

# Ответы к заданию 1

1.1.

**Определение  
понятия  
функции  
одного  
аргумента**

Если каждому элементу  $x$  из множества  $X$  ( $x \in X$ ) поставлен в соответствие определенный элемент  $y$  из множества  $Y$  ( $y \in Y$ ), то говорят, что на множестве  $X$  задана функция  $y = f(x)$  со значениями во множестве  $Y$ .

Элементы  $x \in X$  называют значениями аргумента, а элементы  $y \in Y$  – значениями функции.

Множество  $X$  называется областью определения функции, а множество всех значений функции – областью значений функции.

В случаях, когда множества  $X$  и  $Y$  – числовые множества, соответствующие функции, называют числовыми функциями.

1.2.

**Основные элементарные функции**

Степенная  $y = x^n$ ,

Показательная  $y = a^x$ ,

Логарифмическая  $y = \log_a x$ ,

Тригонометрические

$y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,

Обратные тригонометрические

$y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ ,

постоянная  $y = c$ .

1.3.

**Определение элементарных функций**

Элементарными называют функции, которые получаются из основных элементарных функций в результате применения к ним конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции (суперпозиции) функций.

1.4.

**Определение предела функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ .**

Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  ( $x \rightarrow a$ ), если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ) существует такое положительное число  $\delta$ , зависящее от  $\varepsilon$  ( $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ ), что для всех значений  $x$  из области определения функции, удовлетворяющих неравенству

**Определение**  
**предела функции**  
 **$f(x)$  в точке**  
 **$x = a$ .**

$0 < |x - a| < \delta$ , следует выполнение неравенства

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Используя логические символы, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

