ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Зюбин, Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

*Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
для межвузовского использования
в качестве учебного пособия для студентов
всех специальностей*

3-е издание

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 51(076)
ББК 22.1я73
З – 98

Зюбин С.А.

З – 98 Сборник олимпиадных задач по высшей математике: учебное пособие / С.А. Зюбин, Т.В. Тарбокова, В.М. Шазматов. – 3-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 108 с.

Основу учебного пособия составляют задачи (их более пятисот) – из всех разделов математики, предлагавшиеся студентам первого и старших курсов на внутривузовских (ТГПУ, ТПУ), областных (г. Томск) и региональных турах олимпиады по математике, как предмету и как специальности за последние семь – десять лет. Кроме задач для самостоятельного решения, сборник включает более пятидесяти задач с решениями или указаниями. Данное пособие может быть рекомендовано студентам для подготовки к математическим олимпиадам; преподавателям – для работы со студентами в рамках факультативных занятий. Некоторые задачи могут быть предложены в качестве индивидуальных заданий по математике, а также могут быть полезны при написании рефератов.

УДК 51(076)
ББК 22.1я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой математики ТГПУ
П. М. Лавров

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры экспериментальной физики ТГУ
Л. В. Горчаков

Содержание

Введение

Задача вуза, как известно, состоит не только в том, чтобы передать студенту определенную сумму знаний, но и в том, чтобы научить его творчески мыслить, подготовить к жизни и практической работе в будущих условиях.

Главным действующим лицом в университетском образовании является студент. Задача повышения качества обучения и воспитания неразрывно связана с проблемой активизации его познавательной деятельности. Студент должен стать активным участником образовательного процесса. Важные резервы повышения качества обучения, качества знаний студентов, развития творческого мышления заключаются в совершенствовании учебного процесса, который невозможен без активной учебной деятельности студентов. Практика показывает, что научить творческому характеру мышления с помощью таких традиционных форм учебного процесса, как лекции, практические и лабораторные занятия, не всегда представляется возможным. Необходимым условием формирования творческого характера мышления студента является его непосредственное участие в данном виде творчества.

Современный школьник нередко по-настоящему прикасается к творчеству через систему внеклассных мероприятий: кружки, факультативы и, конечно, олимпиады. Придя в вуз, он иногда встречает эмоционально обедненный и в чем-то достаточно рутинный учебный процесс. Тогда студент может забыть о творчестве на два – три младших курса, пока не будет накоплена база для профессионального творчества (особенно это типично для втузов, где математика лишь общеобразовательный предмет). Но природа не терпит пустоты, и вектор творческих устремлений студента направляется на другие виды деятельности, – и к старшим курсам студент для науки может быть потерян.

Проблема загрузки способного первокурсника, привития вкуса к углубленному изучению предметов, вкуса к научному исследованию, постоянной работе над собой не может решаться только в рамках аудиторных занятий: нужна четкая отлаженная система внеаудиторной работы, тесно переплетающаяся с аудиторным учебным процессом. Требуется создание постоянно действующей системы внеаудиторной работы как элемента учебной деятельности кафедр, ориентированной на работу не с единицами, а с десятками и сотнями студентов. Такой системой является вузовское олимпиадное движение.

Вузовское олимпиадное движение необходимо уже хотя бы потому, что существуют школьные олимпиады. И в этом частном факте: школьное образование – школьные олимпиады, высшее образование – вузовские олимпиады, наглядно проявляется непрерывность и преемственность всей системы образования в целом.

Чуть более 30 лет прошло с начала проведения ежегодных Всесоюзных (Всероссийских) олимпиад «Студент и научно-технический прогресс». Эта олимпиада включает в себя предметные олимпиады, конкурсы курсовых и дипломных работ, смотры-конкурсы результатов производственных и педагогических практик, конкурсы по специальности. В частности, олимпиада по математике предусматривает несколько туров, начиная с внутривузовского и кончая Всероссийским. Заключительные Всероссийские туры проводятся отдельно для студентов математических специальностей и для студентов, обучающихся на специальностях, где математика является важным, но не профилирующим предметом (здесь участвуют, в основном, студенты втузов). Очевидно, что существенно изменилась внеаудиторная работа при математических кафедрах большинства вузов страны, появились подготовительные формы такой работы: кружки, семинары по решению нестандартных задач. Тем самым создана система непрерывной творческой подготовки студентов по математике в масштабах всей страны.

Проблема творчества в системе современного образования России, как и в любой другой стране, несомненно, актуальна. И решить эту проблему успешно помогает олимпиадное движение. Математическую олимпиаду нельзя рассматривать как просто усложненную контрольную работу. Целью олимпиады, кроме повышения интереса участников к изучению математики, является выявление особо глубоких и прочных знаний, умений, навыков, способности к неалгоритмизированному мышлению, нестандартности подходов, реактивности мышления. Поэтому ценность олимпиады для участников заключается, как это ни странно, в тех задачах, с которыми они не справились. Именно нерешенные задачи стимулируют углубленное изучение курса, напряженный поиск решений, именно они позволяют реально оценить собственные силы и возможности. Таким образом, олимпиада свою цель выполнила, если ее участник понял, что к олимпиаде нужно готовиться. Понял и предпринял определенные шаги в этом направлении.

Издание перед олимпиадой сборника «подготовительных задач» является старой доброй традицией математического олимпиадного движения в России, так как для успешного участия в олимпиадах требуется определенная предварительная подготовка с использованием специальной литературы. К сожалению, этой специальной литературы, призванной оказать студенту помощь в подготовке к олимпиаде, катастрофически не хватает. Этот пробел в какой-то степени устраняет данный сборник олимпиадных задач по высшей математике, который позволит приобщить как можно больше студентов к решению задач проблемного характера, оценить свои возможности, что особенно важно для студентов первого курса. Основу сборника составляют задачи (их более трехсот) из всех основных областей математики, предлагавшиеся студентам первого и старших курсов на внутривузовских (ТГПУ, ТПУ) и областных (г. Томск) турах олимпиады по математике как предмету и как специальности за последние пять-семь лет. Кроме задач для самостоятельного решения, в учебном пособии приведено около пятидесяти задач с решениями или указаниями. Задачи на областной тур составлялись или подбирались преподавателями кафедр математики ТГУ, ТПУ, ТГАСУ, ТУСУРа, ТГПУ, за что составители данного сборника выражают им свою признательность.

Данный задачник может стать полезным для самостоятельной работы студентов, для кружковых и семинарских занятий по решению нестандартных задач, в ходе подготовки к олимпиадам. Отдельные задачи могут быть использованы преподавателями на лекциях и практических занятиях, при комплектовании индивидуальных заданий.

Приглашаем Вас к чтению этого сборника, а вернее, к работе с ним, так как для того, чтобы научиться решать задачи, их нужно решать!

А предлагаемые задачи как нельзя лучше соответствуют данной цели.

Дерзайте, и удачи Вам!

Составители

Часть 1

Внутривузовский тур

ТПУ, 1998 год, 1 курс

1. Вычислите определитель Δ^{1998}, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & c \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & a \end{vmatrix},$$

если a, b, c - разные корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

2. Найдите кратчайшее расстояние между графиками функций $y = e^{1998x}$ и $y = \dfrac{\ln x}{1998}$.
3. Докажите существование предела $\sqrt{1998 + \sqrt{1998 + \sqrt{1998 + \ldots}}}$ и вычислите его.
4. Докажите, что $\dfrac{1}{1998} < \ln\dfrac{1998}{1997} < \dfrac{1}{1997}$.
5. Дана функция $y = \left(x^{1998} - 1\right)^{1998}$. Найдите $y^{(1998)}(1)$.
6. Покажите, что при $x \to \infty$ бесконечно большие функции $\int\limits_0^x e^{t^{1998}} dt$ и $\dfrac{e^{x^{1998}}}{1998x^{1997}}$ эквивалентны.
7. Докажите неравенство $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{1998^2} < 1$.

8. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные и дифференцируемые на отрезке [1997, 1998] функции. Докажите, что у графика функции

$$y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(1997) & g(1997) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(1998) & g(1998) \end{vmatrix}$$

есть хотя бы одна горизонтальная касательная.

9. Докажите, что $e^{-999^2} < \int\limits_0^1 e^{1998^2\left(t^2 - t\right)} dt < 1$.

10. Вычислите значение выражения $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{1998\ раз} - \underbrace{222\ldots2}_{999\ раз}}$.

ТПУ, 1999 год, 1 курс

1. Вычислите определитель n – го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & \dots & x & x \\ y & 1 & x & x & \dots & x & x \\ y & y & 1 & x & \dots & x & x \\ y & y & y & 1 & \dots & x & x \\ y & y & y & y & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & y & \dots & y & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Докажите, что для треугольной пирамиды высоты H, имеющей взаимно перпендикулярные боковые ребра a, b, c, справедливо соотношение: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{H^2}$.

3. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}\left(A^n - E\right)\right)$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Докажите, что последовательность $2,\quad 2+\frac{1}{2},\quad 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\dots$ имеет предел.

Найдите предел данной последовательности.

5. Студенты иногда используют ошибочный прием вычисления производной дроби, полагая, что $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$. Для каких функций это действительно справедливо?
6. Исследуйте на непрерывность функцию $y = \lim\limits_{n\to\infty}\left[x \operatorname{arctg}\left(n \operatorname{ctg} x\right)\right]$.
7. На параболе $y = x^2$ найдите точку, нормаль в которой отсекает от параболы сегмент наименьшей площади.
8. Постройте график функции $y = \pm x\sqrt{100 - x^2}$.

