ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Томский политехнический университет

Т. В. Тарбокова, В. М. Шахматов

САМОУЧИТЕЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Производная и её приложения

Издание третье

$$dy = y'_x dx$$

*Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
в качестве учебного пособия для студентов
и преподавателей вузов*

Издательство Томского политехнического университета
Томск 2007

ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
ЗАДАНИЕ 1.0 (1. № моего варианта)

- **Найти производные** первого порядка данных функций одного аргумента.

Подготовимся к выполнению задания, повторив теоретический материал.

1.1. Что представляет собой **приращение аргумента** Δx функции $y = f(x)$ в точке x_0?

…………………………………………………………………………………

1.2. Как найти **приращение** Δy **функции** $y = f(x)$, соответствующее приращению аргумента Δx в точке x_0?

…………………………………………………………………………………

1.3. Сформулируйте **определение производной** функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

…………………………………………………………………………………

1.4. Какие действия называют **дифференцированием** функции?

…………………………………………………………………………………

1.5. Сформулируйте основные **правила дифференцирования** функции одного аргумента.

…………………………………………………………………………………

1.6. Какую производную имеет **постоянная** функция?

…………………………………………………………………………………

1.7. Как найти производную **степенной** функции?

…………………………………………………………………………………

При отыскании производных степенных функций $y = (u(x))^n$ полезно запомнить формулы для некоторых частных случаев показателя *n*.

Таблица 1

Степенная функция $y = (u(x))^n$	Производная степенной функции $y' = nu^{n-1} \cdot u'_x$
$n = 1 \Rightarrow y = u(x)$	$y' = (u(x))' = u'_x \cdot 1$
$n = -1 \Rightarrow y = u^{-1} = \dfrac{1}{u}$	$y' = (u^{-1})' = (\dfrac{1}{u})' = -u^{-2} \cdot u'_x = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'_x$
$n = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u}$	$y' = (u^{\frac{1}{2}})' = (\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x$
$n = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$	$y' = (u^{-\frac{1}{2}})' = -\dfrac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot u'_x = -\dfrac{1}{2\sqrt{u^3}} \cdot u'_x$

Необходимо уметь преобразовывать степенные функции с дробными и отрицательными показателями, имея в виду, что:

$$\sqrt[n]{u^m} = u^{\frac{m}{n}}; \quad \frac{1}{u^m} = u^{-m}.$$

При дифференцировании хорошо также не забывать, что постоянные сомножители выносятся за знак производной.

Научиться дифференцировать любую функцию Вы сможете только после того, как **выучите все правила дифференцирования и таблицу производных** и будете проговаривать эти правила и формулы мысленно или вслух, выполняя каждое задание.

Например, найдем производную функции $y = \dfrac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}}$.

Вынесем $\dfrac{1}{15}$ за знак производной;

применим правило дифференцирования дроби:

производную числителя $(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)' = 3 \cdot 6x^5 + 4 \cdot 4x^3 - 2x - 0$ умножим на знаменатель $\sqrt{1+x^2}$;

отнимем числитель $(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)$, умноженный на производную знаменателя $(\sqrt{1+x^2})' = ((1+x^2)^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (0+2x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

и эту разность разделим на квадрат знаменателя, то есть:

$$y' = \frac{1}{15}\left(\frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{15} \cdot \frac{(18x^5 + 16x^3 - 2x)\sqrt{1+x^2} - (3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

желательно сделать алгебраические преобразования, упрощающие выражение для производной,

$$= \frac{(18x^5 + 16x^3 - 2x)(1+x^2) - (3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2)x}{15(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{15x^7 + 30x^5 + 15x^3}{15(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{15x^3(x^4 + 2x^2 + 1)}{15(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = x^3\sqrt{1+x^2}.$$

Ответ: $y' = x^3\sqrt{1+x^2}$.

В примере $y = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2 - x}}{x^2}$ функцию y можно, конечно, дифференцировать как дробь, и производную числителя найти по правилу дифференцирования произведения, но удобнее сначала **преобразовать** функцию

$$y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2 - x}}{x^2} = \left(\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^2 - x} = (2x^{-1} + x^{-2})\sqrt{x^2 - x}$$

и применить только правило нахождения производной произведения:

производную первого сомножителя $(2x^{-1}+x^{-2})' = 2(-1)x^{-2} - 2x^{-3}$

умножим на второй сомножитель $\sqrt{x^2-x}$

и прибавим первый сомножитель $(2x^{-1}+x^{-2})$, умноженный на производную второго сомножителя $(\sqrt{x^2-x})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\cdot(x^2-x)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\cdot(2x-1)$,

