	Является

1.4.

Лемма	Функция, производная которой на некотором промежутке X равна нулю, постоянна на этом промежутке.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке X, то для любой внутренней точки ξ этого промежутка ($\forall \xi \in (a, b) \subset X$) имеет место формула конечных приращений Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f^{/}(\xi)(b-a), \quad \forall \xi \in (a,b).$$

Но по условию леммы $f^{/}(\xi)=0, \quad \forall \xi \in (a,b) \subset X$,
откуда следует, что $f(b)-f(a)=0$, или $f(b)=f(a)$,
а это и означает, что значения функции $f(x)$ во всех внутренних точках промежутка X одинаковы, т. е. $f(x)=C, \quad \forall x \in (a,b) \subset X$,
где C – некоторое число.

1.5.

Теорема (о множестве первообразных функций)	Если $F(x)$ − одна из первообразных для $f(x)$ на промежутке X, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке X имеет вид: $$\Phi(x)=F(x)+C,$$ где C − некоторая постоянная.

Доказательство. Пусть функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются первообразными функциями для функции $f(x)$ на промежутке X.
Тогда $(\Phi(x)-F(x))' = \Phi'(x)-F'(x) = f(x)-f(x)=0.$
Поэтому на основании доказанной леммы $\Phi(x)-F(x)=C$.
Т. е. $\Phi(x)=F(x)+C$.

1.6.

Определение неопределённого интеграла	Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ промежутке X и обозначается $\int f(x)dx$. Функция $f(x)$ называется при этом подынтегральной функцией, $f(x)dx$ − подынтегральным выражением.

В силу теоремы о множестве первообразных $\int f(x)dx = F(x)+C$,

где $F(x)$ − одна из первообразных для $f(x)$,

C − произвольная постоянная.

1.7.

Теорема (существования первообразной)	Всякая непрерывная на промежутке X функция имеет первообразную на этом промежутке.

1.8.

Основные элементарные функции	Степенная $y = x^n$, Показательная $y = a^x$, Логарифмическая $y = \log_a x$, Тригонометрические $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$, Обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$, постоянная $y = c$.

1.9.

Определение элементарных функций	Элементарными называют функции, которые получаются из основных элементарных функций в результате применения к ним **конечного числа** операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции (суперпозиции) функций.

Ответы к § 2. Основные свойства неопределённого интеграла

2.1.

Свойство 1 (о производной и дифференциале неопределённого интеграла)	Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную на промежутке X. Тогда для любой внутренней точки этого промежутка производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции $(\int f(x)dx)' = f(x)$; дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Доказательство. $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$.

$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)' \, dx = f(x)dx$.

2.2. $(\int (x^3 + tgx)dx)' = x^3 + tgx, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, где k – целое число.

2.3. $d\int \ln 2x dx = \ln 2x dx, \quad x > 0$.

2.4.

Свойство 2 (о неопределённом интеграле от дифференциала)	Пусть функция $F(x)$ непрерывна на промежутке X и дифференцируема в его внутренних точках. Тогда неопределённыё интеграл от дифференциала функции $F(x)$ равен сумме этой функции и постоянного слагаемого: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Доказательство. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

Вывод из свойств 1 и 2: знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются, причём при интегрировании дифференциала функции к этой функции прибавляется постоянное слагаемое.

2.5. $\int d(\sqrt{x^2 - a^2}) = \sqrt{x^2 - a^2} + C, \quad |a| \leq |x|$.

2.6. $\int dx = x + C$.

2.7. $\int du(x) = u(x) + C$.

2.8.

Свойство 3 (линейности)	Если существуют первообразные $F(x)$ и $G(x)$ для функций $f(x)$ и $g(x)$, а α и β – любые числа, то существует первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$, причём $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

Доказательство. Поскольку $\int f(x)dx = F(x) + C_1$ и $\int g(x)dx = G(x) + C_2$, то функция $\alpha F(x) + \beta G(x)$ является первообразной для функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$ по определению первообразной: $\alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$.
Тогда

$$\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx=\alpha(F(x)+C_1)+\beta(G(x)+C_2)=$$
$$=(\alpha F(x)+\beta G(x))+(C_1+C_2)=\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx.$$

2.9. Так как $(e^x)^/ = e^x$, $(\dfrac{x^4}{4})^/ = x^3$,
то по определению первообразной и свойству линейности получим
$$\int(3e^x+5x^3)dx=3e^x+\frac{5x^4}{4}+C.$$

Ответы к § 3. Метод замены переменных (подстановки) в неопределённом интеграле

3.1.

Теорема (о замене переменных в неопределённом интеграле)	Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке *T*, а промежуток *X* − множество её значений. Пусть функция $f(x)$ определена на *X* и имеет на этом промежутке первообразную *F*(*x*). Тогда на промежутке *T* функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi^/(t)$: $\int f(\varphi(t))\varphi^/(t)dt=F(\varphi(t))+C$, и справедлива формула замены переменной $\int f(x)dx=\left\lvert\begin{matrix}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\end{matrix}\right\rvert=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции получим: $(F(\varphi(t)))_t^/ = (F(\varphi(t)))_x^/\varphi_t^/(t)=f(\varphi(t))\varphi^/(t)$, т. е. функция $f(\varphi(t))\varphi^/(t)$ имеет на множестве *T* первообразную $F(\varphi(t))$, следовательно, $\int f(\varphi(t))\varphi^/dt=F(\varphi(t))+C$.

