ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

Т.В. Тарбокова

СБОРНИК СПРАВОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

*Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
для межвузовского использования
в качестве учебного пособия для студентов
всех специальностей*

2-е издание

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 51(035) (075.8)
ББК 22.1я73
Т194

Тарбокова Т.В.

Т194 Сборник справочных материалов по курсу высшей математики: учебное пособие / Т.В. Тарбокова. – 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 98 с.

Сборник справочных материалов содержит сведения по всем разделам курса высшей математики, изучаемого в вузе, и способствует развитию творческих способностей, математического мышления студентов, активизации их познавательной деятельности и самостоятельной работы. Включает теоретические сведения, оформленные в виде структурно-логических схем, таблиц, алгоритмов решения задач, – крупноблочного представления материала. Для студентов всех специальностей вузов.

УДК 51(035) (075.8)
ББК 22.1я73

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой математики ТУСУР
Л.И. Магазинников

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа ТГУ
Л.С. Копанева

МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы

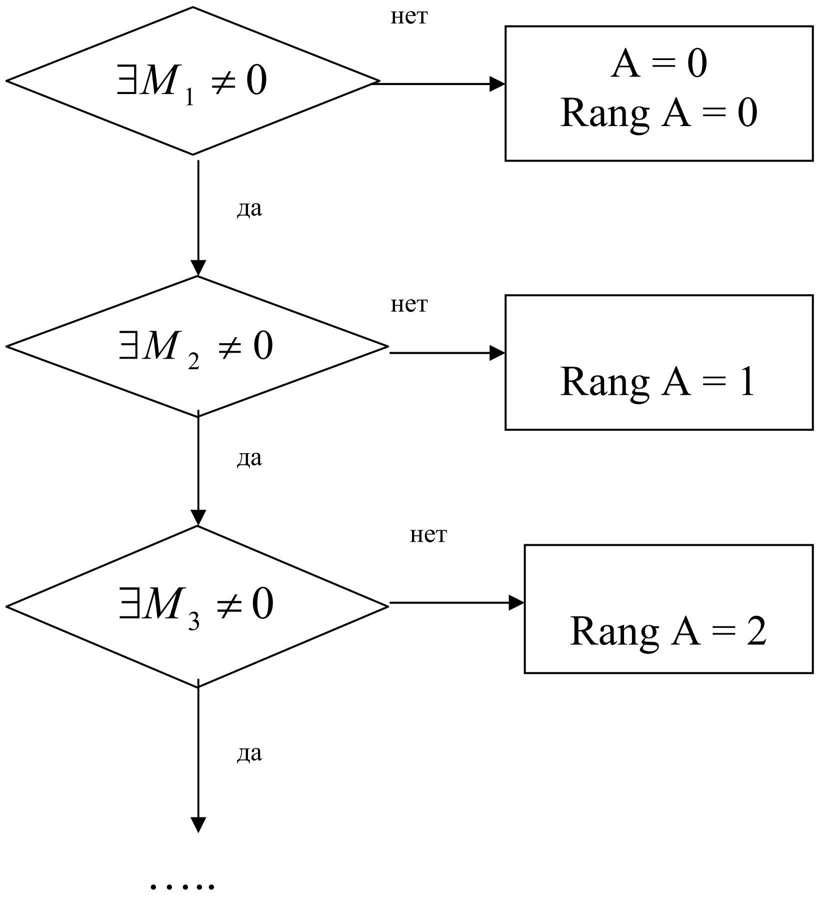
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Определение минора.

Минором M_k ***порядка k*** матрицы A называется любой определитель k-го порядка этой матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых её «*к»* столбцов и любых её «*к»* строк

$$M_1 = a_{ij}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{sj} & a_{sk} \end{vmatrix}, \quad и\ т.\ д.$$

$$i, s = 1,\dots,m, \quad j, k = 1,\dots,n$$



Определение ранга матрицы.

Рангом ***r*** матрицы A называется **наибольший порядок** ***r*** минора этой матрицы, отличного от нуля:

$$\exists M_r \neq 0, \forall M_k = 0\ или\ \bar{\exists} M_k, \quad k = r+1, r+2, \dots$$

(существует минор порядка r, не равный нулю, а все миноры более высоких порядков равны нулю или не существуют).

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями

Условимся называть **рабочей** строку, которая не изменяется на проводимом этапе элементарных преобразований (перестановке строк; умножении строки на число и сложении с соответствующими элементами другой строки; вычеркиванием всех пропорциональных строк, кроме одной из них).

Рабочая строка первая. Получим нули в первом столбце на местах всех элементов первого столбца за исключением элемента в первой строке a_{11}. Для этого ***умножим все элементы первой строки*** на такие числа, чтобы при сложении с элементами первого столбца остальных строк получить нули в первом столбце, за исключением элемента первой строки a_{11}.

Если в системе, которую Вы решаете, коэффициент при x_1 в первом уравнении не равен единице, поменяйте местами строки, записав первой ту, в которой коэффициент при неизвестном x_1 равен единице.

Если при неизвестном x_1 во всех уравнениях коэффициенты отличны от единицы, можно:

1) умножить первую строку расширенной матрицы системы на число, противоположное тому, на месте которого Вы хотите получить ноль; а строку, в которой хотите получить ноль, умножьте на коэффициент при x_1 в первой строке;

2) сложите соответствующие элементы умноженной первой строки и умноженной другой строки.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 5 & -3 & 1 & \vdots & 3\\ 7 & 2 & -3 & \vdots & 6\end{bmatrix}\begin{matrix}(-5)(-7)\\ +\\ \\ \end{matrix}\ (3)\ \sim\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\end{bmatrix}\sim$$

Далее нужно получить нули во втором столбце ниже главной диагонали.

Рабочая строка вторая. Получаем нули во втором столбце ниже элемента *a*$_{22}$.

Умножим третью строку на (–14) и сложим с соответствующими элементами второй строки. (Или можно было поменять местами вторую и третью строки, чтобы на главной диагонали оказалась единица (см. (∗))).

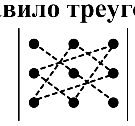
$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ +(-14)\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & -57 & \vdots & -57\end{bmatrix};$$

$$\left(\sim\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\end{bmatrix}\ (-14)\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \vdots & 2\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & -57 & \vdots & -57\end{bmatrix}\right)\ (*)\qquad Rang\ A=3$$

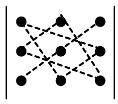
З а м е ч а н и е. Полученная в скобках матрица (∗) также эквивалентна исходной матрице A, то есть имеет тот же ранг, а системы уравнений, соответствующие этим матрицам, имеют одинаковые решения.

Вычисление определителей

Правило треугольников для вычисления определителей третьего порядка:



+

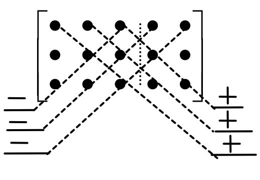


–

+ – произведения элементов берутся с тем же знаком,
— – произведения элементов берутся с противоположным знаком.

Таблица Саррюса для вычисления определителей третьего порядка:

1 2 3 1 2 — столбцы.



Правило разложения определителя по элементам какой-либо его строки или столбца с использованием понятия минора и алгебраического дополнения

Определение минора M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка.	**Минором** M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется определитель *(n*–1*)*-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием элементов *i*-й строки и *j*-го столбца.

Определение алгебраического дополнения A_{ij} **элемента** a_{ij} **определителя *n*-го порядка**.	**Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{(i+j)}$: $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$

В соответствии со свойствами определитель порядка n может быть представлен в виде разложения этого определителя по элементам *i*-й строки:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = = a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}\,.$$

То есть ***определитель квадратной матрицы A порядка n равен сумме произведений элементов какой-либо i-й его строки на алгебраические дополнения этих элементов.***

Аналогичным образом можно разложить этот же определитель по элементам любого его столбца.

Так для определителя третьего порядка формула разложения определителя по элементам второго столбца получится следующей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})\,.$$

Определители второго порядка получаются, если вычеркнуть в определителе третьего порядка второй столбец и, соответственно, первую, потом вторую, потом третью строки.

Действия над матрицами

Определение суммы двух матриц.	Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ с одинаковым количеством m строк и n столбцов называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.)$. Обозначение: $C = A + B$.

$$Если\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, то \qquad C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & -1+4 \\ -2-5 & -3+0 \\ 5+1 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение произведения матрицы на число.	Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица, у которой **каждый** элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ: $\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}),\ \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{pmatrix}$.

Определение произведения матрицы-строки на матрицу-столбец.	Произведением матрицы-строки, имеющей n столбцов, на матрицу-столбец, имеющий столько же строк, **называется матрица, состоящая из одного элемента,** который равен сумме произведений соответствующих элементов перемножаемых матриц: $A_{1\times n} \cdot B_{n\times 1} = C_{1\times 1}$,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot(-4) + 4\cdot 3) = (16).$$

$$\lambda A = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 & -1\cdot 0 & -1\cdot(-1) \\ -1\cdot 3 & -1\cdot 1 & -1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства матриц и определителей

Действие	**Матрица** $A_{m\times n}$ (**таблица** из m строк и n столбцов)	**Определитель** Δ **порядка** n (**число** для матрицы $A_{n\times n}$)
Транспонирование	$Rang(A) = Rang(A^T)$	Δ не изменяется
Перестановка двух строк	Ранг не изменяется	Δ меняет знак
Умножение одной строки на число $\lambda \neq 0$	Ранг не изменяется	Δ изменяется в λ раз (Δ умножается на число λ)
Умножение всех строк на число λ	A изменяется в λ раз (A умножается на число λ)	Δ изменяется в λ^n раз (Δ умножается на число λ^n)
Умножение одной строки на число λ и сложение с соответствующими элементами другой строки	Ранг не изменяется	Δ не изменяется
Получение нулевых и пропорциональных строк	Ранг не изменяется при вычёркивании всех нулевых и пропорциональных строк, кроме одной из ненулевых	$\Delta = 0$

Условие существования произведения двух матриц. Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в тех случаях, **когда число <u>столбцов</u> матрицы** A **равно числу <u>строк</u> матрицы** B**,** то есть $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$. При этом матрица-произведение имеет число строк матрицы A и число столбцов матрицы B.

Определение перестановочных матриц. Квадратные матрицы, **произведение которых коммутативно:** $AB = BA$, называются перестановочными.

Определение произведения матриц. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$, имеющей m строк и n столбцов, на матрицу $B = (b_{ij})$, имеющую n строк и p столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$, имеющая m строк и p столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B,

то есть $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, p. \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц обозначается $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$.

Замечание. Правило умножения матриц можно легко запомнить, если сформулировать его в следующем виде: элемент c_{ij} матрицы C, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, есть скалярное произведение i-й вектор – строки матрицы A и j-го вектор – столбца матрицы B.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot7+2\cdot8+3\cdot9 & 0\cdot10+2\cdot11+3\cdot12 & 0\cdot13+2\cdot14+3\cdot15 \\ 4\cdot7+5\cdot8+6\cdot9 & 4\cdot10+5\cdot11+6\cdot12 & 4\cdot13+5\cdot14+6\cdot15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 58 & 73 \\ 122 & 167 & 212 \end{pmatrix}.$$

Определение единичной матрицы. Квадратная матрица, **на главной диагонали которой все элементы равны единице, а все остальные элементы нули,** называется единичной матрицей и обозначается буквой E.

Определение обратной матрицы.	Обратной для матрицы A называется такая матрица A^{-1}, что их произведение равно единичной матрице: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.
Теорема существования обратной матрицы.	Для любой квадратной матрицы A, определитель которой не равен нулю $(\det A \neq 0)$, существует единственная обратная матрица A^{-1}.
Определение невырожденной и вырожденной матриц.	Матрица, определитель которой **не равен нулю**, называется **невырожденной.** Матрица, определитель которой **равен нулю**, называется **вырожденной.**

Чтобы найти обратную для A матрицу A^{-1}, можно действовать следующим образом:

1. Вычислить определитель матрицы A $(\det A \neq 0)$.
   Если $\det A = 0$, то матрица A не имеет обратной A^{-1}.
2. Составить союзную матрицу из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A: (A_{ij}).
3. Транспонировать союзную матрицу, то есть заменить строки на столбцы с такими же номерами: $(A_{ij})^T$.
4. Разделить транспонированную союзную матрицу на определитель матрицы A: $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^T}{\det A} = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$.

Например.

1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$. 2. $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Вспомните, что $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. $(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-2) + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot(-2) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Определение линейной зависимости (независимости) системы	Система строк (столбцов, векторов, решений) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется **линейно зависимой**, если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, когда **не все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ – нули, и называется **линейно независимой**, если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, когда **все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ – нули.

Исследование и решение произвольной системы линейных уравнений

Определение базисного минора и базисных неизвестных.	Любой, **не равный нулю** минор, имеющий **порядок ранга** основной и расширенной матриц системы, называется базисным минором, а неизвестные, коэффициенты при которых **вошли** в базисный минор – базисными неизвестными**.**
Определение свободных неизвестных.	Неизвестные, коэффициенты при которых **не вошли** в базисный минор, называются свободными.
Определение СОЛУ.	Система линейных уравнений называется **однородной**, если **свободные члены** во всех уравнениях этой системы равны **нулю**. *AX = 0* – матричная запись СОЛУ.