то есть

$$y' = (-2x^{-2}-2x^{-3})\sqrt{x^2-x} + (2x^{-1}+x^{-2})\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}(2x-1).$$

Полученное выражение можно упростить:

$$y' = \frac{-4(x+1)(x^2-x)+(2x^2+x)(2x-1)}{2x^3\sqrt{x^2-x}} = \frac{3}{2x^2\sqrt{x^2-x}}.$$

Замечание. Функцию $y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$ можно было преобразовать

по – другому:

$y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2} = \frac{2x+1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = (2+\frac{1}{x})\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ и получить менее громоздкое выражение для производной:

$y' = (0-\frac{1}{x^2})\sqrt{1-\frac{1}{x}} + (2+\frac{1}{x})\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}}(0+\frac{1}{x^2})$, которое и упрощать легче:

$$y' = -\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} - \frac{2x+1}{2x\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\right) = -\frac{2x(\frac{x-1}{x})-2x-1}{2x^3\sqrt{\frac{x-1}{x}}} = \frac{3}{2x^2\sqrt{x^2-x}}.$$

Ответ: $y' = \frac{3}{2x^2\sqrt{x^2-x}}$.

Запишите функцию **задания 1$_{\text{номер варианта}}$ а)**.

Какие правила и формулы Вы примените для дифференцирования данной функции?

Найдите производную функции задания 1а Вашего варианта.

…………………………………………………………………………………

Ответ 1…а)…………………………………………………………………

Для отыскания производных следующих примеров Вашего индивидуального задания Вам понадобится использовать формулы таблицы производных.

Производная функции одного аргумента и правила дифференцирования

$(u = u(x), v = v(x), c = const)$

Таблица производных

1. $(const)' = 0$;

степенные функции

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2a. $(x)' = 1$;

2b. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$;

2c. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$;

2e. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u'$;

показательные функции

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3a. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

логарифмические функции

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;

4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

тригонометрические функции

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

обратные тригонометрические функции

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

гиперболические функции

13. $(sh\, u)' = ch\, u \cdot u'$;

14. $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u'$;

15. $(th\, u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;

16. $(cth\, u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$;

показательно – степенные функции

15. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.

модуль функции

18. $|u|' = \operatorname{sgn} u \cdot u'$, $(|u| = \operatorname{sgn} u \cdot u)$,

где $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$ - функция знак u

(сигнум u).

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot u'$;

1a. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u'$;

2. $(u + v)' = u' + v'$;

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

5. ***сложная функция***

$(F(u(x))' = F_u' \cdot u_x'$;

6. ***параметрически заданная функция***

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}; y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'}$;

7. ***неявно заданная функция*** $y = y(x)$ уравнением $F(x, y) = 0; \Rightarrow$ чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0,$ считая y функцией от x и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

8. ***логарифмическое дифференцирование***

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x)$;

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'$.

Поупражняемся в применении этих формул.

1.8. По какому правилу находят **производную синуса**?

……………………………………………………………………………………..

1.9. Найдите производную функции $y = \sin x^5 + 10$.

……………………………………………………………………………………

1.10. Какую **производную** имеет функция **косинус** $y = \cos u$?

……………………………………………………………………………………

1.11. Продифференцируйте функцию $y = \cos 5x$.

……………………………………………………………………………………

1.12. Как найти **производную тангенса**?

……………………………………………………………………………………

1.13. Продифференцируйте функцию $y = tg\sqrt[3]{2x}$.

……………………………………………………………………………………

1.14. По какой формуле находят **производную котангенса**?

……………………………………………………………………………………

1.15. Найдите производную функции $y = ctg^3 5x$.

……………………………………………………………………………………

1.16. Какую производную имеет **логарифмическая** функция $y = \log_a u(x)$?

……………………………………………………………………………………

1.17. $y = \lg(4\sin 2x)$. Найдите y'.

……………………………………………………………………………………

1.18. Как получить **производную натурального логарифма**, то есть функции $y = \ln u(x)$?

……………………………………………………………………………………

1.19. Продифференцируйте функцию $y = \ln\sqrt[5]{tg^2 7x}$.

……………………………………………………………………………………

1.20. По какому правилу находят производную **показательной функции** $y = a^{u(x)}$?

……………………………………………………………………………………

1.21. Найдите производную функции $y = 6^{ctg\,3x}$.

……………………………………………………………………………………

1.22. Какую производную имеет **экспоненциальная функция** $y = e^{u(x)}$?

………………………………………………………………………………………

1.23. Найдите производную функции $y = e^{\cos\frac{x}{2}}$.

