ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т.В. Тарбокова

Высшая математика IV

САМОУЧИТЕЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 51(035) (075.8)
ББК 22.1я73
Т194

Тарбокова Т.В.

Т194 Высшая математика IV. Самоучитель решения задач. Неопределённый интеграл: учебное пособие / Т.В. Тарбокова. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 52 с.

Самоучитель решения задач является четвёртой частью комплекта учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на формирование и развитие познавательной самостоятельности студентов. Содержит теоретические сведения, опорные конспекты, типовые задания и алгоритмы их решения по разделу: неопределённый интеграл. Для студентов всех специальностей вузов.

УДК 51(035) (075.8)
ББК 22.1я73

Содержание

Введение

Учебное пособие – самоучитель решения задач – предназначено в помощь первокурсникам любой формы обучения и содержит как теоретический материал, изложение которого иллюстрируется решёнными примерами, так и опорные конспекты **по теме: «Неопределённый интеграл».**

Теоретический материал, как правило, излагается в виде ответов на поставленные перед студентом вопросы. Вопросы занумерованы: 1-е число соответствует порядковому номеру параграфа, 2-е – порядковому номеру вопроса. Ответы можно найти в конце учебного пособия (С. 16 – 43). Рекомендуется сделать **две закладки** в книгу, отделяющие страницу изучаемого материала и ответы. В электронном варианте пособия можно открыть одновременно соответствующие окна. Опорные конспекты рекомендуется скопировать, выучить, а на первых порах держать их всё время «под рукой». Отвечая на поставленные вопросы, **студент не только справится с решением задач своего варианта, но хорошо усвоит теоретический материал** и даже может создать свой конспект по наиболее трудным для восприятия изучаемым разделам высшей математики. С помощью самоучителя **легко проконтролировать качество усвоения теоретического материала**, так как основные определения и теоремы в пособии представлены специальным образом: вопросы и ответы на них разделены вертикальной чертой. Закрыв текст справа от черты, нужно лишь ответить самостоятельно на вопрос в устной, а еще лучше в письменной форме и, открыв текст справа, сверить результат.

Варианты индивидуальных заданий можно найти на персональном сайте автора (http://portal.tpu.ru → Персональные сайты → Тарбокова Татьяна Васильевна → Учебная работа ЭЛТИ → 2-й семестр) или по списку литературы в [4] (задания), [5] (ответы к заданиям). Большой банк заданий и ответов к ним позволит студентам выбрать задачи для самостоятельного решения.

§ 1. Первообразная функция и неопределённый интеграл

Нахождение первообразной функции (восстановление функции по известной производной этой функции) является одной из основных задач, которые решает интегральное исчисление.

1.1. Сформулируйте определение первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке X.

1.2. Как проверить, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X?

1.3. Проверьте, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X.

$F(x)$	$f(x)$	X
$\cos mx$	$-\sin mx$	$(-\infty;\infty)$
e^{kx}	ke^{kx}	$(-\infty;\infty)$
$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}, \quad m \neq -1$	x^m	$(-\infty;\infty)$

1.4. Из дифференциального исчисления известно, что производная функции, постоянной на некотором промежутке, равна нулю на этом промежутке. Сформулируйте обратное утверждение в виде леммы (лемма – это теорема, которая используется при доказательстве другой теоремы).

1.5. Сформулируйте теорему о множестве всех первообразных функций.

1.6. Дайте определение понятия неопределённого интеграла.

1.7. Как формулируется теорема существования первообразной функции? (Теорема существования первообразной функции доказывается при изучении определённого интеграла).

1.8. Какие функции относятся к основным элементарным?

1.9. Какие функции называют элементарными функциями?

Во введении в математический анализ доказано, что всякая элементарная функция непрерывна в точках области определения этой функции. Из теоремы существования первообразной следует, что все элементарные функции имеют первообразные в области их определения. Но не всегда эти первообразные являются элементарными функциями. Интегралы, для которых первообразные не выражаются элементарными функциями, называются «неберущимися». Первообразные для «неберущихся» интегралов могут быть представлены в виде бесконечных сумм элементарных функций и найдены с любой степенью точности.

Примеры «неберущихся» интегралов	$\int \frac{e^x}{x}dx;\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}dx \quad (x \neq 0);$ $\int \frac{dx}{\ln x} \quad (x > 0,\quad x \neq 1);$ $\int \exp(x^2)dx;\quad \int \sin(x^2)dx;\quad \int \cos(x^2)dx.$

§ 2. Основные свойства неопределённого интеграла

2.1. Сформулируйте теорему о производной и дифференциале неопределённого интеграла (свойство 1).