Учитывая, что $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi^/(t)dt$ будем иметь

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C \,.$$

Т. е. первообразная не изменяет своей формы в зависимости от того, является её аргумент независимой переменной или функцией другого аргумента (**свойство 4 инвариантности** неопределённого интеграла).
Замечание. Частным случаем замены переменной является приём подведения некоторой функции под знак дифференциала, когда замена переменной делается устно.

3.2. Под непосредственным интегрированием понимают нахождение первообразной по формулам таблицы интегралов с применением основных свойств неопределённого интеграла и тождественных преобразований подынтегральных функций.
При этом часто используется приём подведения функций под знак дифференциала в подынтегральном выражении, когда дифференциал dx заменяют равенством $dx = \dfrac{d(u(x))}{u'(x)}, \quad u'(x) \neq 0$,
в результате чего интеграл $\int f_1(u)du$ может оказаться табличным.

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{d(u(x))}{u'(x)} = \int f_1(u)du \,.$$

3.3. Применим свойство линейности и формулу 2 таблицы интегралов, записав все степенные функции в удобном для применения этой формулы виде: $\int u^m du, \quad m \neq -1.$
Если $m = -1,$ применяем формулу 3.

$$\int \left(x^4 - \frac{6}{x} + \sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{x^7} + \frac{10}{\sqrt{x^9}}\right)dx =$$

$$= \int x^4 dx - 6\int \frac{dx}{x} + \int x^{\frac{3}{5}} dx - 2\int x^{-7} dx + 10\int x^{-\frac{9}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} - 6\ln|x| + \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} - 2\,\frac{x^{-6}}{-6} + 10\,\frac{x^{-\frac{7}{2}}}{-\frac{7}{2}} + C =$$

$$= \frac{x^5}{5} - 6\ln|x| + \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + \frac{1}{3x^6} - \frac{20}{7\sqrt{x^7}} + C \,.$$

3.4. С чего начать поиски первообразной интеграла $\int(\sin x-\cos x)^2\,dx$?

Сначала тождественно преобразуем подынтегральную функцию

$(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x$.

Применим далее свойство линейности и подведение функции под знак дифференциала:

$\int(1-\sin 2x)dx=\int dx-\int\sin 2x\frac{d(2x)}{2}=x+\frac{\cos 2x}{2}+C$.

3.5. Первообразную для интеграла $\int e^{\frac{2}{x}}\frac{dx}{x^2}$ найдём, заметив, что $(\frac{2}{x})^{/}=-\frac{2}{x^2}$.

$$\int e^{\frac{2}{x}}\frac{dx}{x^2}=\int\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\frac{d(\frac{2}{x})}{(-\frac{2}{x^2})}=\left|u=\frac{2}{x}\right|=-\frac{1}{2}\int e^u du=-\frac{e^{\frac{2}{x}}}{2}+C.$$

3.6. Данный интеграл $\int\frac{2^x dx}{\sqrt{4^x-1}}$ легко преобразовать к табличному (8):

$$\int\frac{2^x dx}{\sqrt{4^x-1}}=\int\frac{2^x}{\sqrt{(2^x)^2-1}}\cdot\frac{d(2^x)}{2^x\ln 2}=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{1}{\ln 2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|+C=\frac{\ln\left|2^x+\sqrt{2^x-1}\right|}{\ln 2}+C.$$

3.7. Выделим целую часть подынтегральной функции (можно делением числителя на знаменатель, можно – тождественным преобразованием, отняв и прибавив единицу в числителе), затем применим свойство линейности и формулы 2 и 6 таблицы интегралов:

$$\int\frac{x^2+1}{x^2-1}dx=\int\frac{(x^2-1)+2}{x^2-1}dx=\int(1+\frac{2}{x^2-1})dx=\int dx+2\int\frac{dx}{x^2-1}=x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

3.8. По свойству линейности получим сначала два интеграла:

$\int \frac{2x+3}{x^2+5}dx = \int \frac{2xdx}{x^2+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+5}$. Второй интеграл – табличный (5), а в первом введём под знак дифференциала знаменатель подынтегральной функции:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5}dx = \int \frac{2xdx}{x^2+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{2x\, d(x^2+5)}{(x^2+5)2x} + \frac{3}{\sqrt{5}} arctg\frac{x}{\sqrt{5}} =$$

$$= \ln\left|x^2+5\right| + \frac{3}{\sqrt{5}} arctg\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Далее комментарии опустим.