………………………………………………………………………………………

1.24. Какой функции равна **производная арксинуса**?

………………………………………………………………………………………

1.25. Продифференцируйте функцию $y = (\arcsin 5x)^3$.

………………………………………………………………………………………

1.26. Как находят **производную арккосинуса**?

………………………………………………………………………………………

1.27. Получите производную функции $y = \sqrt[3]{\arccos(7x^2 + 3)}$.

………………………………………………………………………………………

1.28. Какую производную имеет функция **арктангенс**?

………………………………………………………………………………………

1.29. Продифференцируйте функцию $y = \dfrac{1}{2^{arctg\, 3x}}$.

………………………………………………………………………………………

1.30. Какой функции равна **производная арккотангенса**?

………………………………………………………………………………………

1.31. Найдите производную функции $y = \ln\dfrac{arcctg\, e^{2x}}{arctg\, e^{4x}}$.

………………………………………………………………………………………

1.32. Какие правила следует использовать при нахождении производной функции $y = \dfrac{1}{m\sqrt{ab}} arctg(e^{mx}\sqrt{\dfrac{a}{b}})$, где $a, b, m -$ постоянные.

………………………………………………………………………………………

Применяем соответствующие правила и находим производную:

$$y^{/} = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{1 + (e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}})^2} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot e^{mx} \cdot m = \frac{e^{mx}}{b + ae^{2mx}}.$$

Ответ: $y^{/} = \dfrac{e^{mx}}{b + ae^{2mx}}$.

1.33. Какие правила Вы примените для того, чтобы найти производную функции $y = \ln\dfrac{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x + 1}$?

………………………………………………………………………………………..

Прежде, чем находить производную функции $y = \ln\frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$, вспомним, как преобразуют логарифм произведения и частного:

$$\ln ab = \ln a + \ln b; \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$$

заметив, что данную функцию можно упростить, если обозначить $u(x) = \sqrt{1+e^x+e^{2x}} - e^x$. Тогда можно записать:

$$y = \ln\frac{u-1}{u+1} = \ln(u-1) - \ln(u+1).$$

Поэтому

$$y' = \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\cdot u'_x = \frac{u+1-u+1}{u^2-1}\cdot u'_x = \frac{2}{u^2-1}\cdot u'_x =$$

$$= \frac{2}{1+e^x+e^{2x}-2e^x\sqrt{1+e^x+e^{2x}}+e^{2x}-1}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}(e^x+2e^{2x})-e^x\right) =$$

$$= \frac{2}{e^x+2e^{2x}-2e^x\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}\cdot\frac{e^x+2e^{2x}-2e^x\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{2\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$$

Ответ: $y' = \frac{1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

Найдите производную функции **задания 1** **номер варианта** **б).**

……………………………………………………………………………………..

Ответ 1….б)…………………………………………………………………

1.34. Какие правила Вы примените, чтобы получить производную функции $y = tg\sqrt{\cos(\frac{1}{3})} + \frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}$?

……………………………………………………………………………………...

Продифференцируем данную функцию:

$$y' = 0 + \frac{1}{31}\cdot\frac{(2\sin 31x\cdot\cos 31x\cdot 31)\cdot\cos 62x - \sin^2 31x\cdot(-\sin 62x\cdot 62)}{\cos^2 62x}.$$

После упрощений будем иметь:

$$y' = \frac{\sin 62x(\cos^2 31x - \sin^2 31x + 2\sin^2 31x)}{\cos^2 62x} = \frac{\sin 62x}{\cos^2 62x} = \frac{tg 62x}{\cos 62x}.$$

Ответ: $y' = \frac{tg 62x}{\cos 62x}$.

Найдите производную функции **задания 1** **номер варианта** **в).**

……………………………………………………………………………………...

Ответ 1….в)………………………………………………………………….

Дальнейшие Ваши успехи в технике дифференцирования будут зависеть от количества выполненных Вами упражнений. Возьмите любой задачник,

например, из списка рекомендуемой литературы (стр.) и упражняйтесь до тех пор, пока результаты Ваших решений не перестанут отличаться от ответов в задачнике.

Функции, производные которых мы находили, называют **явными**. Стандартное обозначение явно заданной функции $y = f(x)$, то есть слева – обозначение функции, а справа – запись ее зависимости от аргумента x.

Если же уравнение $F(x, y) = 0$, задающее функцию, не решено относительно y, то функцию $y(x)$ называют **заданной неявно** уравнением $F(x, y) = 0$.

1.35. Сформулируйте и выучите правило дифференцирования неявно заданной функции.

……………………………………………………………………………………...

Например, найдем производную функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $y\sin x + \cos(x - y) = \cos y$.