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, поскольку имеет так называемое тривиальное решение, когда все неизвестные равны нулю: $X = 0$, $\Rightarrow$ $A \cdot 0 = 0$. Ранги основной и расширенной матриц системы однородных линейных уравнений всегда равны, так как вычеркивание нулевого столбца свободных членов не изменяет ранга матрицы, поэтому **по теореме Кронекера-Капели** СОЛУ всегда совместна.

Определение ФСЧР СОЛУ.	**Фундаментальной системой частных решений** системы однородных линейных уравнений называется **система линейно независимых частных решений**, число решений в которой равно числу свободных неизвестных системы.

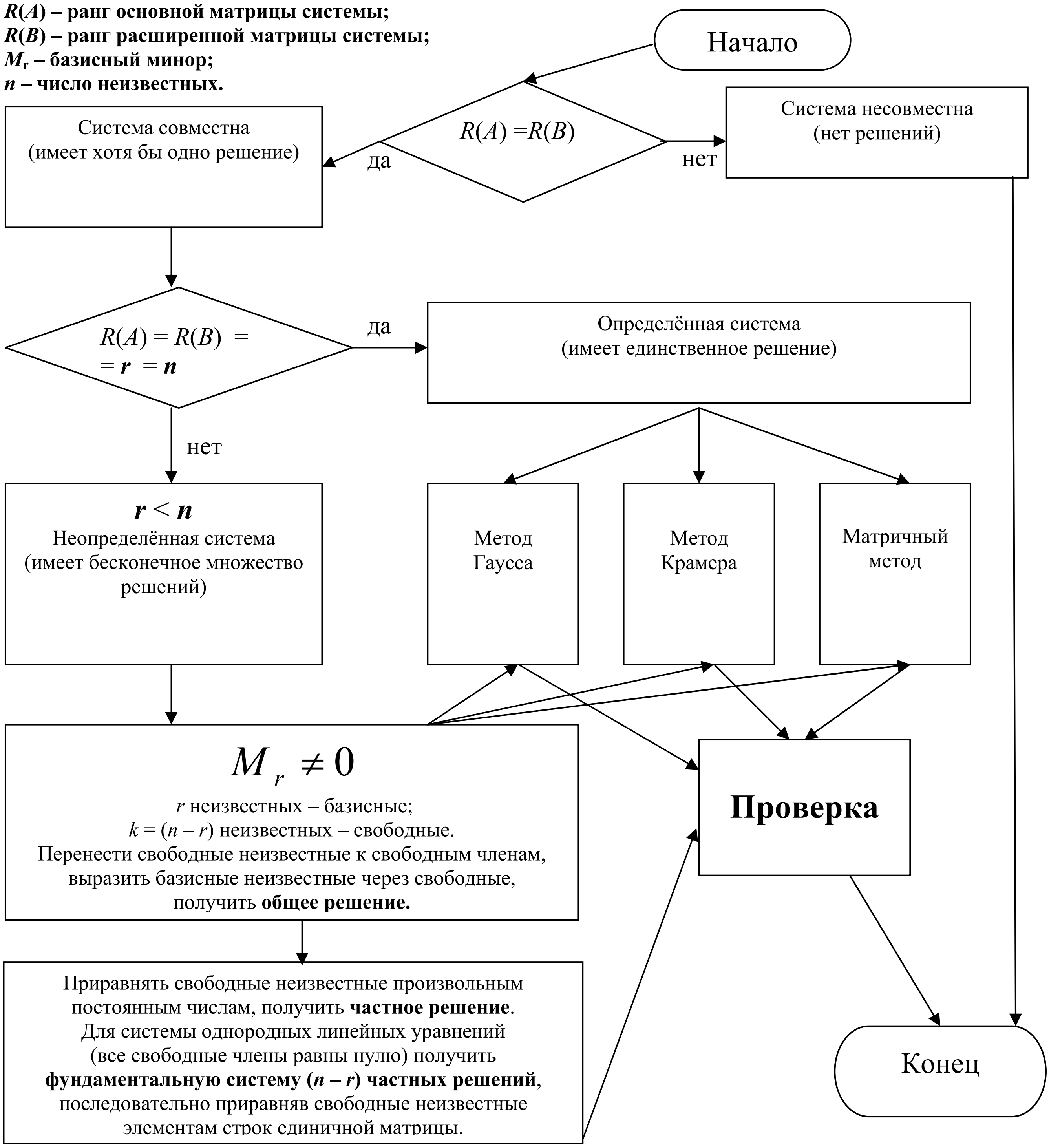
Если n – число неизвестных системы, r – её ранг, то ФСЧР СОЛУ должна содержать $k = n - r$ линейно независимых частных решений.

Фундаментальную систему частных решений получают обычно, последовательно приравнивая свободные неизвестные элементам строк единичной матрицы E порядка $k = n - r$.

Замечание. ФСЧР СОЛУ можно получить также, приравнивая свободные неизвестные элементам строк произвольной квадратной матрицы A порядка $k = n - r$, если $\det A \neq 0$.

Схема исследования и решения произвольной системы линейных уравнений

***R*(*A*) – ранг основной матрицы системы;**
***R*(*B*) – ранг расширенной матрицы системы;**
M_r – базисный минор;
***n* – число неизвестных.**



ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Координаты вектора $\overline{AB}$ находят, вычитая из координат точки $B(b_x, b_y, b_z)$, являющейся концом вектора, соответствующие координаты точки $A(a_x, a_y, a_z)$, являющейся началом вектора.

$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z) = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}$.

Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению длин этих векторов: $\cos\left(\overline{AB}, \wedge \overline{CD}\right) = \dfrac{\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{CD}\right|}$.

Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном (декартовом) базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов: если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $(a,b) = (b,a) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Длина вектора $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$ в ортонормированном базисе равна корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора. Например, если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. $np_{\bar{b}}\overline{a} = \dfrac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|}$ – **проекция вектора** $\overline{a}$ **на вектор** $\overline{b}$.

В ортонормированном базисе векторное произведение находят, раскладывая определитель, в первой строке которого – орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат, во второй строке – координаты левого из перемножаемых векторов, а в третьей строке – координаты правого из перемножаемых векторов.

Например, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда векторное произведение этих векторов в декартовой системе координат можно найти так:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения

$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = -\left[\overline{b}, \overline{a}\right]$; $\mathrm{mod}\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\overline{a} \wedge \overline{b})$;

тройка $\overline{a}, \overline{b}, \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ *– правая.*

Геометрический смысл векторного произведения.	**Модуль** векторного произведения численно равен **площади параллелограмма,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Половина модуля** векторного произведения численно равна **площади треугольника,** построенного на перемножаемых векторах как на двух смежных сторонах этого треугольника. Обычно векторы приводят к общему началу.
Определение и условие компланарности векторов.	Векторы, лежащие **в одной или параллельных плоскостях**, называются компланарными. **Смешанное** произведение ненулевых **компланарных** векторов равно **нулю**.

Смешанное произведение трех векторов получают**,** умножая векторное произведение двух векторов на третий вектор скалярно.

В ортонормированном базисе смешанное произведение равно определителю, строками или столбцами которого являются координаты перемножаемых векторов. Обычно первой строкой определителя записывают координаты первого вектора, второй строкой – координаты второго вектора, а третьей строкой – координаты третьего вектора, если считать векторы слева направо.

Полезно помнить такие **свойства** смешанного произведения: 1) **при перестановке** двух любых **соседних** векторов смешанное произведение **меняет знак** на противоположный; 2) **при циклической** перестановке (последний вектор ставится впереди первого) смешанное произведение **не изменяется**, поскольку при этом два раза переставляются соседние векторы.

Геометрический смысл смешанного произведения.	**Модуль** смешанного произведения трех векторов равен **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах как на ребрах. Обычно векторы приводят к общему началу. **Объём пирамиды**, построенной на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен одной шестой объёма параллелепипеда, построенного на этих же векторах как на ребрах
Деление отрезка в отношении λ.	$\lambda = \pm\dfrac{\left\lvert\overline{AK}\right\rvert}{\left\lvert\overline{KB}\right\rvert}$**:** $x_K = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; y_K = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; z_K = \dfrac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$**.**

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Точка $A(x_A, y_A, z_A)$, **точка** $B(x_B, y_B, z_B)$

Вектор $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Условие **ортогональности** векторов $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ $(\overline{a} \perp \overline{b}) : (\overline{a}, \overline{b}) = 0$

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ **– ЧИСЛО** $(\overline{a}, \overline{b})$**:**

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$;
2. $(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \overline{c}) = \alpha(\overline{a}, \overline{c}) + \beta(\overline{b}, \overline{c})$;
3. $(\overline{a}, \overline{a}) \geq 0$;
4. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0, (\overline{a} = \overline{0} \cup \overline{b} = \overline{0})$.

1. **Длина** вектора $\overline{a}$ **:** $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$;

2. **Проекция** вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ **:**
$$np_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|};$$

3. **Угол** между векторами $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ **:**
$$\cos\left(\overline{a}, \wedge \overline{b}\right) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

В ортонормированном базисе (**ДСК**):

$(\overline{a}, \overline{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,

если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

Условие **коллинеарности** векторов $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ $(\overline{a} \,||\, \overline{b}, \quad \overline{a} = \lambda\overline{b})$**:**
$$[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$$

Векторное произведение векторов $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ **– ВЕКТОР** $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$**:**

1. $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$;
2. $\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a}, \wedge \overline{b})$;
3. **Тройка** векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ **– правая.**

Свойства:

1. $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$;
2. $[\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \overline{c}] = \alpha[\overline{a}, \overline{c}] + \beta[\overline{b}, \overline{c}]$.

В ортонормированном базисе (**ДСК**):
$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$.

Условие **компланарности** векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} : (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$

Смешанное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ **– ЧИСЛО** $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$**:**

$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) =$
$= ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$

Свойства:

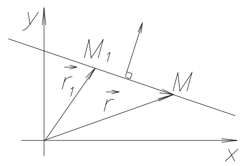
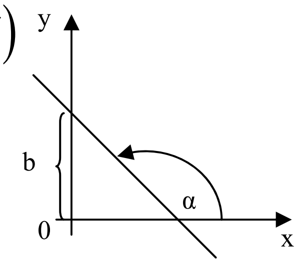
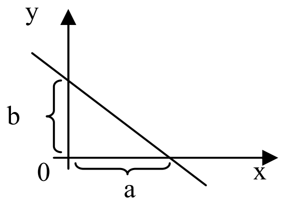
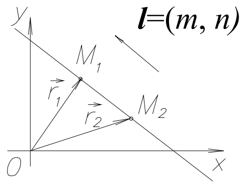
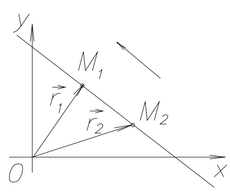
1. Циклическая перестановка векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a})$;

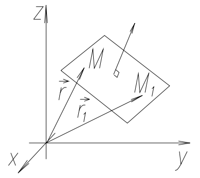
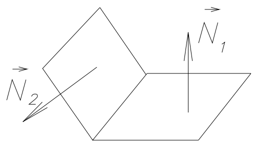
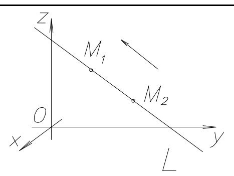
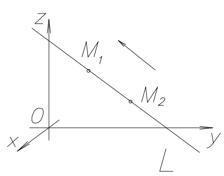
2. Перестановка двух любых соседних векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c})$.

