

ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(const)' = 0$;

степенные функции

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2a. $(x)' = 1$;

2b. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$;

2c. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$;

2e. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u'$;

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3a. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

логарифмические функции

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;

4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

$(\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \ln a^n = n \ln a)$

тригонометрические функции

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

обратные тригонометрические функции

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

гиперболические функции

13. $(shu)' = chu \cdot u'$;

14. $(chu)' = shu \cdot u'$;

15. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;

16. $(cth u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$;

показательно – степенные функции

17. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.

модуль функции

18. $|u|' = \operatorname{sgn} u \cdot u'$, $(|u| = \operatorname{sgn} u \cdot u)$,

где $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$ – функция знак u

(сигнум u).

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot u'$;

1a. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u'$;

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

5. сложная функция

$(F(u(x)))' = F'_u \cdot u'_x$;

6. параметрически заданная функция

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$;

7. неявно заданная функция $y = y(x)$ уравнением

$F(x, y) = 0; \Rightarrow$ чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$, считая y функцией от x и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

8. логарифмическое дифференцирование

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x)$;

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'$.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ ($u = u(x)$)

1. $\int 0 du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c;$

4a. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c;$

6. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c;$

7. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c;$

8. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c;$

тригонометрические функции

9. $\int \sin u du = -\cos u + c;$

10. $\int \cos u du = \sin u + c;$

11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c;$

12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c;$

гиперболические функции

13. $\int sh u du = ch u + c;$

14. $\int ch u du = sh u + c;$

15. $\int \frac{du}{ch^2 u} = th u + c;$

16. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth u + c;$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Непосредственное интегрирование

$$\underline{du = u'_x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u'};}$$

$$u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{d(ax + b)}{a};$$

$$\int \frac{1}{(ax + b)^m} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{1-m}}{1-m} + c;$$

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax + b| + c;$$

$$u = (ax^3 + b) \Rightarrow dx = \frac{d(ax^3 + b)}{3ax^2}$$

$$\int x^2 \cos(ax^3 + b) dx = \frac{1}{3a} \sin(ax^3 + b) + c;$$

$$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (mx)^2}} = \frac{1}{m} \arcsin \frac{mx}{a} + c;$$

основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx;$

2. $\int \alpha u dx = \alpha \int u dx;$

3. $d \int u(x) dx = u(x) dx;$

4. $\int du = u + c;$

замена переменной

$$u = u(t) \Leftrightarrow du = u'_t dt;$$

$$\int f(u) du = \int f(u(t)) u'_t dt;$$

интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Метод непосредственного интегрирования

$$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u'_x}$$

$$u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{d(ax + b)}{a} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \int \frac{d(ax + b)}{a\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{ax + b} + c;$$

$$u = (-ax^2 + b) \Rightarrow dx = \frac{d(-ax^2 + b)}{-2ax} \Rightarrow \int e^{-ax^2 + b} x dx = \int \frac{e^{-ax^2 + b} x d(-ax^2 + b)}{-2ax} = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2 + b} + c;$$

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{d(\sin x)}{\cos x} \Rightarrow \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - a^2} = \int \frac{\cos x d(\sin x)}{(\sin^2 x - a^2) \cos x} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\sin x - a}{\sin x + a} \right| + c;$$

$$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m} \Rightarrow \int \sin mx dx = \int \frac{\sin mx d(mx)}{m} = -\frac{1}{m} \cos mx + c;$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du;$$

№ п/п	Интеграл	Разбиение подынтегрального выражения на части	du	v	Результат применения метода
1	$\int P_n(x)e^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x)a^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x) \sin mx dx,$ $\int P_n(x) \cos mx dx.$	$u = P_n(x)$ $dv = \begin{cases} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{cases} dx$	$P_{n-1}(x)dx$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a},$ $-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют n раз , пока степень многочлена не понизится до нулевой
2	$\int P_n(x) \ln x dx,$ $\int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arccos x dx,$ $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx, \int P_n(x) \operatorname{arccot} x dx.$	$u = \begin{cases} \ln x \\ \dots \\ \operatorname{arctg} x \end{cases},$ $dv = P_n(x) dx$	$\frac{dx}{x},$ $\dots\dots\dots$ $-\frac{dx}{1+x^2}$	$P_{n+1}(x)$	Получают интеграл от функций степенной x
3	Циклические интегралы: $\int e^{\alpha x} \sin mx dx, \int e^{\alpha x} \cos mx dx$	$u = e^{\alpha x},$ $dv = \begin{cases} \sin mx \\ \cos mx \end{cases} dx$ $\left(\text{или } u = \begin{cases} \sin mx \\ \cos mx \end{cases}, \right)$ $(dv = e^{\alpha x} dx)$	$\alpha e^{\alpha x} dx$	$-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют 2 раза , получая уравнение относительно искомого интеграла

План интегрирования рациональных дробей

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx.$$

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m.$$

I. $n \geq m$ – дробь неправильная; $n < m$ – дробь правильная (степень $P_n(x)$ меньше)

↓
(степень n $P_n(x)$ больше или равна степени m $Q_m(x)$)

$$\begin{array}{l} P_n(x) \\ \dots\dots \end{array} \left| \begin{array}{l} Q_m(x) \\ \hline \text{целая часть} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{целая часть} + \frac{\text{остаток}}{Q_m(x)}$$

$r_s(x)$ – остаток ($s < m$)

$$\Downarrow \frac{r_s(x)}{Q_m(x)} \text{ – правильная дробь.}$$

II. Знаменатель $Q_m(x)$ разложить на множители линейные – $(x-a)$ и квадратичные – (x^2+px+q) . Правильную дробь разложить на сумму простых дробей в зависимости от множителей знаменателя.