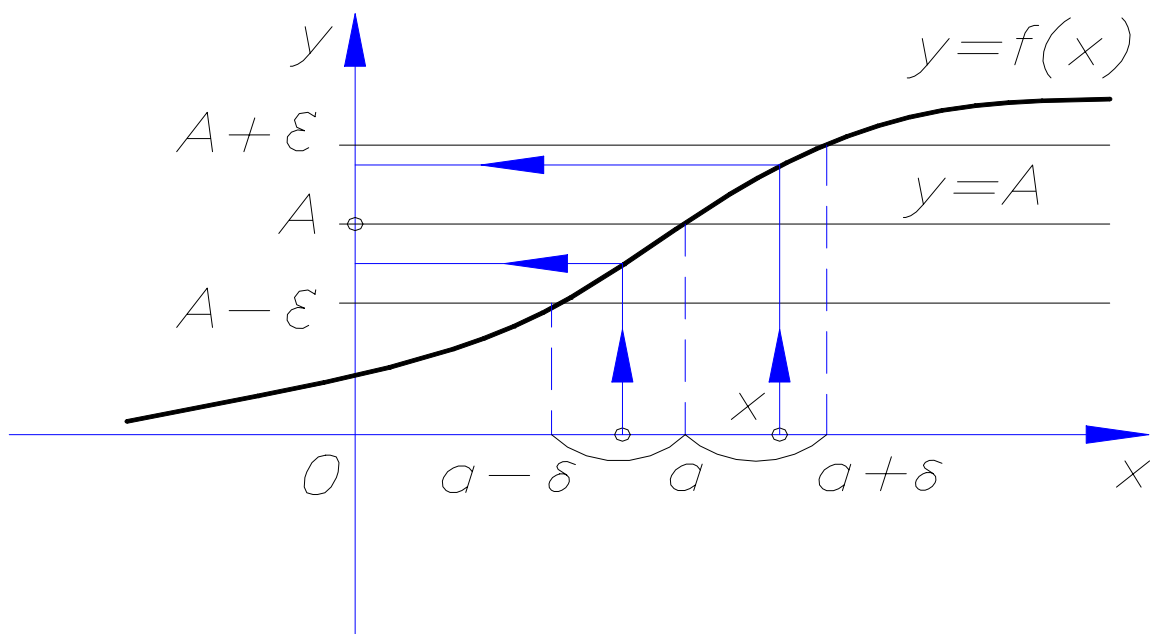


$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

**Геометрический смысл** этого определения заключается в следующем.

Какую бы узенькую полоску шириной  $2\varepsilon$ , параллельную оси абсцисс и содержащую прямую  $y = A$  посередине ( $\varepsilon$  – окрестность точки  $y = A$ :  $U_\varepsilon(A)$ ), мы ни выделили, всегда существует такой симметричный интервал длиной  $2\delta$  с центром в точке  $x = a$ ,  $x \neq a$  (проколота  $\delta$  – окрестность точки  $x = a$ :  $\dot{U}_\delta(a)$ ), что для всех  $x$  из проколотой  $\delta$  – окрестности точки  $x = a$  значения функции  $f(x)$  попадают в  $\varepsilon$  – окрестность точки  $y = A$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall U_\varepsilon(A))(\exists \dot{U}_\delta(a))(\forall x \in \dot{U}_\delta(a), x \in X) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$



Для любого ипсилон больше нуля положительное дельта найдется, Такое, что если  $x$  из проколотой дельта – окрестности точки  $a$  любой берется, Значение функции  $f(x)$  в ипсилон – окрестность точки  $A$  попадет.

1.5.

**Определение  
непрерывной  
в точке  $x = x_0$   
функции**

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0 \in X$ , если предел функции в точке  $x = x_0$  равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

1.6.

**Три условия  
для непре-  
рывной в  
точке  $x = x_0$   
функции**

1. Функция  $f(x)$  определена в точке  $x = x_0$ .
2. Существует предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .
3. Предел функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  совпадает со значением функции  $f(x)$  в этой точке.

1.7.

**Теорема о  
непрерывно-  
сти элемен-  
тарных  
функций**

Все элементарные функции непрерывны во всех точках области определения этих функций.

1.8.

$$x \rightarrow a \Rightarrow a = \dots\dots\dots$$

1.9.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow f(x) = \dots\dots\dots$$

1.10. Неопределенность вида  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ .

1.11. Нужно «раскрыть» неопределенность, используя соответствующие приемы: тождественные преобразования функций, разложение функций на сомножители и т. п.

1.12.  $x_1 = -1; x_2 = -2; x_3 = -2$ .

1.13 Кратные корни  $x_{2,3} = -2$ ; кратность корня  $k = 2$ , поскольку многочлен  $P_3(x) = (x+1)(x+2)^2$ .

1.14.

**Определение  
предела  
функции при  
 $x \rightarrow \infty$**

Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при стремлении  $x$  к бесконечности, если для любого положительного сколь угодно малого числа  $\varepsilon$  существует сколь угодно большое положительное число  $M$ , что для всех  $x$  из области определения функции из выполнения неравенства  $|x| > M$  следует выполнение неравенства  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . То есть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, |x| > M) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

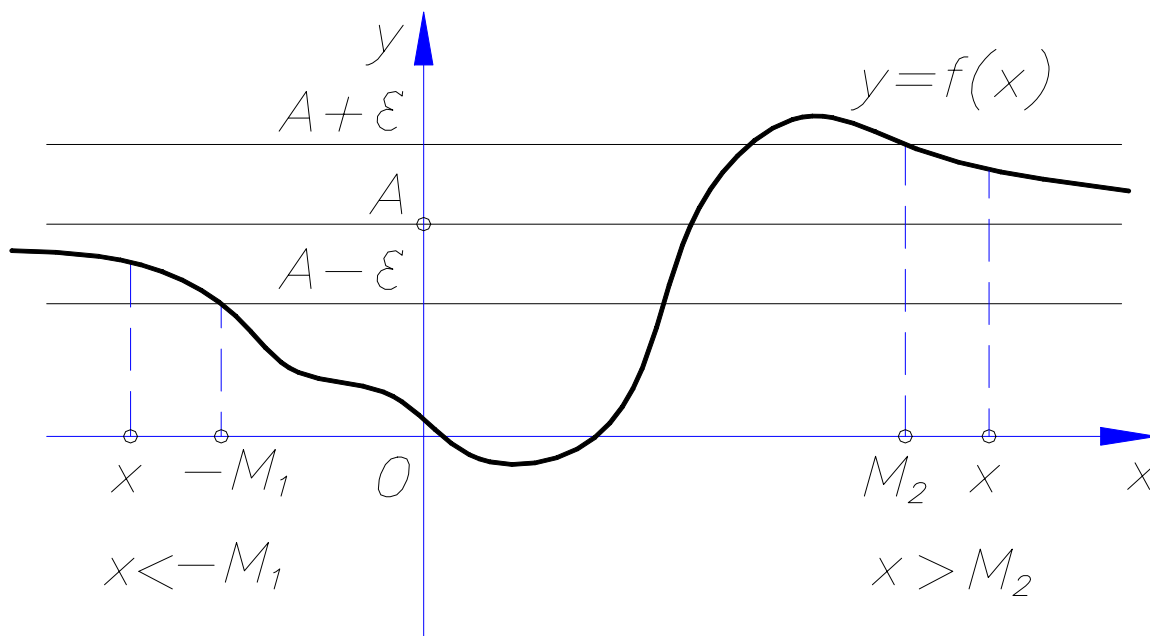
В частности, если  $x \rightarrow +\infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in X, x > M) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

