Ответы

Ответы к задаче 1

1.1. Три. **1.2.** Три. **1.3.** x_1, x_2, x_3.

1.4. 2; 0; −2; свободные члены системы не содержат неизвестных и записываются обычно в правых частях уравнений.

1.5. Уравнения называют линейными, если они представляют собой линейную комбинацию неизвестных x_1, x_2, x_3 данной системы; $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, где a, b, c, d – заданные постоянные числа.

Признак линейного уравнения	Все неизвестные в линейное уравнение входят **в первой степени** и между собой **не перемножаются.**

1.6. Квадратная.

1.7. Система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3, или квадратная система линейных уравнений третьего порядка.

1.8

Определение основной матрицы системы	Матрица, составленная **из коэффициентов при неизвестных,** называется основной матрицей системы.

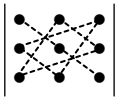
1.9.

Определение расширенной матрицы системы	Матрица, полученная из основной **присоединением столбца свободных членов**, называется расширенной матрицей системы.

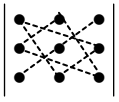
1.10.

Определение решения СЛУ	Решением системы линейных уравнений называется такая **совокупность значений неизвестных**, **при подстановке** которой вместо неизвестных в каждое уравнение системы, **все уравнения** системы обращаются в **тождества**.

Правило треугольников:

1.11. 

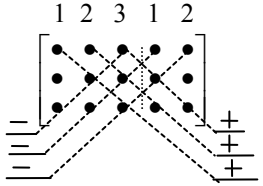
+

1.12. 

–

1.13. Чтобы получить определитель, стоящий в числителе формулы Крамера для нахождения неизвестного x_1, надо в определителе основной матрицы системы ***первый*** **столбец заменить столбцом свободных членов**.

1.14. Для того, чтобы составить таблицу Саррюса, нужно к заданному определителю третьего порядка дописать справа первый и второй столбцы и взять **с тем же знаком произведения** элементов **главной диагонали** и элементов, расположенных на прямых, параллельных главной диагонали, и ***с противоположным знаком*** – ***произведения*** элементов ***побочной диагонали*** и элементов, расположенных на прямых, параллельных побочной диагонали (см. рис.).



1.15. Чтобы получить определитель, стоящий в числителе формулы Крамера для нахождения неизвестного x_2, надо в определителе основной матрицы системы ***второй*** **столбец заменить столбцом свободных членов**.

1.16. Чтобы получить определитель, стоящий в числителе формулы Крамера для нахождения неизвестного x_3, надо в определителе основной матрицы системы ***третий*** **столбец заменить столбцом свободных членов**.

1.17. **Определение суммы двух матриц.**	Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ с одинаковым количеством m строк и n столбцов называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.)$. Обозначение: $C = A + B$.

1.18. а) Сумма данных матриц не существует, т. к. они разных размеров.

б) $C = A + B$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & -1+4 \\ -2-5 & -3+0 \\ 5+1 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.19.

Определение произведения матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица, у которой **каждый** элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{pmatrix}.$$

1.20. $\lambda A = -1\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 & -1\cdot 0 & -1\cdot(-1) \\ -1\cdot 3 & -1\cdot 1 & -1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.21.

Определение произведения матрицы-строки на матрицу-столбец

Произведением матрицы – строки, имеющей n столбцов, на матрицу – столбец, имеющий столько же строк, **называется матрица, состоящая из одного элемента,** который равен сумме произведений соответствующих элементов перемножаемых матриц: $A_{1\times n} \cdot B_{n\times 1} = C_{1\times 1}$,

или

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}).$$

1.22. $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot(-4) + 4\cdot 3) = (16)$.

1.23.

Условие существования произведения двух матриц

Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в тех случаях, **когда число <u>столбцов</u> матрицы A равно числу <u>строк</u> матрицы B,** то есть $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$. При этом матрица – произведение имеет число строк матрицы A и число столбцов матрицы B.

1.24.

