Содержание

ТГУ, 1997 год, старшие курсы, специальность

1. Вычислите интеграл $J = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$, $(a > 0, \quad b > 0)$.
2. Докажите, что если $0 < n < m$, то $\frac{m-n}{m} < \ln\frac{m}{n} < \frac{m-n}{n}$.
3. Найдите объем тела, ограниченного поверхностью $\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c} = 1$, $a > 0, \ b > 0, \ c > 0$.
4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + a^2}\right)$,

   $a \in \mathbf{R}$, $a = const$.
5. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, и пусть

   $f(a+b-x) = f(x)$. Докажите, что $\int\limits_a^b x f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx$.
6. Вычислите интеграл $J = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.
7. Докажите, что если $\alpha < \beta$ и $p(x)$ - многочлен с действительными коэффициентами, то равенство $p(\sin x) = \cos x$ на $[\alpha;\beta]$ невозможно.
8. Функция $f(x)$ не убывает на $[0;+\infty]$, и для любого $T > 0$

   интегрируема на $[0;T]$, причем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^{\infty} f(t)dt = C$. Докажите,

   что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$.
9. Докажите, что если в определителе D порядка n все элементы равны 1 или -1, то при $n \geq 3$ имеем $|D| \leq (n-1)(n-1)!$.
10. Найдите все дифференцируемые функции, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(x) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$.

ТГПУ, 1998 год, старшие курсы, специальность

1. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$.
2. Докажите иррациональность числа $e = \sum\limits_{n-0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

3. Вычислите интеграл $J = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^{\alpha})(1+x^2)}$.
4. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$.
5. Докажите, что решение задачи Коши $y'' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ является положительной функцией.
1. Докажите, что на множестве **C** верно $f(x) = (x^{3k} + x^{3l+1} + x^{3m+2}) \vdots (x^2 + x + 1)$, $k, l, m > 0$.
2. Найдите все дифференцируемые на числовой прямой функции $f(x)$ такие, что $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\alpha x + \beta y)$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ - константы, $\alpha + \beta = 1$.
3. Найдите все функции $u(x;y)$, удовлетворяющие для $\forall x, y \in \mathbf{R}$ уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
5. Снегопад начался до полуночи и продолжался, не усиливаясь и не ослабевая. Снегоочистительная машина начала работать в полночь, и убирая за равные промежутки времени равные количества снега, счистила за первые 2 часа работы 10 км пути, а за следующие 2 часа работы – еще 5 км пути. Когда начался снегопад?
4. Пространственное тело T состоит из всех точек, находящихся на расстоянии не большем r от данного выпуклого многогранника S. Пусть $V(r)$ – объем этого тела. Найдите предел $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{V(r)}{r^3}$.

ТГУ, 1999 год, старшие курсы, специальность

1. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 = c^k$ имеет решение в области целых положительных чисел при любом целом $k > 0$.
2. Как следует провести прямую через центр правильного семиугольника, чтобы сумма квадратов расстояний его вершин от данной прямой была наименьшей?
3. Квадратные матрицы A и B второго порядка удовлетворяют условиям $A^n = B^{n+1} = (A+B)^{n+2} = 0$, где n - натуральное число, $n > 2$. Вычислите $AB + BA$.
4. Докажите, что уравнение $x^6 + ax^5 + bx^4 + c = 0$, где a, b, c - вещественные числа и $c \neq 0$, имеет, по крайней мере, два комплексных (не вещественных) корня.
5. Докажите, что уравнение $x^x = y^y$ $(x > 0,\ y > 0)$ имеет бесконечно много рациональных решений $(x; y)$, где $x \neq y$.

6. Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\ln n)$?
7. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(0;1)$, причем $f(0)=f(1)=0$ и $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x)=-1$. Используя формулу Тейлора, докажите, что $\max\limits_{x\in[0;1]} f''(x)\geq 8$.
8. Докажите, что уравнение $\sum\limits_{n=0}^{2n}\frac{x^k}{k!}=0$ не имеет вещественных корней.
9. Числа 1, 9, 8, 1 являются соответственно первым, вторым, третьим и четвертым членами последовательности, в которой каждый из последующих членов равен последней цифре суммы четырех предшествующих ему членов. Могут ли в этой последовательности встретиться числа 1, 2, 3, 4 идущие подряд?

10. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0;1]$, существуют $f'(x)$, $f''(x)$ внутри этого отрезка, $f(0)=f(1)=0$, $|f''(x)|\leq 1$. Найдите наибольшее (и наименьшее) значение, которое может принимать такая функция.

ТГПУ, 2000 год, старшие курсы, специальность

1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее свойствами:
   1) его 1/2 - это квадрат целого числа,
   2) его 1/3 – это куб целого числа,
   3) его 1/5 – это пятая степень целого числа.
2. Докажите, что если в определителе D порядка n все элементы равны или -1, то при n≥3 имеем $|D|\leq$(n - 1)(n - 1)!.
3. Вычислите интеграл $\int\limits_o^{\pi}\ln(1+\sin\alpha\cos x)\frac{dx}{\cos x}$.
4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$, $a\in\mathbf{R}$, a = const.
5. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной дугами парабол $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=cx$, $y^2=dx$, где $0<a<b$, $0<c<d$.
6. Найдите все функции $u(x,y)$, удовлетворяющие для $\forall x,y\in\mathbf{R}$ уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

7. Покажите, что для криволинейных интегралов второго рода неверна, вообще говоря, формула среднего значения: $\int_{AB} f(x,y)dx = f(\xi,\eta)\int_{AB} dx$, где AB – гладкая кривая, $f(x,y)$ - непрерывная вдоль AB функция, (ξ,η) - некоторая точка кривой AB .
8. Снегопад начался до полуночи и продолжался, не усиливаясь и не ослабевая. Снегоочистительная машина начала работать в полночь и, убирая за равные промежутки времени равные количества снега, счистила за первые 2 часа работы 10 км пути, а за следующие 2 часа работы – еще 5 км пути. Когда начался снегопад?

ТГУ, 2001 год, старшие курсы, специальность

1. Пусть $f(x,y)$ – вещественная функция двух переменных, непрерывная по каждой из переменных x , y в отдельности и монотонная по y . Докажите, что функция $f(x,y)$ непрерывна и по совокупности переменных.

2. Найдите предел
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}+\frac{1}{\sqrt{nn}}\right).$$

3. Пусть $x(t)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,\pi]$ функция, такая, что $x(0)=x(\pi)=0$. Докажите, что
$$\int_0^\pi (x'^2(t)-x^2(t))\,dt \ge 0 .$$

4. Докажите, что если натуральное число n больше единицы, то число n^n-n^2+n-1 делится на $(n-1)^2$.

5. Проводится круговой турнир по настольному теннису (ничьих нет) среди n участников. Докажите, что сумма квадратов выигрышей всех участников равна сумме квадратов проигрышей всех участников.

6. Синусы углов треугольника рациональны. Докажите, что их косинусы также рациональны.

7. Существует ли многочлен $P(x)$ 2001-й степени такой, что

$P(x^2-1)$ делится на $P(x)$?

8. В квадратной матрице A столбцы являются попарно ортогональными векторами. Докажите, что абсолютная величина определителя матрицы A равна произведению длин векторов-столбцов.

ТГПУ, 2002, старшие курсы, специальность

1. Для произвольной квадратной матрицы A определим $\sin A$ с помощью степенного ряда: $\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2v+1}$.

   Существует ли такая 2×2 матрица A, что $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2002 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

2. Найдите x, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2001}}{n^x-(n-1)^x} = \frac{1}{2002}$.

3. Найдите все функции, удовлетворяющие условию: $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+2x_1x_2$ для $\forall x_1, x_2 \in R$.

4. Найдите экстремумы определенной в R^2 функции $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2$.