если же  $x \rightarrow -\infty$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in X, x < -M) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

Неравенство  $|x| > M$  – эквивалентно системе двух неравенств:  $\begin{cases} x > M, \\ x < -M. \end{cases}$



1.15. 1). 0;      2).  $\frac{a_0}{b_0}$ ;      3).  $\infty$ .

1.16. 1).  $\infty$ ;      2).  $\frac{a_0}{b_0}$ ;      3). 0.

1.17. Нужно разделить числитель и знаменатель функции  $f(x)$  на самую большую при  $x \rightarrow \infty$  показательную функцию.

1.18. 1). 0; 2). 1;      3).  $\infty$ ;      4) не существует.

1.19. Функции  $f(x) = \sin x$  и  $f(x) = \cos x$  при  $x \rightarrow \infty$  **предела не имеют**, но являются ограниченными, так как  $|\sin x| \leq 1$  и  $|\cos x| \leq 1$  для всех вещественных значений  $x$ .

1.20.

**Определение бесконечно малой функции**

Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , если **предел** этой функции равен **нулю** при  $x \rightarrow a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Аналогично определяются бесконечно малые функции при  $x \rightarrow \infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0.$$

1.21. 1). 0;      2).  $\infty$ ;      3).  $c = const \neq 0$ ;      4). 1;      5).  $c = const \neq 0$ .

1.22

**Теорема о пределе отношения двух бесконечно малых функций**

Если б.м.ф.  $\alpha(x)$  эквивалентна б.м.ф.  $\alpha_1(x)$ :  
 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ; а б.м.ф.  $\beta(x)$  эквивалентна б.м.ф.  $\beta_1(x)$ :  
 $\beta(x) \sim \beta_1(x)$  при  $x \rightarrow a$ , и существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ , то

существует и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ , причем имеет место равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Другими словами, предел отношения конечного числа бесконечно малых функций не изменится, если заменить их эквивалентными бесконечно малыми функциями.

1.23.

**Теорема о первом замечательном пределе**

Предел функции  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  при  $x \rightarrow 0$  существует и равен единице:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

1.24.

**Теорема о втором замечательном пределе**

Предел функции  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ , если  $x \rightarrow 0$ , и функции  $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ , если  $x \rightarrow \infty$ , существует и равен числу  $e \approx 2,718281828459045 \dots$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e.$$

1.25.

Так как при  $x \rightarrow 0 \Rightarrow \arcsin 2x \sim 2x$ ,  $tg(\frac{\pi x}{2}) \sim \frac{\pi x}{2}$ , то имеет место

равенство: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{tg(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{\pi x}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