1.36. Какие правила нужно применить, чтобы отыскать производную данной функции?

……………………………………………………………………………………...

Получим уравнение относительно искомой производной $y' \cdot \sin x + y \cdot \cos x - \sin(x - y) \cdot (1 - y') = -\sin y \cdot y'$ и выразим производную y' явно из этого уравнения:

$$y' = \frac{\sin(x - y) - y\cos x}{\sin x + \sin(x - y) + \sin y}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{\sin(x - y) - y\cos x}{\sin x + \sin(x - y) + \sin y}$.

Найдите производную функции **задания 1 $_{\text{номер варианта}}$ г).**

……………………………………………………………………………………...

Ответ 1….г)…………………………………………………………………….

1.37. В чем заключается метод **логарифмического дифференцирования**?

……………………………………………………………………………………...

1.38. В каких случаях применяют метод логарифмического дифференцирования?

……………………………………………………………………………………...

Применим метод логарифмического дифференцирования для нахождения производной функции $y = (arctg 2x)^{\sin 3x}$.

1.39. Какие правила используете для решения данного примера?

……………………………………………………………………………………...

Прологарифмируем функцию: $\ln y = \sin 3x \cdot \ln arctg 2x$ и найдем производную полученной неявно заданной функции

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos 3x \cdot 3 \cdot \ln arctg 2x + \sin 3x \cdot \frac{1}{arctg 2x} \cdot \frac{1}{1 + 4x^2} \cdot 2,$$ откуда

$$y' = (arctg\,2x)^{\sin 3x}(3\cos 3x \cdot \ln arctg\,2x + \frac{2\sin 3x}{(1+4x^2)arctg\,2x}).$$

Замечание. Эту производную можно было найти иначе, применяя правило дифференцирования **показательно – степенной** функции $y = u(x)^{v(x)}$, и основание, и показатель которой являются функциями независимой переменной x.

1.39. По какому правилу можно продифференцировать показательно – степенную функцию?

……………………………………………………………………………………..

Применяя правило, получим

$$y' = \sin 3x \cdot (arctg 2x)^{\sin 3x - 1} \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 + (arctg 2x)^{\sin 2x} \cdot \ln arctg 2x \cdot \cos 3x \cdot 3 =$$

$$= (arctg 2x)^{\sin 3x}(\frac{2\sin 3x}{arctg 2x \cdot (1+4x^2)} + 3\cos 3x \cdot \ln arctg 2x).$$

Очевидно, результат - тот же самый.

Ответ: $y' = (arctg 2x)^{\sin 3x}(3\cos 3x \cdot \ln arctg 2x + \frac{2\sin 3x}{(1+4x^2)arctg 2x})$.

Запишите **задание 1** **номер варианта д)** и выполните его.

……………………………………………………………………………………..

Ответ 1…д)……………………………………………………………………….

1.41. Когда говорят, что функция задана **параметрически**?

……………………………………………………………………………………..

1.42. Как найти производную параметрически заданной функции?

……………………………………………………………………………………..

В качестве ***упражнения*** получим производную y'_x функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$$

1.43. Какие формулы и правила применим?

……………………………………………………………………………………..

Итак, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}} \cdot 2}{\frac{1}{\sqrt{1-(t^2-1)^2}} \cdot 2t} = -\frac{\sqrt{2t-t^2}}{t\sqrt{1-4t^2}}$.

Ответ: $y'_x = -\frac{\sqrt{2t-t^2}}{t\sqrt{1-4t^2}}$.

Решите пример **задания 1** **номер варианта е).**

……………………………………………………………………………………

Ответ 1….е)………………………………………………………………………

УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

ЗАДАНИЕ 2.0 (2. № МОЕГО ВАРИАНТА)

- Написать **уравнение касательной и нормали** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$.

2.1. Сформулируйте **определение касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$.

………………………………………………………………………………...

2.2. В чем заключается **геометрический смысл производной** функции в точке?

………………………………………………………………………………...

2.3. По какой формуле можно найти **уравнение касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$?

………………………………………………………………………………...

2.4. Сформулируйте **определение нормали** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$.

………………………………………………………………………………...

2.5. По какой формуле можно найти **уравнение нормали** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$?

………………………………………………………………………………...

Придерживаясь следующего **плана решения**,
выполните **задание 2 номер варианта а).**

1) вычислить значение $y_0 = f(x_0)$ функции в указанной точке;
2) найти угловой коэффициент касательной $k_1 = y^{/}(x_0)$ и угловой коэффициент нормали $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{1}{y^{/}(x_0)}$ к графику функции в данной точке;
3) записать уравнение касательной по формуле 2.3 и уравнение нормали по формуле 2.5.