2.2. Найдите $(\int (x^3 + tgx)dx)'$.

2.3. Запишите дифференциал $d\int \ln 2xdx$.

2.4. Докажите 2-е свойство неопределённого интеграла об интеграле от дифференциала функции.

2.5. Найдите $\int d(\sqrt{x^2 - a^2})$.

2.6. Найдите $\int dx$.

2.7. Найдите $\int du(x)$.

2.8. Как формулируется теорема линейности для неопределённого интеграла (свойство 3)?

2.9. Найдите $\int (3e^x + 5x^3)dx$.

§ 3. Метод замены переменных (подстановки) в неопределённом интеграле

3.1. Сформулируйте теорему о замене переменных в неопределённом интеграле (**свойство 4** инвариантности неопределённого интеграла).

Зная таблицу производных и правила дифференцирования, всегда можно найти производную.

Как и всякая обратная операция, интегрирование по сравнению с дифференцированием является более сложным действием.

«При современном состоянии науки интегрирование, в сущности, есть **процесс** целесообразно направленных **гаданий и попыток**, для облегчения которых составлена таблица так называемых основных интегралов» (Лузин Н.Н. Интегральное исчисление).

Таблицу интегралов можно найти на С. 46 опорных конспектов (ОК).

Справедливость формул таблицы интегралов проверяется дифференцированием.

3.2. Что понимают под непосредственным интегрированием?

Идея подведения функции под знак дифференциала	1. В подынтегральном выражении $f(x)dx$ заменяем dx дифференциалом du новой функции $u(x)$, делённым на производную этой функции: $dx=\dfrac{d(u(x))}{u'(x)}$, $u'(x)\neq 0$; 2. Сокращая множители функции $f(x)$ с множителями производной $u'(x)$, подынтегральную функцию преобразуем к функции аргумента u: $f_1(u)$; 3. Получаем табличный интеграл $\int f_1(u)du$.

Непосредственным интегрированием найдём 10 интегралов:

3.3. $\int (x^4 - \frac{6}{x} + \sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{x^7} + \frac{10}{\sqrt{x^9}})dx$;

(Ответ: $\frac{x^5}{5} - 6\ln|x| + \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + \frac{1}{3x^6} - \frac{20}{7\sqrt{x^7}} + C$);

3.4. $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$; (Ответ: $x + \frac{\cos 2x}{2} + C$);

3.5. $\int e^{\frac{2}{x}} \frac{dx}{x^2}$; (Ответ: $-\frac{e^{\frac{2}{x}}}{2} + C$);

3.6. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x - 1}}$; (Ответ: $\frac{\ln\left|2^x + \sqrt{2^x - 1}\right|}{\ln 2} + C$);

3.7. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$; (Ответ: $x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$);

3.8. $\int \frac{2x+3}{x^2+5} dx$; (Ответ: $\ln\left|x^2 + 5\right| + \frac{3}{\sqrt{5}} arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C$);

3.9. $\int (1 - e^x)^2 dx$; (Ответ: $x - 2e^x + \frac{e^{2x}}{2} + C$);

3.10. $\int x \sin(1 - x^2) dx$; (Ответ: $\frac{\cos(1 - x^2)}{2} + C$);

3.11. $\int \frac{dx}{(1 + x^2) arctgx}$; (Ответ: $\ln|arctgx| + C$);

3.12. $\int a^{x^2} e^{x^1} x dx$; (Ответ: $\frac{(ae)^{x^2}}{2(1 + \ln a)} + C$).

Самостоятельно повторите таблицу производных, выучите таблицу интегралов, основные свойства неопределённого интеграла и выполните 10 первых примеров Вашего варианта индивидуального задания [4].

> «Десять страниц математики **понятой** лучше ста страниц, заученных на память и не понятых, а одна страница, **самостоятельно проработанная,** лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно».
>
> (Д. Юнг).

§ 4. Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле

4.1. Докажите теорему об интегрировании по частям в неопределённом интеграле.

Метод интегрирования по частям применяется в тех случаях, когда подынтегральная функция содержит многочлены

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$, умноженные на показательные, тригонометрические, обратные тригонометрические, логарифмические функции.

Подынтегральное выражение $f(x)dx$ разбивается на части $u(x)$ и dv, причём в дифференциал dv функции $v(x)$ обязательно входит dx (часть подынтегрального выражения $f(x)dx$ выбираем в качестве функции $u(x)$, **остальное** берём в качестве dv).