5. Докажите, что если для любых действительных x и $a\neq 0$ выполняется равенство
$$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$
то $f(x)$ - периодическая функция. Найдите ее период.

6. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1-0} (1-x)^{p+1}\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$, где $p\in \mathrm{N}\cup\{0\}$.

7. Пусть α и β корни многочлена $g(x)=x^2+cx+d$, $g(x)\in \mathrm{Z}[x]$, ($g(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами). Многочлен $f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \in \mathrm{Z}[x]$.
   Докажите, что $(f(\alpha)+f(\beta))\in \mathrm{Z}$ и что для
$$\forall\, a,b\in \mathrm{Z},\qquad \left(f\left(a+\sqrt{b}\right)+f\left(a-\sqrt{b}\right)\right)\in \mathrm{Z}.$$

8. Человек рассеянный шел домой вверх по течению реки со

скоростью в 1,5 раза большей, чем скорость течения, и держал в руках палку и шляпу. Он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти с той же скоростью. Вскоре он заметил ошибку, бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел вверх по течению с первоначальной скоростью. Через 10 минут после того, как он поймал шляпу, он встретил плывущую по ручью палку. На сколько минут он пришел бы домой раньше, если бы не перепутал палку со шляпой?

ТГУ, 2003, старшие курсы, специальность

1. Дан набор чисел $\{0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$. Известно, что среди любых четырех чисел из этого набора есть равные, а среди любых пяти чисел равных не более трех. Найдите количество нулей в этом наборе.
2. Докажите, что если в гармоническом ряде $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ отбросить все слагаемые, в знаменателе которых хотя бы один раз встречается цифра 7, то оставшийся ряд станет сходящимся.
3. Найдите кратчайшее расстояние между графиками функций $y=x^2+4$ и $y=-x^2+12x-32$.
4. Вычислите $\underbrace{\sin\ln i^{\frac{\sin\ln i^{\frac{\sin\ln i^{\cdot^{\cdot^{\frac{\sin\ln i^{\frac{\sin\ln i^{i}}{i}}}{i}}}}}{i}}}{i}}}_{2003\,раза}$, где i – мнимая единица.
5. Квадратная матрица A такова, что в каждом её столбце есть ровно два ненулевых элемента: диагональный, который больше единицы и некоторый недиагональный, равный единице. Может ли матрица A быть вырожденной?
6. Докажите, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{\frac{2-n-n^2}{2}}$ является иррациональным числом.

7. Даны вещественные числа c_0, c_1, …, c_n такие, что $c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \ldots + \frac{c_n}{n+1} = 0$. Докажите, что многочлен $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ имеет хотя бы один вещественный корень.

8. На отрезке $[0,1]$ задана функция $f(x) = x^2$. При каких положениях точки $t \in [0,1]$ сумма площадей $S_1 + S_2$ имеет наибольшее и наименьшее значения? Найдите эти значения.

ТПУ, 2004, старшие курсы, специальность

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^x \cos\left(t^2\right) dt}{x}$.

2. Докажите, что существует многочлен $P(x)$ такой, что $\forall n \in \mathbb{N}$ верно равенство $\int\limits_{n-1}^{n} P(x)dx = n^4$ и найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

3. Покажите, что сумма $S(x)$ ряда $x^2 + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(x^{2n} - x^{2n-2}\right)$, членами которого являются непрерывные всюду функции, имеет точки разрыва. Объясните причину их существования.

4. Найдите e^A для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

5. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$.

6. Луг, имеющий форму квадрата со стороной a, равномерно покрыт скошенной травой с плотностью ρ. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать всё сено в центр луга, если работа по транспортировке груза массой m на расстояние x равна $\gamma m x$, $(0 < \gamma < 1)$?

7. Вычислите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}$, где $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

8. Дано уравнение: $y'''' - 8y''' + 56y'' - 160y' + 400y = 2 \cdot \exp(4x)$.

Известно, что один корень характеристического уравнения равен $(2-4i)$. Найдите общее решение дифференциального уравнения.

ТГУ, 2005, старшие курсы, специальность

1. В пространстве отмечено n различных точек. Докажите, что существует прямая, все проекции точек на которую различны.

2. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, причем $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что существует точка $x_0\in\mathbb{R}$, в которой $f\left(x_0\right)=x_0$.

3. Докажите существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{n}^{n+a}\frac{\sin x}{x}dx$ ($a>0$) и вычислите его.

4. Докажите, что если $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$, то $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\alpha$.

5. Найдите предел последовательности, определенной следующим образом: $x_{n+1}=\frac{x_n+a/x_n}{2}$, $n\geq 1$, $x_1>0$, $a>0$.

6. Докажите, что следующая краевая задача не имеет другого решения, кроме $y\left(x\right)\equiv 0$: $\begin{cases} y''=e^x y, & 0<x<1, \\ y\left(0\right)=y\left(1\right)=0. \end{cases}$

7. Дана матрица A размера 2005×2005

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите определитель матрицы $A-\lambda E$, где E – единичная матрица размера 2005×2005.

8. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_1=1$, $a_{n+1}=\cos a_n$.

Байкальская математическая олимпиада студентов технических вузов ИрГТУ, 2004, 1 курс

1. Докажите, что решение $y(x)$ задачи Коши:

$$y' = \frac{0,5+\sqrt{xy}}{1+x+y} + \frac{\sin^2(xy+1)}{2}, \quad y(0)=0 \text{ при } x \ge 0$$

удовлетворяет условию $0 \le y(x) \le x$. *(5 баллов)*

2. Докажите неравенство $x > \ln(1+x)$, где $x>0$. *(3 балла)*

3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$. *(3 балла)*

4. Вычислите $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}^{2004}$, где i – мнимая единица. *(4 балла)*

5. Даны числа $m_i > 0,\ i = 1,\dots,n;\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_i = M$ и числа $x_i > 1,\ i=1,\dots,n.$

Докажите, что $\dfrac{m_1 \ln x_1 + \ldots + m_n \ln x_n}{M} < \ln \dfrac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{M}$. *(6 баллов)*

6. Несколько человек сидят по кругу так, что у каждого из них имеется по одному соседу справа и слева. Каждый из сидящих располагает определённым количеством шиллингов. У первого на один шиллинг больше, чем у второго, у второго на один шиллинг больше, чем у третьего, и так далее. Первый из сидящих отдаёт один шиллинг второму, второй – два шиллинга третьему и т.д.. Каждый отдаёт следующему на один шиллинг больше, чем получил сам, до тех пор, пока это возможно. В результате, у одного из сидящих денег оказалось в четыре раза больше, чем у его соседа. Сколько всего было людей и сколько шиллингов было сначала у самого бедного из них.
(6 баллов)

7. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - xy' - y = 0.$$ *(3 балла)*

Байкальская математическая олимпиада студентов технических вузов ИрГТУ, 2004, старшие курсы

1. Отрезок длиной l перемещается так, что его концы расположены

на параболе Q: $y=x^2$, при этом середина отрезка, точка M, описывает линию L. При каком значении l площадь фигуры, ограниченной линиями Q и L равна 1. *(5 баллов)*

2. Вычислите:
$$Z=\max_{0\le x\le 1}\left(\min_{0\le y\le 1}(x+y-1)^2\right)-\min_{0\le y\le 1}\left(\max_{0\le x\le 1}(x+y-1)^2\right).$$ *(3 балла)*

3. Вычислите:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+1/2}+\ldots+\frac{2^{n/n}}{n+1/n}\right).$$ *(6 баллов)*

4. На бесконечной плоскости случайным образом выбраны три точки. Найдите вероятность того, что они являются вершинами тупоугольного треугольника. Предполагается, что вероятность лежать на одной прямой равна нулю. *(3 балла)*

5. Вычислите сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$. *(6 баллов)*

6. Вычислите: $J(y)=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos 2xy\,dx$, если $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *(4 балла)*

7. Найдите на комплексной плоскости область сходимости ряда:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left|\frac{z-i}{z-1}\right|^n.$$ *(3 балла)*

Всероссийская дистанционная математическая олимпиада для студентов технических вузов. 21-22 сентября 2004 г. Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)
Пробный вариант

1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (с коэффициентом подобия λ). Если длины сторон ΔABC a, b, c, то соответствующие стороны $\Delta A_1B_1C_1$ имеют длины $3a+b+c,\ a+3b+c,\ a+b+3c$. Определите вид треугольников найдите λ.