ТПУ, 2000 год, 1 курс

1. Последовательность $\{a_k\}$ задана первыми двумя членами a_1=1998, a_2=1999 и условием $a_{k+2} = a_{k+1} / a_k \; (k = 1,2,3,...; k \in N)$. Найдите a_{2000}.
2. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n}$.
3. Пусть непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (0,1), причем $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Докажите, что существуют такие числа $a, b \in (0,1)$, что $a \neq b$ и $f'(a)\cdot f'(b) = 1$.

4. Вокруг эллипса описаны два различных прямоугольника. Докажите, что их диагонали равны.

5. Найдите функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству: $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \quad (x \neq 1)$.
6. Что больше: $1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + ... + 1/\sqrt{36}$ или $1 + 1/\sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{3} + ... + 1/\sqrt[3]{27}$?

7. Вычислите определитель n – го порядка:
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & a_{22}+1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & a_{nn}+1 \end{vmatrix}.$$

8. Докажите тождество Лагранжа:
$\left([\bar{a}, \; \bar{b}], [\bar{a}, \; \bar{b}]\right) = |\bar{a}|^2 \cdot |\bar{b}|^2 - \left(\bar{a}, \; \bar{b}\right)^2$.

ТПУ, 2001 год, 1 курс

1. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, длина бокового ребра которой равна1 см?

2. Найдите угол между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0 \quad и \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2by = 0$ в точках их пересечения.
3. Постройте графики функций $f(x) = \pm\sqrt{x^2(100 - x^2)}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 10x_{10} = 55 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + 10x_1 = 55 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10} + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + 10x_9 = 55. \end{cases}$$

5. Найдите k, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k - (n-1)^k}{n^{2000}} = 2001$, где k - натуральное число.

6. Сравните функции

$f(x) = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^{-x}$ и $g(x) = \exp(\frac{1}{2} - \sqrt{x})$ при $x \to \infty$.

7. Найдите $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{100}$.

8. Постройте кривую, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $\rho = \dfrac{3}{1 - 2\cos\varphi}$.

ТПУ, 2002 год, 1 курс

1. Дана квадратная матрица размером $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

При каком n определитель матрицы равен **2002**.

2. Дана последовательность $\{a_n\}$: $a_n = \alpha^n + \beta^n$, где α и β корни уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$. Найдите A, B и C, если $a_{n+2} = 2002\,a_{n+1} + 2001\,a_n$.
3. В трехмерном пространстве укажите все пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при которых система

$$\begin{cases} [\vec{x},\vec{a}]=\vec{A}, \\ (\vec{x},\vec{b})=B, \end{cases}$$

имеет решения, и найти эти решения ($\vec{A}$ – данный вектор, B – данное число).

4. Докажите неравенство

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{2003001} < 2.$$

5. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[2001, 2002]$. Докажите, что график функции

$$y=\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f(2001) & \varphi(2001) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f(2002) & \varphi(2002) \end{vmatrix}$$

имеет по крайней мере одну горизонтальную касательную.

6. Найдите наименьшее целое b , при котором уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 , связанных условием $x_1 \cdot x_2 = 1$.

7. Вычислите предел $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2m}(n!\,\pi x)\right)$.

8. Найдите кратчайшее расстояние между графиками функций

$$y=e^{2002x} \quad \text{и} \quad y=\frac{\ln x}{2002}.$$

ТПУ, 2003 год, 1 курс

1. На координатной плоскости расположен квадрат $ABCD$, вершины A и B которого лежат на кривой $y=x^2$, а вершины C и D – на линии $y=4-x$. Найдите длину стороны квадрата.
2. Решите задачу Тартальи: разделить число восемь на две такие части, чтобы произведение их произведения на их разность было максимальным. Как разделить подобным образом любое вещественное число?
3. окажите, что при любом целом n число $2003+n^5+n^4-n^3-n^2$ дает при делении на 6 остаток 5.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на

промежутке $(0,2]$, если функция
$f(x)=\min\left(\dfrac{9}{4}-\dfrac{x}{2};\ x^2-x+\dfrac{4}{3}\right)$.

5. Докажите, что $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\le\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2\right)\left(a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2\right)}$. В каком случае справедливо равенство?

6. Вычислите суммы $S_n=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$ и
$Q_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)$.

7. Вычислите определитель $\Delta=\begin{vmatrix} x_1{}^2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2{}^2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3{}^2 \end{vmatrix}$, где x_1, x_2, x_3 – различные корни многочлена $P(x)=8x^3-4x+1$.

8. Найдите вещественную функцию $f(x)$, если для $\forall x$
$2f(x+2)+f(-x-1)=(x+2)^2$

ТПУ, 2004 год, 1 курс

1. В матрице A столбцы являются попарно ортогональными векторами. Докажите, что абсолютная величина определителя матрицы A равна произведению длин векторов-столбцов.
2. Докажите, сто уравнение $x^4+5x^3+6x^2-4x-16=0$ имеет ровно два решения.

3. Вычислите без таблиц тригонометрических функций и калькулятора $\sin 18$.
4. Вокруг эллипса описаны два различных прямоугольника. Докажите, что их диагонали равны.

5. Площади четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны S и S' соответственно. Докажите, что если внутри четырехугольника $ABCD$ существует точка O, для которой $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{D'A'}$, то $S=2S'$.

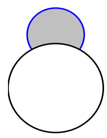
6. Пусть $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg(tgx)-\sin(\sin x)}{tgx-\sin x}$.

8. Последовательность $\{a_n\}$ задается так: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1+\dfrac{1}{a_n}$ для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$. Найдите число, которое меньше всех членов последовательности с четными номерами и одновременно дольше всех её членов с нечетными номерами.

ТПУ, 2005 год, 1 курс

1. Найдите зависимость площади заштрихованной фигуры от расстояния между центрами окружностей. R_2 – радиус большей окружности, R_1 – радиус меньшей окружности, t - расстояние между центрами.



2. Докажите, что если в гармоническом ряде $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$ отбросить все слагаемые, в знаменателе которых хотя бы один раз встречается цифра 7, то получившийся ряд станет сходящимся.

3. Вычислите интеграл: $\iint\limits_D \dfrac{\cos(x^2y-y^2x)\sin(x^2y+y^2x)}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, где D: $R^2 \geq x^2+y^2$.

4. Известно, что дифференциальное уравнение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, а функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные по x и y, являются однородными нулевой степени однородности. Докажите, что $u(x,y) = x\,P(x,y) + y\,Q(x,y) = C$ есть общее решение уравнения.

5. Выбирают наудачу один из $n!$ членов разложения определителя

n - го порядка. Какова вероятность P_n при $n \to \infty$, что он не содержит элементов главной диагонали?

6. Найдите кривую, у которой длина отрезка касательной между осями равна a.
7. При каких значениях параметров *a, b* система уравнений $\begin{cases} |z-i| = a, \\ z \cdot z^* + 2(a^2+b^2)|\,z\,| + (a^2-b^2)^2 = 0 \end{cases}$ имеет решение?

8. Самолет движется на высоте H над поверхностью земли по прямой с постоянной скоростью V (кривизной земли пренебречь). С постоянной скоростью $U > V$ его преследует самонаводящаяся ракета, которая вылетает в момент времени, когда самолет пролетает прямо над ракетой. Ракета постоянно держит курс на самолет. За какое время ракета собьёт самолет?

ТПУ, 1998 год, старшие курсы

1. Вычислите интеграл $J = \int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + 1998 x)\,dx$.
2. Найдите сумму ряда $1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^9}{9!} + \ldots$.
3. Отыщите первообразную функцию неопределённого интеграла $\int \dfrac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}\,dx$.
4. Найдите уравнение кривой $y = f(x)$, если площадь, заключённая между осью *OY*, этой кривой и перпендикуляром, опущенным из любой точки *M* кривой на ось ординат, равна 1/3 площади прямоугольника, образованного перпендикулярами из этой точки *M* на оси координат и отрезками осей координат от начала координат до точек пересечения с ними перпендикуляров.

5. Докажите, что
$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\exp(-1998x^2) - \exp(-1997x^2)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1997}{1998} .$$
6. Известно, что знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Докажите истинность (или ложность) следующих высказываний: а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ сходится;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ сходится.

7. Луг, имеющий форму квадрата со стороной *a*, равномерно покрыт травой с плотностью ρ. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать сено в центр луга, если работа по транспортировке груза массой *m* на расстояние *x* равна $\gamma mx \quad (0<\gamma<1)$?
8. Хозяин бежит по кругу радиуса *R* со скоростью *V*. Собака, находящаяся в центре круга, начинает бежать к хозяину с его же скоростью так, что она всегда находится на прямой, соединяющей хозяина с центром круга. В какой момент времени собака догонит хозяина?
9. Вычислите интеграл $J=\int_0^{\pi} tg(x+ia)dx$.
10. Три человека *A*, *B* и *C* сходятся в трехсторонней дуэли. Известно, что для *A* вероятность попасть в цель равна 0.3, для *C* – 0.5, а для *B* – 1. Дуэлянты могут стрелять в любого противника по выбору. Первым стреляет *A*, вторым – *B*, затем – *C* и т.д. в циклическом порядке (раненый выбывает из дуэли), пока не останется один человек. Какой должна быть стратегия *A* и почему?
11. Найдите решение задачи Коши:
$$(y')^2-\left(y+x^2\right)y'+x^2y=0, \quad y(1)=1.$$

ТПУ, 1999 год, старшие курсы

1. Тяжелая цепь длины l, наполовину свисающая со стола, сползает вниз под действием силы тяжести. Коэффициент трения равен k. Найдите время, за которое вся цепь сползёт со стола. При каком значении k цепь не начнёт сползать?
2. Докажите неравенство $\int_0^1 \frac{z\,dz}{\cos z}<\ln 2$.
3. Если кирпичи класть друг на друга, сдвигая каждый в одном и том же направлении относительно предыдущего, но так, чтобы они не падали, получится изогнутый “козырёк”. Какова его максимальная ширина?