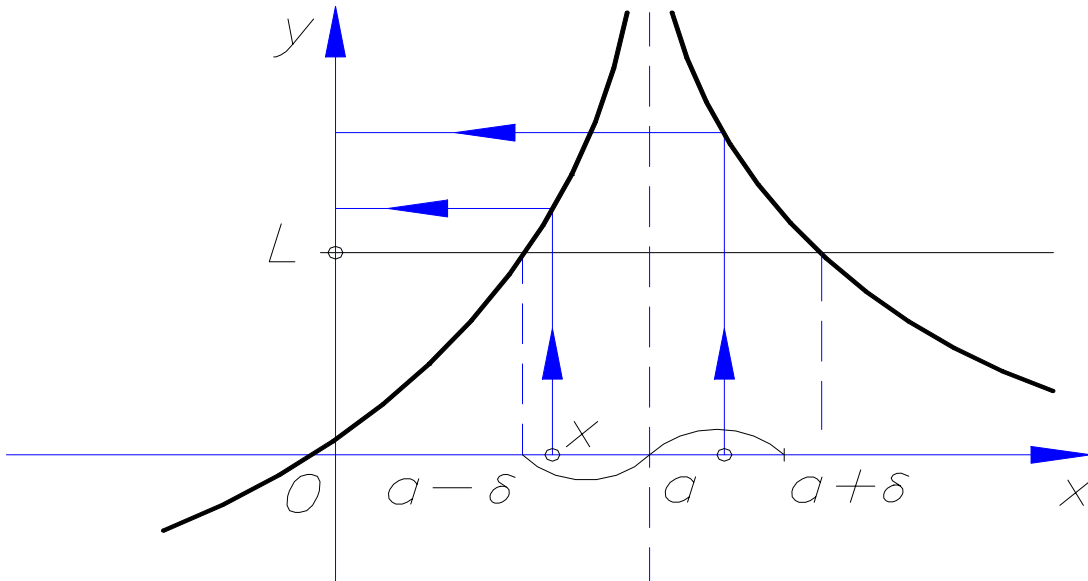
1.26.

**Определение бесконечно большой функции**

Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ , если для любого сколь угодно большого положительного числа  $L$  ( $\forall L > 0$ ) существует такое положительное число  $\delta$ , зависящее от  $L$  ( $\exists \delta(L) > 0$ ), что для всех  $x$  из области определения функции, удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x)| > L$ . При этом пишут:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ; это и означает, что функция  $f(x)$  является бесконечно большой.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall L > 0)(\exists \delta(L) > 0)(\forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x)| > L$$

То есть при стремлении значений  $x$  к точке  $x = a$  значения функции  $f(x)$  становятся больше сколь угодно большого предварительно заданного числа  $L$ .



1.27. Показательно – степенная неопределенность  $\{ 1^\infty \}$ .

1.28. Второй замечательный предел.

1.29. Неопределенность вида  $\{ \infty - \infty \}$ .

1.30. Разность дробных функций приводят к общему знаменателю, а затем применяют приемы предыдущих примеров.

Например,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right) &= \{ \infty - \infty \} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 + 2x + x^2 - 6 + 3x}{8 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 2}{8 - x^3} = \\ &= \left\{ \frac{4 + 10 - 2}{0} = \frac{12}{0} \right\} = \infty \end{aligned}$$

Если разность функций не содержит дробей, применяют формулы сокращенного умножения, домножая и деля разность функций на сопряженное выражение или неполный квадрат суммы, разности и т. п.

Например,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3 + 2} - \sqrt{x^3 - 2}) &= \{ \infty (\infty - \infty) \} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} (x^3 + 2 - (x^3 - 2))}{\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3 - 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{3}{2}}} = 2. \end{aligned}$$

Иногда приходится возводить сумму или разность в более высокие степени, чем вторая или третья. Коэффициенты в соответствующих формулах можно найти, например, из треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1 \ 2 \ 1 \Rightarrow (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1 \Rightarrow (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \Rightarrow (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 \\
 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \Rightarrow (a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5 \\
 1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1 \Rightarrow (a \pm b)^6 = \dots
 \end{array}$$

Легко заметить, что сумма двух соседних коэффициентов предыдущей строки треугольника Паскаля равна соответствующему коэффициенту следующей строки.

Полезно помнить, что при вычислении пределов сумм бесконечно больших функций важно обращать внимание на старшие степени переменных, которые не сокращаются, а остальными – пренебрегать. Поэтому первым слагаемым удобнее записывать переменную.