Определение перестановочных матриц

Квадратные матрицы, **произведение которых коммутативно:** $AB = BA$, называются перестановочными.

1.25.

Определение произведения матриц

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$, имеющей m строк и n столбцов, на матрицу $B = (b_{ij})$, имеющую n строк и p столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$, имеющая m строк и p столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i – й строки матрицы A и j – го столбца матрицы B,

то есть $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, $\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, p. \end{pmatrix}$.

Произведение матриц обозначается $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$.

Замечание. Правило умножения матриц можно легко запомнить, если сформулировать его в следующем виде: элемент c_{ij} матрицы C, стоящий на пересечении i – й строки и j – го столбца, есть скалярное произведение i – й вектор – строки матрицы A и j – го вектор – столбца матрицы B.

1.26. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1 \\ 1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1 \end{pmatrix}$

$=$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.27. Матрицу B нельзя умножить на матрицу A, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

1.28.

Определение единичной матрицы

Квадратная матрица, **на главной диагонали которой все элементы равны единице, а все остальные элементы нули,** называется единичной матрицей и обозначается буквой E.

1.29.

Определение обратной матрицы

Обратной для матрицы A называется такая матрица A^{-1}, что их произведение равно единичной матрице: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

1.30.

Теорема существования обратной матрицы

Для любой квадратной матрицы A, определитель которой не равен нулю $(\det A \neq 0)$, существует единственная обратная матрица A^{-1}.

1.31.

Определение невырожденной и вырожденной матриц

Матрица, определитель которой **не равен нулю**, называется **невырожденной.**

Матрица, определитель которой **равен нулю**, называется **вырожденной.**

1.32. Чтобы найти обратную для A матрицу A^{-1}, можно действовать следующим образом:

1. Вычислить определитель матрицы A $(\det A \neq 0)$.

   Если $\det A = 0$, то матрица A не имеет обратной A^{-1}.
2. Составить союзную матрицу из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A: (A_{ij}).
3. Транспонировать союзную матрицу, то есть заменить строки на столбцы с такими же номерами: $(A_{ij})^T$.
4. Разделить транспонированную союзную матрицу на определитель матрицы A: $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^T}{\det A} = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$.

1.33. 1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$.

2. $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Вспомните, что $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. $(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица: $A^{-1} \cdot A =$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-2) + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot(-2) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

1.34. Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \det A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 8+4+3+24=39 \neq 0$, то есть матрица A – невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1}. Находим: $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$,

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$A_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$. Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{39}\begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{8}{39} & \dfrac{2}{39} & \dfrac{1}{39} \\ \dfrac{5}{39} & -\dfrac{11}{39} & \dfrac{14}{39} \\ \dfrac{7}{39} & \dfrac{8}{39} & \dfrac{4}{39} \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{8}{39} & \dfrac{2}{39} & \dfrac{1}{39} \\ \dfrac{5}{39} & -\dfrac{11}{39} & \dfrac{14}{39} \\ \dfrac{7}{39} & \dfrac{8}{39} & \dfrac{4}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Или $A^{-1}A = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$,

то есть обратная матрица найдена верно.

Ответы к задаче 2

2.1. Система состоит из четырёх уравнений.

2.2. В данной системе уравнений пять неизвестных.

2.3. Задана система четырёх линейных уравнений с пятью неизвестными.

2.4 Алгоритм 1. в задаче 1.0 , (см. с.9).

2.5. r = Rang A = Rang $B = n$. **2.6.** r = Rang A = Rang $B < n$.

2.7. Совместна, неопределённа.

2.8.Общее решение системы линейных уравнений можно получить, руководствуясь, например, следующим планом:

а) выбрать базисный минор (обычно это минор, под главной диагональю которого – все нули);

б) перенести свободные неизвестные к свободным членам, то есть в правые части уравнений;

в) обратным ходом метода Гаусса выразить базисные неизвестные через свободные неизвестные.