2. Изобразите множество точек (x, y) на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству: $\sqrt{2-y}\sqrt{y-4x^2}\ge 2x\sqrt{y}$. Найдите площадь получившейся фигуры.

3. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos(2nx)}\,dx$.

4. Найдите $y(x)$ из уравнения $\int\limits_{-x}^{x} t\; y(t)\; dt \;=\; y(x)+x^2+1$.

5. При каком $n\in\mathbb{N}$ $y^{(n)}(2)=36$, если $y(x)=\ln\left((x-1)^{2x}\right)$?

6. Вычислите интеграл: $\iint\limits_D \dfrac{dx\,dy}{x^3+y^3}$, $D:\ \begin{cases} x+y\ge 1,\\ x\ge 0,\ \ y\ge 0.\end{cases}$

7. Докажите, что если $5z^4-4iz^3+4iz+5=0$, то $|z|=1$.

8. Случайная величина ξ имеет непрерывную плотность $f(x)$ вида

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ \ x\le 0,\ \ x>\pi,\\ ax,\ \ 0<x\le \pi/2,\\ b\sin x,\ \ \pi/2<x\le\pi,\end{cases}\qquad (a,\, b\in\mathbb{R}).$$

Найдите вероятность $P\{\xi>2\pi/3\}$.

Всероссийская дистанционная математическая олимпиада для студентов технических вузов. 21-22 сентября 2004 г. Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)

1. Не пользуясь общей теорией кривых второго порядка, докажите, что кривая $x^2+y^2+xy=3$ – эллипс. Через центр этого эллипса проведите прямую так, чтобы сумма квадратов расстояний от вершин эллипса до прямой была: а) минимальной; б) максимальной.

2. Два прямых конуса имеют общее основание, ограниченное эллипсом с полуосями a и b $((a>b)$, и расположены по разные стороны от него. Высота одного конуса h, другого – H $(h\le H)$. Найдите наибольшее расстояние между прямыми, содержащими образующие этих конусов.

3. Найдите предел последовательности $x_n=\dfrac{1}{n^{p-2}}\sum\limits_{k=n^p}^{(n+1)^p}\dfrac{1}{\sqrt[p]{k}}$

$(p\in N,\ p\ge 2)$.

4. Найдите $n\in N$ $(n>1)$ из уравнения $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x+nx^n}=\dfrac{\ln(2n+6)}{n-1}$.

5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\cos(\pi/n))\sum\frac{i^2+j^2}{n^2+i^2+j^2}$, где сумма составлена по всем целым i и j таким, что $i\ge 0$, $j\ge 0$, $i^2+j^2\le n^2$.

6. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, $x\in R$, если

$$\iint\limits_D x\,f\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy=a^2(f(a)+\sin a-1)/3,$$

$a\ge 0$, $D: x^2+y^2\le a^2$, $|\,y\,|\le x/\sqrt{3}$, $x\ge 0$.

7. Докажите, что решение задачи Коши $y'=\dfrac{x(1+\sin^2 y)}{(1+\sin^2 y)x^4+y^2+1}$, $y(0)=0$, удовлетворяет для $\forall x\ge 0$ неравенству $0\le y(x)<\pi/4$.

8. При каких $a\ge 0$ система уравнений $\begin{cases}|\,z+z^{-1}\,|=a,\\ |\,z-i\,|=1,\end{cases}$ имеет решение? Найдите его.

9. В параболический сегмент с основанием $2a=1$ высотой $h=1$ вписан круг, одна из точек касания совпадает с центром основания. В сегмент наудачу бросаются $n>3$ точек. Какова вероятность, что не менее трех из них попадут в круг? При каком наименьшем n в круг попадут в среднем не менее трех точек?

Задачи с решениями

Векторная и линейная алгебра

1. Матрицей Грама системы векторов $\bar a_1,\bar a_2,\dots,\bar a_n$ называется квадратная матрица

$$\Gamma=\begin{pmatrix}(\bar a_1,\bar a_1) & (\bar a_1,\bar a_2) & \cdots & (\bar a_1,\bar a_n)\\ (\bar a_2,\bar a_1) & (\bar a_2,\bar a_2) & \cdots & (\bar a_2,\bar a_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\bar a_n,\bar a_1) & (a_n,\bar a_2) & \cdots & (\bar a_n,\bar a_n)\end{pmatrix},$$

где $(\bar a_i,\bar a_j)$ - скалярные произведения соответствующих векторов. Доказать, что векторы

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель матрицы Γ равен нулю.

Решение. *Необходимость*. Пусть векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ линейно зависимы, т.е. $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n = 0$ (*) , причем, по крайней мере, одно из $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Умножим скалярно обе части (*) сначала на $\bar{a}_1$, затем на $\bar{a}_2$, и так далее. Получим

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \lambda_1(\bar{a}_1, \bar{a}_1) + \lambda_2(\bar{a}_1, \bar{a}_2) + \dots + \lambda_n(\bar{a}_1, \bar{a}_n) = 0 \\
(2) & \lambda_1(\bar{a}_2, \bar{a}_1) + \lambda_2(\bar{a}_2, \bar{a}_2) + \dots + \lambda_n(\bar{a}_2, \bar{a}_n) = 0 \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(n) & \lambda_1(\bar{a}_n, \bar{a}_1) + \lambda_2(\bar{a}_n, \bar{a}_2) + \dots + \lambda_n(\bar{a}_n, \bar{a}_n) = 0
\end{array}
$$

Равенства (1) – (n) будем рассматривать как систему уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Чтобы нашлось нетривиальное решение системы, надо, чтобы ее определитель был равен 0: $\det\Gamma = 0$.

Достаточность доказывается аналогично.

2. Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 - четыре луча, исходящие из одной точки, α_{ij} - угол между лучами l_i, l_j. Показать, что

$$
\begin{vmatrix}
1 & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} & \cos\alpha_{14} \\
\cos\alpha_{21} & 1 & \cos\alpha_{23} & \cos\alpha_{24} \\
\cos\alpha_{31} & \cos\alpha_{32} & 1 & \cos\alpha_{34} \\
\cos\alpha_{41} & \cos\alpha_{42} & \cos\alpha_{43} & 1
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Решение. Поставим в соответствие лучам l_i единичные векторы $\vec{l}_i$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Они линейно зависимы, поэтому можно воспользоваться результатом задачи 1.

3. Доказать, что каковы бы ни были элементы определителя третьего порядка, все его члены разложения не могут иметь одинаковые знаки.

Решение. Обозначив элементы определителя через a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и раскрыв его, предположим, что все шесть слагаемых имеют одинаковые знаки, например, положительны. Тогда, (1) $a_{11}a_{22}a_{33} > 0$, (2) $a_{12}a_{23}a_{31} > 0$, (3) $a_{13}a_{21}a_{32} > 0$, (4) $a_{13}a_{22}a_{31} < 0$, (5) $a_{12}a_{21}a_{33} < 0$, (6) $a_{11}a_{23}a_{32} < 0$. Перемножив почленно неравенства (1- 4), получим $a_{11}a_{23}a_{32}(a_{13})^2(a_{22})^2(a_{31})^2 a_{21}a_{12}a_{33} < 0$. Последнее неравенство противоречит (5) - (6). Аналогичное противоречие получаем, предположив, что все шесть слагаемых в разложении определителя отрицательны.