Рекомендации по применению метода интегрирования по частям можно найти на С. 47 опорных конспектов (ОК).

При отыскании первообразной проще всего применять метод непосредственного интегрирования, поэтому сначала нужно «прикинуть», нельзя ли подвести под знак дифференциала такую функцию, чтобы получился табличный интеграл. Если это не приводит к успеху, применяем замену переменной или интегрирование по частям в соответствии с рекомендациями теории. Если интеграл «неберущийся», оставляем попытки найти его первообразную в виде элементарной функции.

Найдём первообразные следующих интегралов:

4.2. $\int x^2 \exp(x^3)dx$ (Ответ: $\frac{e^{x^3}}{3}+C.$);

4.3. $\int x^3 \exp(x^2)dx$; (Ответ: $\frac{1}{2}(x^2 e^{x^2}-e^{x^2})+C$);

4.4. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$; (Ответ: $\frac{\ln^3 x}{3}+C$);

4.5. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; (Ответ: $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C$);

4.6. $\int x\sin x^2 dx$; (Ответ: $-\frac{\cos x^2}{2}+C$);

4.7. $\int x^2 \sin x dx$; (Ответ: $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$);

4.8. $\int 5^x \cos x dx$; (Ответ: $\frac{5^x \sin x+(\cos x)5^x \ln 5}{(1+\ln^2 5)}+C$);

4.9. $\int 5^{\sin x}\cos x dx$; (Ответ: $\frac{5^{\sin x}}{\ln 5}+C$);

4.10. $\int \sqrt{x}\exp(\sqrt{x})dx$; (Ответ: $2e^{\sqrt{x}}(x-2\sqrt{x}+2)+C$);

4.11. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})dx$; (Ответ: $2e^{\sqrt{x}}+C$);

4.12. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (Ответ: $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$);

4.13. $\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (Ответ: $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C$).

Самостоятельно найдите первообразные примеров 11-14 Вашего варианта индивидуального задания [4].

§ 5. Интегрирование дробных рациональных функций (С. 48 ОК)

А. Правильные и неправильные рациональные дроби

5.1. Дайте определение многочлена (полинома) степени n .

5.2. Какие функции называются дробными рациональными (рациональными дробями)?

5.3. Как определяются правильные и неправильные (5.3.1) рациональные дроби?

5.4. Сформулируйте теорему об интегрировании неправильной рациональной дроби.

5.5. Найдите первообразную интеграла $\int \frac{3x^5+2x^4-7x^2+4}{x^2+2}\,dx$.

(Ответ: $\frac{3x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}-11x+6\ln\left|x^2+2\right|+\frac{26}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$).

Б. Основная теорема алгебры

5.6. Каково содержание основной теоремы алгебры?

В школе Вам говорили, что квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом не имеет корней. Действительно, вещественных корней в этом случае нет, но есть корни, которые называют комплексными сопряжёнными.

Леонард Эйлер в 1772 г. ввёл обозначение i мнимой единицы, которая определяется равенством: $i^2=-1$, т. е. $\sqrt{-1}=\pm i$.

Следовательно, если дискриминант $D<0$, то

$$\sqrt{D}=\sqrt{-|D|}=\sqrt{-1}\sqrt{|D|}=\pm i\sqrt{|D|},\ \text{т. е.}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}=\frac{-b}{2a}+i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}=\alpha+i\beta;\\ x_2 &= \frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a}=\frac{-b}{2a}-i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}=\alpha-i\beta. \end{aligned}\right.\quad \text{, где } \alpha,\beta \text{ – вещественные.}$$

Корни x_1 и x_2 при этом называют комплексными сопряжёнными.

Вспомним, что если x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Это равенство справедливо и для квадратных трёхчленов с отрицательным дискриминантом (проверьте). Поэтому, если дискриминант квадратного трёхчлена положительный, будем раскладывать квадратный трёхчлен на линейные множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. А если дискриминант отрицательный, оставляем квадратный трёхчлен в исходном виде.

5.7. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на линейные и квадратичные множители.

Если степень многочлена выше 2-й,

• можно один вещественный корень x_1 найти подбором, потом разделить многочлен на разность $(x-x_1)$. По теореме Безу многочлен делится на разность $(x-x_1)$ без остатка. Поэтому частное будет многочленом степени на единицу меньше, чем исходный многочлен;

• можно воспользоваться тождественными преобразованиями, вынося общие множители за скобки и применяя сочетательный закон умножения;

• можно разложить многочлен на множители средствами системы MathCAD.