2.9. $M_r = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ – базисный минор для системы, которая решается в качестве примера. $M_r \neq 0$; r = Rang A = Rang B =3.

2.10. x_2, x_3, x_4 – неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор примера.

2.11. x_1, x_5 – свободные неизвестные примера. Коэффициенты при свободных неизвестных **не вошли** в базисный минор.

2.12. Решение называется **общим** (в общем решении базисные неизвестные выражены через свободные неизвестные).

2.13. Все свободные неизвестные можно приравнять нулю или каким-нибудь другим постоянным числам. Например, свободные неизвестные $x_1 = 0$, $x_5 = 0$, тогда базисные неизвестные получатся: $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$. Это частное решение можно записать и в виде матрицы столбца:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

2.14.

Определение СОЛУ

Система линейных уравнений называется **однородной**, если **свободные члены** во всех уравнениях этой системы равны **нулю**.

$AX = 0$ – матричная запись СОЛУ.

2.15. Система однородных линейных уравнений всегда совместна, поскольку имеет так называемое тривиальное решение, когда все неизвестные равны нулю: $X = 0, \Rightarrow A \cdot 0 = 0$. Ранги основной и расширенной матриц системы однородных линейных уравнений всегда равны, так как вычеркивание нулевого столбца свободных членов не изменяет ранга матрицы, поэтому по теореме Кронекера – Капели **СОЛУ всегда совместна**.

2.16.

Определение ФСЧР СОЛУ

Фундаментальной системой частных решений системы однородных линейных уравнений называется **система линейно независимых частных решений**, число решений в которой равно числу свободных неизвестных системы.

Если n – число неизвестных системы, r – её ранг, то ФСЧР СОЛУ должна содержать $k = n - r$ линейно независимых частных решений.

2.17. Фундаментальную систему частных решений получают обычно, последовательно приравнивая свободные неизвестные элементам строк единичной матрицы E порядка $k = n - r$.

Замечание. ФСЧР СОЛУ можно получить также, приравнивая свободные неизвестные элементам строк произвольной квадратной матрицы A порядка $k = n - r$, если $\det A \neq 0$

Ответы к задаче 3

3.1. В числителе формулы записано скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

3.2. В знаменателе формулы записано произведение длин векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

3.3. Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению длин этих векторов.

3.4. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находят, вычитая из координат точки B, являющейся концом вектора, соответствующие координаты точки A, являющейся началом вектора.

3.5. $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - x_2)\,\vec{j} + (y_3 - x_3)\,\vec{k}$.

3.6. Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

3.7. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = (-2)\cdot 5 + 5\cdot 4 + (-4)\cdot 1 = 6$**.**

3.8. Длина вектора в ортонормированном базисе равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора.

3.9.

Определение компланарных векторов	Векторы, лежащие **в одной или параллельных плоскостях**, называются компланарными.

3.10.

Условие компланарности векторов	**Смешанное** произведение ненулевых компланарных векторов равно **нулю**.

3.11.Смешанное произведение трех векторов получают**,** умножая векторное произведение двух векторов на третий вектор скалярно.

3.12. В ортонормированном базисе смешанное произведение равно определителю, строками или столбцами которого являются координаты перемножаемых векторов.

Обычно первой строкой определителя записывают координаты первого вектора, второй строкой – координаты второго вектора, а третьей строкой – координаты третьего вектора, если считать векторы слева направо.

Полезно помнить такие **свойства** смешанного произведения:

1) **при перестановке** двух любых **соседних** векторов смешанное произведение **меняет знак** на противоположный;

2) **при циклической** перестановке (последний вектор ставится впереди первого) смешанное произведение **не изменяется**, поскольку при этом два раза переставляются соседние векторы.

3.13. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ не компланарны, так как их смешанное произведение не равно нулю.

3.14.

Геометрический смысл смешанного произведения	**Модуль** смешанного произведения трех векторов равен **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах как на ребрах. Обычно векторы приводят к общему началу.