3.9. $\int (1-e^x)^2 dx = \int dx - 2\int e^x dx + \int e^{2x}\frac{d(2x)}{2} = x - 2e^x + \frac{e^{2x}}{2} + C.$

3.10.

$$\int x\sin(1-x^2)dx = \int x\sin(1-x^2)\frac{d(1-x^2)}{-2x} = \left|u = 1-x^2\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin u du = \frac{\cos u}{2} + C = \frac{\cos(1-x^2)}{2} + C.$$

3.11.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx} = \int \frac{1}{(1+x^2)arctgx}\cdot\frac{d(arctgx)}{\frac{1}{1+x^2}} =$$

$$= \left|u = arctgx\right| = \int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C = \ln\left|arctgx\right| + C.$$

3.12.

$$\int a^{x^2} e^{x^2} xdx = \int (ae)^{x^2} x\cdot\frac{d(x^2)}{2x} = \left|u = x^2\right| = \frac{1}{2}\int (ae)^u du =$$

$$= \frac{(ae)^u}{2\ln(ae)} + C = \frac{(ae)^{x^2}}{2(1+\ln a)} + C.$$

Ответы к § 4. Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле

4.1.

Теорема (об интегрировании по частям в неопределённом интеграле)	Пусть на промежутке X функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и функция $u^{/}(x)v(x)$ имеет первообразную на X. Тогда $u(x)v^{/}(x)$ также имеет первообразную на X, и справедлива формула интегрирования по частям: $$\int u(x)v^{/}(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u^{/}(x)dx,$$ или $$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Так как $(u(x)v(x))^{/} = u^{/}(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v^{/}(x)$, то функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $u^{/}(x)v(x) + u(x)v^{/}(x)$. Но тогда и функция $u(x)v^{/}(x)$ имеет первообразную на промежутке X (как разность двух функций, имеющих первообразные):

$u(x) \cdot v^{/}(x) = (u(x)v(x))^{/} - u^{/}(x) \cdot v(x)$.

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int u(x)v^{/}(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u^{/}(x)dx.$$

4.2. Тем, кто уже приобрёл некоторые навыки интегрирования, легко заметить, что $(x^3)^{/} = 3x^2$. Поэтому непосредственное интегрирование позволяет найти первообразную:

$$\int x^2 \exp(x^3)dx = \int x^2 e^{x^3} \frac{d(x^3)}{3x^2} = \left|u = x^3\right| = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{e^{x^3}}{3} + C.$$

4.3. Применим сначала замену переменной, потом – интегрирование по частям (см. ОК):

$$\int x^3 \exp(x^2)dx = \int x^2 e^{x^2} xdx = \left| \begin{array}{l} t = x^2; \\ dt = 2xdx; \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| == \frac{1}{2}\int te^t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & du = dt; \\ dv = e^t dt; & v = \int e^t dt = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{2}(te^t - \int e^t dt) = \frac{1}{2}(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + C.$$

4.4. Заметим, что $(\ln x)^/ = \dfrac{1}{x}$. Поэтому данный интеграл можно найти непосредственным интегрированием:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \frac{\ln^2 x}{x} \frac{d(\ln x)}{\frac{1}{x}} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

4.5. К интегралу $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ два раза применим метод интегрирования по частям (см. ОК), избавляясь от логарифма.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x; & dv = \dfrac{dx}{x^2}; \\ du = \dfrac{2\ln x dx}{x}; & v = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} \end{array} \right| = -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{2\ln x dx}{x^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2\ln x; & dv = \dfrac{dx}{x^2}; \\ du = \dfrac{2dx}{x}; & v = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} + \int \frac{2dx}{x^2} = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C.$$

4.6. Подведём под знак дифференциала x^2.

$$\int x \sin x^2 dx = \int x \sin x^2 \frac{d(x^2)}{2x} = \frac{1}{2}\int \sin u du = -\frac{\cos u}{2} + C = -\frac{\cos x^2}{2} + C.$$

4.7. Данный интеграл – типовой для метода интегрирования по частям (см. ОК). Поскольку подынтегральная функция содержит многочлен 2-й степени, метод надо применять два раза, понижая степень многочлена до нулевой.

$$\int x^2\sin xdx=\begin{vmatrix}u=x^2; & dv=\sin xdx;\\ du=2xdx; & v=-\cos x\end{vmatrix}=-x^2\cos x+\int 2x\cos xdx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=2x; & dv=\cos xdx;\\ du=2dx; & v=\sin x\end{vmatrix}=-x^2\cos x+2x\sin x-\int 2\sin xdx=$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

4.8. Интеграл $\int 5^x\cos xdx$ является типовым циклическим (см. ОК). Такие интегралы берут два раза по частям, получая уравнение относительно искомого интеграла.

$$\int 5^x\cos xdx=\begin{vmatrix}u=5^x; & dv=\cos xdx;\\ du=5^x\ln 5dx; & v=\sin x\end{vmatrix}=5^x\sin x-\int(\sin x)5^x\ln 5dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=5^x\ln 5; & dv=\sin xdx;\\ du=5^x\ln^2 5dx; & v=-\cos x\end{vmatrix}=5^x\sin x-((-\cos x)5^x\ln 5-\int(-\cos x)5^x\ln^2 5dx).$$

То есть

$$\int 5^x\cos xdx=5^x\sin x+(\cos x)5^x\ln 5-\ln^2 5\int(\cos x)5^x dx.$$

Откуда

$$(1+\ln^2 5)\int 5^x\cos xdx=5^x\sin x+(\cos x)5^x\ln 5,$$

$$\int 5^x\cos xdx=\frac{5^x\sin x+(\cos x)5^x\ln 5}{(1+\ln^2 5)}+C.$$

4.9. Интеграл $\int 5^{\sin x}\cos xdx$ найдём подведением под знак дифференциала функции $u=\sin x$:

$$\int 5^{\sin x}\cos xdx=\int 5^{\sin x}\cos x\frac{d(\sin x)}{\cos x}=\int 5^u du=\frac{5^{\sin x}}{\ln 5}+C.$$