Ответ 2….а)………………………………………………………………

2.6. Как найти угол, под которым пересекаются две линии?

………………………………………………………………………………...

Выполните **задание 2 номер варианта б).**

………………………………………………………………………………...

Ответ 2….б)………………………………………………………………….

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

ЗАДАНИЕ 3.0 (3. № МОЕГО ВАРИАНТА)

- Вычислить пределы функций, применяя правило Лопиталя.

Французский инженер Гильом Франсуа де Лопиталь (1661 – 1704) доказал теоремы, которые очень эффективно применяются для вычисления пределов.

Для практических приложений, опуская строгость формулировок теорем Лопиталя, можно пользоваться правилом Лопиталя.

3.1. Как формулируется **правило Лопиталя**?

………………………………………………………………………………...

3.2. Какие другие виды неопределенностей можно преобразовать к неопределенностям вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$?

………………………………………………………………………………...

3.3. Как можно тождественно преобразовать неопределенность вида $\{\infty - \infty\}$, чтобы ее можно было раскрыть по правилу Лопиталя?

………………………………………………………………………………...

3.4. Как можно тождественно преобразовать неопределенность вида $\{0 \cdot \infty\}$, чтобы ее можно было раскрыть по правилу Лопиталя?

………………………………………………………………………………...

3.5. Как можно тождественно преобразовать показательно – степенные неопределенность вида $\{1^{\infty}\}$, $\{0^{0}\}$, $\{\infty^{0}\}$, чтобы их можно было раскрыть по правилу Лопиталя?

………………………………………………………………………………...

Рассмотренные тождественные преобразования можно собрать в **таблице рекомендаций по применению правила Лопиталя.**

Таблица 2

№	Вид неопределенности	Преобразования	Результат преобразований ($(c \neq 0, d \neq 0 -$ - const)
1	$\{0 \cdot \infty\}$	$f(x) \cdot h(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{h(x)}} = \dfrac{h(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$	$\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ - применить правило Лопиталя.
2	$\{\infty - \infty\}$	2.1. дроби привести к общему знаменателю; 2.2. умножить и разделить разность функций на сопряженное выражение, если это разность квадратных корней; 2.3. умножить и разделить разность функций на неполный квадрат суммы этих функций, если это разность корней кубических; 2.4. $f(x) - h(x) = \dfrac{\dfrac{1}{h(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot h(x)}}$	$\left\{\dfrac{c}{0}\right\} = \infty$; $\left\{\dfrac{c}{\infty}\right\} = 0$; $\left\{\dfrac{0}{c}\right\} = 0$; $\left\{\dfrac{\infty}{c}\right\} = \infty$; $\left\{\dfrac{c}{d}\right\} = A$ $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ - применить правило Лопиталя.
3	$\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$.	3.1. $y = u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u$; $\lim\limits_{x \to a} \ln y = A \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} y = e^A$. 3.2. $y = u^v = e^{v \cdot \ln u}$	См. выше

Запишите **задания 3.$_{\text{номер варианта}}$ а, б, в, г.**

………………………………………………………………………………………

3.6. Как выяснить, какого вида неопределенности в этих заданиях?

………………………………………………………………………………………

Примените правило Лопиталя для раскрытия полученных неопределенностей, воспользовавшись в случае необходимости тождественными преобразованиями.

Ответ 3…..а, б, в, г…………………………………………………………

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

ЗАДАНИЕ 4.0 (4. № МОЕГО ВАРИАНТА)

- **Найти наибольшее и наименьшее значения** функции $f(x)$ на данном отрезке.

4.1. Какую теорему применяют для решения поставленной задачи?

………………………………………………………………………………...

Придерживаясь последовательности следующих пунктов **плана** отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$**,** выполните задание 4$_{\text{номер варианта}}$ а).

1. Найти производную первого порядка данной функции;
2. Найти **все** критические точки x_i, принадлежащие отрезку $[a,b]$; **в критических точках** первого порядка **производная** первого порядка исследуемой функции равна **нулю** или **бесконечности**, или **не существует**;
3. Вычислить $f(x_i)$ - значения функции во всех критических точках, оказавшихся на отрезке $[a,b]$**,** $i = 1,2,...n$;
4. Вычислить $f(a)$ и $f(b)$ - значения функции на концах отрезка;
5. Сравнить все полученные значения функции $f(x_i), f(a), f(b)$ и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

………………………………………………………………………………...

Ответ 4….а)……………………………………………………………….