4. Пусть даны k k - разрядных чисел, каждое из которых делится на данное число m нацело. Рассмотрим определитель k - ого порядка, составленный следующим образом: каждая строка его - k цифр по порядку соответствующего числа. Доказать, что определитель тоже делится на m нацело.

Решение. Пусть данные числа имеют вид:
$a_{11}a_{12}\ldots a_{1k}$, $a_{21}a_{22}\ldots a_{2k}$, $\cdots\cdots$, $a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kk}$, где a_{ij} - цифра, стоящая в j - ом разряде i - го числа. Имеем определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} \textit{умножаем первый столбец на } 10^k, \\ \textit{второй на } 10^{k-1},\ldots, \textit{предпоследний на } 10, \\ \textit{и складываем с последним столбцом} \end{array} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{11}a_{12}\ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{21}a_{22}\ldots a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kk} \end{vmatrix}$$, который делится на m, так как каждый элемент последнего столбца делится на m.

5. Дан треугольник $\Delta A_1A_2A_3$. На его сторонах (или продолжениях сторон) берутся произвольные точки $L \in A_1A_2$, $M \in A_2A_3$, $N \in A_3A_1$. Известно, что $\frac{A_1L}{LA_2} = \lambda$, $\frac{A_2M}{MA_3} = \mu$, $\frac{A_{3N}}{NA_3} = \nu$. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, что точки L, M, N лежат на одной прямой, является $\lambda\mu\nu = -1$.

Решение. Обозначим $A_i(x_i, y_i)$, где $i = 1,2,3$, $L(x_6, y_6)$, $M(x_5, y_5)$, $N(x_4, y_4)$.
Имеем $x_6 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_6 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $x_5 = \frac{x_2 + \mu x_3}{1+\mu}$, $y_5 = \frac{y_2 + \mu y_3}{1+\mu}$, $x_4 = \frac{x_3 + \nu x_1}{1+\nu}$, $y_4 = \frac{y_3 + \nu y_1}{1+\nu}$. Чтобы точки L, M, N лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $S_{\Delta LMN} = 0$, то есть

$$\tfrac{1}{2}\left|(x_4y_5 + x_5y_6 + x_6y_4) - (x_4y_6 + x_6y_5 + x_5y_4)\right| = \ldots \ \ldots = \tfrac{1}{2}\left[S_{\Delta A_1A_2A_3} + \lambda\mu\nu S_{\Delta A_1A_2A_3}\right] = 0 .$$

Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu = -1$.

6. Определить геометрическое место вершин парабол
$y = x^2 - \frac{4mx}{1+m^2} + \frac{1+4m^2+m^4}{(1+m^2)^2}$, где $-\infty < m < +\infty$.

Решение. Представим уравнение параболы в виде $y = \left(x - \frac{2m}{1+m^2}\right) + \frac{1+m^4}{(1+m^2)^2}$, откуда параметрические уравнения вершин: $x = \frac{2m}{1+m^2}$, $y = \frac{1+m^4}{(1+m^2)^2}$. Чтобы исключить параметр m, выразим из первого уравнения $\frac{m}{1+m^2}$ через x, возведем результат в квадрат и сложим с y. Получим

$2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y = \frac{2m^2+1+m^4}{(1+m^2)^2} = 1$. Отсюда ответ: геометрическое место точек, являющихся вершинами данных парабол, есть парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$.

Предел, производная, исследование функций

7. При каких условиях уравнение $x^3 + hx + q = 0$ имеет:
а) один действительный корень, б) два действительных корня?
Решение. Рассмотрим функцию $y = x^3 + hx + q$, $y' = 3x^2 + p$. Тогда
а) если $p \geq 0$, то функция монотонно возрастает и, следовательно, исследуемое уравнение имеет единственный корень.
б) Пусть $p < 0$. Тогда экстремум функции достигается в двух точках $x_1 = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Ясно, что уравнение будет иметь три действительных корня только в случае, если значения функции в точках экстремума будут противоположны по знаку, то есть $y(x_1)y(x_2) < 0$.
Отсюда получим искомое условие $27q^2 + 16p^3 < 0$.

8. Построить график функции $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$.

Решение. Рассмотрим поведение функции $y\,(\,x\,)$ на различных промежутках: а) $0 \leq x < 1$;

$$y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^n}{n} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1.$$

б) $x = 1$; $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1.$

в) $1 < x < 2$; $y = \lim\limits_{n\to\infty} x \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n} + \frac{x^n}{2^n}} = x.$

г) $x = 2$; $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot 2} = 2.$

д) $x > 2$; $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n + 1} = \frac{x^2}{2}$.

е) $-2 \leq x \leq -1$ – предела не существует.

ж) $x < -2$; $y = \frac{x^2}{2}$.

9. Доказать, что функция $y = 2\operatorname{arctg} x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ равна 0 при $|x| < 1$ и равна $4\operatorname{arctg} x - \pi$ при $|x| > 1$.

Решение. Вычислим производную от функции $y(x)$:

$$y' = \frac{2}{1+x^2}\left(1 - sign(1-x^2)\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{1+x^2}, & если\ |x|>1 \\ 0, & если\ |x|<1. \end{cases}$$ Но тогда $y = \begin{cases} 4arctg x + c_2, & если\ |x|>1 \\ c_1, & если\ |x|<1 \end{cases}$. Постоянные c_1 и c_2

определим, вычислив значения $y(0)$ и $y(1)$. Так как $y(0)$, то и $c_1 = 0$. Так как функция $y = 2\text{arctg}\, x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ непрерывна в точке $x=1$, то $4\text{arctg}1 + c_2 = 0$ и $c_2 = -\pi$.

10. Доказать, что существуют единственные $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, такие, что $a<b$ и $\sin(\cos a) = a$, $\cos(\sin b) = b$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sin(\cos x) - x$, где $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем:

$y(0) = \sin 1 > 0,\ \ y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$. $y' = [\cos(\sin\ x)](-\sin\ x) - 1 < 0$ в $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому существует, при том единственная, точка $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, в которой $y(a) = \sin(\cos a) - a$, откуда $\sin(\cos a) = a$. Аналогично решается вторая часть задачи.

11. Известно, что существуют оба экстремума функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, а прямая, проходящая через экстремальные точки, проходит и через начало координат. Определить зависимость между коэффициентами a, b, c, d.

Решение. Имеем $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0\ \ (*)$. Оба корня уравнения $(*)$ существуют, обозначим их x_1 и x_2. Условия принадлежности точек (x_1, y_1), $(0,0)$, (x_1, y_2) одной прямой запишем в виде:

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d}{ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d}$. После очевидных тождественных преобразований получим: $(x_1 - x_2)[ax_1x_2(x_1+x_2) + bx_1x_2 - d] = 0$. Так как $x_1 \neq x_2$, имеем $ax_1x_2(x_1+x_2) + bx_1x_2 - d = 0$. Воспользовавшись теоремой Виета, получим

$a \cdot \frac{c}{3a}\left(-\frac{2b}{3a}\right) + b \cdot \frac{c}{3a} - d = 0$ или $bc - 9ad = 0$.

12. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий максимальное значение 6 при $x = 1$ и минимальное значение 2 при $x = 3$.

Решение. Так как $p'(1)=p'(3)=0$, то $p'(x)-$ многочлен степени не меньше, чем 2 и $p(x)$ – многочлен степени не меньше, чем 3. Положив $p'(x)=A(x-1)(x-3)=A(x^2-4x+3)$, из условий $p''(1)<0$ и $p''(3)>0$ получим $A>0$. Далее получим

$p(x)=A\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)+B,$ откуда $p(1)=\frac{4}{3}A+B=6$ и $p(3)=B=2$.