4.10. Для нахождения первообразной интеграла $\int \sqrt{x}\exp(\sqrt{x})dx$ можно попытаться ввести $\sqrt{x}$ под знак дифференциала, или, что то же самое, сделать подстановку $t=\sqrt{x}$.

$$\int \sqrt{x}\exp(\sqrt{x})dx = \begin{vmatrix} t=\sqrt{x}; \\ x=t^2; \\ dx=2tdt \end{vmatrix} = \int te^t 2tdt = \int 2t^2e^t dt.$$

Получили типовой интеграл (см. ОК), который надо брать два раза по частям.

$$\int 2t^2e^t dt. = \begin{vmatrix} u=2t^2; & dv=e^t dt; \\ du=4tdt; v=e^t & \end{vmatrix} = 2t^2e^t - \int e^t 4tdt = \begin{vmatrix} u=4t; & dv=e^t dt; \\ du=4dt; v=e^t & \end{vmatrix} =$$

$$= 2t^2e^t - (4te^t - \int 4e^t dt) = 2t^2e^t - 4te^t + 4e^t + C =$$

$$= 2e^{\sqrt{x}}(x - 2\sqrt{x} + 2) + C.$$

4.11. Подведём под знак дифференциала $\sqrt{x}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})\frac{d\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \left|u=\sqrt{x}\right| = 2\int e^u du = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

4.12. Подведём под знак дифференциала функцию $u=\arcsin x$.

$$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{d\arcsin x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \int udu = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$$

4.13. Первообразную интеграла $\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ попытаемся найти методом интегрирования по частям (см. ОК).

$$\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x; \quad dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}; \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\ v = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \dfrac{d(1-x^2)}{-2x} = -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C.$$

Ответы к § 5. Интегрирование дробных рациональных функций

5.1.

Определение многочлена степени n.	Многочленом $P_n(x)$ степени n называется линейная комбинация степенных функций $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – любые числа, причём $a_0 \neq 0$.

5.2.

Определение рациональной дроби	**Рациональной дробью** называется отношение двух многочленов: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m}$

5.3.

Определение правильной рациональной дроби	Рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется **правильной**, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$).

5.3.1.

Определение неправильной рациональной дроби	Рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется **неправильной**, если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$).

5.4.

Теорема	Интегрирование неправильной рациональной дроби можно свести к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

5.5. Степень многочлена в числителе подынтегральной функции интеграла $\int \frac{3x^5+2x^4-7x^2+4}{x^2+2}dx$ равна пяти, степень многочлена знаменателя равна двум, т. е. дробь неправильная.

При интегрировании неправильной рациональной дроби в первую очередь представляют её в виде суммы целой части (многочлена) и правильной рациональной дроби. Это делают или делением столбиком многочлена в числителе на многочлен в знаменателе, реже – при помощи тождественных преобразований числителя.

При делении многочлены располагают в порядке убывания степеней аргумента и подбирают множитель, который при умножении на старшую степень делителя даёт старшую степень делимого. Потом вычитают коэффициенты при одинаковых степенях аргумента. Деление проводят до тех пор, пока степень остатка не станет меньше степени многочлена знаменателя.

$$
\begin{array}{l|l}
-\,3x^5+2x^4-7x^2+4 & x^2+2 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{3x^5+6x^3} & 3x^3+2x^2-6x-11 \text{ – целая часть} \\
\qquad -\,2x^4-6x^3-7x^2 & \\
\qquad\quad \underline{2x^4+4x^2} & \\
\qquad\qquad -\,-6x^3-11x^2 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-6x^3-12x} & \\
\qquad\qquad\qquad -\,-11x^2+12x+4 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-11x^2-22} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 12x+26 \text{ – остаток} &
\end{array}
$$

Итак,

$$\int \frac{3x^5+2x^4-7x^2+4}{x^2+2}\,dx = \int (3x^3+2x^2-6x-11+\frac{12x+26}{x^2+2})dx =$$

$$= \int (3x^3+2x^2-6x-11)dx + \int \frac{12x}{x^2+2}\cdot\frac{d(x^2+2)}{2x} + \int \frac{26dx}{x^2+2} =$$

$$= \frac{3x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}-11x+6\ln\left|x^2+2\right|+\frac{26}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

5.6.

Теорема (основная алгебры)	Любой многочлен степени n имеет ровно n корней и может быть представлен в виде произведения n сомножителей.

5.7.

Теорема (о разложении многочлена на множители)	Любой многочлен степени m можно разложить на линейные и квадратичные множители: $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m =$ $= b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}\cdot$ $\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$ в соответствии с его вещественными ($x_1, x_2, ...x_r$) и комплексными сопряжёнными корнями с учётом кратности $k_1, k_2, ..., k_r$ его вещественных и $l_1, l_2, ..., l_s$ комплексных корней, причём $k_1+k_2+...+k_r+2l_1+2l_2+...+2l_s = m$.

5.8.