4. Докажите, что если оси двух пересекающихся парабол перпендикулярны, то четыре точки пересечения принадлежат одной окружности.
5. Вся плоскость случайным образом раскрашена в два цвета. Можно ли найти на ней:

   а) две точки одинакового цвета, удалённые друг от друга ровно на один метр;

   б) две точки разного цвета, удалённые друг от друга ровно на один метр?

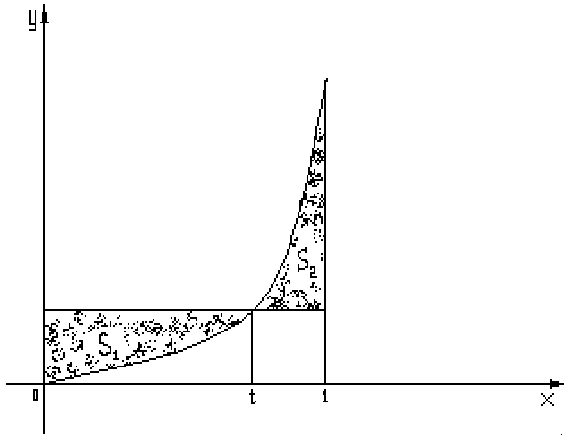
6. На странице книги печатный лист должен занимать S квадратных сантиметров. Поля сверху и снизу должны быть по a сантиметров, а справа и слева - по b сантиметров. Вычислите наиболее экономные размеры бумаги.
7. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_1^n \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)dz$.
8. При каких условиях система n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка может быть сведена к одному дифференциальному уравнению n – го порядка?

ТПУ, 2000 год, старшие курсы

1. Найдите сумму n первых членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,e^{k-1}$.
2. Найдите область аналитичности и особые точки функции $f(z)$, заданной рядом $f(z)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$.
3. Найдите функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству $f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=x$, $(x\neq 1)$.
4. Докажите, что комплексные числа a и b удовлетворяют условию $a^2=2b\neq 0$ тогда и только тогда, когда корни многочлена x^2+ax+b образуют на комплексной плоскости две вершины равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого вершина прямого угла расположена в начале координат.
5. Найдите представление функции $f(x)=\int\limits_x^{\infty} t^{-1}e^{x-t}dt,\quad x>0$, рядом Тейлора по степеням $1/x$. Какова область сходимости полученного ряда? Исследуйте поведение остатка ряда $r_n(x)$ при $x\to\infty$ в соответствующей формуле Тейлора.
6. Какова вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2+2bx+c=0$ вещественны?
7. Вычислите интеграл $\int\limits_{AmB}\left(x^2-yz\right)dx+\left(y^2-xz\right)dy+\left(z^2-xy\right)dz$, взятый по отрезку винтовой линии $x=a\cos,\ y=a\sin\varphi,\ z=\dfrac{h}{2\pi}$ от точки $A(a,0,0)$ до точки $B(a,0,h)$.
8. Решите уравнение $y^2\left(y^{\prime}\right)^2-2xyy^{\prime}+2y^2-x^2=0$.

ТПУ, 2001 год, старшие курсы

1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + 2001\,x)\,dx$.
2. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+2)\cdot n!\cdot 2^{n-1}}$.
3. Преобразуйте уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 1$, приняв за независимые переменные $u = x + y,\quad v = x - y$ и за новую функцию $w = xy - z$.
4. На отрезке [0, 1] задана функция $y = x^2$. При каких положениях точки $t \in [0, 1]$ сумма площадей S_1 и S_2 (см. рисунок) имеет наименьшее и наибольшее значения?



5. Испытание состоит в подбрасывании монеты до тех пор, пока не выпадет “решетка”. Какую долю от всех подбрасываний составляет появление “орла”, если число монет в испытании и количество испытаний может быть бесконечным?
6. Сколько вещественных корней имеет многочлен $1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}$?
7. Вычислите интеграл $J = \int\limits_0^{\pi} tg(x + i\alpha)\,dx,\quad \alpha \neq 0$.
8. Фирма решила ежемесячно ассигновать по сто тысяч долларов на производство некоторой продукции. Пусть средняя заработная плата в фирме 2000 $, а стоимость сырья – 1000 $. Требуется определить, какое количество рабочих *k* и какое количество сырья *C* необходимы для получения наибольшего объёма продукции *Q*, если известно, что он им прямо пропорционален, а коэффициент пропорциональности равен 5.

ТПУ, 2002 год, старшие курсы

1. Найдите первообразную функцию $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx$.

2. Функция $f(x)$ определена и не возрастает на отрезке $[0;1]$. Докажите, что для любого $\alpha \in [0;1]$ выполняется неравенство
$$\int_0^{\alpha} f(x)dx \geq \alpha \int_0^1 f(x)dx.$$

3. Луг, имеющий форму квадрата со стороной *a,* равномерно покрыт скошенной травой с плотностью ρ.
Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать все сено в центр луга, если работа по транспортировке груза массой m на расстояние x равна $\gamma m x$ $(0<\gamma<1)$?

4. Найдите угол между касательными, проведенными к интегральным кривым дифференциального уравнения
$y'y^2+x^3+yx=0$ в точках $A(-1;1)$ и $B(2;2)$.

5. Докажите неравенство $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{2001^2}<1.$

6. Найдите сумму ряда $1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\dots$.

7. Вычислите предел $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

8. Решите уравнение $y'\cos y=\frac{\sin y}{1-x^2}+1+x$.

ТПУ, 2003 год, старшие курсы

1. Разложите в ряд Маклорена функцию
$$f(x)=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}.$$

2. Найдите общий вид всех многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 1, которые делятся без остатка на сумму

всех своих производных.

3. В шаре радиуса a вырезано отверстие с квадратным сечением, сторона которого также равна a. Ось отверстия совпадает с диаметром шара. Найдите площадь вырезанной поверхности шара.

4. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\cdot\sin(2\pi e n!)\right]$.

5. Выбирают наудачу один из $n!$ членов разложения определителя n - го порядка. Какова вероятность P_n при $n\to\infty$, что он не содержит элементов главной диагонали?

6. Найдите решение задачи Коши
$$(y')^2-(y+x^2)\,y'+x^2y=0,\qquad y(1)=1.$$

7. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n^k}{k!}\right)$.

8. Докажите справедливость равенства
$$div\left(|\vec r|^n\cdot\vec r\right) = (n+3)\cdot|\vec r|^n \quad .$$

ТПУ, 2004 год, старшие курсы

1. Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32- угольник, все вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1?

2. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt n}\int\limits_1^n \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt x}\right)dx.$

3. Найдите функцию $y=f(x)$, являющуюся при $x>0$ решением дифференциального уравнения $x\,y'+y+2xy=1$ и принимающую в точке $x=1$ значение 1.

4. Найдите экстремумы определенной в $\mathbb{R}^2$ функции $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2$.

5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + a^2}\right)$,

$a \in \mathbb{R}$, $a = const.$

6. Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x)\, dx$.

7. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной дугами парабол $x^2 = a\,y,\quad x^2 = b\,y,\quad y^2 = c\,x,\quad y^2 = d\,x$, где $0 < a < b,\ \ 0 < c < d$; a, b, c, d – $const.$

8. Для произвольной квадратной матрицы A определим $\sin A$ с помощью степенного ряда: $\sin A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$.

Существует ли такая 2×2 матрица A, что $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2004 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

ТПУ, 2005 год, старшие курсы

1. Найдите площадь фигуры, занимающей область плоскости XoY, определенную неравенством: $\frac{\pi}{2} \le arctg\frac{y}{x-2} - arctg\frac{y}{x+2} \le \frac{5\pi}{6}$.

2. Докажите, что $\int\limits_{1}^{e} \sqrt{\ln x}\, dx + \int\limits_{0}^{1} e^{x^2} dx = e.$

3. Найдите уравнения семейства линий, ортогональных интегральным кривым дифференциального уравнения:

$$yy' + x + y'\sin(1/y') = 0.$$

4. Рассмотрим криволинейный интеграл : $\int\limits_{L} (-ydx + xdy + 2005dz)$,

где L произвольная кривая, соединяющая точки $A(2004, 2004, 2004)$ и $B(2005, 2005, 2005)$. Существует ли функция $\mu(x, y, z)$, отличная от тождественного нуля, такая, что интеграл $\int\limits_{L} \mu(x, y, z)(-ydx + xdy + 2005dz)$ не зависит от вида кривой L ?

5. Колода игральных карт содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Предположим, что колода тщательно перетасована, так что вытаскивание любой карты одинаково вероятно. Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы вероятность того, что среди них встретятся хотя бы две карты одинакового наименования, была более $0{,}5$?

6. Вычислите сумму ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n!}$.

7. Дано уравнение:

   $y^{(IV)} - 4ay''' + (6a^2 + 2b^2)y'' - 4a(a^2 + b^2)y' + (a^2 + b^2)^2 y =$

   $= a \cdot \exp(bx)$, где a и b положительные действительные числа.

   Найдите общее решение.

Внутривузовский тур

ТГПУ, 1997 год, 1 курс

1. Что больше: 127^{23} или 513^{18}?
2. Постройте график функции $y = x\,\mathrm{sgn}(\cos x)$.
3. Найдите предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x^2} - b^{x^2}}{\left(a^x - b^x\right)^2}$, $(a > 0, b > 0)$.
4. При каком значении a функция $f(x) = |x| + a^2 - 2(a+1)|x|$ дифференцируема в точке $x = 0$?
5. Определите наибольшее значение произведения m – й и n – й степеней $(m > 0, n > 0)$ двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна a.
6. Докажите, что если p – простое число, больше трех, то $p^2 - 1$ делится на 24.
7. Определите $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, если $f(x) = |\ln|x||$, $(x \neq 0)$.