В ортонормированном базисе (**ДСК**):
$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ТАБЛИЦАХ

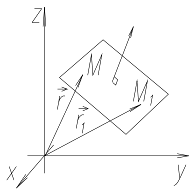
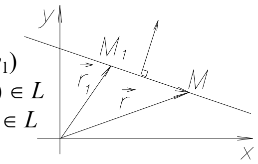
ТАБЛИЦА 1

№	Уравнения прямой L на плоскости (в R_2)	Рисунки, пояснения
1	$\underline{A(x\text{-}x_1)+B(y\text{-}y_1) = 0}$ Уравнение прямой L, **проходящей через точку $M_1(x_1,y_1) \in L$, перпендикулярно вектору $N = (A,B)$**	$\mathbf{N} = (A,B)$ $\mathbf{r} = (x, y)$ $\mathbf{r_1} = (x_1, ,y_1)$ $M_1(x_1, ,y_1) \in L$ $\forall M(x, y) \in L$ 
2	$\underline{Ax + By + D = 0}$ **Общее** уравнение прямой L	$D = - Ax_1 - By_1$; $M_1(x_1, y_1) \in L$; $\mathbf{N}=(A,B)\perp L$
3	$\underline{y = kx+b}$ Уравнение прямой L **с угловым коэффициентом**	$k = y' = -\dfrac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha \;, \alpha = \left(\widehat{\bar{l},\bar{i}}\right)$ $b = -\dfrac{D}{B}$ $\alpha \geq 0$ 
4	$\underline{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ Уравнение прямой L **в отрезках**	$y=0 \Rightarrow x=a$ $x=0 \Rightarrow y=b$ $a = -\dfrac{D}{A}$; $b = -\dfrac{D}{B}$ 
5	$\underline{\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n}}$ Уравнение прямой L **каноническое**	$\mathbf{l}=(m, n)$ $\mathbf{l}=(m, n) \parallel L$ $M_1(x_1, y_1)\in L$ $\forall M(x, y)\in L$ 
6	$\underline{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$ Уравнение прямой L, **проходящей через две данные точки M_1 и M_2**	$\mathbf{l}=(m, n) \parallel L$ $M_1(x_1, ,y_1)\in L$ $M_2(x_2, y_2)\in L$ $\forall M(x, y)\in L$ $m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1$ 
7	$\underline{\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt. \end{cases}}$ Уравнение прямой L **параметрическое**	$\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = t,\quad \forall t\in R_1$ – параметр

№	Уравнения плоскости *P*	Рисунки, пояснения
1	$\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$ Уравнение плоскости *P* , **проходящей через данную точку M_1,** **перпендикулярно данному вектору $N=(A,B,C)$**	$\mathbf{N}=(A, B\ C)$  $\mathbf{r}=(x, y, z)$ $\mathbf{r_1}=(x_1, ,y_1, z_1)$ $M_1(x_1, ,y_1, z_1)\in P$ $\forall M(x, y, z)\in P$
2	$\underline{Ax+By+Cz+D=0}$ **Общее** уравнение плоскости *P*	$D=-Ax_1-By_1-Cz_1$
3	$\underline{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$ Уравнение плоскости *P* **в отрезках**	$y=0,\ z=0 \Rightarrow x=a$ $x=0,\ z=0 \Rightarrow y=b$ $x=0,\ y=0 \Rightarrow z=c$
4	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ Уравнение плоскости *P* , **проходящей через три данные точки**	$M_1(x_1, y_1, z,_1)\in P$, $\mathbf{M_1M}\in P$ $M_2(x_2, y_2, z_2)\in P$, $\mathbf{M_2M_1}\in P$ $M_3(x_3, y_3, z_3)\in P$, $\mathbf{M_3M_1}\in P$ $\forall M(x, y, \mathrm{z})\in P$
	Уравнения прямой *L* в трехмерном пространстве (R_3)	**Рисунки, пояснения**
1	$\begin{cases}\mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0}\\ \mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.}\end{cases}$ **Общее** уравнение прямой *L*	$\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ $\mathbf{N_1} \not\parallel \mathbf{N_2}$ $L=\{P_1\cap P_2\}$ $\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m ,n, p)=[\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}]$ 
2	$\underline{\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}}$ Уравнения прямой *L* **канонические**	$\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in L$ $\forall \mathrm{M}(x, y, z)\in L$ 
3	$\underline{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$ Уравнения прямой *L*, **проходящей через две данные точки M_1 и M_2**	$\mathbf{l} \parallel L$, $\mathbf{l}=(m, n, p)$, $\mathbf{l}t=\mathbf{M_1M_2}$ $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$, $p=z_2-z_1$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in L$ $M_2(x_2, y_2, z_2)\in L$ $\forall \mathrm{M}(x, y, z)\in L$ 
4	$\underline{\begin{cases} x=x_1+mt, \\ y=y_1+nt, \\ z=z_1+pt \end{cases}}$ **Параметрические уравнения** прямой *L*	$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=t,$ $\forall t\in R_1$

Уравнения плоскости P в трехмерном пространстве R_3 и уравнения прямой L в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 3

Уравнения плоскости P в R_3 в координатной форме	Векторная форма уравнений P, L в R_3 и R_2	Уравнения прямой L в R_2 в координатной форме
I R_3	**Уравнения P и L, проходящих через данную точку M_1 перпендикулярно данному вектору N**	R_2 I
$\mathbf{N}=(A,B,C)$  $\mathbf{r}=(x, y, z)$ $\mathbf{r_1}=(x_1, y_1, z_1)$ $M_1(x_1, y_1, z_1)\in P$ $\forall M(x, y, z)\in P$ $\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$	$\mathbf{r}-\mathbf{r_1}=\mathbf{M_1M}$ $\mathbf{M_1M}\perp \mathbf{N}(P)$ $\mathbf{M_1M}\perp \mathbf{N}(L)$ $\underline{(\mathbf{r}-\mathbf{r_1},\mathbf{N})=0}$ $\underline{(\mathbf{M_1M},\mathbf{N})=0}$ Условие ортогональности векторов	$\mathbf{N}=(A,B)$ $\mathbf{r}=(x, y)$ $\mathbf{r_1}=(x_1, y_1)$ $M_1(x_1, y_1)\in L$ $\forall M(x, y)\in L$  $\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)=0}$
II R_3	**Общие уравнения**	R_2 II
$\underline{Ax+By+Cz+D=0}$ $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$	$\underline{(\mathbf{r},\mathbf{N})+D=0}$ $D=-(\mathbf{r_1},\mathbf{N})$	$\underline{Ax+By+D=0}$ $D=-Ax_1-By_1$
III R_3	**Через n фиксированных точек M**	R_2 III
n = 3 $M_1(x_1,y_1,z_1)\in P$, $\mathbf{M_1M}\in P$ $M_2(x_2,y_2,z_2)\in P$, $\mathbf{M_2M_1}\in P$ $M_3(x_3,y_3,z_3)\in P$, $\mathbf{M_3M_1}\in P$ $\forall M(x,y,z)\in P$ $\underline{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$	$M_1\in P, L$ $M_2\in P, L$ $\forall M\in P, L$ $M_3\in P$	n = 2 $M_1(x_1,y_1)\in L$, $M_2(x_2, y_2)\in L$ $\forall M(x, y)\in L$ $\mathbf{M_1M}\parallel\mathbf{M_2M_1}$ $\underline{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix}=\bar{0}}$
$A=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ $B=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ $C=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$ (1. I.)	$(\mathbf{M_1M},\mathbf{M_1M_2},\mathbf{M_1M_3})=0$ Условие компланарности векторов $[\mathbf{M_1M},\mathbf{M_1M_2}]=\mathbf{0}$ Условие коллинеарности векторов	$A=y_2-y_1$; $B=-(x_2-x_1)$, $\Leftrightarrow$ $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ (1. I.)
IV R_3	**Уравнения в отрезках**	R_2 IV
$\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$ $y=0,\ z=0\Rightarrow x=a$ $x=0,\ z=0\Rightarrow y=b$ $x=0,\ y=0\Rightarrow z=c$	$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{i}/a+\mathbf{j}/b+\mathbf{k}/c$ $(\mathbf{r},\boldsymbol{\tau})=1$ $\boldsymbol{\tau}=(1/a,\ 1/b,\ 1/c)$ $\lvert\mathbf{r}\rvert\cos(\mathbf{r},\boldsymbol{\tau})=1/\lvert\boldsymbol{\tau}\rvert$	$\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$ $y=0\Rightarrow x=a$ $x=0\Rightarrow y=b$

Уравнения прямой L в трехмерном пространстве R_3 и в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 4

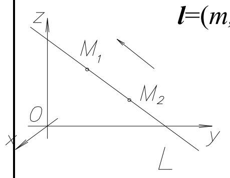
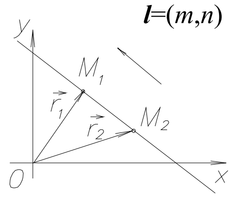
Уравнения прямой L в R_3 в координатной форме	Векторная форма уравнений прямой L в R_2 и R_3	Уравнения прямой L в R_2 в координатной форме
I	**Канонические уравнения прямой L**	I
$\mathbf{l}=(m,n,p)$  $\mathbf{l}=(m,n,p)\,\vert\vert\,L$ $M_1(x_1,y_1,z_1)\in L$ $M_2(x_2,y_2,z_2)\in L$ $\forall M(x,y,z)\in L$ $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$	$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M}\,\vert\vert\,\mathbf{l}$ $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M_2}\,\vert\vert\,\mathbf{l}$ $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{l}]=0$ $[\mathbf{M_1M},\ \mathbf{l}]=0$	$\mathbf{l}=(m,n)$  $\mathbf{l}=(m,n)\,\vert\vert\,L$ $M_1(x_1,y_1)\in L$ $M_2(x_2,y_2)\in L$ $\forall M(x,y)\in L$ $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$
II	**Параметрические уравнения прямой L**	II
$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}=t,\quad \forall t\in R_1$ $\begin{cases} x=x_1+mt, \\ y=y_1+nt, \\ z=z_1+pt \end{cases}$	$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\,\vert\vert\,\mathbf{l},\ \forall t\in R_1$ $\mathbf{M_1M}\,\vert\vert\,\mathbf{l}$ $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\mathbf{M_1M}=t\mathbf{l}$ $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{l}$ $\underline{[\mathbf{M_1M},\ t\mathbf{l}]=0}$	$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=t,\quad \forall t\in R_1$ $\begin{cases} x=x_1+mt, \\ y=y_1+nt. \end{cases}$
III	**Уравнения прямой L, проходящей через две данные точки M_1 и M_2**	III
$\mathbf{l}\,\vert\vert\,L$, $\mathbf{l}=(m,n,p)$, $t\mathbf{l}=\mathbf{M_1M_2}$ $m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1,\ p=z_2-z_1$ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	$\mathbf{M_1M}\,\vert\vert\,\mathbf{M_1M_2}\,\vert\vert\,\mathbf{l}$ $M_1\in L,\ M_2\in L,\ \forall M\in L$ $[\mathbf{M_1M},\mathbf{M_1M_2}]=0$	$\mathbf{l}\,\vert\vert\,L$, $\mathbf{l}=(m,n)$, $t\mathbf{l}=\mathbf{M_1M_2}$ $m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1$ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$
IV **Общие уравнения прямой L в R_3** $(P_1\cap P_2)$		**Уравнение прямой L с угловым коэффициентом k в R_2** V
$\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)\quad \mathbf{N_1}\not\parallel\mathbf{N_2}$ $L=\{P_1\cap P_2\}$ $\begin{cases} \mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0}, \\ \mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0}. \end{cases}$ $\mathbf{N_1}\not\parallel\mathbf{N_2}\Leftrightarrow P_1\cap P_2\Leftrightarrow \quad Rang\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}=2.$		$Ax+By+D=0,\ B\neq 0$ $\Downarrow$ $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{D}{B}$ $\underline{\boldsymbol{y=kx+b}}\quad \mathrm{k}=\mathrm{y}'=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\mathrm{tg}\,\alpha\ ,\ \alpha=\left(\widehat{\bar{l},\bar{i}}\right)$ $b=-\dfrac{D}{B}\qquad \alpha\geq 0$

ТАБЛИЦА 4*а* (продолжение таблицы 4)

<table>
<tr><th>Связь между уравнениями прямой L в R_3</th><th>Связь между уравнениями прямой L в R_2</th></tr>
<tr><td>

Общие (2.IV)

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow z_0=0$

$\begin{cases} A_1x+B_1y+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+D_2=0 \end{cases} \Rightarrow M_0(x_0,y_0,0)\in L$

или $\begin{vmatrix} A_1 & C_1\\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow M_1(x_1,0,z_1)\in L$

или $\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow x_2=0 \Rightarrow M_2(0,y_2,z_2)\in L$

$\left.\begin{matrix} \mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1),\\ \mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{l}=[\mathbf{N_1},\mathbf{N_2}]=(m,n,p)$

$t=\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{0-z_0}{p}$ – **канонические** (2.I)

-

$\begin{cases} x\text{-}x_0+mt,\\ y\text{-}y_0+nt,\\ z=0+pt \end{cases}$ – **параметрические** (2.II)

$\Downarrow$

$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{0-z_0}{z_1-z_0}$ – **через две точки** $M_0\in L$, $M_1\in L$ (2.III)

$\begin{cases} (x-x_0)(y_1-y_0)=(y-y_0)(x_1-x_0),\\ (y-y_0)(z_1-z_0)=(0-z_0)(y_1-y_0) \end{cases}$ –

общие (2.IV)

</td><td>

С угловым коэффициентом: (2.V)

$y=kx+b$ $\qquad \vec{N}=(k,-1)$,

$\Downarrow$

$\begin{cases} x=x_1,\ y=kx_1+b=y_1 \Rightarrow M_1(x_1,y_1)\in L,\\ x=x_2,\ y=kx_2+b=y_2 \Rightarrow M_2(x_2,y_2)\in L. \end{cases}$

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ **через точки** $M_1\in L$ **и** $M_2\in L$

(1.III) (2.III)

$\begin{cases} x_2-x_1=m,\\ y_2-y_1=n \end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$

– **канонические** (2.I)

$\Downarrow$

$\begin{cases} n(x-x_1)=m(y-y_1)\\ n(x-x_1)-m(y-y_1)=0,\\ n=A;\ -m=B; \end{cases}$

$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \qquad M_1(x_1,y_1)\in L$

$\mathbf{N}=(A,B)\perp L$ (1.I)