Теорема (о сумме простых дробей)	Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами единственным образом, руководствуясь правилом:

Вид множителя в знаменателе дроби	Сколько дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x\text{-}a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+...+\frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}}+...+\frac{M_wx+N_w}{x^2+px+q}$

5.9. Подынтегральная функция интеграла

$\int \frac{x^5+x^4+x^3+14x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}dx$ – неправильная рациональная дробь.

Поэтому надо

1. Сначала выделить её целую часть.

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^5+x^4+x^3+14x^2-2x+5 & x^4-2x^3+5x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5-2x^4+5x^3} & x+3 \text{ – целая часть} \\
\quad -\,3x^4-4x^3+14x^2 & \\
\quad \underline{\;\;\;3x^4-6x^3+15x^2} & \\
\qquad\quad 2x^3-x^2-2x+5 \text{ – остаток.} &
\end{array}
$$

То есть $\frac{x^5+x^4+x^3+14x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2} = x+3+\frac{2x^3-x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}$

2. Многочлен в знаменателе разложить на множители.

$x^4-2x^3+5x^2 = x^2(x^2-2x+5) \quad (D<0)$.

3. По правилу 5.8. правильную дробь представить суммой простых дробей с неопределёнными коэффициентами.

$$\frac{2x^3-x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2} = \frac{2x^3-x^2-2x+5}{x^2(x^2-2x+5)} = \frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+5}.$$

5.10. Подынтегральная функция интеграла

$\int \frac{x^7}{x^4-1}dx$ – неправильная рациональная дробь.

Поэтому надо

1. Сначала выделить её целую часть.

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^7 & x^4-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^7-x^3} & x^3 \text{ – целая часть} \\
\qquad x^3 \text{ – остаток.} &
\end{array}
$$

То есть $\frac{x^7}{x^4-1} = x^3+\frac{x^3}{x^4-1}$

2. Многочлен в знаменателе разложить на множители линейные и квадратичные.

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

3. По правилу 5.8. правильную дробь представить суммой простых дробей с неопределёнными коэффициентами.

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Замечание. Так как

$$\frac{x^7}{x^4-1} = x^3+\frac{x^3}{x^4-1},$$

то $\int \frac{x^7}{x^4-1}dx = \int x^3 dx + \int \frac{x^3}{x^4-1}dx = \int x^3 dx + \int \frac{x^3}{x^4-1}\frac{d(x^4-1)}{4x^3} = \frac{x^4}{4} + \frac{\ln\left|x^4-1\right|}{4} + C$,
и при нахождении первообразной данного интеграла надобность в разложении функции на простые дроби отпадает.

5.11. Подынтегральная функция интеграла

$\int \frac{7x^3-14x^2+15x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$ – неправильная рациональная дробь.

Поэтому надо

1. Сначала выделить её целую часть. Легко заметить, что это можно сделать элементарными преобразованиями:

$$\frac{7x^3-14x^2+15x+2}{x^3-2x^2+2x} = \frac{7(x^3-2x^2+2x)+x+2}{x^3-2x^2+2x} = 7 + \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}.$$

2. Многочлен в знаменателе разложить на множители линейные и квадратичные.

$x^3 - 2x^2 + 2x = x(x^2 - 2x + 2)$ $(D<0)$.

3. По правилу 5.8. правильную дробь представить суммой простых дробей с неопределёнными коэффициентами

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x} = \frac{x+2}{x(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+2}.$$

5.12.1.

Метод задания частных значений	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение подставляют вещественные корни знаменателя или другие любые значения.

5.12.2.

Метод неопределённых коэффициентов	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. Из полученного уравнения получают систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x в правой и левой частях уравнения.

5.12.3.

Метод комбинированный	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение последовательно подставляют все вещественные корни знаменателя, остальные коэффициенты находят методом неопределённых коэффициентов.

5.13. В примере 5.9. правильная дробь была разложена на сумму простых дробей с неопределёнными коэффициентами $\frac{2x^3-x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}=\frac{2x^3-x^2-2x+5}{x^2(x^2-2x+5)}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+5}$.

Приведём сумму простых дробей к общему знаменателю и приравняем числители правильной дроби и суммы простых дробей.
$2x^3-x^2-2x+5=A_1(x^2-2x+5)+A_2x(x^2-2x+5)+(Mx+N)x^2$.

Применим сначала метод задания частных значений, используя вещественный корень знаменателя дроби $x=0$. Подставив его в последнее уравнение, получим $5=A_1\cdot 5$, откуда $A_1=1$.

Больше вещественных корней знаменатель данной дроби не имеет, поэтому для нахождения остальных коэффициентов применим метод неопределённых коэффициентов. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях аргумента.

$x^3:\quad 2=A_2+M;$

$x^2:\quad -1=A_1-2A_2+N;$;

$x:\quad -2=-2A_1+5A_2.$

Из последнего уравнения найдём $A_2=0$, т. к. $A_1=1$.
Тогда $M=2$, $N=-2$.

Таким образом, $\frac{2x^3-x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}=\frac{2x^3-x^2-2x+5}{x^2(x^2-2x+5)}=\frac{1}{x^2}+\frac{0}{x}+\frac{2x-2}{x^2-2x+5}$.