ТГПУ, 1998 год, 1 курс

1. Изобразите графически решение неравенства

$|x| + |y| \le 1$.

2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $(a>0, b>0)$.
3. Докажите равенство $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.
4. В шар радиуса R впишите цилиндр наибольшего объема.
5. Постройте график функции $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.
6. Найдите на кривой $y=x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1,-1)$ и $B(2,8)$.
7. На сколько нулей оканчивается число $500!$?

ТГПУ, 1999 год, 1 курс

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.
2. Покажите, что функция $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - непрерывная функция и $\varphi(a)\neq 0$ не имеет производной в точке a.
3. Что больше: $\dfrac{tg\ \alpha}{tg\ \beta}$ или $\dfrac{\alpha}{\beta}$, если $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$?
4. Докажите, что касательные к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны.
5. Докажите, что если числа p, p^2+2 - простые, то p^3+2 - простое число.
6. Выведите формулу для суммы:
$$P_n = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}.$$
7. Постройте график функции $y=x^x$.

ТГПУ, 2000 год, 1 курс

1. Докажите, что всякий многочлен нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень.
2. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.
3. Выведите формулу для суммы

$$S_n = ch(x) + 2ch(2x) + \ldots + nch(nx).$$

4. Докажите справедливость равенства:

$$[a,[b,c]] = b(a,c) - c(a,b).$$

5. Найдите кратчайшее и наибольшее расстояния точки $A(2,0)$ от окружности $x^2 + y^2 = 1$.
6. Постройте график функции $y = x^{\frac{1}{x}}$.
7. Докажите, что выражение $n^2 - n + 9$ ни при каком $n \in \mathrm{N}$ не делится на 49.

ТГПУ, 2001 год, 1 курс

1. Докажите, что не существует предел $\lim\limits_{x \to \infty} (x - |x|)$.
2. Найдите $f'(0)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)$.
3. Покажите, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.
4. Выведите формулу для суммы:

$$Q_n = 1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1}.$$

5. Постройте график функции $y = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
6. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$,

   $n \in \mathrm{N}$ в точке $x = 0$ имеет производные до $n-$ого
   $n \in \mathrm{N}$ порядка включительно и не имеет производной $(n+1)-$ого порядка.
7. Найдите все натуральные n, для которых дробь $\frac{19n + 17}{7n + 11}$ равна целому числу.

ТГПУ, 1997 год, старшие курсы

1. Оцените интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx$.
2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n} + \cos 2\frac{\pi}{2n} + \ldots + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}\right)$.
3. Докажите, что если дифференцируемая функция $u = f(x,y)$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$, то она является однородной функцией порядка n.

4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.
5. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной лепестком кривой $\varphi=\sin(\pi\rho)$, $\rho\in[0,1]$.
6. Докажите, что тройка чисел 5, 11, 12 не может быть решением уравнения $x^n+y^n=z^n$ ни при каком $n\in\mathrm{N}$.
7. Найдите $f(x)$, если $f'(x^2)=\frac{1}{x}$, $(x>0)$.

ТГПУ, 1998 год, старшие курсы

1. В каком случае интеграл $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x\,dx$, где $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}$ и $a_0,a_1,\ldots,a_n$ – постоянные, представляет собой элементарную функцию?
2. Докажите, что длина дуги эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ равна длине одной волны синусоиды $y=c\sin\frac{x}{b}$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
3. Полагая $z=z(x,y)$, решите уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.
4. Чему равна $f^{(1000)}(0)$, где $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$.
5. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $|x|^n+|y|^n=a^n$, $(n>0,\,a>0)$.
6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$.
7. Решите уравнение $x^3-[x]=3$, где $[x]$– целая часть x.

ТГПУ, 1999 год, старшие курсы

1. Найдите точки экстремума функции $\Phi(x)=\int\limits_a^x\frac{\cos t}{t}dt$, $\left(x>0,\,0<a<\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Докажите равенство $\lim\limits_{n\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0$.
3. Покажите, что функция $z=x^n f\left(\frac{x}{y^2}\right)$, где f – произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

4. Разложите в степенной ряд функцию $f(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.
5. Приближенно вычислите произведение $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$.
6. Докажите равенство $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.
7. Решите уравнение $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$.

ТГПУ, 2000 год, старшие курсы

1. Найдите производную функции $\Phi(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\ln t}$, $(x>0)$.
2. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.
3. Покажите, что функция $f(x)=\sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0{,}0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0{,}0)$ и $f'_y(0{,}0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0{,}0)$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{90}$ в целых числах.
5. Найдите сумму ряда Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.
6. Найдите $f(x)$, если $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.
7. Докажите, что для любых положительных чисел x и y выполняется соотношение $\sqrt[3]{4(x+y)}\geq\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$.

ТГПУ, 2001 год, старшие курсы

1. Найдите интеграл $\int[x]\,|\sin\pi x|\,dx$, $(x\geq 0)$.
2. Докажите равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$.
3. Полагая $z=z(x,y)$, решите уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.
4. В какой точке поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нормаль к ней образует равные углы с осями координат?
5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$.

6. Вычислите сумму ряда: $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$.
7. Докажите, что если P и Q – многочлены степени n, то либо $P^2 \equiv Q^2$, либо степень многочлена $P^2 - Q^2$ не меньше n.

Областной тур

ТПУ, 1995 год, 1 курс, предмет

1. Найдите определитель квадратной матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вокруг эллипса описаны два различных прямоугольника. Докажите, что их диагонали равны.
3. Какую форму и почему принимает поверхность чая в цилиндрическом стакане, если чай сильно размешать вращательным движением и вынуть ложечку?
4. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.
5. Парадокс: решим уравнение $x^{x^{x^{\cdots^{x^{\cdots}}}}} = a$ так: $x^a = a$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt[a]{a}$, что для $a=2$ и $a=4$ дает одинаковый ответ $x=\sqrt{2}$. Но тогда $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}} = 2 = 4$, то есть $2 = 4$. Объясните парадокс.
6. Найдите все дифференцируемые функции $f:\Re\to\Re$, удовлетворяющие тождеству
$$f(x+y)\equiv f(x)+f(y)+xy(x+y).$$
7. Сколько вещественных корней имеет многочлен
$$1+x+x^2/2+\ldots+x^n/n\ ?$$
8. Сколькими способами можно выбрать среди натуральных чисел от 1 до 100 три числа, сумма которых делится на 3?

ТГАСУ, 1996 год, 1 курс, предмет

1. «От сосны к березе, повернуть направо, пройти столько же, сделать отметку. От сосны к дубу, повернуть налево, пройти столько же, сделать отметку. Копать посередине». С этими указаниями известного флибустьера Роджерса вы прибыли на остров. Береза цела, дуб есть, сосна пропала. Можно ли найти клад?
2. На столе лежат двое круглых плоских часов. Найдите уравнение линии, по которой движется середина отрезка, соединяющего концы минутных стрелок.

3. Найдите A^{100} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $x_1 = 0$, $x_{n=1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x_n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел и найдите его.
5. Функции $f(x),\ \varphi(x),\ q(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и имеют конечные производные на (a,b). Покажите, что график функции $F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & q(x) \\ f(a) & \varphi(a) & q(a) \\ f(b) & \varphi(b) & q(b) \end{vmatrix}$

   имеет по крайней мере одну горизонтальную касательную на (a,b).
6. Сколько точек экстремума имеет функция $f(x) = x^{\sin x}$ на промежутке $(0,1]$?

7. Найдите расстояние между графиками функций $y = e^{1996x}$ и $y = \frac{1}{1996}\ln x$.
9. Найдите первообразную для функции
$$y = \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2} .$$

ТУСУР,1997 год, 1 курс, предмет

1. Что можно сказать о порядке матрицы A и ее определителе detA, если det(2A) = bdetA, где b - некоторое число?
2. У квадратной матрицы A порядка n элементы

$a_1^2, a_2^3, a_3^4, \dots, a_{k-1}^k, \dots, a_{n-1}^n$ и a_n^1 равны единице, а остальные элементы равны нулю. Решите матричное уравнение $AX = A^{n-1}$.

3. Найдите уравнение общего перпендикуляра скрещивающихся прямых $(L_1): \left\{ \begin{array}{c} x - y + z - 8 = 0 \\ 2x - 3y + z - 14 = 0 \end{array} \right\}$ и

$(L_2): \left\{ \begin{array}{l} x = t - 1 \\ y = 1 \\ z = 5 - 2t \end{array} \right\}$.

4. На сторонах треугольника ΔABC построены три равносторонних треугольника (вовне ΔABC). O_1, O_2, O_3 - центры тяжести построенных треугольников. Докажите, что $\Delta O_1O_2O_3$ равносторонний.

5. Можно ли поместить в квадрат 1×1 некоторое число непересекающихся (и не касающихся) кругов, сумма радиусов которых больше 1997? Ответ обоснуйте.

6. Найти функцию $f(x)$, определенную на всей числовой оси, кроме точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, если для любого x справедливо соотношение $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$

7. $f(x)$ - периодическая с периодом $T = 1$ функция, определенная на всей числовой оси, такая, что $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) + x - [x]) = 0$, где $[x]$ - целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

8. Из пункта А, находящегося от прямолинейной дороги на расстоянии $AO = S_1$ надо доставить груз в пункт В (по дороге $OB = S_2$). Скорость по бездорожью в k раз меньше скорости по дороге. По какому маршруту надо ехать, чтобы время доставки груза было наименьшим? Какой длины путь при этом надо проехать?