В зависимости от линейных и квадратичных множителей знаменателя правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простых дробей.

В. Разложение правильной дроби на сумму простых дробей

5.8. По какому правилу правильная рациональная дробь представляется суммой простых дробей?

Разложите рациональную дробь в интегралах на сумму простых дробей с неопределёнными коэффициентами:

5.9. $\int \frac{x^5+x^4+x^3+14x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}dx$;

5.10. $\int \frac{x^7}{x^4-1}dx$;

5.11. $\int \frac{7x^3 - 14x^2 + 15x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx$.

Г. Методы нахождения неопределённых коэффициентов

5.12. Какими методами находят значения неопределённых коэффициентов?
5.13. Найдите значения неопределённых коэффициентов примера под номером 5.9. $\int \frac{x^5 + x^4 + x^3 + 14x^2 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2} dx$.
5.14. Найдите значения неопределённых коэффициентов примера под номером 5.11. $\int \frac{7x^3 - 14x^2 + 15x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx$.

Д. Интегрирование простых дробей

Раскладывая правильную дробь на сумму простых дробей, в общем случае получаем простые дроби четырёх типов.
5.15. Какие дроби относятся к простым дробям 1-го типа?
5.16. Как интегрируются простые дроби 1-го типа?

5.17. Какие дроби относятся к простым дробям 2-го типа?
5.18. Как интегрируются простые дроби 2-го типа?

5.19. Какие дроби относятся к простым дробям 3-го типа?
5.20. Как интегрируются простые дроби 3-го типа?

5.21. Какие дроби относятся к простым дробям 4-го типа?
5.22. Как интегрируются простые дроби 4-го типа?

План интегрирования рациональных дробей можно найти на С. 48 опорных конспектов (ОК).

5.23. Завершим интегрирование примера под номером 5.9. $\int \frac{x^5 + x^4 + x^3 + 14x^2 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2} dx$ (Ответ: $\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{x} + \ln(x^2 - 2x + 5) + C$).

5.24. Завершим интегрирование примера под номером 5.11. $\int \frac{7x^3 - 14x^2 + 15x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx$ (Ответ: $7x + \ln|x| - \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{2} + 2arctg(x-1) + C$).

Самостоятельно найдите первообразные примеров 15-19 Вашего варианта индивидуального задания [4].

§ 6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

6.1. Дайте определение рациональной функции двух переменных.

Рекомендации по способам интегрирования тригонометрических и гиперболических функций можно найти на С. 49 опорных конспектов (ОК).

Универсальная подстановка $t = tg\frac{x}{2}$ позволяет из любой рациональной функции синусов и косинусов $R(\sin x, \cos x)$ получить рациональную дробь, которая всегда интегрируется по известному алгоритму. Но получаются при этом иногда такие дроби, для которых надо искать большое количество неопределённых коэффициентов.

Поэтому сначала надо посмотреть, нельзя ли найти первообразную непосредственно, потом воспользоваться наиболее подходящей рекомендацией теории (ОК).

Найдём первообразные интегралов:

6.2. $\int \frac{dx}{\sin x}$; (Ответ: $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$);

6.3. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; (Ответ: $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$);

6.4. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; (Ответ: $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C$);

6.5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}dx$. (Ответ: $2tgx - \frac{1}{tgx} + \frac{tg^3 x}{3} + C$).

Самостоятельно найдите первообразные примеров 21-26 Вашего варианта индивидуального задания [4].

§ 7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

7.1. Дайте определение алгебраической иррациональной функции.

Рекомендации по способам интегрирования иррациональных функций можно найти на С. 50 опорных конспектов (ОК).

Основная идея в этих рекомендациях – избавиться от корней в подынтегральной функции при помощи соответствующей подстановки.

Найдём первообразные интегралов:

7.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; (Ответ: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$);

7.3. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$; (Ответ: $\frac{1}{2}(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+x\sqrt{x^2-1})-\sqrt{x^2-1}+C$);

7.4. $\int \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$; (Ответ: интеграл «неберущийся»);

7.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; (Ответ: $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}arctg\sqrt[4]{x^{-4}+1}+C$);

7.6. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$; (Ответ: $\frac{1}{4}(\sqrt{1+2x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}})+C$);

7.7. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$; (Ответ: $2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+C$).

Самостоятельно найдите первообразные примеров 27-40 Вашего варианта индивидуального задания [4].