3.15. Объём пирамиды V_2, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен одной шестой объёма параллелепипеда V_1, построенного на этих же векторах как на ребрах, то есть $V_2 = \frac{1}{6}V_1 = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

3.16.

Геометрический смысл векторного произведения	**Модуль** векторного произведения численно равен **площади параллелограмма,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах. Обычно векторы приводят к общему началу.
Геометрический смысл векторного произведения	**Половина модуля** векторного произведения численно равна **площади треугольника,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах этого треугольника. Обычно векторы приводят к общему началу.

3.17. В ортонормированном базисе векторное произведение находят, используя определитель, в 1-ой строке которого – орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат, во 2-ой строке – координаты левого из перемножаемых векторов, а в 3-ей строке – координаты правого из перемножаемых векторов. Например, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда векторное произведение этих векторов в декартовой системе координат можно найти так:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

3.18. $x_K = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; y_K = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; z_K = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$**.**

Ответы к задаче 4

4.1. Уравнение **прямой,** проходящей **через две данные точки:**

$A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$: $\qquad \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$.

4.2. .**Координаты вектора нормали** $\overrightarrow{N}=\left(n_x,n_y\right)$ к прямой можно найти как ***коэффициенты при x и y в общем уравнении*** этой прямой:

$$n_x x+n_y y+c=0.$$

4.3. $\dfrac{x-x_B}{m}=\dfrac{y-y_B}{n}$.

4.4. Надо воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две точки (см. ответ 4.1)

4.5. Это уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

4.6. $\dfrac{x-x_A}{m}=\dfrac{y-y_A}{n}$.

Ответы к задаче 5

5.1. Уравнение **плоскости**, проходящей через **три** данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0, \quad \text{если} \quad \begin{array}{l} A\left(x_A,y_A,z_A\right), \\ B\left(x_B,y_B,z_B\right), \\ C\left(x_C,y_C,z_C\right). \end{array}$$

5.2.Общее уравнение **плоскости** имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, где $\overrightarrow{N}=(A,B,C)$ – перпендикулярный плоскости вектор. Для того, чтобы получить общее уравнение плоскости из предыдущего уравнения, нужно привести подобные слагаемые, вычислив определители второго порядка и раскрыв скобки.

5.3. Координаты нормального к плоскости **вектора** равны ***коэффициентам при переменных x, y, z в общем уравнении*** этой плоскости:

$n_x x+n_y y+n_z z+d=0, \quad \overrightarrow{N}=(n_x,n_y,n_z)$.

5.4. Вектор $\overrightarrow{N}$ параллелен прямой α, то есть является **направляющим вектором** прямой α.

5.5. $\dfrac{x-x_D}{m}=\dfrac{y-y_D}{n}=\dfrac{z-z_D}{p}$.

5.6. Уравнения прямой называются **каноническими** уравнениями.

5.7. Нужно выбрать **параметрические** уравнения прямой. Параметрические уравнения можно получить из канонических, приравняв каждую дробь параметру t:

$$\begin{cases} x=mt+x_D, \\ y=nt+y_D, \\ z=pt+x_D. \end{cases}$$

5.8. Надо подставить координаты этой точки в уравнения плоскости p и прямой α. При этом должны получиться тождества, если координаты точки найдены правильно.

5.9. $z=0: \overrightarrow{N}=\vec{k}$, $0\in p$.

5.10.Нужно подставить координаты точки в уравнения прямой α и получить тождества.

5.11. $y=0: \overrightarrow{N}=\vec{j}$, $0\in p$.

5.12. $x=0: \overrightarrow{N}=\vec{i}$, $0\in p$.

5.13. Если уравнение плоскости p: $N_x x+N_y y+N_z z+N_0=0$, а координаты точки $D\left(x_D,y_D,z_D\right)$, то расстояние $\rho\left(D,p\right)$ от точки D до плоскости p можно найти по формуле:

$$\rho\left(D,p\right)=\frac{\left|N_x x_D+N_y y_D+N_z z_D+N_0\right|}{\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}}.$$

5.14.