9. Докажите, что уравнение $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$ имеет хотя бы один вещественный корень, если дано, что $c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \dots + \frac{1}{n+1}c_n = 0$.

10. Докажите, что любая непрерывная плоская кривая длины 1 может

быть покрыта прямоугольником площади меньше 0,25. Привести пример линии длины 1, которую нельзя покрыть прямоугольником площади меньше 0,25. Какова наименьшая площадь прямоугольника, которым может быть покрыта кривая длины L.

ТГУ, 1998 год, 1 курс, предмет

1. Докажите, что $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ является целым лишь при $n = 1$. Но при $n > 1$ число H_n сколь угодно мало отличается от некоторых целых чисел.
2. Покажите, что для $n \in N$ $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.
3. Докажите, что сумма площадей любых трех граней тетраэдра больше площади четвертой грани.
4. Постройте график функции $y = \lim\limits_{n \to \infty} x \cdot \mathrm{sgn}(\sin^2(n!\pi \cdot x))$.
5. Разделите с помощью циркуля и линейки угол 19^o на 19 равных частей.
6. Сколько действительных корней имеет уравнение $e^x = ax^2$?
7. Докажите, что последовательность 2; $2 + \frac{1}{2}$; $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$; …

   имеет предел, и найдите этот предел.
8. Найдите дифференцируемую функцию $f\colon R \to R$, удовлетворяющую для любых x, y равенству $f(x,y) = y\,f(x) + x\,f(y)$.

ТГПУ, 1999 год, 1 курс, предмет

1. Решите уравнение:
   $(x+1)^5 + (x+2)^5 + ... + (x+1999)^5 = 0$
2. Найдите предел $P = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right)$.
3. В левом нижнем углу квадратной доски размера 7x7 стоит король. За один ход он может продвинуться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, или на одну клетку по диагонали – вправо и вверх. Сколькими

различными путями король может попасть в правый верхний угол доски, если ему запрещается посещение центральной клетки?

4. Существует ли такая непрерывная числовая функция $f(x)$, определённая на всей числовой оси, что $f(f(x)) = e^{-x}$, $\forall x \in R$?

5. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1999}$.

6. Не вычисляя, оцените, что больше: π^e или e^π.

7. Для каких векторов $\vec{b}$ выполняется равенство:
$$((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) \times \vec{b} = \underbrace{(\ldots((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) \times \ldots \times \vec{b})}_{2000 \text{ раз } \vec{b}} \; ?$$

8. Пусть p – простое число ($p > 2$). Докажите, что числитель дроби $\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1}$ (то есть m) делится нацело на p.

10. Два коридора шириной a и b соответственно пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину шеста, который можно перенести из одного коридора в другой горизонтально.

10. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью:
$$\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

ТПУ, 2000 год, 1 курс, предмет

1. Найдите максимум выражения $M = \frac{(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, где x_i - переменные, $(i = \overline{1,n})$.

2. Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x}\left(A^n - E\right)\right)$, где
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Докажите, что луч света, параллельный оси симметрии параболы, отражаясь от параболы, пройдёт через её фокус.

4. На плоскости даны три непересекающиеся круга разных радиусов.

К каждой паре из них проведены общие касательные, которые пересекаются в некоторой точке. Покажите, что полученные три точки лежат на одной прямой.

5. Исследуйте на непрерывность функцию $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\,arctg(n\,ctg\,x)]$ и постройте её график.
6. Дифференцируема ли в точке $x=0$ функция

   $f(x)=\sqrt[3]{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$? (Считается, что $\sqrt[3]{-u}=-\sqrt[3]{u}$ при $u>0$).
7. Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям
   $$\begin{cases} f'(x)=f'(x-1), \\ f(x)+f(x-1)=x. \end{cases}$$
8. Найдите $\int\frac{x^2}{(au+bv)^2}dx$, где $u=x\sin x+\cos x,\quad v=\sin x-x\cos x$.

ТГАСУ, 2001, 1 курс, предмет

1. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании треугольника остаётся вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина? Постройте эту линию.

2. Найдите максимальную площадь треугольника, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$.

3. Пусть функции $f(x), g(x), h(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют конечные производные на промежутке (a, b). Докажите, что существует точка $c\in(a, b)$, такая, что определитель $\Delta=0$,

   если $\Delta=\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$.

4. Найдите предел последовательности
   $$z_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$
5. При каких значениях α уравнение $x^6+6\alpha x+5=0$ имеет вещественные корни?

6. К реке шириной *а* метров построен под прямым углом канал шириной *в* метров. Какой наибольшей длины суда могут входить в этот канал?

7. Докажите, что число n^4+4 не может быть простым при $n > 1$.

ТУСУР, 2002, 1 курс, предмет

1. Докажите, что для высоты h треугольной пирамиды с взаимно перпендикулярными боковыми ребрами a, b, c справедливо соотношение $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$.

2. Найдите определитель матрицы $\left(E-A^k\right)^m$, если

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ k,\, m -$$ натуральные числа.

3. Найдите функцию $f(x)$, определенную на всей числовой оси, кроме точек $x_1=0$ и $x_2=1$, если для любого x справедливо соотношение $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$.

4. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_1=1,\ a_{n+1}=2+\frac{4}{a_n}.$$

Докажите существование $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и найдите его.

5. Найдите кратчайшее расстояние между линиями $(x-6)^2+(y-3)^2=1$ и $y=x^2$, и наименее удаленные точки на них.

6. Сколько раз дифференцируема в нуле функция

$$f(x)=\begin{cases} x^4\cdot\sin\frac{1}{x} & \textit{при}\ \ x\neq 0\\ 0 & \textit{при}\ \ x=0\end{cases}$$

и сколько её производных непрерывны в нуле?

7. Необходимо перевезти груз из пункта A в пункт B. Расстояние AO от A до прямолинейной дороги OB равно s_1 $(AO=s_1)$, по дороге $OB=s_2$. Расход горючего по бездорожью в k раз больше, чем по дороге. При каком маршруте расход топлива будет наименьшим? Соотношение s_1 и s_2 произвольно.

8. При каких значениях параметра a график функции

$$y = f(x) = 2 - 2x - 2x\sqrt{-\sin^4 a\pi x} + x\left(5^{\sqrt{\log_5 4}} - 4^{\sqrt{\log_4 5}}\right)$$

имеет ровно три точки графика в области (D): $(y+1)^2 \le 4x$.

ТГУ, 2003, 1 курс, предмет

1. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.
2. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(1) = 6, \quad P(14) = 14$.
3. В эллипс с полуосями a и b впишите треугольник максимальной площади. Найдите эту площадь.
4. Вычислите $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{9} \cdot \sqrt[27]{27} \cdot \ldots$.
5. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin(2\pi e \cdot n!)$.
6. Докажите, что если все корни многочлена $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ с действительными коэффициентами действительны, то и все его производные имеют лишь действительные корни.
7. Докажите, что $\left| \sqrt{2 - \dfrac{p}{q}} \right| \ge \dfrac{1}{4q^2}$, где $p,\ q \in \mathbb{N}$.
8. Решите уравнение $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

ТГПУ, 2004, 1 курс, предмет

1. Прямоугольник разрезан на девять квадратов. Восемь из них пронумерованы числами от 1 до 8, как показано на рисунке. Длина стороны самого маленького (непронумерованного) квадрата равна 1. Чему равны длины сторон остальных квадратов?

2. Найти наименьшее натуральное значение k, при котором система

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + kx_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + kx_n = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведёт отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD. Точки E и F выбраны так, что $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{1}{2}$, $\frac{|CF|}{|EF|} = \frac{1}{5}$. Известно, что точка M, точка пересечения диагонали AC с отрезком EF делит этот отрезок в отношении $\frac{|MF|}{|ME|} = \frac{1}{4}$. Найдите диагонали параллелограмма.

4. Дано: парабола $y^2 = 2px$, её фокус F и произвольная точка $M_0(x_0; y_0)$ на параболе; луч l, выходящий из точки M_0 и параллельный оси параболы (ось Ox); касательная к параболе в точке M_0. Докажите, что указанная касательная составляет равные углы с прямой FM_0 и лучом l.

5. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \ldots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}\right)$

6. Точка движется по прямой так, что средняя скорость за любой промежуток времени равна среднему арифметическому скоростей на концах промежутка. Докажите, что точка движется с постоянным ускорением.

8. Необходимо закупить некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместимостью 100 л. Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату площади поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной площади её поверхности. При этом колба объёмом в 1 л обходится в 1 руб. 25 коп., и в этом случае стоимость труда мастера составляет 20% стоимости колбы. Какое максимальное число колб и какого объёма можно заказать на 120 рублей?

ТПУ, 2005, 1 курс, предмет

1. Квадратные матрицы A и B удовлетворяют условиям : $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$.

   Найдите все значения, которые может принимать $\det(A - B)$.

2. Коэффициенты многочленов $P_k(x) = a_{1k} + a_{2k}x + a_{3k}x^2$, $k = 1, 2, 3$ удовлетворяют условиям

$$a_{1k}\,a_{1l} + a_{2k}\,a_{2l} + a_{3k}\,a_{3l} = \begin{cases} 0, & если \quad k \neq l \\ 1, & если \quad k = l \end{cases}.$$

   Найдите $P_1^2(x) + P_2^2(x) + P_3^2(x)$.

3. Радиусы двух окружностей равны 1 и 3, расстояние между центрами окружностей равно 10. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих множество точек данных окружностей.

4. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin(2\pi e n!)$.

5. Докажите, что при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $x \cdot \cos x < 0,6$.

6. Тяжелый шар осторожно кладут в наполненную водой вазу, имеющую форму сегмента параболоида вращения. Размеры вазы заданы: a - глубина вазы, $x^2 = 2py$ - уравнение линии пересечения внутренней поверхности вазы с плоскостью, проходящей через ось вазы. Размер шара выбран так, чтобы он вытеснил как можно больше воды. Найдите радиус шара как функцию p и a.

7. Бесконечная последовательность (вещественных) чисел $a, b, c, d, \ldots$ получается почленным сложением двух геометрических прогрессий. Может ли эта последовательность начинаться с таких чисел: $a)$ $1, 1, 3, 5$; $b)$ $1, 2, 3, 5$; $c)$ $1, 2, 3, 4$. Если может, то найдите такие последовательности.

ТПУ, 1995 год, старшие курсы, предмет

1. Найдите матрицу, обратную к квадратной матрице размера $n \times n$:
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}, \quad (a \neq 0).$$
2. Найдите функции $f(x)$, удовлетворяющие при $x \neq 0$ и $x \neq 1$ тождеству $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) \equiv x$.
4. Вычислите предел $A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
5. Функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0, \infty)$, причем $y(x) > 0, \quad y'(x) > 0$. Докажите, что если сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{y + y'}$, то сходится и $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{y}$.
6. На круг радиуса R намотана гибкая нерастяжимая нить длины $2\pi R$. Найдите площадь, которую заметает эта нить при ее полном сматывании с круга.
7. Найдите $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \max(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$
8. Пусть $\Im(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $\quad 0 < z < 1$. Докажите, что
$$\Im(z) + \Im(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \ln z \ln(1-z).$$
9. Автобусные билеты имеют номера от 000000 до 999999. Сколько среди них счастливых, то есть таких, у которых сумма трех первых цифр равна сумме трех последних?

ТГАСУ, 1996 год, старшие курсы, предмет

1. На лобовом стекле автомобиля укреплены два дворника длиной L каждый, вращающиеся вокруг двух точек, которые отстоят друг от друга также на расстоянии L. Каждый дворник подметает один полукруг. Какую площадь подметают оба дворника?

2. Асимптотика интеграла от быстро растущих функций. Пусть $f(x)>0,\quad f'(x)>0,$ $f''(x)>0$ на $[a,\ +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=C$. Докажите, что при $x\to+\infty$ $\int\limits_a^x f(t)dt\ \sim\ \dfrac{1}{2-C}\cdot\dfrac{f^2(x)}{f'(x)}$, и получите асимптотику интеграла $\int\limits_a^x t^t\,dt$.

3. Вычислите интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+x^{1996}\right)}$.

4. Определите скорость, с которой метеорит ударяет о Землю, предполагая, что он падает прямолинейно с неограниченно большого расстояния из состояния покоя и при его движении к Земле ускорение обратно пропорционально квадрату его расстояния от центра Земли (радиус Земли взять равным $6{,}4\cdot10^6$ м).

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y''y+y'^2=x'y+xy' \\ x'y+xy'=1 \end{cases}$.

6. Убедитесь, что при малых x и y имеет место приближенная формула $arctg\,\dfrac{1+x+y}{1-x+y}\approx\dfrac{\pi}{4}+x-xy$.

7. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n{}^{1990}x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n{}^{1996}x^n$ имеют одинаковые ненулевые радиусы сходимости. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{U_n}{6^n}$?

8. Известно, что функция $f(x)$ определена и возрастает при $0\le x\le b$, а ее производная $f'(x)$ убывает при $0<x\le b$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}f'\left(\dfrac{b}{n}\right)$ сходится.

ТУСУР, 1997 год, старшие курсы, предмет

1. Пусть $\|a_{ij}(n)\|$ есть n-ая степень матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$: $A^n = =\|a_{ij}(n)\|$. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$, и найдите его.

2. Дано параметрическое уравнение эллипса: $\begin{cases} x=2\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases},\varphi\in[0,\ 2\pi]$. Зная, что $\rho^2=x^2+y^2$, студент вычисляет площадь эллипса так:
$S=4(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 d\varphi\ =2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\,4\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\,)\,d\varphi\ =\dfrac{5\pi}{2}$. Известно,

однако, что $S = \pi ab = 2\pi$. В чем ошибка студента? Исправьте ошибку и доведите решение до конца.

3. Найдите объем тела $u^2 + v^2 + w^2 \le R^2$, если $u,\ v,\ ,w$ - координаты точки относительно базиса $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
4. Докажите тождество $\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$.
5. Последовательность $\{x_n\}$ с положительными членами монотонно возрастает и ограничена. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ сходится.
6. Найдите минимальное расстояние между поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $x + y - z = 5$.
7. В $\mathbf{R^n}$ даны n попарно ортогональных плоскостей $A_{1k}x_1 + A_{2k}x_2 + \ldots + A_{nk}x_n = 0$, $(k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,n)$. Чему равен модуль определителя матрицы $A = \| A_{ik} \|$, $(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,n)$.
8. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} tgn$, где $n \in N$.
9. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1) - 3^{-n}}$ с точностью до 0,01 (требуется дать ответ, а не оценку ошибки).
10. Пусть $f(x) > 0$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

    Покажите, что $\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{f(x)}{\int\limits_1^{x} f(t)dt}\right)dx$ расходится.

ТГУ, 1998 год, старшие курсы, предмет

1. Докажите, что если в гармоническом ряде $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ вычеркнуть все члены, знаменатели которых содержат цифру 9, то оставшаяся часть ряда будет сходящейся.

2. Докажите, что число Эйлера e является иррациональным.

3. Определите площадь сечения эллипсоида

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскостью $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z=0$.

4. В кубический ящик с ребром a кладут два шара и ящик закрывают крышкой. Какими должны быть радиусы шаров, чтобы их суммарный объем был максимальный.
5. Подберите форму сосуда (поверхность вращения) так, чтобы сосуд можно было использовать в качестве водяных часов (метки образуют равномерную шкалу). Предполагается известным закон Торричелли: жидкость из сосуда вытекает со скоростью $k\sqrt{2gh}$, где h - высота уровня воды над отверстием.
6. Постройте график функции $y=x^x$, $x\in(0,1]$, и вычислите площадь криволинейной трапеции с точностью до 10^{-5}.
7. Найдите $f^{(1998)}(0)$ функции $f(x)=\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.
8. Докажите, что объем тела, ограниченного поверхностью S, равен $V=\frac{1}{3}\iint_S(\bar r,\bar n_0)ds$, где $\bar r$ - радиус – вектор точки M поверхности, а $\bar n_0$ нормальный единичный вектор к поверхности в точке M.

ТГПУ, 1999 год, старшие курсы, предмет

1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее свойствами:
   а) его 1/2 - это квадрат целого числа;
   б) его 1/3 – это куб целого числа:
   в) его 1/5 – это пятая степень целого числа.
2. Векторы $\bar a$, $\bar b$, и $\bar c$ удовлетворяют условию $\bar a+\bar b+\bar c=0$. Докажите, что $[a,b]=[c,a]=[b,c]$
3. Докажите, что если в определителе D порядка n все элементы равны 1 или - 1, то при $n\ge 3$ имеем $|D|\le(n-1)(n-1)!$.
4. Вычислите интеграл $\int_0^\pi \ln(1+\sin\alpha\cos x)\frac{dx}{\cos x}$.
5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^\infty \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$, $a\in R, a=\text{const}$.
6. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной дугами парабол $x^2=ay,\ x^2=by,\ y^2=cx,\ y^2=dx,$ где $0<a<b,\ 0<c<d.$
7. Найдите все функции $u(x,y)$, удовлетворяющие для $\forall x,y\in R$ уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

8. Покажите, что для криволинейных интегралов второго рода неверна, вообще говоря, формула среднего значения: $\int\limits_{AB} f(x,y)dx = f(\xi,\eta)\int\limits_{AB} dx,$ где AB – гладкая кривая, $f(x,y)$ – непрерывная вдоль AB функция, (ξ,η) – некоторая точка кривой AB.
9. Снегопад начался до полуночи и продолжался, не усиливаясь и не ослабевая. Снегоочистительная машина начала работать в полночь и, убирая за равные промежутки времени равные количества снега, расчистила за первые 2 часа работы 10 км пути, а за следующие 2 часа работы – ещё 5 км пути. Когда начался снегопад?
10. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)dx.$

ТПУ, 2000 год, старшие курсы, предмет

1. Разделите число 2000 на три положительных слагаемых X,Y,Z так, чтобы произведение $P = X^{1999}\cdot Y^{2000}\cdot Z^{2001}$ было наибольшее.

2. Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & \cdots & E_{n-1} \\ E_1 & E_2 & E_3 & \cdots & E_0 \\ E_2 & E_3 & E_4 & \cdots & E_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{n-1} & E_0 & E_1 & \cdots & E_{n-2} \end{vmatrix}$, где E_k - k –ый корень n –ой степени из единицы.

3. Вычислите предел $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2m}(n!\pi x))$.
4. Вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{d}{dx}(arctg\frac{1}{x})dx$.
5. Самолет вылетел с экватора, держа курс строго на северо-восток. Какое расстояние он пролетит, приземлившись на северном полюсе? (Земля имеет форму шара радиуса R = 6400 км.)
6. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 x^{nx}dx$.
7. Невесомый сосуд в виде усеченного, срезанного по среднему сечению конуса ($x \ge 0$), стоит на меньшем донышке. Уравнение боковой поверхности $(z + 1)^2 = =x^2+y^2$, а донышка - $z = 0$. В сосуд наливается вода. При какой высоте воды в сосуде сосуд опрокинется? (Получите уравнение для определения этой высоты).
8. Самолет движется по прямой с постоянной скоростью V. Со скоростью $U > V$ его преследует самонаводящаяся ракета, в начальный момент

находящаяся на расстоянии S по перпендикуляру к его пути. Ракета постоянно держит курс на самолет. За какое время ракета собьёт самолет?