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

ЗАДАНИЕ 5.0 (5.№ МОЕГО ВАРИАНТА)

- **Найти производные указанного порядка** данных функций, заданных **явно**;
- **Найти производные указанного порядка** данных функций, заданных **параметрически**;
- **Разложить многочлен** по формуле **Тейлора**;
- **Представить данную** функцию формулой **Маклорена.**

5.1. Сформулируйте определение **производной второго** порядка.

………………………………………………………………………………...

5.2. Найдите производную второго порядка функции $y = \ln\sin\frac{x}{4}$.

………………………………………………………………………………...

5.3. Сформулируйте определение **производной *n* – го** порядка.

………………………………………………………………………………...

5.4. Найдите производную пятого порядка $y^{(5)}$ функции $y = 3^{4x}$.

………………………………………………………………………………...

Выполните **задание 5 $_{\text{номер варианта}}$ а).**

…………………………………………………………………………………...

Ответ 5…а)……………………………………………………………….

5.5. Как найти производные **высших порядков** функции, заданной **параметрически**?

…………………………………………………………………………………...

5.6. Найдите производную второго порядка функции $\begin{cases} y = 3t^2; \\ x = 4t. \end{cases}$

…………………………………………………………………………………...

Выполните задание 5 $_{\text{номер варианта}}$ б).

…………………………………………………………………………………...

Ответ 5…б)……………………………………………………………….

5.7. Запишите **формулу Тейлора** для функции $f(x)$.

…………………………………………………………………………………...

5.8. Какую формулу называют **формулой Маклорена**?

…………………………………………………………………………………...

5.9. Как представляют формулой Маклорена элементарные функции $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$?

…………………………………………………………………………………...

5.10. Разложите многочлен $P_3(x)$ по степеням $x - x_0$,

если $P_3(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 8, \quad x_0 = -1.$

…………………………………………………………………………………...

Разложите многочлен $P_5(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2$ по степеням $x - 2 \quad (x_0 = 2)$ и сделайте проверку.

…………………………………………………………………………………...

Выполните задание 5 $_{\text{номер варианта}}$ в).

Ответ 5…в)……………………………………………………………….

Следует заметить, что если функция имеет конечное число производных, отличных от нуля, например, многочлен, то ее представление формулой Тейлора содержит конечное число слагаемых. Поэтому остаточный член формулы Тейлора в таких случаях равен нулю.

Если же функция дифференцируема бесконечное число раз и удовлетворяет условиям теоремы Тейлора о разложении функции по формуле Тейлора, то ее разложение по формуле Тейлора или Маклорена обязательно содержит отличный от нуля остаточный член, являющийся бесконечно малой функцией при $x \to x_0$,

5.11. Разложите по формуле Маклорена функцию $f(x)=e^{2-x}$ до $o(x^4)$.

…………………………………………………………………………………...

Выполните задание 5 $_{\text{номер варианта}}$ г).

…………………………………………………………………………………...

Ответ 5….г)………………………………………………………………….

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

ЗАДАНИЕ 6.0 (6. № $_{\text{МОЕГО ВАРИАНТА}}$)

- **Найти дифференциал** данной функции;
- **Вычислить приближенно** значение функции в точке, применяя дифференциал.

6.1. Сформулируйте определение **дифференцируемой в точке** x_0 функции $y=f(x)$.

…………………………………………………………………………………...

6.2. Как определяется **дифференциа**л функции $y=f(x)$ в точке x_0?

…………………………………………………………………………………...

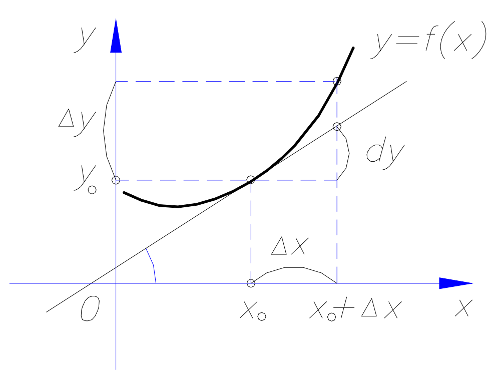
6.3. Какая **связь** имеет место между **дифференцируемой** в точке x_0 функцией $y=f(x)$ и **существованием производной** этой функции в той же точке?

…………………………………………………………………………………..

Несмотря на то, что формула для нахождения дифференциала очень простая, многие студенты затрудняются находить дифференциал.

Дифференциал функции находят, умножая производную функции по ее аргументу на дифференциал этого аргумента.

$$dy = y'_x dx$$



6.4. В чем заключается геометрический смысл дифференциала?

…………………………………………………………………………………...