Правило нахождения расстояния от точки до плоскости	Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, надо в общее уравнение плоскости подставить координаты этой точки и модуль полученного числа разделить на длину нормального к плоскости вектора.

5.15. Расстояние между точкой и плоскостью можно найти также, вычислив длину вектора, образованного этой точкой и точкой пересечения перпендикуляра из этой точки к плоскости и плоскости.

Ответы к задаче 6

6.1.

Определение линии на плоскости	Уравнение *F(x,y)=0* называется уравнением линии *L* (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты *x* и *y* любой точки, лежащей на линии *L*, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

6.2.

Определение окружности	**Окружностью** называется множество всех точек плоскости, ***равноудаленных от одной точки*** этой плоскости – центра окружности.

Признак уравнения окружности

1. Коэффициенты при квадратах переменных x и y равны;
2. Отсутствует произведение xy переменных.

6.3. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Чтобы привести **общее уравнение окружности**

$a_{11}x^2+a_{10}x+a_{11}y^2+a_{01}y+a_{00}=0$ **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

Например, приведем уравнение кривой

$x^2-2x+y^2+6y+6=0$

к каноническому виду:

$x^2-2x+y^2+6y+6=$

$(x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9+6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=4$.

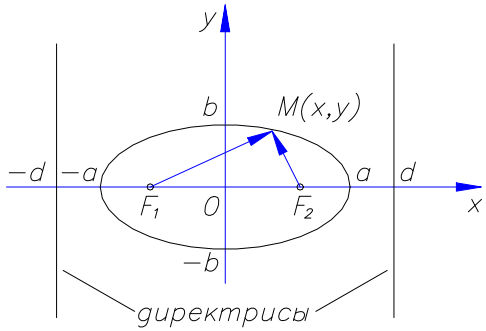
Полученное уравнение является каноническим уравнением окружности, радиус которой равен 2, а центр находится в точке $M(1,-3)$.

6.4.

Определение эллипса

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых ***сумма расстояний*** от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами и равная ***2a.***

6.5.



a – большая полуось эллипса;
b – малая полуось эллипса;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса;
$c^2=a^2-b^2$, c – фокусное расстояние эллипса;
$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$, ε – эксцентриситет эллипса;

$\vec{r_1}=\overrightarrow{F_1M}$, $\vec{r_2}=\overrightarrow{F_2M}$ – фокальные радиусы – векторы;

по определению $\left|\vec{r_1}+\vec{r_2}\right|=2a$. Прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm d$ называются директрисами эллипса.

Каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Строят эллипс, вписывая его в прямоугольник со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром симметрии в начале координат.

Уравнение эллипса со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0\ (x_0, y_0)$ центром имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Чтобы привести **общее уравнение эллипса**

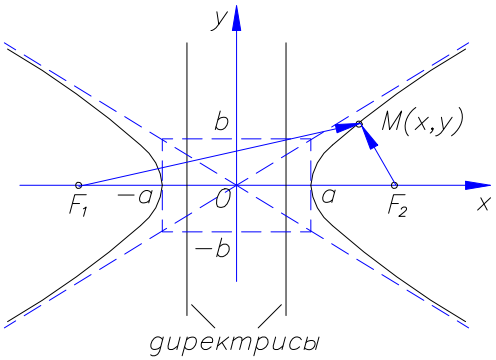
$a_{11}x^2+a_{10}x+a_{22}y^2+a_{01}y+a_{00}=0$, где коэффициенты a_{11} и a_{22} должны иметь одинаковые знаки, **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

6.6.