Следовательно, $B=2$ и $A=3$. Окончательно, $p(x)=x^3-6x^2+9x+2.$

13. Дано $S_1=\sqrt{2},\quad S_{n+1}=\sqrt{2+S_n}$. Доказать, что последовательность $\{S_n\}$ имеет предел, и найти этот предел.

Решение. Пусть $S_n<2.$ Тогда $S_{n+1},$ очевидно, тоже меньше 2. Так как $x+2>x^2$ при $0<x<2$, то $S_{n+1}>S_n$. Поэтому $\{S_n\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает. Обозначив её предел S, получим $S=\sqrt{S+2},$ или $S^2=S+2,$ откуда либо $S=-1,$ либо $S=2$. Первый случай невозможен, так что $S=2$.

14. Пусть $\{x_n\}-$ последовательность такая, что $x_0=25,\ x_n=arctg\,x_{n-1}$. Доказать, что она имеет предел, и найти этот предел.

Решение. Пусть $y(x)=arctg\,x.$ При $x=0$ $y(x)=0$; при $x>0$ $y'(x)=\frac{1}{x^2+1}<1,$ так что при $x>0$ $y(x)<x$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает; для каждого n $x_n>0$, так что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=a.$ Переходя к пределу в соотношении $x_{n+1}=arctg\,x_n$ (что возможно в силу непрерывности функции $y(x)$ на $(-\infty,+\infty)$, имеем $a=\operatorname{arctg} a$, откуда $a=0$.

15. Существует ли функция, значение которой конечно в каждой точке отрезка $[0,1]$, но не ограниченная в любой окрестности любой точки этого отрезка?

Решение. Такой функцией $f(x)$ является, например, функция, равная 0 для любого иррационального x, а для рационального x, представленного в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, равная q.

16. Определить λ и μ таким образом, чтобы имело место равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0.$

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(\lambda x+\mu))=0,$ откуда $\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ (в данном случае $\lambda=-1$), $\mu=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-\lambda x)$ (в данном случае $\mu=0$).

17. Пусть $f(x)$ – нечётная дифференцируемая на промежутке $(-\infty,+\infty)$ функция. Доказать, что а) $f'(x)$ – четная функция. б) Верно ли обратное утверждение?

Решение. Дифференцируя почленно равенство $f(-x) = -f(x)$, получаем $f'(-x) = f'(x)$. В обратную сторону утверждение неверно. В этом легко убедиться, взяв, например, функцию $f(x) = x+1$.

18. Функция f (x) имеет на полуоси $(0,+\infty)$ непрерывную производную, f (0) = 1, $|f(x)| \le e^{-x}$ при всех $x \ge 0$. Доказать, что существует такая точка x_0, что $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

Решение. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$. Имеем $\varphi(0) = 0;$ при $x \ge 0$ $\varphi(x) \le 0$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому существует точка x_0, в которой функция $\varphi(x)$ достигает наименьшего значения; в точке x_0 производная функция $\varphi'(x_0) = 0$, то есть $f'(x_0) + e^{-x_0} = 0$ и $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

19. Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале (- a, a), и пусть последовательность $f^{(n)}(x)$ сходится равномерно на интервале (- a, a). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$.

Решение. Пусть $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$. Почленно интегрируя,

получим $\int\limits_0^x g(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)\right) = g(x) - 1$. Отсюда видно, что $g(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $g'(x) = g(x)$ и начальному условию $g(0) = 1$, то есть $g(x) = e^x$.

Интегральное исчисление

20. Определить объём тора (тела, полученного вращением круга радиуса R вокруг не пересекающей его оси). Расстояние от центра круга до оси равно d.

Решение. Пусть тор получается вращением окружности

$y = d \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ относительно оси Ox; тогда его объём равен

$$\pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(d + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(d - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 4\pi d \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 4\pi dR^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2\pi^2 dR^2 .$$

21. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ не зависит от величины α.

Решение. Имеем

$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = J_1 + J_2$. Сделаем в первом интеграле замену $x = 1/y$; тогда $J_1 = \int\limits_1^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})}$;

$J_1 + J_2 = \int\limits_1^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^\alpha} + \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, что не зависит от величины α.

22. Доказать, что если уравнение $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x_n^n = 0$ имеет коэффициенты $c_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ такие, что $\frac{c_0}{1} + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$, то оно имеет по крайне мере один действительный корень, заключенный между нулем и единицей.

Решение. Обозначим левую часть уравнения $P_n(x)$. Проинтегрируем обе части равенства $P_n(x) = 0$, получим: $c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n}x^n + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1} + A = 0$.
Левую часть этого уравнения обозначим $P_{n+1}(x)$. Имеем $P_{n+1}(x) = 0$.
Функция $P_{n+1}(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на отрезке $[0;1]$ (дифференцируема, непрерывна, и $P_{n+1}(0) = A$, $P_{n+1}(1) = A + 0 = A$).
Тогда найдется точка $x_0 \in [0;1]$, в которой $P'_{n+1}(x_0) = P_n(x_0) = 0$.

23. Подобрать форму сосуда (поверхность вращения) так, чтобы сосуд можно было использовать в качестве водяных часов (понижение уровня воды в сосуде x должно быть строго пропорционально времени t).
Решение. Пусть $x = F(y)$ – площадь поперечного сечения сосуда. За время dt должно вытечь $F(y)dx$ воды. С другой стороны, за это же время вытекает $k\sqrt{2gh - 2gx}\,dt$ воды. Имеем: $F dx = k\sqrt{2gh - 2gx}\,dt$. Но, по условию, $dt = c dx$ и $F = \pi y^2$. Откуда уравнение поверхности сосуда: $\pi y^2 = ck\sqrt{2g}\,(h-x)^{\frac{1}{2}}$. Или $y^4 = a^4(h-x)$.

24. Известно, что $y = g(x)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и существует $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$.

Доказать, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int\limits_{-1}^{0} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int\limits_{0}^{1} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx +$

$$+\int\limits_{1}^{\infty} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \left|\begin{array}{ll} y = x-\dfrac{1}{x}, & x_{1/2} = \dfrac{y}{2} \pm \dfrac{\sqrt{y^2+4}}{2} \\ x^2 - xy - 1 = 0, & dx = \dfrac{dy}{2} \pm \dfrac{ydy}{2\sqrt{y^2+4}} \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} g(y)\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy + \int\limits_{0}^{\infty} g(y)\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} g(y)\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy + \int\limits_{0}^{\infty} g(y)\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy == \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy +$$

$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy - \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy$. Последние два интеграла сходятся

($g(y)$ - интегрируема, а $\left|\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right| < 1$) и равны. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(y-\frac{1}{y}\right)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)dy .$$

25. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $[0;1]$ и вогнута. Кроме того, $f'(1) < 2f(x)$ на этом отрезке. Показать, что $\int\limits_0^1 f(x)dx > 0$.

Решение. Воспользуемся формулой Тейлора

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\theta)(x-1)^2}{2!}$. Так как $f(x)$ дважды дифференцируема на $[0;1]$ и вогнута, ее вторая производная неотрицательна, $f''(\theta) \ge 0$, $\theta \in (0;1)$ и третье слагаемое в разложении неотрицательно. Тогда $f(x) \ge f(1) + f'(1)(x-1)$. По условию $\frac{f'(1)}{2} > f(1)$, поэтому

$f(x) < \frac{f'(1)}{2} + f'(1)(x-1) = f'(x-1/2)$. Отсюда $\int\limits_0^1 f(x)dx > f'(1)\int\limits_0^1 (x-1/2)dx = f'(1)\left.\frac{(x-1/2)^2}{2}\right|_0^1 = 0$.