Вид множителя в знаменателе дроби	Сколько дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x-a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1x + N_1}{(x^2+px+q)^w} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}} + \dots + \frac{M_w x + N_w}{x^2+px+q}$

III. Найти неопределенные коэффициенты A, M, N , приведя сумму дробей к общему знаменателю и приравняв числители исходной правильной дроби и суммы дробей.

IV. Проинтегрировать простые дроби:

а) дроби 1-го типа $\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{A}{x-a} d(x-a) = A \ln|x-a| + c;$

б) дроби 2-го типа $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c; (k > 1);$

в) дроби 3-го типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right. = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2 \pm a^2} dt = M \int \frac{td(t^2 \pm a^2)}{(t^2 \pm a^2)^2} + (N - M\frac{p}{2}) \int \frac{dt}{t^2 \pm a^2} = \dots$$

г) дроби 4-го типа

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^w} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right. = \dots$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} \right) \text{ – рекуррентная формула}$$

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

№ п/п	Подынтегральная функция	Подстановка	Вспомогательные преобразования	Итог
1	$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x, \cos x$	Универсальная $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	Подынтегральная функция рациональна относительно x
2	$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Нечетная относительно $\cos x$	$t = \sin x$	$dt = \cos x dx$	
3	$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Нечетная относительно $\sin x$	$t = \cos x$	$dt = -\sin x dx$	
4	$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ Четная относительно $\cos x$ и $\sin x$	$t = \operatorname{tg} x$ $t = \operatorname{ctg} x$	$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; dx = -\frac{dt}{1+t^2}$	
5	$\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$ Степени четные неотрицательные	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$		Понижение степени
6	$\sin mx \cos nx$ $\cos mx \cos nx$ $\sin mx \sin nx$	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$		Сумма функций
7	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x; \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}; \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$ <p style="text-align: center;">Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций</p>			

Интегрирование иррациональностей

	Подынтегральная функция	Подстановка	Итог
1	$R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2}, \dots)$ <i>R</i> – рациональная функция, $p_1, p_2, q_1, q_2, \dots$ – целые числа	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей показателей: $k = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots)$	Рациональная функция t
2	$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \sin t$ или $x = a \cos t$ $dx = a \cos t dt$ или $dx = -a \sin t dt$ $(a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 t$ или $a^2 - x^2 = a^2 \sin^2 t)$	Рациональная функция $\sin t, \cos t$
	$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$x = atgt$ или $x = actgt$ $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$ или $dx = \frac{-adt}{\sin^2 t}$ $(a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$ или $a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\sin^2 t})$	
	$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$ $dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$ или $dx = \frac{-a \cos t}{\sin^2 t} dt$ $(x^2 - a^2 = a^2 tg^2 t$ или $x^2 - a^2 = a^2 ctg^2 t)$	
3	Дифференциальный бином $x^m (a + bx^n)^p$	p – целое число, m, n – дроби $x = t^k$, $k = \text{НОК}(\text{знаменателей } m, n)$ $dx = kt^{k-1} dt$ $\frac{m+1}{n}$ – целое $a + bx^n = t^k$, k – знаменатель дроби p $bnx^{n-1} dx = kt^{k-1} dt$, $x^m (a + bx^n)^p dx = x^m t^{kp} \frac{kt^{k-1} dt}{bnx^{n-1}}$ $\frac{m+1}{n} + p$ – целое $a + bx^n = t^k x^n$, k – знаменатель дроби p $ax^{-n} + b = t^k$, $-anx^{-n-1} dx = kt^{k-1} dt$, $x^m (a + bx^n)^p dx = x^m (t^k x^n)^p \frac{kt^{k-1} dt}{-anx^{-n-1}}$, где $x^{-n} = \frac{t^k - b}{a}$	Рациональная функция t
4	$\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t = \frac{1}{mx+n}$	См. пункт 5
5	$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t = x + \frac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c = at^2 - \frac{b^2}{4a} + c$	Два табл-х инт-ла

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основной список

1. Шипачев В. С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990.
2. Шнейдер В. Е. и др. Краткий курс высшей математики. Т. I . – М.: Высшая школа, 1978.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. I . – М.: Наука, 1978.
4. Беломестных Л.А., Васильева Н.П., Пестова Н.Ф., Шемякина Т.Е. Неопределённый интеграл. Методические указания и контрольные задания. – Томск, ТПУ, 1985.
5. Беломестных Л.А., Пестова Н.Ф. Неопределённый интеграл. Методические указания. – Томск, ТПУ, 1988.

Дополнительный список

4. Владимирский Б. М., Горстко А. Б., Ерусалимский Я. М. Математика. Общий курс. – Санкт – Петербург, «Лань», 2002.
5. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Ч. I, II . Издательство Харьковского государственного университета, 1971.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1975.
7. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. I . – М.: Высшая школа, 1970.
8. Шипачев В. С. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высшая школа, 1994.
9. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть I /. Под ред. Рябушко А. П. – Минск, Высшейшая школа, 1990.

Учебное издание

ТАРБОКОВА Татьяна Васильевна

САМОУЧИТЕЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор наук

К.П. Арефьев

Редактор

Н.Я. Горбунова

Верстка

Т.В. Тарбоковой

Подписано к печати . Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. .
Заказ ХХХ. Тираж экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифициро-
вана
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO
9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.