Проверка. Приведём полученную сумму дробей к общему знаменателю и сравним числители:

$$2x^3-x^2-2x+5=x^2-2x+5+x^2(2x-2)=2x^3-x^2-2x+5.$$

5.14. В примере 5.11. правильная дробь была разложена на сумму простых дробей с неопределёнными коэффициентами

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}=\frac{x+2}{x(x^2-2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+2}.$$

Приведём сумму простых дробей к общему знаменателю и приравняем числители правильной дроби и суммы простых дробей.

$$x+2=A(x^2-2x+2)+(Mx+N)x.$$

Применим сначала метод задания частных значений, используя вещественный корень знаменателя дроби $x=0$. Подставив его в последнее уравнение, получим $2=A\cdot 2$, откуда $A=1$.

Больше вещественных корней знаменатель данной дроби не имеет, поэтому для нахождения остальных коэффициентов применим метод неопределённых коэффициентов. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях аргумента.

$x^2:\quad 0=A+M;$

$x:\quad 1=-2A+N.$

Следовательно, $M=-1;\quad N=3.$

Поэтому $\dfrac{x+2}{x^3-2x^2+2x}=\dfrac{x+2}{x(x^2-2x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Mx+N}{x^2-2x+2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-x+3}{x^2-2x+2}.$

Проверка. Приведём полученную сумму дробей к общему знаменателю и сравним числители: $x+2=(x^2-2x+2)+(-x+3)x=x+2$.

5.15. Простыми дробями 1-го типа называют дроби вида $\dfrac{A}{x-a}$.

5.16. Дроби первого типа интегрируют непосредственно:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{A}{x-a}d(x-a)=A\ln|x-a|+C;$$

5.17. Простыми дробями 2-го типа называют дроби вида $\dfrac{A}{(x-a)^k}$.

5.18. Дроби второго типа интегрируют непосредственно:

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}\,d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C;\ (k>1).$$

5.19. Простыми дробями 3-го типа называют дроби вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

5.20. Дроби третьего типа интегрируются по следующему алгоритму.
1. Выделяем полный квадрат в квадратном трёхчлене

$x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2-\dfrac{p^2}{4}+q$;

2. Вводим новую переменную $x+\dfrac{p}{2}=t;\quad dx=dt$; $\quad x^2+px+q=t^2\pm a^2$.

3. Применяем свойство линейности и приём подведения функции под знак дифференциала.

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{array}{l} x^2+px+q= \\ =(x+\dfrac{p}{2})^2-\dfrac{p^2}{4}+q; \\ x+\dfrac{p}{2}=t;\quad dx=dt; \\ x=t-\dfrac{p}{2}; \\ x^2+px+q=t^2\pm a^2 \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2\pm a^2}dt=M\int\frac{td(t^2\pm a^2)}{(t^2\pm a^2)2t}+(N-M\frac{p}{2})\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|t^2\pm a^2\right|+(N-M\frac{p}{2})\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}.$$

Последние интегралы – табличные (5) или (6).

5.21. Простыми дробями 4-го типа называют дроби вида

$\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^w}\quad (w>1)$.

5.22. Дроби четвертого типа после замены переменной интегрируют по такому же алгоритму, что и простые дроби 3-го типа.

1. Выделяем полный квадрат в квадратном трёхчлене

$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q;$$

2. Вводим новую переменную $x + \frac{p}{2} = t; \quad dx = dt; \qquad x^2 + px + q = t^2 \pm a^2$.

3. Применяем свойство линейности и приём подведения функции под знак дифференциала.

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^w} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q = \\ = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q; \\ x + \frac{p}{2} = t; \quad dx = dt; \\ x^2 + px + q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{(t^2 \pm a^2)^w} dt = M \int \frac{td(t^2 \pm a^2)}{(t^2 \pm a^2)^w 2t} + (N - M\frac{p}{2}) \int \frac{dt}{(t^2 \pm a^2)^w} =$$

$$= \frac{M(t^2 \pm a^2)^{-w+1}}{2(-w+1)} + (N - M\frac{p}{2}) \int \frac{dt}{(t^2 \pm a^2)^w}.$$

Последний интеграл берётся по рекуррентной (возвращающейся) формуле (формула получается методом интегрирования по частям):

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} \right).$$

Применяют эту формулу сначала для $n = 2$, затем полученный результат используют для $n = 3$ и т. д.

5.23. Применяя результаты 5.9. и 5.13., получим

$$\int \frac{x^5+x^4+x^3+14x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}dx = \int (x+3+\frac{2x^3-x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2})dx =$$

$$= \int (x+3)dx + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2-2x+5 = (x^2-2x+1)+4 = (x-1)^2+4 = t^2+4; \\ x-1=t;\ dx=dt;\quad x=t+1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{x}+\int \frac{2(t+1)-2}{t^2+4}dt = \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{x}+\int \frac{2t}{t^2+4}\cdot\frac{d(t^2+4)}{2t} =$$

$$= \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{x}+\ln(t^2+4)+C = \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{x}+\ln(x^2-2x+5)+C.$$

5.24. Применяя результаты 5.11. и 5.14., получим

$$\int \frac{7x^3-14x^2+15x+2}{x^3-2x^2+2x}dx = \int (7+\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x})dx = \int (7+\frac{1}{x}+\frac{-x+3}{x^2-2x+2})dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2-2x+2 = (x^2-2x+1)+1 = (x-1)^2+1 = t^2+1; \\ x-1=t;\quad dx=dt;\quad x=t+1 \end{array} \right| =$$

$$= \int 7dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-(t+1)+3}{t^2+1}dt = \int 7dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{td(t^2+1)}{(t^2+1)2t} + 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 7x + \ln|x| - \frac{\ln(t^2+1)}{2} + 2arctgt + C =$$

$$= 7x + \ln|x| - \frac{\ln(x^2-2x+2)}{2} + 2arctg(x-1) + C.$$

Ответы к § 6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

6.1.