ТГАСУ, 2001 год, старшие курсы, предмет

1. Докажите неравенство $\int_0^1 \frac{x}{\cos x}dx < \ln 2$.
2. Докажите, что функция
$$U(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
имеет в точке O (0,0) частные производные, но не дифференцируемые в этой точке.
3. Докажите, что $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx = \ln\frac{b+1}{a+1}$.
4. Найдите решение задачи Коши $(y')^2-(y+x^2)y'+x^2y=0,\quad y(1)=1$.
5. Решите уравнение $y''+\frac{y}{x^4}=0$.
6. Рассмотрим непрерывную на $0<x\le 1$ функцию $f(x)=x^x$. Легко доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^x=1$. Поэтому можно считать, что $f(x)=x^x$ задана и непрерывна на $0\le x\le 1$.
Докажите, что $\int_0^1 x^x dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.
7. Прямая $y = ax + b$ пересекает график дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ в трех различных точках. Докажите, что между крайними точками пересечения найдется точка x, в которой $f''(x)=0$.

ТУСУР, 2002, старшие курсы, предмет

1. Найдите $I=\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{ax^2+b}}$.

2. Через диаметр основания прямого кругового цилиндра с радиусом R и высотой H проведена плоскость под углом α к плоскости основания $(H\ge R tg\alpha)$. Найдите отношение объёмов получившихся частей разбиения цилиндра.

3. Докажите, что $z=f\left(x+\varphi(y)\right)$, где f и φ дважды дифференцируемые функции, удовлетворяют уравнению

$$z'_x \cdot z''_{xy} = z'_y \cdot z''_{xx}.$$

4. Решите задачу Коши: $(1-x)\left(y\,y'' - (y')^2\right) - y\,y' = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.

5. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3^n}$.

6. Исследуйте на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \textit{при} \quad n \neq 3k, \\ -\dfrac{3}{n} & \textit{при} \quad n = 3k, \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \textit{при} \quad n \neq 3k, \\ -\dfrac{2}{n} & \textit{при} \quad n = 3k, \end{cases}$$

то есть ряды, полученные из гармонического умножением членов ряда с номерами, кратными числу 3, на -3 и -2 соответственно.

7. Дано, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ сходятся при любом $x \neq 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Исследуйте на сходимость (абсолютную и условную) ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\sin nx}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\cos nx}{n}.$$

8. Кюре сказал служке: «Я встретил троих прихожан. Произведение их возрастов (количество лет целое) равно 2450. Сумма их возрастов равна удвоенному Вашему возрасту. Прихожан каких возрастов я встретил?» . Через час служка ответил, что данные условия не позволяют дать однозначный ответ. Тогда кюре добавил: «Старший из них старше меня». После этого служка, зная возраст кюре, назвал возраст прихожан. Сколько лет кюре? Ответ подробно обоснуйте.

ТГУ, 2003, старшие курсы, предмет

1. Вычислите $\int\limits_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx$.

2. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$.

3. Найдите $(arctgx)^{(2003)}$ – производную 2003 порядка.

4. Докажите, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 6^{\frac{2-3n-n^2}{2}}$ является иррациональным числом.

5. Эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ пересекается плоскостью $Ax+By+Cz=0$. Найдите площадь сечения.

6. Рассеянная секретарша заклеила 6 писем в не надписанные конверты. Затем подписала их произвольным образом. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо попадёт к своему адресату?

7. Вычислите $\iint\limits_S \left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right)dS$, где $S-$ поверхность $x^2+y^2=z^2, \quad 0\le z\le h, \quad \vec{v}\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)-$ единичная внешняя нормаль к S.

8. Можно ли из точки O направить в пространство 15 лучей так, чтобы угол между любыми двумя был больше 60 ?

ТГПУ, 2004, старшие курсы, предмет

1. Вычислите сумму $\cos\dfrac{\pi}{101}+\cos\dfrac{3\pi}{101}+\cos\dfrac{5\pi}{101}+\ldots\cos\dfrac{99\pi}{101}$.

2. Докажите, что $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,x^{s-1}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n^s}{s(s+1)\ldots(s+n)}$, где $s>0.$

3. Найдите решение уравнения $\dfrac{d\,U(x)}{d\,x} = U(x)+\int\limits_0^1 U(x)\,dx$

   с начальным условием $U(0)=1.$

4. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью

   $\dfrac{|\,u\,|}{a}+\dfrac{|\,v\,|}{b}+\dfrac{|\,w\,|}{c}=1, \quad \left(a>0,\ b>0,\ c>0\right),$

   если u, v, $w-$ координаты точки относительно базиса:

   $\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{e}_2=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{e}_3=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$.

5. Докажите, что $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}=\ln n + C+\alpha_n$,

   где $C=\text{const}$ (постоянная Эйлера), а $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

6. Пьяница стоит на расстоянии одного шага от пропасти. Он шагает случайным образом либо к краю утёса, либо от него. На каждом шагу вероятность отойти

от края равна $2/3$, а шаг к краю имеет вероятность $1/3$. Какова вероятность того, что через пять шагов пьяница стоит на утёсе?

7. Функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими производными по x и по y и удовлетворяет условиям:

$$f(0, 0) = 0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 2004|x-y|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 2003|x-y|.$$

Докажите, что $|f(2004, 2003)| \le 2004^2$.

ТПУ, 2005, старшие курсы, предмет

1. Найдите площадь фигуры, занимающей область плоскости XOY, определенную неравенством: $\frac{\pi}{2} \le arctg\frac{y}{x-2} - arctg\frac{y}{x+2} \le \frac{5\pi}{6}$.

2. Докажите, что $\int_1^e \sqrt{\ln x}\, dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e.$

3. Найдите уравнения семейства линий, ортогональных интегральным кривым дифференциального уравнения:

$$yy' + x + y'\sin(1/y') = 0 .$$

4. Рассмотрим криволинейный интеграл : $\int_L (-ydx + xdy + 2005dz)$,

   где L произвольная кривая, соединяющая точки $A(2004, 2004, 2004)$ и $B(2005, 2005, 2005)$. Существует ли функция $\mu(x, y, z)$, отличная от тождественного нуля, такая, что интеграл $\int_L \mu(x, y, z)(-ydx + xdy + 2005dz)$ не зависит от вида кривой L ?

5. Колода игральных карт содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Предположим, что колода тщательно перетасована, так что вытаскивание любой карты одинаково вероятно. Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы вероятность того, что среди них встретятся хотя бы

две карты одинакового наименования, была более $0{,}5$?

6. Вычислите сумму ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n!}$.

7. Дано уравнение:
$y^{(IV)} - 4ay''' + (6a^2 + 2b^2)y'' - 4a(a^2 + b^2)y' + (a^2 + b^2)^2 y =$
$= a \cdot \exp(bx)$, где a и b положительные действительные числа.
Найдите общее решение.

ТГУ, 1997 год, 1 курс, специальность

1. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right)$.
2. Приведите пример функции, определенной на всей числовой прямой и только в одной точке дифференцируемой.

3. Постройте график функции $y = tg(2arctgx)$.

4. Найдите расстояние от точки $(4, 0)$ до параболы $y^2 - 2x = 0$.

5. Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$, где n - натуральное число?
6. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина?

7. Задан многочлен с целыми коэффициентами, принимающий значение в пяти различных целочисленных точках. Докажите, что этот многочлен не имеет ни одного целого корня.
8. На эллипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ найдите такую точку, чтобы площадь треугольника, ограниченного касательной к эллипсу в этой точке и осями координат, была наименьшей.

9. Дано, что $a^5 - a^3 + a = 2$, $a \in \mathbf{R}$. Докажите, что $3 < a^6 < 4$.
10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, причем $f(f(x)) = x$. Докажите, что существует точка x_0, в которой $f(x_0) = x_0$.

ТГПУ,1998 год, 1 курс, специальность

1. Решите уравнение

$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}}=x\ .$$

2. Докажите, что середину сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
3. Найдите предел, к которому стремится положительный корень уравнения $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x-1=0$ при $n\to\infty$.
   Около квадрата со стороной 1997 описан ромб. Найдите его диагонали, если известно, что они равны различным целым числам.
5. Дана периодическая с периодом $T=1$ функция, определенная на всей числовой оси, такая, что $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x-[x])=0$, где $[x]$ - целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.
   Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.
6. Найдите все значения параметра a $(a>1)$, для каждого из которых график функции $f(x)=a^x$ касается прямой $y=x$.
7. В равносторонний треугольник вписаны окружности равных радиусов, касающиеся друг друга. Найдите предел отношения площади, занимаемой всеми вписанными кругами, к площади треугольника, когда число кругов неограниченно возрастает.
8. Что больше $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{36}}$ или $1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$?
9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=6 \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-z^2}+\sqrt{16-t^2}=8. \end{cases}$$

10. Докажите, что для $\forall x>0,\ \ \forall y>0$ имеет место неравенство

$$y\ln\frac{x}{y}\le x-y\ .$$

11. Докажите неравенство $n!<n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+1}$.
12. Биссектрисы данного выпуклого четырехугольника своими пересечениями образуют новый четырехугольник внутри данного. Биссектрисы этого нового четырехугольника опять образуют четырехугольник и так далее. Найдите пределы, к которым стремятся углы этих четырехугольников.