$\Downarrow$

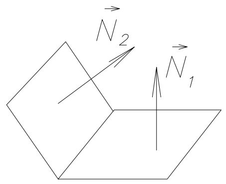
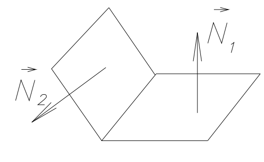
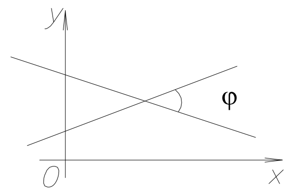
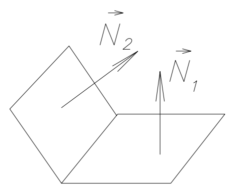
$-Ax_1-By_1=D$

$Ax+By+D=0$ – **общее** (1.II)

</td></tr>
</table>

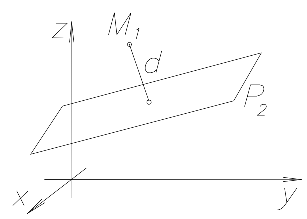
Взаимное расположение плоскостей *P* в трёхмерном пространстве R_3
и прямых *L* в двухмерном пространстве R_2

ТАБЛИЦА 5

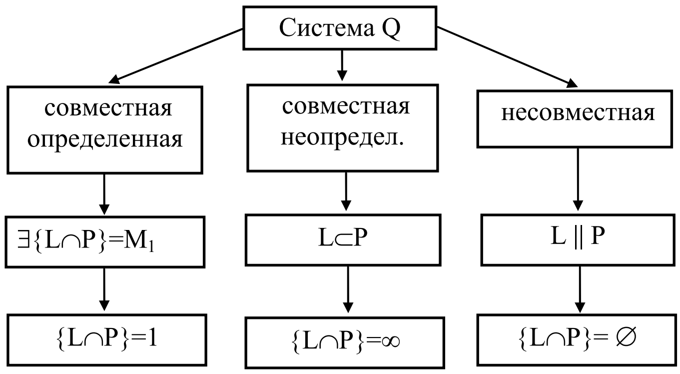
I Обозначения, принятые в таблице 2, {P1,P2} в R_3	I	Обозначения, принятые в таблице 2, {L1,L2} в R_2 I
$\left.\begin{array}{l} P1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ P2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\}\Psi$ $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ $\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}=\mathrm{Rang}A(\psi)$ $\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix}=\mathrm{Rang}B(\psi)$ 	R_3 $\quad cos\ \varphi=\dfrac{(\vec{N}_1,\vec{N}_2)}{\lvert\vec{N}_1\rvert\lvert\vec{N}_2\rvert}$  $\mathbf{N_1}=(A_1, B_1, C_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2, B_2, C_2)$ R_2  $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1)$ $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2)$	а) $\left.\begin{array}{l} L1: A_1x+B_1y+D_1=0, \\ L2: A_2x+B_2y+D_2=0 \end{array}\right\}\chi$ $\mathbf{N_1}=(A_1,B_1)$; $\mathbf{N_2}=(A_2,B_2)$ $\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}=\mathrm{Rang}A(\chi)$ $\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{bmatrix}=\mathrm{Rang}B(\chi)$ б)$L1$: $y=k_1x+b_1$ $L2$: $y=k_2x+b_2$ $tg\varphi=\left\lvert\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert$ $\Downarrow$ $k_1=tg\ \alpha_1$; $k_2=tg\ \alpha_2$ $tg\varphi=\mathrm{tg}\ (\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1}{1+\mathrm{tg}\alpha_1\mathrm{tg}\alpha_2}$,
II	**Признаки взаимного расположения плоскостей {P1, P2} и прямых {L1, L2}**	II
Плоскости {*P*1, *P*2} в R_n;n=3	Как расположены *P* и *L*	Прямые {*L*1, *L*2} в R_n; n=2
$P1\cap P2$ **(пересекаются)** $cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\neq\pm1$ $P1\perp P2\Leftrightarrow \mathbf{N_1}\perp\mathbf{N_2}\Leftrightarrow cos\varphi=0$ $\{P1\cap P2\}=L,\ L\in P1,\ L\in P2$ $Rang\ A(\psi)=$ $=Rang\ B(\psi)=2<3=n$ совместная неопределенная система (ψ)	$\underbrace{P1\cap P2, L1\cap L2}$ $\mathbf{N_1}\nparallel\mathbf{N_2}$ $\varphi\neq\pi k$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ $cos\ \varphi\neq\pm1$ 	$L1\cap L2$ **(пересекаются)** а) $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\neq\pm1$ $L1\perp L2\Leftrightarrow \mathbf{N}_1\perp\mathbf{N}_2\Leftrightarrow cos\varphi=0$ б) $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\neq0$ $1+k_1k_2\neq0$ $L1\perp L2\Leftrightarrow 1+k_1k_2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k_2=-1/k_1$ $\{L1\cap L2\}=M,\ M\in L1,\ M\in L2$ $Rang\ A(\chi)=$ $=Rang\ B(\chi)=2=n$ совместная определенная система (χ)
$P1\,\vert\vert\,P2$ **(параллельны)** $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ $cos\varphi=\pm1$	$\underbrace{P1\parallel P2, L1\parallel L2}$ $\mathbf{N_1}=\lambda\mathbf{N_2}$; $D_1\neq\lambda D_2$ $\lambda\in R_1$ $1=Rang\ A(\psi,\chi)<$ $<Rang\ B(\psi,\chi)=\ 2$ системы (ψ),(χ) несовместны	$L1\,\vert\vert\,L2$ **(параллельны)** *а)* $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ $cos\varphi=\pm1$ *б)* $k_1=k_2$; $b_1\neq b_2$ $tg\varphi=0$
$P1\equiv P2$ **(совпадают)** $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\lambda\in R_1$ $cos\varphi=\pm1$	$\underbrace{P1\equiv P2, L1\equiv L2}$ $\mathbf{N_1}=\lambda\mathbf{N_2}$; $D_1=\lambda D_2$; $\lambda\in R_1$ $Rang\ A(\psi,\chi)=$ $=Rang\ B(\psi,\chi)=1$ совместные неопределенные системы (ψ), (χ)	$L1\equiv L2$ **(совпадают)** *а)* $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\lambda\in R_1$ $cos\varphi=\pm1$ *б)* $k_1=k_2$, $b_1=b_2$ $tg\varphi=0$

Расстояния *d(P1,P2)* между плоскостями *P1* и *P2* и *d(L1,L2)* между прямыми *L1* и *L2* в R_3, пересечение $\{P \cap L\}$ плоскости *P* и прямой *L* в R_3

ТАБЛИЦА 6

I **P1 ‖ P2, L1 ‖ L2 в R_3** **координатная форма**	**P1 ‖ P2, L1 ‖ L2, $\bar N_1 \parallel \bar N_2, \bar l_1 \parallel \bar l_2$** **векторная форма**	**L1 ‖ L2 в R_2** **координатная форма** II
P1: $Ax+By+Cz+D_1=0$ P2: $\underbrace{Ax+By+Cz+D_2=0}$, $D_1 \neq D_2$ $\bar N_1 = \bar N_2 = \bar N = (A,B,C) \perp P1, P2$ $\Leftarrow$ $d(P1,P2) = d(M_1,P2) = d(M_2,P1) = \dfrac{\lvert A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ $M_1(x_1,y_1,z_1) \in P1, M_2(x_2,y_2,z_2) \in P2$	$\bar N = (A,B,C)$ $\bar l = (m,n,p)$ $d(P1,P2) = d(M_1,P2) =$ $d(M_2,P1) = d(L1,L2) =$ $= d(M_1,L2) = d(M_2,L1) =$ $= \left\lvert np_{\bar N}\, \overline{M_1M_2} \right\rvert = \dfrac{\lvert(\overline{M_1M_2}, \bar N)\rvert}{\lvert \bar N \rvert}$	L1: $Ax+By+D_1=0$ L2: $\underbrace{Ax+By+D_2=0}$ $\bar N_1 = \bar N_2 = \bar N = (A,B) \perp L1, L2$ $\Rightarrow$ $d(L1,L2) = d(M_1,L2) = d(M_2,L1) = \dfrac{\lvert A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $M_1(x_1,y_1) \in L1, M_2(x_2,y_2) \in L2$
$L1: \dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{p}$ $\bar l_1 = \bar l_2 = \bar l = (m,n,p)$ $M_1(x_1,y_1,z_1) \in L1$ $L2: \dfrac{x-x_2}{m} = \dfrac{y-y_2}{n} = \dfrac{z-z_2}{p}$ $M_2(x_2,y_2,x_2) \in L2$ $d(L1,L2) = d(M_1,L2) = d(M_2,L1) =$ $= \dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ $\Leftarrow$	 $d(L1,L2) = d(M_1,L2) = d(M_2,L1)$ $= h_{\Delta M_1M_2, \bar l} = \dfrac{\lvert[\overline{M_1M_2}, \bar l]\rvert}{\lvert \bar l \rvert}$ *h* – высота треугольника	$L1: \dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n}$ $L2: \dfrac{x-x_2}{m} = \dfrac{y-y_2}{n}$ $\bar l_1 = \bar l_2 = \bar l = (m,n,0)$ $M_1(x_1,y_1) \in L1$ $M_2(x_2,y_2) \in L2$ $\Rightarrow$ $d(L1,L2) = d(M_1,L2) = d(M_2,L1) =$ $= \dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ m & n & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2}}$

III **Прямые *L1* и *L2* скрещиваются в R_3** **P1 ‖ P2 (L1⊂P1, L2⊂P2)**	**Прямая *L* и плоскость *P* пересекаются в R_3** **$\{P \cap L\} = M_1$** IV
$L1: \underbrace{\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}}$ $L1 \parallel \bar l_1 = (m_1,n_1,p_1), M_1(x_1,y_1,z_1) \in L1$ $L2: \underbrace{\dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}}$ $L2 \parallel \bar l_2 = (m_2,n_2,p_2), M_2(x_2,y_2,z_2) \in L2$ $d(L1, L2) = d(M_1, L2) = d(M_2, L1) = h_{\Pi(\overline{M_1M_2}, \bar l_1 \bar l_2)} =$ $= \dfrac{V_{\Pi(\overline{M_1M_2}, \bar l_1 \bar l_2)}}{S_{Д\, \bar l_1, \bar l_2}} = \dfrac{\lvert(M_1M_2, \bar l_1, \bar l_2)\rvert}{\lvert[\bar l_1, \bar l_2]\rvert} =$ $= \dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}} \neq 0$ ($d(L1,L2)=0 \Leftrightarrow L1 \cap L2$); $\Pi(\boldsymbol{M_1M_2}, \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2})$ –параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{M_1M_2}$, $\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}$, *h* – его высота	$P: \underbrace{Ax+Bx+Cz+D=0}$ $P \perp \bar N = (A,B,C) \perp P$ $L: \underbrace{\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}}$ $L \parallel \bar l = (m,n,p)$ $M_0(x_0,y_0,z_0) \in L$ $\cos(\bar N, \bar l) = \cos(\dfrac{p}{2} - \varphi) = \sin\varphi$ $\sin\varphi = \cos(\bar N, \bar l) = \dfrac{(\bar N, \bar l)}{\lvert \bar N \rvert \lvert \bar l \rvert} =$ $= \dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \neq \pm 1$ $\left.\begin{matrix} \sin\varphi = \pm 1 \\ \cos\varphi = 0 \\ (\bar N, \bar l) = 0 \end{matrix}\right\} (P \parallel L) \cup (L \subset P)$ $\sin\varphi = 0 \Leftrightarrow L \perp P, \boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{N}$

VI **Векторная запись условий ортогональности (*P*⊥*L*), коллинеарности (*P*‖*L*) плоскости *P* и прямой *L* в R_3, пересечения *P* и *L* (*P*∩*L*).**	**$\{P\cap L\}=M_1(x_1,y_1,z_1)$ – координаты точки пересечения плоскости *P* и прямой *L* в R_3** V
$1. L \perp P \Leftrightarrow [\bar{l}, \overline{N}] = \vec{0}$ $2. L \parallel P \Leftrightarrow (\bar{l}, \overline{N}) = 0$ $3. L \cap P \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} L: \bar{r} = r_0 + t\bar{l}\ (2.II) \\ P: (\bar{r}, \overline{N}) + D = 0 (1.II) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow (\bar{r}_0 + t\bar{l}, \overline{N}) + D = 0,$ $t = -\frac{(\bar{r}_0, \overline{N}) + D}{(\bar{l}, \overline{N})} = t_1 \Leftrightarrow M_1(t_1) = \{L \cap P\}$	$\left.\begin{array}{l} P: Ax + By + Cz + D = 0 \\ L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \end{array}\right\} Q; \quad \begin{array}{l} P \perp \overline{N} = (A, B, C) \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in L \\ L \parallel \bar{l} = (m, n, p) \end{array}$ $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Rightarrow t = t_1$ (2.II) $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_0 + t_1 m \\ y_1 = y_0 + t_1 n \\ z_1 = z_0 + t_1 p \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} M_1(x_1, y_1, z_1) \in L, \\ M_1(x_1, y_1, z_1) \in P \end{array}$ 