26. Внутри непрерывной выпуклой замкнутой кривой взята точка и через нее проведены хорды. Доказать, что если хорда отсекает сегмент наименьшей (наибольшей) площади, то данная точка является серединой хорды. Справедливо ли обратное утверждение? Какие результаты вытекают из данного утверждения для окружности.

Решение. Введем полярную систему координат, поместив полюс в данную точку O. Пусть уравнение кривой $\rho = \rho(\varphi)$. Следует показать, что $\rho(\varphi_0) = \rho(\varphi_0 + \pi)$, где φ_0 - угол, при котором хорда отсекает наименьшую или наибольшую площадь. Исследуем на экстремум функцию $S(\varphi)=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

$S'(\varphi_0)=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi}=\frac{1}{2}\left[\rho^2(\varphi_0-\pi)-\rho^2(\varphi_0)\right]=0$. Отсюда следует $\rho(\varphi_0+\pi)=\rho(\varphi_0)$, что означает, что точка O лежит на середине хорды.

27. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая получается при вращении линии $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ вокруг оси OX, $x\in[0;\infty)$.

Решение. $V=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\pi\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin\,xdx=\pi\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-2x}(-2\sin x-\cos x)}{5}\right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}=$

$$=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-2(2k+1)\pi}+e^{-2(2k\pi)}}{5}=$$

$$=\frac{\pi}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-2(2k+1)\pi}+e^{-4k\pi}\right)=\frac{\pi}{5}\left(1+\frac{1}{e^{2\pi}}+\frac{1}{e^{4\pi}}+\cdots\right)=\frac{\pi}{5\left(1-\frac{1}{e^{2\pi}}\right)}=\frac{\pi ee^{2\pi}}{5(e^{2\pi}-1)}$$

28. Пусть функция периодическая с периодом ω и интегрируемая на каждом конечном отрезке действительной оси. Доказать, что необходимым и достаточным условием периодичности функции $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$ с тем же самым периодом является $\int\limits_0^{\omega}f(t)dt=0$.

Решение. Имеем $F(x+\omega)=\int\limits_0^{x+\omega}f(t)dt=\int\limits_0^{x}f(t)dt+\int\limits_x^{x+\omega}f(t)dt$.

Тогда $F(x+\omega)-F(x)==\int\limits_x^{x+\omega}f(t)dt=\int\limits_0^{\omega}f(t)dt$ в силу

периодичности функции $f(x)$, откуда доказательство очевидно.

29. Найти все функции $f(x)\ge 0$, определенные на [0;1] и такие, что $\int\limits_0^1 f(x)dx=1$, $\int\limits_0^1 xf(x)dx=A$, $\int\limits_0^1 x^2f(x)dx=A^2$, где A - данное действительное число.

Решение. Имеем $\int\limits_0^1 A^2f(x)dx=A^2$ (1); $\int\limits_0^1 2Axf(x)dx=2A^2$ (2); $\int\limits_0^1 x^2f(x)dx=A^2$ (3).

Сложим (1) и (3) и вычтем (2), получим $\int\limits_0^1\left[A^2f(x)-2Axf(x)+x^2f(x)\right]dx=0$

или $\int\limits_0^1(A-x)^2f(x)dx=0$. Но такое равенство возможно только в случае $f(x)\equiv 0$.

Числовые и функциональные ряды.

30. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$?

Решение. Ряд сходится, если сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$.

Но $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1$, и исходный ряд сходится.

31. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^x}$.

Решение. Рассмотрим $f(x)\ln^2 3=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-nx}=\frac{1}{3^x-1}$ при *x* > *0*. Нетрудно проверить, что данный ряд можно дважды почленно продифференцировать на промежутке $(0,.\infty)$, так что

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{nx}}=\frac{3^x(3^x+1)}{(3^x-1)} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=f'(1)=\frac{3}{2}.$$

32. Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi}{90}$. Вычислить $\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию и возьмем интеграл по частям. Имеем: $\frac{x^3}{e^x-1}=x^3\cdot\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Так как $x\in[0;\infty]$, $e^{-x}<1$, разложим дробь $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ по степеням e^{-x}: $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots$. Но тогда

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}=$$

$$=\int_0^{\infty}x^3(\,e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots)dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^3, & dv=(e^{-x}+e^{-2x}+\ldots)dx \\ du=3x^2dx, & v=-(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+\ldots) \end{vmatrix}=$$

$$=-x^3(e^{-x}+\tfrac{1}{2}e^{-2x}+\ldots)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty 3x^2(e^{-x}+\tfrac{1}{2}e^{-2x}+\ldots)dx=\cdots\quad \ldots=-6\left(e^{-x}+\frac{1}{2^4}e^{-2x}+\ldots+\frac{1}{n^4}e^{-nx}+\ldots\right)\Bigg|_0^\infty$$

$$=6\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{15}.$$

33. Исходя из выражения $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^{n-1}})=\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}$, вычислить сумму $\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{2x^2}{1+x^2}+\ldots+\dfrac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}+\ldots$

Решение. Прологарифмируем данное выражение: $\ln(1+x)$ + + $\ln(1+x^2)$ + $\ln(1+x^4)$ + $\ln(1+x^{2^{n-1}})$ = $\ln(1-x^{2^n})$ - $\ln(1-x)$, а результат продифференцируем: $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x^3}{1+x^4}+\ldots+\dfrac{2^{n-1}x^{2^{n-1}-1}}{1+x^{2^{n-1}}}$ = $-\dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1-x^{2^{n-1}}}$ + $\dfrac{1}{1-x}$. Умножив обе части последнего равенства на x, получим: $\dfrac{x}{1+x}+$ + $\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ + $\dfrac{4x^4}{1+x^4}$ +…+ $\dfrac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$ = $\dfrac{x}{1-x}$ $-\dfrac{2^n x^{2^n}}{1-x^{2^{n-1}}}$. Очевидно, $x\neq\pm1$.

34. Цепь под влиянием собственного веса принимает форму кривой $y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$. Показать, что при малых x можно заменить цепную линию параболой $y=\dfrac{x^2}{2a}+a$.

Решение. Разложив функцию $y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ по степеням x, получим:

$$y=\frac{a}{2}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2a^2}+\ldots+1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2a^2}-\ldots)=\frac{a}{2}(2+\frac{x^2}{a^2}+\ldots)=\frac{x^2}{2a}+a+o(x^2).$$

35. Доказать, что $n!>\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Решение. Данное неравенство эквивалентно неравенству: $e^n>\dfrac{n^n}{n!}$. Но, разложив e^n по степеням n (это возможно, так как область сходимости ряда для e^x $(-\infty;\infty)$), убеждаемся, что правая часть неравенства - только одно из слагаемых в разложении e^n.

36. Найти сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$, $k\in\mathrm{N}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}-\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}\right].$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+k)}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right]$, откуда при $n\to\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} = \frac{1}{k\cdot k!}.$$

37. Определить порядок убывания общего члена и исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})$.

Решение. $a_n=\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})=\ln^p(1+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{5}{24}\frac{\pi^4}{n^4}+\ldots) \sim \left[\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{5}{24}\frac{\pi^4}{n^4}+\ldots\right]^p \sim \left[\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+o\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right]^p \sim \frac{1}{2^p}\frac{\pi^{2p}}{n^{2p}}+o\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p}\right) \sim \frac{1}{n^{2p}}$. Поэтому при $p>\frac{1}{2}$ ряд сходится.

38. Обозначим $\ln\ln n=\ln_2 n$, $\ln\ln\ln n=\ln_3 n$, …. Доказать теорему: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если для некоторых m, a, c

$|u_n| < \frac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1}n(\ln_m n)^a}$, $a>1$ и расходится, если

$|u_n| > \frac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1}n(\ln_m n)^a}$, $a<1$.