ТГУ, 1999 год, 1 курс, специальность

1. Докажите, что уравнение $a^2+b^2=c^k$ имеет решение в области целых положительных чисел при любом целом $k>0$.
2. Найдите x, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1999}}{n^x-(n-1)^x}=\dfrac{1}{2000}$.
3. Пусть задано простое число p. Найдите натуральные числа x, y $(x\neq y)$ такие, что $\dfrac{2}{p}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.
4. Пусть A - квадратная матрица второго порядка и k – натуральное число, $k>2$. Докажите, что если $A^k=0$, то $A^2=0$.
5. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(0;1)$, причем $f(0)=f(1)=0$ и $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x)=-1$. Используя формулу Тейлора, докажите, что $\max\limits_{x\in[0;1]} f''(x)\geq 8$.
6. Пусть $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x>0$. Докажите, что $f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$. Найдите числа A и B.
7. Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$, где n - натуральное число.
8. Найдите множество точек плоскости, из которых гипербола, лежащая в этой плоскости, видна под прямым углом.
9. Верно ли следующее утверждение: касательная к гиперболе в произвольной точке образует вместе с двумя асимптотами гиперболы треугольник, площадь которого не зависит от точки касания?
10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, причем $f(f(x))=x$ для любого x. Докажите, что существует точка x_0 такая, что $f(x_0)=x_0$.

Дополнительные вопросы

1. Кто был первым лектором по математике:
   - В Томском технологическом институте?
   - В Томском университете?
2. Кого из томских математиков почтили мемориальной доской? Что Вы о нем знаете?
3. Кто из великих математиков посетил Томский университет?

ТГПУ, 2000 год, 1 курс, специальность

1. Что больше: $\sqrt[1999]{1999!}\cdot\sqrt[2001]{2001!}$ или $\left(\sqrt[2000]{2000!}\right)^2$?
2. Пусть функция $f(x)$ определена на числовой прямой и удовлетворяет неравенству: $|f'(x)|<k<1$ для $\forall x\in\mathbf{R},\ k=const$. Докажите, что найдется, и притом единственная точка x^*, для которой $f(x^*)=x^*$ (неподвижная точка для функции $f(x)$).
3. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на числовой прямой, и уравнение $f(x)=x$ не имеет вещественных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x))=x$ тоже не имеет вещественных корней.
4. Вычислите $\left\{\sqrt{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}\right\}^{2000}$.
5. Найдите расстояние между графиками функций $y=e^{2000x}$ и $y=\frac{1}{2000}\ln x$.
6. Последовательность $\{a_n\}$ задается условиями: $a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}^2+\frac{1}{n(n-1)}}$.

   Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.
7. Вычислите $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.
8. Точки A и B движутся равномерно по пересекающимся прямым, не сталкиваясь. В каждый момент времени проведем через точки A и B прямую. Докажите, что объединение всех этих прямых есть внешность некоторой параболы.

ТГУ, 2001 год, 1 курс, специальность

1. Известно, что в наборе из 32 одинаковых по виду монет есть две фальшивые монеты, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более 4 взвешиваний на чашечных весах без гирь?
2. В пространстве отмечено n различных точек. Докажите, что существует прямая, все проекции точек на которую различны.
3. Решите уравнение $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{x^3-1}]=400$.
4. Докажите, что если натуральное число n больше единицы, то число n^n-n^2+n-1 делится на $(n-1)^2$.
5. Докажите, что существуют числа A и B, удовлетворяющие при

любом $n \in N$ равенству $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A\,\mathrm{tg}\,n + Bn$, где $a_k = \mathrm{tg}\,k\,\mathrm{tg}(k-1)$, $k = 1,\ldots,n$.

6. Существует ли многочлен $P(x)$ 2001-й степени такой, что $P(x^2 - 1)$ делится на $P(x)$?
7. В квадратной матрице A столбцы являются попарно ортогональными векторами. Докажите, что абсолютная величина определителя матрицы A равна произведению длин векторов-столбцов.

8. Пусть a и b – действительные числа, для которых имеет место равенство: $a + e^a = b + e^b$. Верно ли, что $\sin a = \sin b$?

ТГПУ, 2002, 1 курс, специальность

1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ f''(x) > f(x) + f'(x) \end{cases} \quad \forall x \in [0,1] .$$

Докажите, что $f(x) < 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

2. Найдите максимальный элемент последовательности $a_n = \dfrac{2002^n}{n!}$.

3. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на R и для любой арифметической прогрессии a,b,c,d выполняется неравенство:

$$|\,f(d) - f(a)\,| \ge \pi\,|\,f(c) - f(b)\,|,$$

то f – постоянная функция.

4. Дан эллипс $Э_1$ с полуосями a и b $(a > b)$. По эллипсу $Э_1$ строится эллипс $Э_2$, фокусами которого служат концы малой оси эллипса $Э_1$, а малой осью – большая ось эллипса $Э_1$. По эллипсу $Э_2$ аналогичным образом строится эллипс $Э_3$ и т.д. Обозначим ε_n эсцентриситет эллипса $Э_n$. Докажите, что последовательность $\{\varepsilon_n\}$ имеет предел, и найдите этот предел.

5. Найдите все значения параметра $a \in R$, при которых уравнение

$$1 + \sin ax = \cos x$$

имеет единственное решение.

6. Рассмотрим единичный четырехмерный куб, то есть множество точек $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ таких, что $0 \le x_i \le 1$ при $i = 1,2,3,4.$
   Сечение куба гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$
   является трехмерным многогранником. Найдите число вершин, ребер, граней этого многогранника и нарисуйте его.

7. Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0,1)$ и $0 < \alpha < 1$.
   Что больше $I_1 = \alpha \int_0^1 f(x)dx$ или $I_2 = \int_0^\alpha f(x)dx$?

8. Вычислите $\lim_{n\to\infty} A^n$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

ТГУ, 2003, 1 курс, специальность

1. Дан набор чисел $\{0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$. Известно, что среди любых четырех чисел из этого набора есть равные, а среди любых пяти чисел равных не более трех. Найдите количество нулей в этом наборе.

2. Докажите, что $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n\ \text{раз}} - \underbrace{22\ldots2}_{n\ \text{раз}}} = \underbrace{33\ldots3}_{n\ \text{раз}}$.

3. Точка O – центр правильного n-угольника на плоскости; A_1, A_2,…, A_n – его вершины. Найдите сумму $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$.

4. Докажите, что существует бесконечно много пар рациональных чисел (x, y), удовлетворяющих условиям $x^x = y^y$, $x > 0$, $y > 0$, $x \ne y$.

5. По окружности выписаны числа 1, 2, 3. Затем между каждыми двумя соседними числами вставили их сумму (в результате получилось шесть чисел: 1, 3, 2, 5, 3, 4). Потом повторили эту операцию еще 5 раз. Теперь вдоль окружности стоят 192 числа. Найдите их сумму.

6. Докажите, что $e^x > 1 + \ln(1 + x)$ при $x > 0$.

7. Докажите, что последовательность $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n\text{ корней}}$

сходится и найдите ее предел.

8. Постройте график функции $f(x) = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)$.

ТПУ, 2004, 1 курс, специальность

1. Найдите наибольшее из чисел: $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \cdots,\ \sqrt[n]{n},\ \cdots$.

2. Докажите, что последовательность

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \cdots,\ \sqrt{\underbrace{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{1}}+\cdots+\sqrt{1}}_{\text{n - раз}}},\cdots$$

имеет предел, и найдите его.

3. Может ли квадрат целого числа оканчиваться тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля? *(Какими тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля, может оканчиваться квадрат целого числа?)*

4. Пусть $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$ функция, дифференцируемая на интервале (a,b), причем $f(0)=0,\ f(1)=1$. Докажите , что существует такие числа $a, b \in (0,1)$, что

$$a \neq b \quad и \quad f'(a)\cdot f'(b) = 1 \ .$$

5. Пусть $f(x) = (1-x+x^2)/(1+x+x^2)$. Найдите $f^{(n)}(0),\ n = 1,2,\cdots$.

6. Лампочка висит под центром круглого абажура (в виде круглого диска), на 10 *см* ниже его и в 50 *см* от стены. Радиус абажура 15 *см*.
   Найдите границу тени абажура на стене.

7. Решите уравнение:

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\ldots\cdot\begin{pmatrix}1 & 2004x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

8. Докажите неравенство

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}.$$

ТГУ, 2005, 1 курс, специальность

1. На плоскости отмечено n различных точек. Докажите, что существует прямая, лежащая в этой плоскости, все проекции точек на которую различны.

2. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, причем $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что существует точка $x_0\in\mathbb{R}$, в которой $f\left(x_0\right)=x_0$.

3. Существует ли многогранник с 25 ребрами?

4. Докажите, что при любом $n\in\mathbb{N}$ число $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ является квадратом некоторого натурального числа.

5. Найдите предел последовательности, определенной следующим образом: $x_{n+1}=\dfrac{x_n+a/x_n}{2}$, $n\geq 1$, $x_1>0$, $a>0$.

6. Существует ли нелинейная функция, определенная на всей вещественной оси и имеющая производные всех порядков, такая, что при любом $n\in\mathbb{N}$ ее n-ая производная всюду по модулю не превосходит $1/2^n$?

7. Пусть $p(x)$ – многочлен степени n и пусть $p(a)\geq 0,\ p'(a)\geq 0,\ldots,\ p^{(n-1)}(a)\geq 0,\ p^{(n)}(a)>0$. Докажите, что действительные корни уравнения $p(x)=0$ не превосходят a.

8. Пусть α, β, γ – корни многочлена x^3+px+q. Вычислите

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}.$$