Определение рациональной функции двух переменных	**Рациональной** функцией двух переменных $R(u,v)$ называется функция, полученная путём применения к аргументам u,v конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в **целую** степень.

6.2. Воспользуемся универсальной подстановкой, поскольку ни непосредственное интегрирование, ни другие способы для интеграла $\int \frac{dx}{\sin x}$ не подходят.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^{2;}}; \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Иногда интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$ включают в таблицу интегралов.

6.3. Подынтегральная функция интеграла $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ – нечётная относительно синуса (функция меняет знак при изменении знака перед синусом). Поэтому кроме универсальной подстановки можно применить подстановку $t = \cos x$, т. е. подвести $\cos x$ под знак дифференциала.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x; \quad dt = -\sin x dx; \\ \sin x dx = -dt; \\ \sin^3 x dx = \sin^2 x \cdot \sin x dx = \\ = (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \\ = (1 - t^2)(-dt) = (t^2 - 1)dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t^4} dt = \int \frac{t^2}{t^4} dt - \int \frac{1}{t^4} dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

6.4. Синус и косинус интеграла $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ содержатся в чётных неотрицательных степенях. Следовательно, кроме универсальной подстановки, можно применить подстановку $t = tgx$. Но лучше всего для данного интеграла использовать формулы понижения степени синуса и косинуса.

Преобразуем подынтегральную функцию для непосредственного интегрирования.

$$\sin^2 x\cos^4 x=\frac{(4\sin^2 x\cos^2 x)\cos^2 x}{4}=\frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\cos^2 x=\frac{1-\cos 4x}{8}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=$$
$$=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 4x\cos 2x)=$$
$$=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x))=$$
$$=\frac{1}{16}(1-\cos 4x)+\frac{1}{32}(\cos 2x-\cos 6x).$$

Поэтому

$$\int\sin^2 x\cos^4 x dx=\int(\frac{1}{16}(1-\cos 4x)+\frac{1}{32}(\cos 2x-\cos 6x))dx=$$
$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C.$$

6.5. Подынтегральная функция интеграла $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$ чётная относительно синуса и косинуса (при изменении знака при синусе и косинусе функция не меняется), поэтому кроме универсальной для неё подойдёт подстановка $t=tgx$.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}dx=\left|\begin{array}{ll} t=tgx; & dx=\dfrac{dt}{1+t^{2;}}; \\ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}; & \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^{2;}}}{\dfrac{t^2}{1+t^2}\cdot(\dfrac{1}{1+t^2})^2}$$
$$=\int\frac{(1+t^2)^2}{t^2}dt=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+2t+\frac{t^3}{3}+C=2tgx-\frac{1}{tgx}+\frac{tg^3 x}{3}+C.$$

Ответы к § 7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Определение иррациональной функции	Функция называется алгебраической **иррациональной**, если она получена путём применения к аргументу x конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в **рациональную** ($\frac{m}{n}$ $(m, n$ – целые)) степень.

7.2. Чтобы избавиться от иррациональностей, для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ применим подстановку $x = t^6$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{ll} x = t^6; & dx = 6t^5 dt; \\ \sqrt{x} = t^3; & \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1}.$$

Выделим целую часть полученной неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{l|l} -\,t^3 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & \overline{t^2-t+1} \text{ – целая часть} \\ \quad -\,-t^2 & \\ \quad \underline{-t^2-t} & \\ \qquad -\,t & \\ \qquad \underline{t+1} & \\ \qquad -1 \text{ – остаток.} & \end{array}$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{ll} x = t^6; & dx = 6t^5 dt; \\ \sqrt{x} = t^3; & \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} =$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1})dt = 6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|) + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

7.3. Избавимся от корня его заменой на t^2 (см. ОК).

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} = t^2; \quad x-1 = t^2(x+1); \quad x(1-t^2) = t^2+1; \\ x = \frac{t^2+1}{1-t^2}; \quad dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt \end{array} \right| = .$$

$$= \int \frac{t^2+1}{1-t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt = 4\int \frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt.$$

Полученную правильную рациональную дробь надо представить суммой простых дробей:

$$\frac{-(t^4+t^2)}{(t-1)^3(1+t)^3} = \frac{A_1}{(t-1)^3} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{A_3}{(t-1)} + \frac{B_1}{(1+t)^3} + \frac{B_2}{(1+t)^2} + \frac{B_3}{(1+t)},$$

найти 6 неопределённых коэффициентов и проинтегрировать простые дроби 1-го и 2-го типа. Всё это, конечно, займёт много времени.