Усвоить правило нахождения дифференциала очень важно, поскольку оно применяется при отыскании практически любого интеграла.

6.5. Найдите дифференциалы всех функций, входящих в таблицу производных.

……………………………………………………………………………...

6.6. Дана функция $y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$. Найдите ее дифференциал.

……………………………………………………………………………...

Выполните **задание 6 $_{\text{номер варианта}}$ а).**

……………………………………………………………………………...

Ответ 6….а)……………………………………………………………….

Несколько архаичным в двадцать первом веке представляется применение дифференциала к приближенным вычислениям. Но, решая подобные задачи, можно прочувствовать связь и различие между приращением Δy функции $y = f(x)$ и ее дифференциалом $dy = y_x^{/} dx$.

А именно, если отбросить второе слагаемое $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ - бесконечно малую функцию при $\Delta x \to 0$ в приращении Δy функции $y = f(x)$, то получится приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f^{/}(x_0)\cdot\Delta x$. То есть значение функции в некоторой точке $x_0 + \Delta x$, близкой к точке x_0, приближенно равно значению этой функции $f(x_0)$ в точке x_0, сложенным с дифференциалом функции, вычисленным в этой же точке x_0:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f^{/}(x_0)\cdot\Delta x.$$

Ясно, что чем меньше Δx, тем меньше ошибка вычисления, равная отбрасываемому слагаемому $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ в приращении Δy функции $y = f(x)$.

Можно придерживаться следующего **плана** при **вычислении приближенного** значения функции $y = f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$:

1. Представить значение аргумента x в виде двух слагаемых $x_0 + \Delta x$, причем приращение аргумента Δx должно быть мало, а в точке x_0 легко вычислить значение функции и ее производной.

Несмотря на то, что любое число можно разбить на сумму двух слагаемых бесконечным количеством способов, находится единственный способ, удовлетворяющий разумным соображениям;

2. Вычислить значения функции и ее производной в точке x_0;
3. Применить формулу приближенного вычисления:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f^{/}(x_0)\cdot\Delta x.$$

Например, вычислим приближенно $\sqrt[3]{26}$.

Решение.

1. Очевидно, что нужно вычислить значение функции $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=26$. Представим число 26 в виде суммы $x_0=27$ и $\Delta x=-1$;
2. $f(x_0)=\sqrt[3]{27}=3$; $f'(x_0)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\dfrac{1}{27}$;
3. $\sqrt[3]{26}\approx 3+\dfrac{1}{27}\cdot(-1)=3-\dfrac{1}{27}\approx 2{,}962976$. Вычисления на калькуляторе дают значение $\sqrt[3]{26}\approx 2{,}962496$, то есть применение дифференциала в рассмотренном примере позволило вычислить значение функции с точностью $0{,}005$, обеспечив два верных знака после запятой.

Ответ: $\sqrt[3]{26}\approx 2{,}96$.

Выполните **задание 6 $_{\text{номер варианта}}$ б).**

……………………………………………………………………………………

Ответ 6….б)………………………………………………………………

УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

ЗАДАНИЕ 7.0 (7. № $_{\text{МОЕГО ВАРИАНТА}}$)

- **Найти** интервалы **убывания и возрастания** функции;
- **Исследовать** функцию на **экстремум,** применяя **первое достаточное** условие существования экстремума функции в точке;
- **Исследовать** функцию на **экстремум,** применяя **второе достаточное** условие существования экстремума функции в точке;

7.1. Каковы **условия монотонности** (убывания, возрастания) функции $f(x)$ на интервале (a,b)?

……………………………………………………………………………………...

Выполните **задание 7$_{\text{номер варианта}}$ а).**

……………………………………………………………………………………...

Ответ 7….а)……………………………………………………………….

7.2. Какие точки называются **точками локального максимума (минимума)** функции $f(x)$?

……………………………………………………………………………………...

7.3. Какие точки называются **точками локального экстремума** функции $f(x)$?

……………………………………………………………………………………...

7.4. Сформулируйте **теорему Ферма** – необходимое условие существования экстремума функции в точке.

…………………………………………………………………………………...
7.5. В чем заключается **первое достаточное условие** существования **экстремума** функции в точке?

…………………………………………………………………………………...
7.6. Какие точки называются критическими точками первого порядка?

…………………………………………………………………………………...
7.7. Какие точки называются стационарными?

…………………………………………………………………………………...

Выполните **задание 7$_{\text{номер варианта}}$ б).**

…………………………………………………………………………………...

Ответ 7…б)………………………………………………………………….

7.8. Как формулируется **второе достаточное условие** существования **экстремума** функции в точке?

…………………………………………………………………………………...