Например,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)^4 - (1-n)^4}{(3-n)^4 - (1+n)^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n-1)^4}{(n-3)^4 - (n+1)^4} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 8n^3 + \dots - n^4 + 4n^3 + \dots}{n^4 - 12n^3 + \dots - n^4 - 4n^3 - \dots} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

При возведении разности в скобках в четную степень умножение разности на (-1) не изменяет знака перед скобками. При возведении в нечетную степень – приводит к изменению знака перед скобками.

Например,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)^4 - (1+n)^4}{(3+n)^3 - (2-n)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n+1)^4}{(n+3)^3 + (n-2)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 8n^3 + \dots - n^4 - 4n^3 + \dots}{n^3 + 9n^3 + \dots + n^3 - 6n^2 + \dots} = \\
 &= \frac{-12}{2} = -6.
 \end{aligned}$$



## Ответы к заданию 2

2.1.

**Три условия для непрерывной в точке  $x_0$  функции**

1. Функция  $f$  определена в точке  $x_0$ .
2. Существует конечный предел функции  $f$  при  $x \rightarrow x_0$ .
3. Предел функции  $f$  в точке  $x_0$  совпадает со значением функции  $f$  в этой точке.

2.2.

**Теорема о непрерывности элементарных функций**

Все элементарные функции непрерывны во всех точках области определения этих функций.

2.3.

**Определение непрерывной на интервале  $(a, b)$  функции**

Функция называется непрерывной на интервале  $(a, b)$ , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

2.4.

**Определение предела справа для функции  $f(x)$ :**

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$$

Число  $A$  называется пределом справа для функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  ( $x \rightarrow a$ ), если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ) существует такое положительное число  $\delta$ , зависящее от  $\varepsilon$  ( $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ ), что для всех значений  $x$  из области определения функции, удовлетворяющих неравенству  $0 < x - a < \delta$ , следует выполнение неравенства  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Используя логические символы, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$$



$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, 0 < x - a < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Точки  $x$  берутся справа от точки  $x = a$ .

Правосторонний предел обозначают также  $f(a + 0)$ .

2.5.

**Определение  
предела слева  
для функции  
 $f(x)$ :**

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$$

Число  $A$  называется пределом слева функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  ( $x \rightarrow a$ ), если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ) существует такое положительное число  $\delta$ , зависящее от  $\varepsilon$  ( $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ ), что для всех значений  $x$  из области определения функции, удовлетворяющих неравенству:  $-\delta < x - a < 0$ , следует выполнение неравенства:  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Используя логические символы, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$$



$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, -\delta < x - a < 0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Точки  $x$  берутся **слева** от точки  $x = a$ .

Левосторонний предел обозначают также  $f(a - 0)$ .

2.6.

**Теорема о необходимых и достаточных условиях существования предела  $A$  функции  $f(x)$  в точке  $x = a$**

Предел  $A$  функции  $f(x)$  в точке  $x = a$  существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы этой функции в точке  $x = a$  и эти односторонние пределы равны между собой:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A, \text{ или } f(a - 0) = f(a + 0) = A$$

2.7.

**Определение непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции**

Функция  $f(x)$  называется непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , если она непрерывна на интервале  $(a, b)$  и в точке  $x = a$  — справа ( $f(a + 0) = f(a)$ ), а в точке  $x = b$  — слева ( $f(b - 0) = f(b)$ ).

2.8.

**Определение точек разрыва функции**

Точки, в которых **нарушается хотя бы одно из трех** условий непрерывности функции (см. ответ 2.1), называются точками разрыва графика функции, или просто точками разрыва.

2.9.

**Определение точек устранимого разрыва функции**

Односторонние пределы функции в исследуемой точке **конечны и равны** между собой. В самой точке функция не определена или не задана.

2.10.

**Определение точек разрыва первого рода функции**

Односторонние пределы функции в исследуемой точке **конечны, но не равны** между собой.

2.11.

**Определение точек разрыва второго рода функции**

Хотя бы один из односторонних пределов функции в исследуемой точке равен бесконечности или не существует.

2.12. Да, является.

2.13. Элементарные функции терпят разрыв в точках, не принадлежащих области их определения.

2.14. Функция является **кусочно-аналитической** (состоит из «кусочков» аналитических, то есть элементарных, функций) и не является элементарной.