Указание. Рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, где

$v_n=\frac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1}n(\ln_m n)^a}$. Можно показать, что члены этого ряда, начиная с некоторого номера k, положительны и монотонно убывают. Поэтому сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ можно выяснить, воспользовавшись интегральной теоремой Коши:

$$\int_k^{\infty}\frac{c\,dx}{x\ln x\ln_2 x\ln_3 x\ldots\ln_{m-1}x(\ln_m x)^a} = \left.\frac{c(\ln_m x)^{1-a}}{1-a}\right|_k^{\infty} =$$

$$= \begin{cases}\dfrac{c(\ln_m k)^{1-a}}{a-1}, & \textit{если}\ \ a>1\\ \infty, & \textit{если}\ \ a<1.\end{cases}$$

Далее воспользоваться признаком сравнения.

39. Показать, что $\int\limits_0^1 x^x\,dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-n}$, (считаем $x^x=1$ при $x=0$).

Решение. Имеем $x^x = e^{x\ln x}$, поэтому $\int_0^1 x^x\,dx = \int_0^1 e^{x\ln x}\,dx =$ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,dx$. Рассмотрим интеграл $F(n,k)=$ $\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,dx = \left.\frac{x^{n+1}(\ln x)^k}{n+1}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{k\,x^n(\ln x)^{k-1}}{n+1}dx =$

$= -\frac{k}{n+1}F(n,k-1)$, для $n\geq 0,\ n\in\mathrm{N},\ k\geq 1,\ k\in\mathrm{N}$. Откуда $F(k,k) =$

$= (-1)^k k!(k+1)^{-k}F(k,0) = (-1)^k k!(k+1)^{-k}\int_0^1 x^k\,dx = (-1)^k k!(k+1)^{-(k+1)}$.

Наконец, $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$.

40. Вдоль прямого шоссе на расстоянии 500 метров друг от друга стоят два дома. В каждом из них можно поселить до 20 человек. Как следует расселить 30 человек и где выбрать на шоссе место для остановки автобуса, чтобы все они вместе тратили на путь до нее как можно меньше времени?

Решение. Выбрав систему координат XOY так, что ось OX направлена вдоль шоссе и расположение первого дома соответствует $x=0$, обозначим через x координату остановки, а через y - количество жильцов в первом доме. Согласно условиям задачи, надо минимизировать функцию $S(x,y)=xy+(500-x)(30-y)$, заданную в области $0\leq x\leq 500$, $0\leq y\leq 30$. Действуя по стандартной методике, получим $S_{\min}=500$. Это наименьшее значение функция достигает в точках (0,20) и (500,10). Откуда следует вывод: остановку надо делать возле одного из домов, в котором и следует поселить 20 человек.

41. Пусть функция $f(x,y)$, определенная в круге $x^2+y^2\leq 1$ и имеющая непрерывные частные производные, удовлетворяет неравенству $|f(x)|\leq A$. Доказать, что найдется такая точка в круге, в которой $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\leq (2A)^2$.

Решение. Допустим, что для всех точек (x,y) круга $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=(gradf)^2>(2A)^2$. Построим теперь кривую L наискорейшего подъема (или спуска), проходящую через точку $(0,0)$. Так как $gradf\neq 0$ в круге, то $f(x,y)$ внутри круга не имеет экстремумов и поэтому кривая L

выходит на границу круга, причем ее длина не меньше 1. Для элементарного участка Δl кривой $gradf$ совпадает по направлению с Δl, поэтому $\Delta f = |gradf| \cdot \Delta l = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \Delta l$ и $f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(0,0) = \int\limits_L |gradf| dl$, где $(\tilde{x}, \tilde{y})$ - точка кривой L, лежащая на границе круга. Но так как, по предположению, $|gradf| > 2A$, то $f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(0,0) = \int\limits_L |gradf| dl > 2A \int\limits_L dl \le 2A.$. Откуда

$f(\tilde{x}, \tilde{y}) > f(0,0) + \int\limits_L |gradf| dl \ge f(0,0) + 2A$. Но, по условию,

$|f(0,0)| \le A$, поэтому $f(\tilde{x}, \tilde{y}) > 2A - A = A$. С другой стороны, по условию, и на границе $f(\tilde{x}, \tilde{y}) \le A$. Полученное противоречие и доказывает, что в круге имеется точка (x, y), в которой

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \le (2A)^2$.

42. По поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + 2y^2$, движется точка в направлении наискорейшего спуска. Начальное положение точки имеет координаты $(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Найти путь, пройденный точкой до окончания спуска.

Решение. Пусть масса точки $m = 1$. Тогда по закону сохранения энергии $g(z_0 - z) = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$, откуда

$\sqrt{2g}\, dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_0 - z}}$ и

$\sqrt{2g} \cdot t = \int\limits_{M_0(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})}^{O(o,o,o,)} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{z_0 - z}} dz$. Наискорейший спуск происходит, когда интеграл в правой части последнего равенства минимален. Эта задача является классической задачей вариационного исчисления. Имеем: $\Phi = F + \lambda(z)\varphi$, где $F = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{z_0 - z}}$, $\lambda(z)$ - множитель Лагранжа, $\varphi = x^2 + 2y^2 - z$. Уравнения Эйлера принимают вид: $\begin{cases} \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \end{cases}$, откуда уравнения линии наискорейшего

спуска: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 0 \\ y - \frac{1}{2}x^2 = 0 \end{cases}$ и сам путь $L = \left|\int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2 + (2x + 3x^3)^2} dx\right| = \frac{5\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{4}$.

43. Какой интеграл больше: $\int\limits_0^1 x^x dx$ или $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy$?

Решение. Имеем: $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dx = \left|\begin{matrix} xy = z \\ x = \dfrac{z}{y}\end{matrix}\right| = \int\limits_0^1 \dfrac{dy}{y}\int\limits_0^y z^z\,dz =$

$$\left|\begin{matrix} \int\limits_0^y z^z dz = u, & du = y^y dy \\ \dfrac{dy}{y} = dv, & v = \ln y\end{matrix}\right| = \ln y\int\limits_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} -$$

$-\int\limits_0^1 y^y \ln y dy$. Тогда $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy - \int\limits_0^1 x^x dx = \ln y\int\limits_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} -$

$- \int\limits_0^1 y^y(\ln y + 1)dy = \ln y\int\limits_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} - y^y\Big|_0^1 = 0$, так как $y^y\Big|_0^1 = 0$, и $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^y z^z dz$.

44. Найти наибольшее значение функции в замкнутой области, ограниченной плоскостями $-3x + 2y - z = 1$, $2x - y + 3z = -2$, $-x + y + 2z = -1$, $x + y + 11z = 3$, $x + y + 11z = 7$.

Решение. Видно, что данная область есть отрезок прямой $\begin{cases} -3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2\end{cases}$, заключенный между плоскостями $x + y + 11z = 3$ и $x + y + 11z = 7$. Так как функция $u = 2x + y + 5z$

линейно зависит от своих аргументов, то наибольшее значение должно достигаться на одном из концов отрезка. Имеем $u_{\max} = 34$ в точке $(-18, -18, 2)$.

45. Пусть $f(x_1, x_2)$ – функция двух переменных, каждая из которых может принимать только два значения: 0 и 1. Показать, что $f(x_1, x_2)$ можно представить в виде $f(x_1, x_2) =$

$= a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2$, где a_i – постоянные $(i = 0,1,2,3)$.

Решение. Имеем: $f(0,0) = a_0$, $f(1,0) = a_0 + a_1$, $f(0,1) = a_0 + a_2$, $f(1,1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$. Рассматривая полученные равенства как систему уравнений относительно a_i, видим, что она совместна, так как ее определитель отличен от нуля.

Дифференциальные уравнения

46. Известно, что $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + tg^2 x$. Найти $f(x)$ при $0 < x < 1$.