Попытаемся поступить по-другому. Умножим и разделим подынтегральную функцию на сопряжённое знаменателю выражение $\sqrt{x-1}$.

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx .$$

Второй интеграл берётся непосредственно подведением подкоренного выражения под знак дифференциала.

Займёмся первым интегралом.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \sqrt{x^2-1}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \qquad (☺)$$

$$= \int \sqrt{x^2-1}dx + \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

С другой стороны, если к этому интегралу применить интегрирование по частям, получим

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left| \begin{matrix} u = x; & dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}; \\ du = dx; & v = \sqrt{x^2-1} \end{matrix} \right| = x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx. \qquad (☺☺)$$

Сложив (☺) и (☺☺), будем иметь

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + x\sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

Следовательно,

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + x\sqrt{x^2-1}\right) - \sqrt{x^2-1} + C.$$

7.4. Интеграл $\int \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$ является дифференциальным биномом (см. ОК). Проверим условия теоремы Пафнутия Львовича Чебышева

при $p = \frac{1}{3};\quad m = 0;\quad n = 3.$

$p = \dfrac{1}{3}$ – не целое;

$\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{1}{3}$ – не целое;

$\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ – не целое.

Вывод: интеграл не берётся в элементарных функциях.

7.5. Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ является дифференциальным биномом (см. ОК). Проверим условия теоремы Пафнутия Львовича Чебышева при $p=-\frac{1}{4}; \quad m=0; \quad n=4.$

$p=-\frac{1}{4}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$ – целое.

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\left|\begin{array}{l} 1+x^4=t^4x^4; \quad x^{-4}+1=t^{4;}; \quad x^4=\frac{1}{t^4-1}; \\ -4x^{-5}dx=4t^3dt; \quad dx=-x^5t^3dt; \\ \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{-x^5t^3dt}{tx}=-\frac{t^2dt}{t^4-1} \end{array}\right|=-\int \frac{t^2dt}{t^4-1}.$$

Правильную дробь разложим на сумму простых дробей

$$\frac{t^2}{t^4-1}=\frac{A_1}{t-1}+\frac{A_2}{t+1}+\frac{Mt+N}{t^2+1}$$

и найдём неопределённые коэффициенты:

$$t^2=A_1(t+1)(1+t^2)+A_2(t-1)(1+t^2)+(Mt+N)(t^2-1).$$

$t=1 \Rightarrow 1=4A_1; \quad A_1=\frac{1}{4};$

$t=-1 \Rightarrow 1=-4A_2; \quad A_2=-\frac{1}{4};$

$t^3: \quad 0=A_1+A_2+M; \quad M=0;$

$t^0: \quad 0=A_1-A_2-N; \quad N=\frac{1}{2}.$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \left| \begin{array}{l} 1+x^4 = t^4x^4; \quad x^{-4}+1 = t^{4;}; \quad x^4 = \dfrac{1}{t^4-1}; \\ -4x^{-5}dx = 4t^3dt; \quad dx = -\,x^5t^3dt; \\ \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \dfrac{-\,x^5t^3dt}{tx} = -\dfrac{t^2dt}{t^4-1} \end{array} \right| = -\int \frac{t^2dt}{t^4-1} =$$

$$= -\,(\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}) = -\,(\frac{1}{4}(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + \frac{1}{2}arctgt) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1} - \frac{1}{2}arctg\sqrt[4]{x^{-4}+1} + C.$$

7.6. Интеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$ является дифференциальным биномом (см. ОК). Проверим условия теоремы Пафнутия Львовича Чебышева при $p = -\frac{3}{2}; \quad m = 3; \quad n = 2.$

$p = -\frac{3}{2}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n} = \frac{4}{2} = 2$ – целое.

Поэтому

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} 1+2x^2 = t^2; \quad 4xdx = 2tdt; \\ x^2 = \dfrac{t^2-1}{2}; \quad dx = \dfrac{tdt}{2x}; \\ \dfrac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} = \dfrac{x^3tdt}{t^3 2x} = \dfrac{(t^2-1)dt}{4t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(t^2-1)dt}{4t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}(\int dt - \int \frac{dt}{t^2}) = \frac{1}{4}(t + \frac{1}{t}) + C = \frac{1}{4}(\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}) + C.$$

7.7. Выделим полный квадрат в подкоренном выражении интеграла $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, потом сделаем замену переменной и тригонометрическую подстановку (см. ОК).

$$\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix}3-2x-x^2=3-(x^2+2x+1)+1=4-(x+1)^2=4-t^2;\\ x+1=t;\quad dx=dt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{4-t^2}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=2\sin u;\quad dt=2\cos u du;\\ 4-t^2=4\cos^2 u\end{matrix}\right|=4\int\cos^2 u du=2\int(1+\cos 2u)du=2(u+\frac{\sin 2u}{2})+C=$$

$$=2(\arcsin\frac{t}{2}+\sin u\cos u)+C=2(\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}})+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x+1}{2}+(x+1)\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}}+C=2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+C.$$

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попытаться применить непосредственное интегрирование;
2. Если это не приводит к успеху, определить класс подынтегральной функции (дробная рациональная, тригонометрическая, иррациональная функция) и применить соответствующие подстановки;
3. Если функция смешанных классов – интегрирование по частям.