κ-мерная плоскость P_κ в точечно-векторном евклидовом n-мерном пространстве R_n

ТАБЛИЦА 7

<table>
<tr><td colspan="2">$\kappa = n - r$, $Rang\ A = r$</td></tr>
<tr><td>$AX=B$
$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}; A=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}..a_{1n} \\ a_{21}a_{22}..a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}..a_{mn} \end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = b_2, \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\ldots,\ m$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="6">Система m линейных уравнений с n неизвестными</td></tr>
<tr><td colspan="2">$r = 1$
гиперплоскость
$\kappa = n-1$</td><td>$\kappa = 1$
прямая в R_{r+1}
$n - r = 1$</td><td colspan="2">к-мерная плоскость $P_{\kappa 0}$ в R_n, проходящая через начало координат B=0 (СОЛУ) – система однородных линейных уравнений</td><td>Общее решение произвольной системы линейных уравнений $B\neq 0$ (ОРСЛУ)</td></tr>
<tr><td>матричная форма</td><td>координатная форма</td><td></td><td>матричная форма</td><td>координатная форма</td><td></td></tr>
<tr><td>$A=[a_1a_2...a_n],$
$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}; B=[b]$
$AX=B$</td><td>$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots +$
$+ a_nx_n = b$</td><td>$A=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1r}a_{1r+1} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2r}a_{2r+1} \\ .... \\ a_{r1}a_{r2}\ldots a_{rr}a_{rr+1} \end{bmatrix};$</td><td>$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_{m\times n}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1\,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1\,n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2\,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2\,n}x_n \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .. \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r\,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{r\,n}x_n \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Плоскость в R_3
n=3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$A=[a_1a_2a_3],$
$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$
$B=[b]$
$AX=B$</td><td>$a_1x_1 + a_2x_2 + +a_3x_3 = b$
$\bar{N} = (a_1, a_2, a_3)$
$\frac{x}{\left(b/a_1\right)} + \frac{y}{\left(b/a_2\right)} + \frac{z}{\left(b/a_3\right)} = 1$
Уравнение плоскости в отрезках;</td><td>$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_r \\ x_{r+1} \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_r \end{bmatrix}$
$Rang\ A = r = n-1$
$n = r + 1$
$AX=B$</td><td>AX=0
$rang\ A=r$,
$x_1,x_2,..,x_r$ – базисные неизвестные. Число базисных неизвестных равно r.</td><td>$x_{r+1}, x_{r+2},..,x_n$ – свободные неизвестные
Число свободных неизвестных равно $k=n-r$</td><td>Отбросить строки, не вошедшие в базисный минор, перенести свободные неизвестные в правые части уравнений, а дальше следует применить метод Гаусса, Крамера или матричный.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td colspan="2">Прямая в R_3
$n=3,\ r=2,\ к=1$</td>
<td colspan="2">Фундаментальная система частных решений СОЛУ (ФСЧР)</td>
<td>Частное решение произвольной СЛУ (ЧРСЛУ)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">матричная форма $\boxed{\text{Общие уравнения}}$ координатная форма</td>
<td colspan="2">Свободным неизвестным придать последовательно значения строк единичной матрицы Е</td>
<td>$x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix};\ AX = B$</td>
<td>$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$
$\overline{N}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$
$\overline{N}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$
$\bar{l} = [\overline{N}_1, \overline{N}_2],\ l \parallel L$</td>
<td colspan="2">$X_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ . \\ . \\ C_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix};\ X_2 = \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ . \\ . \\ C_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots,\ X_k = \begin{bmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \\ . \\ . \\ .C_{rk} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$
$AX_1 = 0 \quad AX_2 = 0 \qquad AX_к = 0, \quad k=n-r.$</td>
<td>$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ . \\ . \\ C_r \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$
$AC=B$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Прямая в R_2 $n = 2,\ r = 1,\ k = 1$</td>
<td colspan="2">Общее решение системы однородных линейных уравнений $AX_0=0$</td>
<td rowspan="2">О. Р. произвольной системы линейных уравнений (ОРСЛУ) $AX=B$</td>
</tr>
<tr>
<td>матричная форма</td>
<td>координатная форма</td>
<td>матричная форма</td>
<td>координатная форма</td>
</tr>
<tr>
<td>$A=[a_1a_2];X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};\ AX=B$
$B=[b]$</td>
<td>$a_1x_1 + a_2x_2 = b$
$\overline{N} = (a_1, a_2);\overline{N} \parallel L$
$\dfrac{x_1}{\left(b/a_1\right)} + \dfrac{x_2}{\left(b/a_2\right)} = 1$
Уравнение прямых в отрезках</td>
<td>$X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ . \\ x_{n0} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ \dot{C}_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ \dot{C}_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_k \begin{bmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \\ \dot{C}_{rk} \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} =$
$=\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \ldots + \alpha_kX_k$</td>
<td>$x_{10} = \alpha_1C_{11} + \alpha_2C_{12} + \ldots + \alpha_kC_{1k}$
$x_{20} = \alpha_1C_{21} + \alpha_2C_{22} + \ldots + \alpha_kC_{2k}$
……
$x_{r0} = \alpha_1C_{r1} + \alpha_2C_{r2} + \ldots + \alpha_kC_{rk}$

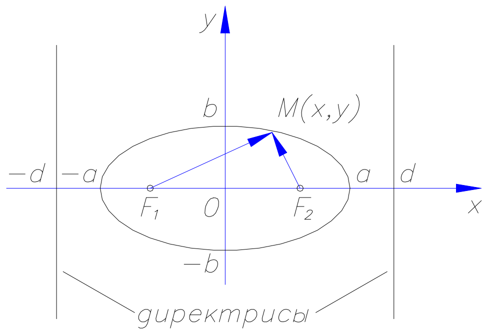
$x_{r+10} = \alpha_1$
$x_{r+20} = \alpha_2$
$x_{n0} = \alpha_k, n = r + k$</td>
<td>$\leftarrow X_0 + \overset{\uparrow}{C} = X$

$AX=A(X_0+C)=$
$=AX_0+AC=O+B=B$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td colspan="2">Прямая в $R_n=R_{r+1}$ $\qquad n = r+1,\ k = 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>координатная форма</td>
<td>матричная форма</td>
</tr>
<tr>
<td>$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1C_{11} + C_1 \\ x_2 &= \alpha_1C_{21} + C_2 \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_1C_{n1} + C_n \end{aligned}\right\}$ параметрические
уравнения,
α_1 – параметр, свободная неизвестная</td>
<td>$X_0 = \text{б}_1X_1$
$X = X_0 + C = \text{б}_1 \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\alpha_1 = \dfrac{x_1 - C_1}{C_{11}} = \dfrac{x_2 - C_2}{C_{21}} = \ldots = \dfrac{x_{r+1} - C_{r+1}}{C_{r+1,1}}$ – канонические уравнения</td>
</tr>
</table>

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение эллипса.	**Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, для которых ***сумма расстояний*** от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами и равная ***2a.***



a – большая полуось эллипса;
b – малая полуось эллипса;
$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса;
$c^2 = a^2 - b^2$, c – фокусное расстояние эллипса;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$, ε – эксцентриситет эллипса;

$\vec{r_1} = \vec{F_1M}$, $\vec{r_2} = \vec{F_2M}$ – фокальные радиусы-векторы;
по определению $r_1 + r_2 = 2a$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\, d$ называются директрисами эллипса.

Каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Строят эллипс, вписывая его в прямоугольник со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром симметрии в начале координат.
Уравнение эллипса со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ центром имеет вид

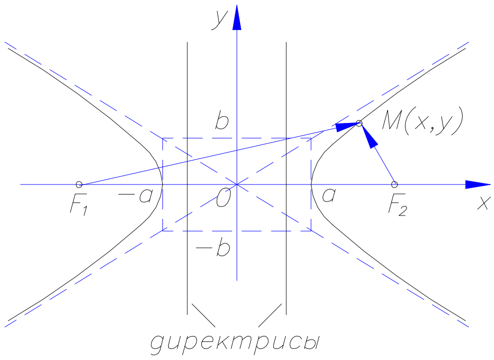
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 .$$

Чтобы привести **общее уравнение эллипса**
$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0,$ где коэффициенты a_{11} и a_{22}
должны иметь одинаковые знаки, **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

Например, приведем уравнение кривой
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$
к каноническому виду:
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.
Полученное уравнение является каноническим уравнением окружности, радиус которой равен 2, а центр находится в точке $M\,(1,-3)$.
Признак уравнения окружности:

1. коэффициенты при квадратах переменных одинаковые;
2. отсутствует произведение переменных.

Определение гиперболы.	**Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, для которых ***модуль разности расстояний*** от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и равная ***2a.***



a – действительная полуось гиперболы;

b – мнимая полуось гиперболы;

$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы гиперболы;

$c^2 = a^2 + b^2$, c – фокусное расстояние гиперболы;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$, ε – эксцентриситет гиперболы;

$\vec{r}_1 = \vec{F_1M}$, $\vec{r}_2 = \vec{F_2M}$ – фокальные радиусы-векторы;

по определению $|r_1 - r_2| = 2a$. Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами гиперболы. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Строят гиперболу, изобразив предварительно прямоугольник со сторонами длиной *2a* и *2b* и с центром симметрии в начале координат, а затем вписывают ветви гиперболы в углы между асимптотами гиперболы (прямыми, на которых лежат диагонали прямоугольника), помещая вершины гиперболы в точки с координатами *(– a, 0)*, *(a, 0)*.

Уравнение гиперболы со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0,,y_0)$ центром имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

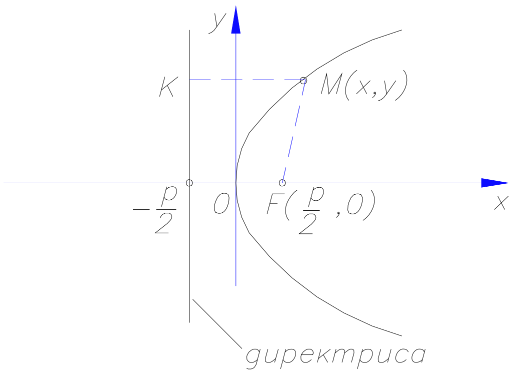
Чтобы привести **общее уравнение гиперболы**

$a_{11}x^2 + a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0,$ где коэффициенты a_{11} и a_{22} должны иметь противоположные знаки, **к каноническому виду**, нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

Гипербола, уравнение которой $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, называется **сопряженной** по отношению к гиперболе, имеющей уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы сопряженной гиперболы расположены на мнимой оси.

Определение	**Параболой** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых

параболы.	находится на ***одинаковом расстоянии*** от данной ***точки,*** называемой фокусом, и от данной ***прямой***, называемой директрисой и не проходящей через фокус.



Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Строят параболу, откладывая одинаковые отрезки от точек параболы до фокуса с координатами $F(\frac{p}{2},0)$ и до директрисы, уравнение которой $x = -\frac{p}{2}$. Вершина параболы находится в точке $O(0,0)$.

Уравнение параболы со смещенной при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ вершиной имеет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Чтобы привести **общее** уравнение параболы $a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}y + a_{00} = 0$ к **каноническому виду**, нужно ***выделить полный квадрат*** по переменной y и удвоенный параметр *p* по переменной *x*.

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$, называется **сопряженной** по отношению к параболе, имеющей уравнение $y^2 = 2px$. Фокус сопряженной параболы расположен в точке $F(0,\frac{p}{2})$, а ее директриса имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$.

Полярная система координат

Полярная система координат состоит из некоторой точки *O*, называемой **полюсом**, и исходящего из нее луча *OE*, называемого **полярной осью**. Кроме этого задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

$\rho -$ это расстояние от точки *M* до полюса *O*,

$\varphi -$ угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом *OM*.

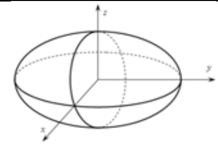
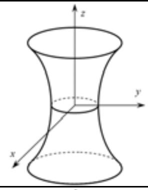
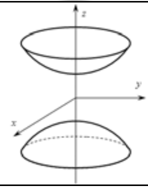
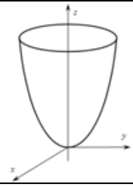
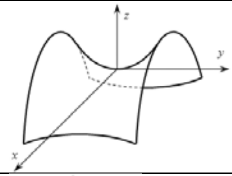
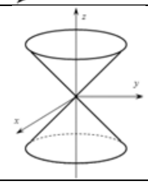
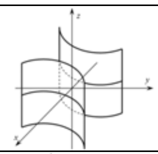
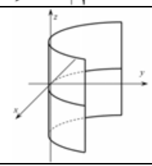
Полярные и декартовы координаты точки связаны соотношениями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Чтобы получить изображение кривой в полярной системе координат, постройте лучи, выходящие из полюса 0 под углами φ к полярной оси. На каждом луче отложите длину вычисленного Вами полярного радиуса ρ. Если $\rho -$ отрицательное число, то для построения соответствующей точки нужно отложить модуль ρ на луче, повёрнутом на 180° вокруг полярной оси, то есть отложить от полярной оси угол $(\varphi + 180^\circ)$. Соедините построенные Вами точки плавной линией.

Кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$, называют розами. Причем, если k – четное, то лепестков у розы $2k$, а если число k – нечетное, то у розы k лепестков.

Поверхности второго порядка

№	Вид поверхности второго порядка	Уравнение	Рисунок
1	*Эллипсоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$	
2	*Мнимый* эллипсоид	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=-1$	
3	*Однополостный гиперболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$	
4	*Двуполостный гиперболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$	
5	*Эллиптический параболоид*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$	
6	*Гиперболический параболоид*	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z$	
7	*Конус*	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$	
8	*Мнимый* конус	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$	
9	*Эллиптический* цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	
10	*Гиперболический* цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$	
11	*Параболический* цилиндр	$Y^2=2pX$	
12	*Мнимый* эллиптический цилиндр	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$	
13	Пара *мнимых пересекающихся* плоскостей	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$	
14	Пара *пересекающихся* плоскостей	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$	
15	Пара *параллельных* плоскостей	$X^2-a^2=0$	
16	Пара *мнимых параллельных* плоскостей	$X^2+a^2=0$	
17	Пара *совпавших* плоскостей	$X^2=0$	

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

$f(x)=\left\{\frac{0}{0}\right\},\ x\to a,\ \lvert a\rvert<\infty$			$c=\text{const}\neq 0$, $b=\text{const}\neq 0$
№ п/п	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
1	$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=$ $=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_m}.$ $P_n(a)=Q_m(a)=0$	Разделить многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ на разность $(x-a)$, сократить $f(x)$ на эту разность $(x-a)$ и подставить вместо x значение $x=a$.	$\left\{\frac{0}{c}\right\}=0;\left\{\frac{\infty}{c}\right\}=\infty;$ $\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty;\left\{\frac{c}{\infty}\right\}=0;$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{d}{b},$ $d=const;$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – повторить прием
2	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt{u_1(x)}-\sqrt{u_2(x)}$	Умножить и разделить функцию $f(x)$ на сопряженное иррациональное выражение $(\sqrt{u_1(x)}+\sqrt{u_2(x)})$, использовать формулу сокращенного умножения $(A–B)(A+B)=A^2–B^2$ и сократить $f(x)$ на разность $(x-a)$.	------ // ------
3	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt[3]{u_1(x)}-\sqrt[3]{u_2(x)}$ или $\sqrt[3]{u_1(x)}+\sqrt[3]{u_2(x)}$	Умножить и разделить разность кубических корней на неполный квадрат суммы, а сумму кубических корней – на неполный квадрат разности, воспользоваться формулами сокращенного умножения: $(A–B)(A^2+AB+B^2)=A^3–B^3$; $(A+B)(A^2–AB+B^2)=A^3+B^3$ и сократить функцию $f(x)$ на разность $(x-a)$.	$\left\{\frac{0}{c}\right\}=0;\left\{\frac{\infty}{c}\right\}=\infty;$ $\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty;\left\{\frac{c}{\infty}\right\}=0;$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{d}{b},$ $d=const;$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – повторить прием

Замечание.

При делении многочлена $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ на разность $(x - a)$ опираются на **теорему Безу**: если число $x = a$ является корнем многочлена (при $x = a$ многочлен равен нулю), то этот многочлен делится на разность $(x - a)$ без остатка.

Деление многочлена на разность $(x - a)$ осуществляется по тем же правилам, по которым делятся столбиком числа:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\, a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n & x - a \\ \cline{2-2}
\quad \underline{a_0x^n - aa_0x^{n-1}} & a_0x^{n-1} + (a_1 + aa_0)x^{n-2} + \ldots = P_{n-1}(x) \\
\_\, (a_1 + aa_0)x^{n-1} + a_2x^{n-2} & \\
\quad \underline{(a_1 + aa_0)x^{n-1} - a(a_1 + aa_0)x^{n-2}} & \\
\_\, (a_2 + a(a_1 + aa_0))x^{n-2} + a_3x^{n-3} & \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\quad \underline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Обратите внимание на то, что индекс в обозначении многочлена соответствует старшей степени x этого многочлена.

В результате деления получим представление многочлена $P_n(x)$ в виде произведения многочлена $P_{n-1}(x)$ на разность $(x-a)$:

$$P_n(x) = (x - a)\, P_{n-1}(x).$$

Предел дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m}, \qquad x \to \infty$$

1) $m > n \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;

2) $n = m \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$;

3) $n > m \geq 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Более того, если функция $f(x)$ представляет собой отношение линейных комбинаций степенных функций, показатели которых неотрицательны (то есть m и n не обязательно целые, но обязательно неотрицательные), то при $x \to \infty$ можно оставить в числителе и в знаменателе только **слагаемые наибольших степеней *x*,** а остальными пренебречь. Предел функции при $x \to \infty$ из-за отбрасывания слагаемых, содержащих меньшие степени x (в том числе и $x^0 = 1$), не изменяется, то есть

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n_1} + \ldots + a_kx^0}{b_0x^m + b_1x^{m_1} + \ldots + b_lx^0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m},$$

где $n > n_1 > n_2 > \ldots \geq 0, \quad m > m_1 > m_2 > \ldots \geq 0$ (слагаемые записываются в порядке убывания степеней x).

Предел функции $f(x) = \dfrac{a_0x^n}{b_0x^m}$ при $x \to \infty$

1) $n > m \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n}{b_0x^m} = \infty$;

2) $n = m \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n}{b_0x^m} = \dfrac{a_0}{b_0}$;

3) $m > n \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n}{b_0x^m} = 0$.

Пусть $f(x) = q^x$, $\quad q = \mathrm{const}$.

Предел этой функции, если

1) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = 0$;

2) $q = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = 1$;

3) $1 < q < \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x = \infty$;

4) $-\infty < q \le -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x -$ не существует.

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции (б. м. ф.) при $x \to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$, тогда:

1) $\alpha(x)$ – б. м. ф. **более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = o\ (\beta(x));$$

2) $\alpha(x)$ – б. м. ф. **более низкого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty \Leftrightarrow \beta(x) = o\ (\alpha(x));$$

3) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б. м. ф. **одинакового порядка** малости при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \ne 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = c\ (\beta(x));$$

4) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б. м. ф., **эквивалентные** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Leftrightarrow \alpha(x)\sim\beta(x);$$

5) $\alpha(x)$ – б. м. ф. ***k*-го порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c \ne 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = c\ (\beta^k(x)).$$

Теорема о первом замечательном пределе.

Предел функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ существует и равен единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Теорема о втором замечательном пределе.

Предел функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, если $x \to 0$, и функции $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, если $x \to \infty$, существует и равен числу $e \approx 2{,}718281828459045\ldots$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

Применение первого и второго замечательных пределов позволяет доказать справедливость формул в **таблице эквивалентных** бесконечно малых функций при $x \to a$.

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$			
1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6а	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$
4	$arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7а	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
5	$1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu} - 1 \sim \mu\alpha(x)$

Замечание. В случаях, когда аргумент $\alpha(x)$ функции в вычисляемом пределе стремится не к нулю, а к отличному от нуля числу, например, $\alpha(x) \to a$, $a \neq 0$, вводят новую переменную $t = \alpha(x) - a$.

Тогда, если $\alpha(x) \to a$, то $t \to 0$ (функция $t(x)$ должна быть непрерывной функцией в окрестности точки $t = 0$).

Новая переменная $t \to 0$ (при $\alpha(x) \to a$), и для нее легко можно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Например, вычислим предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln(\operatorname{tg} x)} = \left\{ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\ln 1} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left| x - \frac{\pi}{4} = t \Leftrightarrow x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \to 0 \right| =$$

Предварительно сделаем следующие преобразования:

$$\cos x = \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \cos t \cos\frac{\pi}{4} - \sin t \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t);$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 - \operatorname{tg} t} = \frac{1 - \operatorname{tg} t + 2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = 1 + \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t};$$

$$\frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0$$

и воспользуемся результатами преобразований:

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)}{\ln(1 + \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t})} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin t}{2\frac{\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\, t}{2\frac{t}{1 - t}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бесконечно большие функции (б. б. ф.), так же как и бесконечно малые, можно сравнивать между собой.

Если предел отношения двух бесконечно больших функций равен:

1. Бесконечности, тогда в числителе – б. б. ф. более высокого порядка роста;
2. Нулю, тогда в числителе – б. б. ф. более низкого порядка роста;
3. Постоянному числу, не равному нулю или единице, тогда эти бесконечно большие функции одинакового порядка роста;
4. Единице, тогда бесконечно большие функции эквивалентны.

Полезно иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа б. б. ф. складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $x \to \infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(x) = a^x$; степенная функция $f(x) = x^n$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:

$$\log_a x << x^n << a^x, \quad \text{при } x \to \infty .$$

Очень эффективным при вычислении пределов оказывается применение следующих **правил**:

1. Предел отношения б. м. ф. (б. б. ф.) не изменится, если заменить эти функции эквивалентными.

2. Разность эквивалентных б. м. ф. (б. б. ф.) есть б. м. ф. (б. б. ф.) более высокого порядка малости (роста) по сравнению с уменьшаемой и вычитаемой б. м. ф. (б. б. ф.).

3. Сумма конечного числа б. м. (б. б.) слагаемых разного порядка малости (роста) эквивалентна слагаемому самого низкого (высокого) порядка малости (роста).

4. Если б. м. ф. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ при $x \to a$, $A = \mathrm{const} \neq 0$, то $A + \alpha(x) \sim A + \alpha_1(x)$ при $x \to a$.

Например. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{2x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Чтобы вычислить **предел** $\lim\limits_{x\to a} u^v$,

можно воспользоваться основным логарифмическим тождеством

$$u^v = e^{v \ln u}.$$

Например. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x} = \lim\limits_{x\to 0} (1+5x)^{\frac{1}{x}} \left\{1^\infty\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{x}} = e^5$.

Если же $u \to 1, v \to \infty$, то есть в случае неопределенность вида $\left\{1^\infty\right\}$,

можно применить следующую последовательность тождественных преобразований:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a} (1+(u-1))^v = \lim_{x\to a} (1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}\cdot(u-1)\cdot v} = e^{\lim\limits_{x\to a} (u-1)\cdot v}.$$

Например. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x = \left\{1^\infty\right\} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \left(\dfrac{x+3}{x-2} - 1\right)\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5}{x-2}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x}{x}} = e^5$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(const)' = 0;$

степенные функции

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2a. $(x)' = 1;$

2b. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u';$

2c. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$

2e. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u';$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

3a. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

логарифмические функции

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$

4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

$(\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \quad \ln a^n = n \ln a)$

тригонометрические функции

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

7. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

8. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

обратные тригонометрические функции

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

12. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

гиперболические функции

13. $(sh\, u)' = ch\, u \cdot u';$

14. $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u';$

15. $(th\, u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u';$

16. $(cth\, u)' = -\frac{1}{sh^2\, u} \cdot u';$

показательно – степенные функции

17. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$

модуль функции

18. $|u|' = \operatorname{sgn} u \cdot u'$, $(|u| = \operatorname{sgn} u \cdot u)$,

где $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$ – функция знак u

(сигнум u).