2.15. Такая функция может иметь **разрыв** в точках, где эта функция **не определена**, а также в точках, где **происходит переход** от одного аналитического задания функции к другому (от одной формулы к другой) – это точки, «подозрительные» на разрыв. В точке, «подозрительной» на разрыв, функция может оказаться непрерывной, если в этой точке выполняются все три условия непрерывности функции:

1. Функция определена в точке;
2. Существует конечный предел функции в этой точке;
3. Предел функции в точке равен значению функции в этой точке.

2.16. Нужно найти односторонние пределы еще и в точках, «подозрительных» на разрыв.

## УКАЗАНИЯ

### к решению индивидуальных домашних заданий повышенного уровня сложности

#### Задание 13

Решить неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$  относительно  $n > 0$ : отбросить знак модуля, если  $a_n - a > 0$  и заменить модуль противоположным значением  $a - a_n$ , если  $a_n - a < 0$ ;

применить определение предела функции при  $x \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ );

в качестве значения  $M = N(\varepsilon)$  взять целую часть полученного числа:

$N(\varepsilon) = M = [n]$  – наибольшее целое, не превосходящее  $n$ .

#### Задание 15

Записать степени  $n$  в виде рациональных дробей  $\frac{a}{b}$ :  $\sqrt[b]{n^a} = n^{\frac{a}{b}}$ ;

оставить слагаемые наибольших степеней в числителе и в знаменателе; остальными слагаемыми пренебречь.

#### Задание 18

Использовать формулы для суммы арифметической прогрессии

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ , суммы геометрической прогрессии  $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$

и определение  $n!$  (эн – факториал):  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ , то есть это произведение **всех** натуральных чисел от единицы до того числа, которое стоит под знаком факториала.

#### Задание 19

Из неравенства  $|f(x) - A| < \varepsilon$  выделить неравенство

$$|x - a| < \varphi(\varepsilon) = \delta.$$

## Задание 20

Найти  $A = f(x_0)$ ; решить неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$  относительно  $x$ :  $\delta_1(\varepsilon) < x < \delta_2(\varepsilon)$ ; в качестве  $\delta(\varepsilon)$  взять меньшее по модулю полученное значение:

$$\delta(\varepsilon) = \min(|\delta_1|, |\delta_2|).$$

## Задания 13 – 32

В некоторых случаях, а именно в тех, когда имеются неопределенности вида  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ ,  $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$  или приводящиеся к ним:

$\{0 \cdot \infty\} = \left\{\frac{1}{\infty} \cdot \infty\right\} = \left\{0 \cdot \frac{1}{0}\right\}$  для проверки правильности вычисления предела можно применить правило Лопиталья:

### Правило Лопиталья

В случаях неопределенностей вида  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$  или  $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$  предел отношения функций равен пределу отношения производных этих функций:

$$(x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$$

$$\text{или } f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty),$$

то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Например,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2 \sin 2x}{\sin x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 4 \cos 2x}{\cos x} = 3$$

**Таблица производных  
функции одного аргумента и правила дифференцирования**

$$(u = u(x), v = v(x), c = const)$$

1.  $(const)' = 0;$

Степенные функции

2.  $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2a.  $(x)' = 1;$

2b.  $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u';$

2c.  $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$

2e.  $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u';$

Показательные функции

3.  $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

3a.  $(e^u)' = e^u \cdot u';$

Логарифмические функции

4.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$

4a.  $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

Тригонометрические функции

5.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

6.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

7.  $(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

8.  $(ctg u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

Обратные тригонометрические функции

9.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

10.  $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11.  $(\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

10.  $(\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

Гиперболические функции

11.  $(sh u)' = ch u \cdot u';$

12.  $(ch u)' = sh u \cdot u';$

13.  $(th u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u';$

14.  $(cth u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u';$

Показательно-степенные функции

15.  $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$

**Правила дифференцирования**

1.  $(cu)' = c \cdot u';$

1a.  $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u';$

2.  $(u + v)' = u' + v';$

3.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$

4.  $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2};$

5. Сложная функция

$$(F(u(x)))' = F'_u \cdot u'_x;$$

6. Параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

7. Логарифмическое дифференцирование

$$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x);$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'.$$