Решение. Обозначим $\sin^2 x = y$. Тогда

$f'(y) = 1 - 2y - \frac{y}{1-y} = -2y + \frac{1}{1-y}$, $f(y) = \int\left(-2y + \frac{1}{1-y}\right)dy = -y^2 - \ln(1-y) + c$,

$f(x) = -\left(x^2 + \ln(1-x)\right) + c$ при $0 < x < 1$.

47. Доказать, что при $a > b > 1$ выполняется неравенство $a^{b^a} > b^{a^b}$.

Решение. После двойного логарифмирования неравенство приводится к виду $\ln\ln a + a\ln b > \ln\ln b + b\ln a$ или, если обозначить $x = \frac{\ln a}{\ln b} > 1$, $y = \ln b > 0$, к виду $\ln x > y\left(xe^y - e^{xy}\right)$. Пусть $\varphi(x,y) = xe^y - e^{xy}$, тогда $\varphi_y{}'(x,y) = xe^y - xe^{xy} < 0$, так что $\varphi(x,y) < \varphi(x,0) = x - 1$. Если $\varphi(x,y) \le 0$, то $\ln x > y\varphi(xy)$. Тогда $\varphi(x,y) = e^y\left(x - e^{(x-1)y}\right) > 0$ и $(x-1)y < \ln x$, то есть снова $\ln x > (x-1)y > y\varphi(x,y)$.

48. Решить уравнение $\int_0^1 f(tx)dt = nf(x)$.

Решение. Имеем: $\int_0^1 f(tx)dt = \left| \begin{matrix} tx = z \\ dt = \frac{dz}{x} \end{matrix} \right| = \int_0^x f(z)\frac{dz}{x}$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $\int_0^x f(z)dz = nxf(x)$. Дифференцируя обе части последнего равенства по x, получим $f(x) = nf(x) + nxf'(x)$, откуда $f(x) = cx^{\frac{1-n}{n}}$.

49. Решить уравнение $y'\cos y = x - \sin y$.

Решение. Обозначим $\sin y = z$. Тогда исходное уравнение примет вид : $z' - x = z$. Откуда $z = \left(xe^x - e^x + c\right)e^{-x}$, откуда $\sin y = x - 1 + ce^{-x}$.

50. Доказать, что уравнение $y' + py = q(x)$, где $p \ne 0$ – постоянная, а $q(x)$ – периодическая с периодом T функция, имеет одно периодическое решение (с тем же периодом).

Решение. Очевидно, общее решение уравнения имеет вид $y(x) = \left(C + \int_0^x q(t)e^{pt}dt\right)e^{-px}$. Чтобы решение было периодическим, необходимо, чтобы для любого x выполнялось: $\left(C + \int_0^{x+T} q(t)e^{pt}dt\right)e^{-p(x+T)} = \left(C + \int_0^x q(t)e^{pt}dt\right)e^{-px}$, или $\left(C + \int_0^{x+T} q(t)e^{pt}dt\right)e^{-pT} = C + \int_0^x q(t)e^{pt}dt$. (*) Так как

$q(x)$ – периодическая функция, то $\int_0^{x+T} q(t)e^{pt}dt =$

$\int_0^T q(t)e^{pt}dt + \int_T^{x+T} q(t)e^{pt}dt = |t = z + T| =$

$= \int_0^T q(t)e^{pt}dt + \int_0^x q(z+T)e^{p(z+T)}dz = \int_0^T q(t)e^{pt}dt + e^{pT}\int_0^x q(z)e^{pz}dz$ и равенство (*) примет вид $\left(C + \int_0^T q(t)e^{pt}dt\right)e^{-px} = C$. Откуда $C = \dfrac{e^{-pt}}{1-e^{-pt}}\int_0^T q(t)e^{pt}dt$. При таком значении постоянной C решение $y(x)$ дифференциального уравнения будет единственным и периодическим с периодом T.

51. Поверхность $z(x,y)$, у которой средняя кривизна равна нулю, называется минимальной. Известно, что координаты точек таких поверхностей удовлетворяют уравнению: $(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0$, где $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$, $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$. Найти минимальные поверхности вращения.

Решение. Известно, что поверхность вращения имеет уравнение вида: $z(x,y) = f(x^2+y^2)$. Обозначив $x^2+y^2 = r^2$, имеем $z = f(r^2)$ и $p = \dfrac{dz}{d(r^2)}\cdot 2x$, $q = \dfrac{dz}{d(r^2)}\cdot 2y$, $r = 2\dfrac{dz}{d(r^2)} + \dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4x^2$,

$s = \dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4xy$, $t = 2\dfrac{dz}{d(r^2)} + \dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4y^2$. Подставляя p, q, r, s, t в исходное уравнение, получим: $4\dfrac{dz}{d(r^2)} + 4\dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot r^2 + \left(\dfrac{dz}{d(r^2)}\right)^2\cdot r^2 = 0$. (*) Но так как $\dfrac{dz}{d(r^2)} = \dfrac{1}{2r}\dfrac{dz}{dr}$, $\dfrac{d^2z}{d(r^2)^2} = \dfrac{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dz}{dr}}{4r^2}$, то (*) принимает вид:

$\dfrac{1}{r}\dfrac{dz}{dr} + \dfrac{d^2z}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{dz}{dr}\right)^2 = 0$. Решая это уравнение, получим функции, задающие искомые поверхности: $z(x,y) = c_1\ln(r + \sqrt{r^2 - c_1^2}) + c_2$.

52. Известно, что $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + tg^2 x$. Найти $f(x)$ при $0 < x < 1$.

Решение. Обозначим $\sin^2 x = y$. Тогда $f'(y) = 1 - 2y - \dfrac{y}{1-y} = -2y + \dfrac{1}{1-y}$,

$f(y) = \int\left(-2y + \dfrac{1}{1-y}\right)dy = -y^2 - \ln(1-y) + c$, $f(x) = -(x^2 + \ln(1-x)) + c$ при $0 < x < 1$.

53. Доказать, что краевая задача $\begin{cases} y'' = e^x y, & x \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ не имеет другого решения, кроме $y(x) \equiv 0$.

Решение. Если $y(x) \neq 0$**,** то либо при некотором $x_1 \in (0,1)$ $\max\limits_{x \in (0,1)} y(x) = y(x_1) > 0$ и тогда $y''(x) \leq 0$ (*), либо при некотором $x_2 \in (0,1)$ $\min\limits_{x \in (0,1)} y(x) = y(x_2) < 0$, и тогда $y''(x) \geq 0$ (**). Но в силу исследуемого уравнения должно быть $y''(x_1) = e^{x_1} y(x_1) > 0$, $y''(x_2) = e^{x_2} y(x_2) < 0$, что противоречит неравенствам (*) и (**).

Литература

1. Садовничий В. А., Подколзин А.С. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: Наука, 1978.
2. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике: Т.1, 2, 3. – М.: ОГИЗ, 1947.
3. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. – М.: ИЛ, 1963.
4. Тоноян Г. А., Сергеев В. Н. Студенческие математические олимпиады. – Ереван: ЕГУ,1985.
5. Сергеев В. Н. Сборник олимпиадных задач по высшей математике. – Омск: ОПИ, 1975.
6. Шубин М. А. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: МГУ,1975.
7. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: МГУ,1987.
8. Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Monthly» : Сборник. Пер.с англ. / Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

Учебное издание

ЗЮБИН Сергей Александрович
ТАРБОКОВА Татьяна Васильевна
ШАХМАТОВ Валерий Михайлович

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор наук *К.П. Арефьев*

Редактор *Н.Я. Горбунова*

Верстка *В.М. Шахматов*

Подписано к печати 18.02.2009. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 6,27. Уч.-изд.л. 5,7.
Заказ XXX. Тираж 10 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета
сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

ISO 9001 Registered

UKAS QUALITY MANAGEMENT 015

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.