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot u';$

1a. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u';$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v';$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2};$

5. сложная функция

$(F(u(x)))' = F'_u \cdot u'_x;$

6. параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};\; y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

7. ***неявно заданная функция*** $y = y(x)$ уравнением $F(x, y) = 0; \Rightarrow$ чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0,$ считая y функцией от x и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

8. ***логарифмическое дифференцирование***

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x);$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'.$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ ($u = u(x)$)

1. $\int 0\,du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$

($\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}$)

показательные функции

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c;$

4a. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + c;$

6. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c;$

7. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + c;$

8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c;$

тригонометрические функции

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + c;$

10. $\int \cos u\, du = \sin u + c;$

11. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c;$

12. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + c;$

гиперболические функции

13. $\int sh\, u\, du = ch\, u + c;$

14. $\int ch\, u\, du = sh\, u + c;$

15. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th\, u + c;$

16. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + c;$

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

Непосредственное интегрирование

$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u'};$

$u = ax + b \Rightarrow dx = \dfrac{d(ax+b)}{a};$

$\int \dfrac{1}{(ax+b)^m} dx = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{1-m}}{1-m} + c;$

$\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c;$

$u = (ax^3 + b) \Rightarrow dx = \dfrac{d(ax^3+b)}{3ax^2}$

$\int x^2 cos(ax^3 + b)\, dx = \dfrac{1}{3a} \sin(ax^3 + b) + c;$

$u = mx \Rightarrow dx = \dfrac{d(mx)}{m}$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - (mx)^2}} = \dfrac{1}{m} \arcsin \dfrac{mx}{a} + c;$

основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx;$

2. $\int \alpha udx = \alpha \int udx;$

3. $d\int u(x)dx = u(x)dx;$

4. $\int du = u + c;$

замена переменной

$u = u(t) \Leftrightarrow du = u'_t dt;$

$\int f(u)du = \int f(u(t))u'_t dt;$

интегрирование по частям

$\int udv = uv - \int vdu.$

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Теоремы Роля, Лагранжа, Коши

Теорема	Если	то
Ролля	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$; 2. *дифференцируема на интервале* (a, b); 3. *принимает равные значения на концах отрезка, то есть* $f(a) = f(b)$,	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $f'(\xi) = 0$
Лагранжа	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$; 2. *дифференцируема на интервале* (a, b),	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$
Коши	$f(x)$ *и* $g(x)$: 1. *непрерывны на отрезке* $[a, b]$; 2. *дифференцируемы на интервале* (a, b); 3. $g'(x) \neq 0$ *во всех точках интервала* (a, b),	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

№ п/п	Вид неопределенности	Преобразования	Результат преобразований (c, d – const $\neq 0$)
1	$\{0 \cdot \infty\}$	$f(x)\cdot h(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}} = \dfrac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}}$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ – применить правило Лопиталя
2	$\{\infty - \infty\}$	2.1. Дроби привести к общему знаменателю; 2.2. Умножить и разделить разность функций на сопряженное выражение, если это разность квадратных корней; 2.3. Умножить и разделить разность функций на неполный квадрат суммы этих функций, если это разность корней кубических; 2.4. $f(x) - h(x) = \dfrac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot h(x)}}$	$\left\{\frac{c}{0}\right\} = \infty$; $\left\{\frac{c}{\infty}\right\} = 0$; $\left\{\frac{0}{c}\right\} = 0$; $\left\{\frac{\infty}{c}\right\} = \infty$; $\left\{\frac{c}{d}\right\} = A$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ – применить правило Лопиталя
3	$\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$.	3.1. $y = u^v \Rightarrow \ln y = v\ln u$; $\lim\limits_{x\to a}\ln y = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} y = e^A$. 3.2. $y = u^v = e^{v\cdot\ln u}$	См. выше

Исследования функции без применения производных

№ п/п	Цель исследования	Действия	Вывод
1	Найти область определения функции	Найти точки, в которых функция не определена или не задана (точки разрыва графика функции)	Исключить найденные точки из области определения функции
2	Найти вертикальные асимптоты	Вычислить односторонние пределы функции в точках разрыва и в точках, «подозрительных» на разрыв для кусочно-аналитической функции	Если хотя бы один из односторонних пределов в исследуемой точке равен бесконечности, то график функции имеет вертикальную асимптоту: $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty \Rightarrow x=a$ – вертикальная асимптота
3	Исследовать функцию на четность и нечетность	Если $f(-x)=f(x)$, то функция четная. Если $f(-x)=-f(x)$, то функция нечетная	Ограничиться исследованием функции на интервале $(0,\infty)$. График четной функции симметричен относительно оси *OY*, график нечетной функции симметричен относительно начала координат
4	Исследовать функцию на периодичность	*T* – период функции – (наименьшее из всех возможных значений, удовлетворяющих уравнению: $f(x+T)=f(x)$	Ограничиться исследованием на интервале, по длине равном периоду *T*, за пределы интервала продолжить график функции периодическим образом
5	Найти точки пересечения с осями координат	Решив уравнение $y=f(x)=0$, найти $x_0: f(x_0)=0$. Найти $y(0)=y_0$	Точка пересечения графика с осью *OX*: $(x_0,0)$. Точка пересечения графика с осью *OY*: $(0,y_0)$
6	Найти наклонные, в частности, горизонтальные асимптоты	Вычислить пределы $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$	Если *k* и *b* – конечные числа, то уравнение наклонных асимптот $y=kx+b$, причем, при $\kappa=0$ асимптота горизонтальная $y=b$

Исследования функции с применением производных

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Цель исследования</th><th>Действия и вывод</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Найти интервалы монотонности и точки локальных экстремумов функции</td><td>
1.1.1. Найти критические точки первого порядка $x_i, i = 1,2,...,n$:
$y^{/}(x_i) = 0$ или $y^{/}(x_i) = \infty$, или $y^{/}(x_i)$ – не существует
(необходимое условие существования экстремума функции в точке);

1.2.1. Применить первое достаточное условие существования экстремума функции в критической точке:
<table>
<tr><td>x</td><td>$x < x_1$</td><td>x_1</td><td>$x > x_x$</td></tr>
<tr><td>$y^{/}$</td><td>—</td><td>Критическая точка первого порядка</td><td>+</td></tr>
<tr><td>у</td><td>Функция убывает</td><td>$(x_1, y(x_1))$ – точка минимума</td><td>Функция возрастает</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>$x < x_2$</td><td>x_2</td><td>$x > x_2$</td></tr>
<tr><td>$y^{/}$</td><td>+</td><td>Критическая точка первого порядка</td><td>—</td></tr>
<tr><td>y</td><td>Функция возрастает</td><td>$(x_2, y(x_2))$ – точка максимума</td><td>Функция убывает</td></tr>
</table>
1.2.2. Если x_3 и x_4 – стационарные точки (все производные до (2к–1) порядка равны нулю), можно применить второе достаточное условие существования экстремума функции в точке:
$y^{(2k)}(x_3) > 0 \Rightarrow (x_3, y(x_3))$ – точка локального минимума;
$y^{(2k)}(x_4) < 0 \Rightarrow (x_4, y(x_4))$ – точка локального максимума;
$y^{(2k)}(x_5) = 0,\ y^{(2k+1)} \neq 0$ – в точке $(x_5, y(x_5))$ экстремума нет.
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба</td><td>
2.1. Найти критические точки второго порядка $x_j, j = 1,2,...,m$:
$y^{//}(x_j) = 0$ или $y^{//}(x_j) = \infty$, или $y^{//}(x_j)$ – не существует
(необходимое условие существования точки перегиба графика);
2.2. Применить достаточные условия выпуклости и вогнутости графика и существования точек перегиба:
<table>
<tr><td>x</td><td>$x < x_6$</td><td>x_6</td><td>$x > x_6$</td></tr>
<tr><td>$y^{//}$</td><td>+</td><td>Критическая точка второго порядка, точка непрерывности</td><td>—</td></tr>
<tr><td>y</td><td>График функции вогнутый</td><td>$(x_6, y(x_6))$ – точка перегиба</td><td>График функции выпуклый</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Метод непосредственного интегрирования

$$\boxed{du = u_x^{/} dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u_x^{/}}}$$

$$u = ax+b \Rightarrow dx = \frac{d(ax+b)}{a} \Rightarrow \quad \underline{\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \int \frac{d(ax+b)}{a\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\cdot\sqrt{ax+b}+c;}$$

$$u = (-ax^2+b) \Rightarrow dx = \frac{d(-ax^2+b)}{-2ax} \Rightarrow \underline{\int e^{-ax^2+b} x\,dx = \int \frac{e^{-ax^2+b} x d(-ax^2+b)}{-2ax} = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2+b} + c;}$$

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{d(\sin x)}{\cos x} \Rightarrow \underline{\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - a^2} = \int \frac{\cos x\, d(\sin x)}{(\sin^2 x - a^2)\cos x} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sin x - a}{\sin x + a}\right| + c;}$$

$$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m} \Rightarrow \underline{\int \sin mx dx = \int \frac{\sin mx\, d(mx)}{m} = -\frac{1}{m}\cos mx + c;}$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du;$$

№ п/п	Интеграл	Разбиение подынтегральн ого выражения на части	du	v	Результат применения метода
1	$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx,$ $\int P_n(x)a^{\alpha x}dx,$ $\int P_n(x)\sin mx dx,$ $\int P_n(x)\cos mx dx.$	$u = P_n(x)$ $dv = \left\{\begin{matrix} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\} dx$	$P_{n-1}(x)dx$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a},$ $-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют ***n* раз**, пока степень многочлена не понизится до нулевой
2	$\int P_n(x)\ln x dx,$ $\int P_n(x)\arcsin x dx, \int P_n(x)\arccos x dx,$ $\int P_n(x) arctgx dx, \int P_n(x) arcctgx dx.$	$u = \left\{\begin{matrix} \ln x \\ \ldots \\ arcctgx \end{matrix}\right\},$ $dv = P_n(x)dx$	$\frac{dx}{x},$ .... $-\frac{dx}{1+x^2}$	$P_{n+1}(x)$	Получают интеграл от функций степеней x
3	Циклические интегралы: $\int e^{\alpha x}\sin mx dx, \int e^{\alpha x}\cos mx dx$	$u = e^{\alpha x},$ $dv = \left\{\begin{matrix} \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\} dx$ $\left(\begin{matrix} или\ u = \left\{\begin{matrix} \sin mx \\ \cos mx \end{matrix}\right\}, \\ dv = e^{\alpha x}dx \end{matrix} \right)$	$\alpha e^{\alpha x}dx$	$-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют **2 раза**, получая уравнение относительно искомого интеграла

План интегрирования рациональных дробей

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx .$$

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + b_m.$$

I. $n \geq m$ – дробь неправильная; $n < m$ – дробь правильная (степень $P_n(x)$ меньше)

$\Downarrow$ (степень n $P_n(x)$ больше или равна степени m $Q_m(x)$)

$$\begin{array}{l|l} P_n(x) & Q_m(x) \\ \hline \ldots\ldots & \text{целая часть} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \textit{целая часть} + \frac{\textit{остаток}}{Q_m(x)}$$

$r_s(x)$ – остаток ($s<m$)

$\Downarrow$

$\frac{r_s(x)}{Q_m(x)}$ – прав. дробь.

II. Знаменатель $Q_m(x)$ разложить на множители линейные – $(x-a)$ и квадратичные – (x^2+px+q). Правильную дробь разложить на сумму простых дробей в зависимости от множителей знаменателя.

Вид множителя в знаменателе дроби	Сколько дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x-a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^w} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}} + \ldots + \frac{M_w x + N_w}{x^2+px+q}$

III. Найти неопределенные коэффициенты $A, M, N,$ приведя сумму дробей к общему знаменателю и **приравняв числители исходной** правильной дроби и **суммы** дробей.

IV. Проинтегрировать простые дроби:

а) дроби первого типа $\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{A}{x-a}d(x-a) = A\ln|x-a| + c;$

б) дроби второго типа $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c; (k>1)$

в) дроби третьего типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x + \frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2 \pm a^2}dt = M\int \frac{td(t^2 \pm a^2)}{(t^2 \pm a^2)2t} + (N - M\frac{p}{2})\int \frac{dt}{t^2 \pm a^2} = \ldots.$$

г) дроби четвертого типа

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^w}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x + \frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \ldots$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right)$$ – рекуррентная формула

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Подынтегральная функция</th><th>Подстановка</th><th>Вспомогательные преобразования</th><th>Итог</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x$, $\cos x$</td><td>Универсальная $t = tg\frac{x}{2}$</td><td>$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$</td><td rowspan="5">Подынтегральная функция рациональная относительно x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$R(\sin x, -\cos x) =$
$= -R(\sin x, \cos x)$
Нечётная относительно $\cos x$</td><td>$t = \sin x$</td><td>$dt = \cos x\,dx$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$R(-\sin x, \cos x) =$
$= -R(\sin x, \cos x)$
Нечётная относительно $\sin x$</td><td>$t = \cos x$</td><td>$dt = -\sin x\,dx$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">$R(-\sin x, -\cos x) =$
$= R(\sin x, \cos x)$
Чётная относительно $\cos x$ и $\sin x$</td><td>$t = tgx$</td><td>$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$</td></tr>
<tr><td>$t = ctgx$</td><td>$\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$
Степени чётные неотрицательные</td><td colspan="2">$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$</td><td>Понижение степени</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\sin mx \cos nx$

$\cos mx \cos nx$

$\sin mx \sin nx$</td><td colspan="2">$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$
$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$
$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$</td><td>Сумма функций</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="4">$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $thx = \frac{shx}{chx}$; $cthx = \frac{chx}{shx}$; $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$; $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$;
$ch^2 x - sh^2 x = 1$; $shxchx = \frac{1}{2}sh2x$; $sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2}$; $ch^2 x = \frac{ch2x + 1}{2}$
Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций</td></tr>
</table>

Интегрирование иррациональностей

	Подынтегральная функция	Подстановка	Итог
1	$R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}},...)$ R – рациональная функция, $p_1,p_2,q_1,q_2,...$ – целые числа	$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей показателей: $k=НОК(q_1,q_2,...)$	Рациональная функция t
2	$R(x,\sqrt{a^2-x^2})$	$x=a\sin t$ *или* $x=a\cos t$ $dx=a\cos tdt$ *или* $dx=-a\sin tdt$ $(a^2-x^2=a^2\cos^2 t$ *или* $a^2-x^2=a^2\sin^2 t)$	Рациональная функция $\sin t$, $\cos t$
	$R(x,\sqrt{a^2+x^2})$	$x=atgt$ *или* $x=actgt$ $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$ *или* $dx=\frac{-adt}{\sin^2 t}$ $(a^2+x^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$ *или* $a^2+x^2=\frac{a^2}{\sin^2 t})$	
	$R(x,\sqrt{x^2-a^2})$	$x=\frac{a}{\cos t}$ *или* $x=\frac{a}{\sin t}$ $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ *или* $dx=\frac{-a\cos t}{\sin^2 t}dt$ $(x^2-a^2=a^2tg^2t$ *или* $x^2-a^2=a^2ctg^2t)$	
3	Дифференциальный бином $x^m(a+bx^n)^p$ по теореме Пафнутия Львовича Чебышева интегрируется в элементарных функциях только в трёх случаях: p — целое число, m,n — дроби	$x=t^k$, $k=НОК(знаменателей\ m,n)$ $dx=kt^{k-1}dt$	Рациональная функция t
	$\frac{m+1}{n}-целое$	$a+bx^n=t^k$, $k-знаменатель\ дроби\ p$ $bnx^{n-1}dx=kt^{k-1}dt$, $x^m(a+bx^n)^p dx=x^m t^{kp}\frac{kt^{k-1}dt}{bnx^{n-1}}$	
	$\frac{m+1}{n}+p-$ $-целое$	$a+bx^n=t^k x^n$, $k-знаменатель\ дроби\ p$ $ax^{-n}+b=t^k$, $-anx^{-n-1}dx=kt^{k-1}dt$, $x^m(a+bx^n)^p dx=x^m(t^k x^n)^p\frac{kt^{k-1}dt}{-anx^{-n-1}}$, *где* $x^{-n}=\frac{t^k-b}{a}$	
4	$\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t=\frac{1}{mx+n}$	См. пункт 5
5	$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t=x+\frac{b}{2a}$, $ax^2+bx+c=at^2-\frac{b^2}{4a}+c$	Два табл-х инт-ла

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попытаться найти первообразную непосредственным интегрированием или подведением подходящей функции под знак дифференциала. Если это не удается, то
2. Определить класс подынтегральной функции (рац. дробь, тригонометрическая, иррациональная) и применить соответствующие подстановки, а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.