Определение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых ***модуль разности расстояний*** от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и равная ***2a.***

6.7.



a –действительная полуось гиперболы;
b – мнимая полуось гиперболы;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы гиперболы;
$c^2=a^2+b^2$, c – фокусное расстояние гиперболы;

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$, ε – эксцентриситет гиперболы; $\vec{r_1} = \overrightarrow{F_1 M}$, $\vec{r_2} = \overrightarrow{F_2 M}$ – фокальные радиусы – векторы; по определению $\left|\vec{r_1} - \vec{r_2}\right| = 2a$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами гиперболы.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Строят гиперболу, изобразив предварительно прямоугольник со сторонами длиной *2a* и *2b* и с центром симметрии в начале координат,
а затем вписывают ветви гиперболы в углы между асимптотами гиперболы, – прямыми, на которых лежат диагонали прямоугольника, – помещая вершины гиперболы в точки с координатами *(–a, 0)* , *(a, 0)*.
Уравнение гиперболы со смещенным при помощи параллельного переноса в точку M_0 (x_0, y_0) центром имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Чтобы привести **общее уравнение гиперболы**
$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$, где коэффициенты a_{11} и a_{22} должны иметь противоположные знаки, **к каноническому виду**, нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

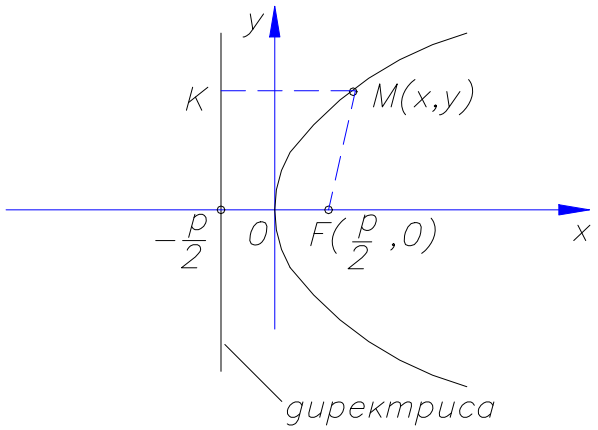
Гипербола, уравнение которой: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, называется **сопряженной** по отношению к гиперболе, имеющей уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы сопряженной гиперболы расположены на мнимой оси.

6.8.

Определение параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на ***одинаковом расстоянии*** от данной ***точки*** и от данной ***прямой***, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

6.9.



Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Строят параболу, откладывая одинаковые отрезки от точек параболы до фокуса с координатами $F(\frac{p}{2}, 0)$ и до директрисы, уравнение которой $x = -\frac{p}{2}$. Вершина параболы находится в точке $O(0,0)$.

Уравнение параболы со смещенной при помощи параллельного переноса в точку M_0 (x_0, y_0) вершиной имеет вид

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0).$$

Чтобы привести **общее** уравнение параболы $a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$ к **каноническому виду**, нужно ***выделить полный квадрат*** по переменной y и удвоенный параметр p по переменной x.

Парабола, уравнение которой: $x^2 = 2py$, называется **сопряженной** по отношению к параболе, имеющей уравнение $y^2 = 2px$. Фокус сопряженной параболы расположен в точке $F(0, \frac{p}{2})$, а ее директриса имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$.

6.10. Гипербола

6.11. [4], гл.III, §2, с. 88.

6.12. Эллипс.

6.13. [4], гл.III, §2, с. 79.

6.14. [4], гл.III, §2, с. 76, 77.

6.15. Координаты точки *A* удовлетворяют уравнению кривой.

6.16. $x^2 + y^2 = R^2$.

6.17. $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_1, y_2)$, $M_3(x_2, y_1)$, $M_4(x_2, y_2)$.

6.18. См. 6.5, 6.7.

Ответы к задаче 7

7.1. Полярная система координат состоит из некоторой точки *O*, называемой **полюсом**, и исходящего из нее луча *OE*, называемого **полярной осью**. Кроме этого задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

7.2. $\rho -$ это расстояние от точки *M* до полюса *O*,

φ – угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом *OM*.

7.3. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

7.4. Кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$, называют розами. Причем, если k – четное, то лепестков у розы $2k$, а если число k – нечетное, то у розы k лепестков.