Несобственные интегралы (н.и.)

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>I рода
(по бесконечному промежутку)</td><td>II рода (от неограниченной
на промежутке интегрирования функции)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Определение н.и.</td><td>1</td><td>$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$</td><td>$\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$</td><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$</td><td>$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty \Rightarrow$
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>Определение сходимости н.и.</td><td colspan="3">Несобственный интеграл сходится, если существуют конечные пределы в правых частях равенств, определяющих эти интегралы.
Если эти пределы бесконечны или не существуют, то несобственный интеграл расходится.
$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} A - \text{конечное число} \Rightarrow \text{интеграл сходится;} \\ \left.\begin{matrix}\infty \\ \overline{\exists}\end{matrix}\right\} - \text{интеграл расходится.}\end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Признаки сходимости н.и.</td><td rowspan="3">1</td><td>$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a,+\infty)$</td><td>$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a,b)$
$\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$0 \le \varphi(x) \le f(x)$</td></tr>
<tr><td>Сходимость
$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \qquad \int_a^{+\infty} f(x)dx$
Расходимость</td><td>Сходимость
$\int_a^{b}\varphi(x)dx \qquad \int_a^{b} f(x)dx$
Расходимость</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>$\varphi(x) > 0, f(x) > 0, \forall x \in [a,+\infty)$</td><td>$\varphi(x), f(x)$ непрерывны $\forall x \in [a,b)$
$\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$</td></tr>
<tr><td>$\exists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A \ne 0, \quad A < \infty$</td><td>$\exists\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A \ne 0, \quad A < \infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Несобственные интегралы от функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ ведут себя одинаково:
или оба сходятся, или оба расходятся</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$
сходится $\Rightarrow$ сходится абсолютно
расходится $\Rightarrow \begin{cases}\text{сходится условно;} \\ \text{расходится.}\end{cases}$</td><td>$\int_a^{b}|f(x)|dx \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx$
сходится $\Rightarrow$ сходится абсолютно
расходится $\Rightarrow \begin{cases}\text{сходится условно;} \\ \text{расходится.}\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Эталонные н.и.</td><td colspan="2">$\int\limits_{a>0}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^k} = \begin{cases}\dfrac{a^{-k+1}}{k-1} - \text{сходится, если } k > 1, \\ +\infty - \text{расходится, если } k \le 1.\end{cases}$</td><td>$\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^k} = \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k < 1, \\ \infty - \text{расходится, если } k \ge 1.\end{cases}$
$\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k < 1, \\ \infty - \text{расходится, если } k \ge 1.\end{cases}$</td></tr>
</table>

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема. Если величина Q обладает на $[a,b]$

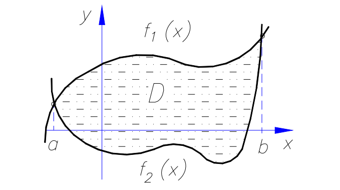
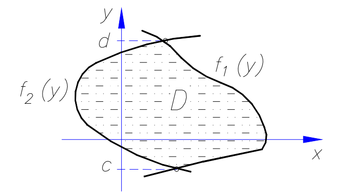
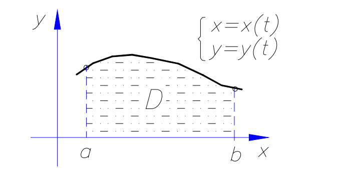
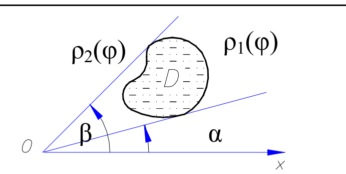
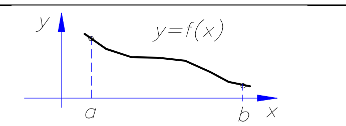
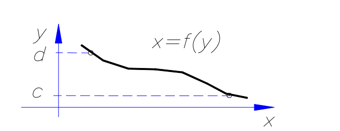
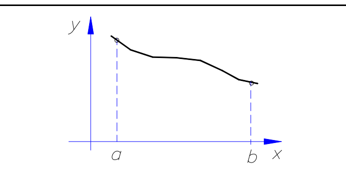
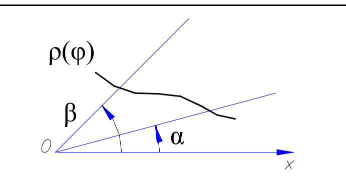
1. свойством аддитивности, а именно, если $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$,

то $Q=\Delta Q_1+\Delta Q_2+\ldots+\Delta Q_n$, где ΔQ_i – значение Q на $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots n$;

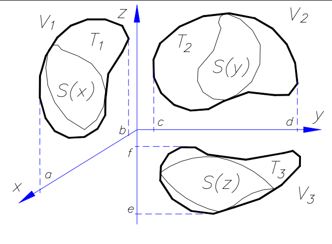
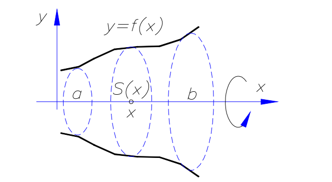
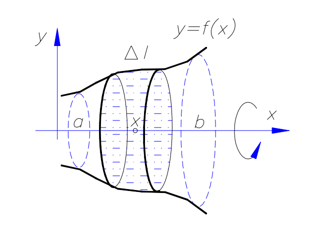
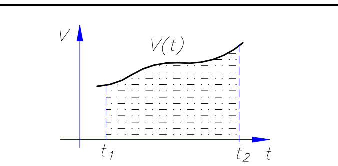
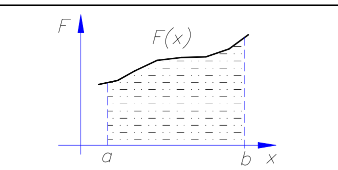
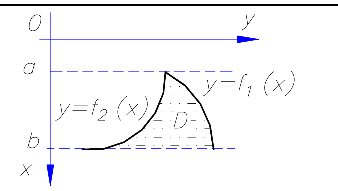
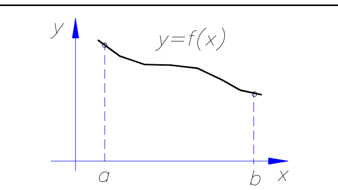
2. свойством линейности Q в малом: $\Delta Q \approx f(x)\Delta x$, где $f(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция,

то величину Q можно найти интегралом от её элемента $dQ = f(x)dx$ по промежутку $[a,b]$:

$$Q=\int_a^b f(x)dx$$

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
S, площадь плоской фигуры D	1		Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ f_2(x)\le y\le f_1(x)\end{matrix}\right\}$ Одна кривая границы области D не выше другой.	$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$	S, площадь плоской фигуры D
	2		Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ f_2(y)\le x\le f_1(y)\end{matrix}\right\}$ Одна кривая границы области D не левее другой.	$S=\int_c^d (f_1(y)-f_2(y))dy$	
	3		Д. С. К. $\alpha\le t\le\beta$ $x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$ $(\ y(t)\ge0,\ \forall t\in[\alpha,\beta]\ )$ Верхняя граница области задана параметрически	$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'_t dt$	
	4		П. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} \alpha\le\varphi\le\beta \\ \rho_2(\varphi)\le\rho\le\rho_1(\varphi)\end{matrix}\right\}$	$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(\rho_1^2(\varphi)-\rho_2^2(\varphi))d\varphi$	
l, длина кривой L	1		Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ y=f(x)\end{matrix}\right\}$	$l=\int_a^b\sqrt{1+(y'_x)^2}dx$	l, длина кривой L
	2		Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ x=f(y)\end{matrix}\right\}$	$l=\int_c^d\sqrt{1+(x'_t)^2}dy$	
	3		Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} \alpha\le t\le\beta \\ x=x(t),\ y=y(t) \\ x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b\end{matrix}\right\}$ Линия L задана параметрически	$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt$	
	4		П. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} \alpha\le\varphi\le\beta \\ \rho=\rho(\varphi)\end{matrix}\right\}$	$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi$	

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
V, объем тела T	1		Д. С. К. $T_1=\begin{Bmatrix} a\le x\le b\\ S(x)\perp 0X\end{Bmatrix}$ $T_2=\begin{Bmatrix} c\le y\le d\\ S(y)\perp 0Y\end{Bmatrix}$ $T_3=\begin{Bmatrix} e\le z\le f\\ S(z)\perp 0Z\end{Bmatrix}$	$V_1=\int_a^b S(x)dx$ $V_2=\int_a^b S(y)dy$ $V_3=\int_e^f S(z)dz$	V, объем тела T
	2		Д. С. К. $T=\begin{Bmatrix} a\le x\le b,\ y=f(x)\\ \pi y^2=S(x)\perp 0X\end{Bmatrix}$ Тело T образовано вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx$	
σ, площадь поверхн. ω	1		Д. С. К. $\omega_x=\begin{Bmatrix} a\le x\le b\\ y=f(x)\\ \Delta\sigma=2\pi\, y(x)\Delta l\end{Bmatrix}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$\sigma_x=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$	σ, площадь поверхн. ω
			Д. С. К. $\omega_x=\begin{Bmatrix} \alpha\le t\le\beta\\ y=y(t),\ x=x(t)\\ \Delta\sigma=2\pi\, y(t)\Delta l\end{Bmatrix}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x(t))$, заданной параметрически, вокруг оси $0X$	$\sigma_x=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t^{/})^2+(y_x^{/})^2}\,dt$	
S, путь	1		Д. С. К. $V=\begin{Bmatrix} t_1\le t\le t_2\\ V=V(t)\end{Bmatrix}$ V – скорость прямолинейного движения тела на промежутке времени $[t_1,t_2]$	$s=\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$	S, путь
A, работа	1		Д. С. К. $F=\begin{Bmatrix} a\le x\le b\\ F=F(x)\end{Bmatrix}$ Сила F направлена параллельно оси $0X$ на промежутке $[a,b]$	$A=\int_a^b F(x)dx$	A, работа
P, давл.	1		Д. С. К. $D=\begin{Bmatrix} a\le x\le b\\ f_2(x)\le y\le f_1(x)\\ \Delta P=gx\mu(x)(f_1(x)-f_2(x))\end{Bmatrix}$ μ – плотность жидкости, давящей на пластину D	$P=g\int_a^b x\mu(x)(f_1(x)-f_2(x))dx$	P, давл.
m, масса	1		Д. С. К. $L=\begin{Bmatrix} a\le x\le b,\ y=f(x)\\ \Delta m=\mu(x)\Delta l\end{Bmatrix}$ μ – линейная плотность кривой L	$m=\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$	m, масса

Статические моменты относительно координатных осей S_x, S_y, моменты инерции M_x, M_y, координаты центра тяжести x_c, y_c плоской кривой

$$y=f(x),\ a\le x\le b,\ dl=\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx=\sqrt{(x_t^{/})^2+(y_t^{/})^2}\,dt=\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi^{/})^2}\,d\varphi$$

$$S_x=\int_a^b \mu(x)y\,dl\quad S_y=\int \mu(x)x\,dl\quad M_x=\int_a^b \mu(x)y^2dl\quad M_y=\int_a^b \mu(x)x^2dl\quad x_c=\frac{S_y}{m}\quad y_c=\frac{S_x}{m}$$