Выполните **задание 7$_{\text{номер варианта}}$ в).**

…………………………………………………………………………………...

Ответ 7…в)………………………………………………………………….

ИНТЕРВАЛЫ ВЫПУКЛОСТИ И ВОГНУТОСТИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ, ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

ЗАДАНИЕ 8.0 (8. № МОЕГО ВАРИАНТА)

- **Найти** интервалы **выпуклости и вогнутости** графика данной функции и **точки перегиба**.

8.1. Как определяется **выпуклая** вверх (выпуклая вниз) на интервале (a,b) функция?

…………………………………………………………………………………...

8.2. Сформулируйте теорему **о достаточных условиях выпуклости** вверх (выпуклости вниз) графика функции.

…………………………………………………………………………………...

8.3. Как определяются **точки перегиба** графика функции?

…………………………………………………………………………………...

8.4. Сформулируйте **необходимые** условия существования точки **перегиба**.

…………………………………………………………………………………...

8.5. Какие точки называются **критическими** точками **второго** порядка?

…………………………………………………………………………………...

8.6. Каково **первое достаточное** условие существования точки **перегиба**?

…………………………………………………………………………………...

8.7. Каково **второе достаточное** условие существования точки **перегиба**?

…………………………………………………………………………………...

Выполните **задание 8$_{\text{номер варианта}}$ а).**

…………………………………………………………………………………...

Ответ 8….а)………………………………………………………………….

АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ
ЗАДАНИЕ 9.0 (9. № МОЕГО ВАРИАНТА)

- **Найти асимптоты** графика функции.

9.1. Сформулируйте **определение асимптоты** графика функции.

…………………………………………………………………………………...

9.2. Сформулируйте **определение вертикальной** асимптоты графика функции?

……………………………………………………………………………….

9.3. Сформулируйте **определение наклонной** асимптоты графика функции.

…………………………………………………………………………………...

9.4. **Как найти наклонные** асимптоты графика функции?

…………………………………………………………………………………...

9.5. **Когда** график функции имеет **горизонтальные** асимптоты?

…………………………………………………………………………………...

Выполните **задание 9$_{\text{номер варианта}}$ а).**

…………………………………………………………………………………...

Ответ 9….а)………………………………………………………………….

ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

ЗАДАНИЕ 10.0 (10. № МОЕГО ВАРИАНТА)

- **Провести полное исследование** функции и построить **график**.

Можно предложить следующий план полного исследования функции.

Исследование без применения производной

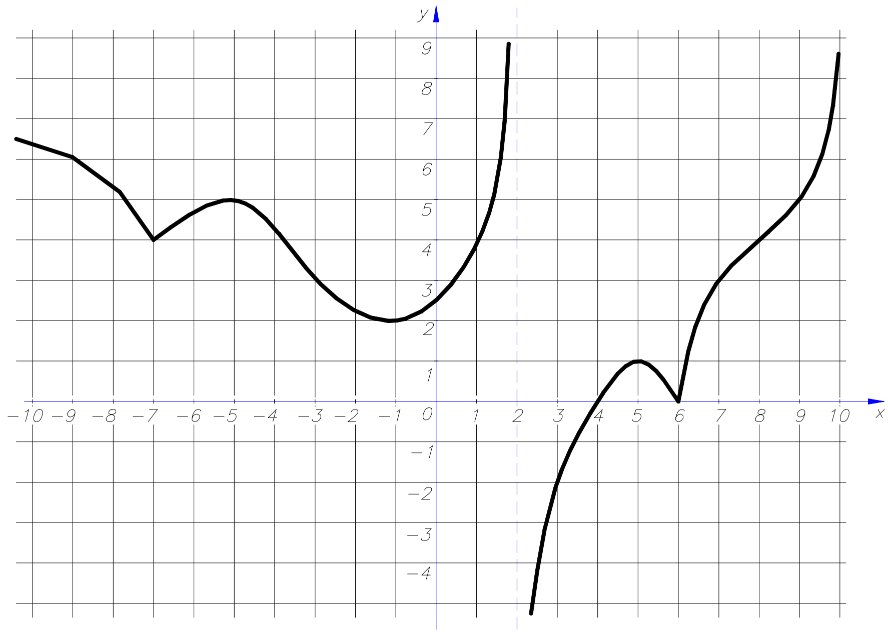
Таблица 3

№	***Цель исследования***	Действия	Вывод
1	Найти область определения функции	Найти точки, в которых функция не определена или не задана (точки разрыва графика функции)	Исключить найденные точки из области определения функции
2	Найти вертикальные асимптоты	Вычислить односторонние пределы функции в точках разрыва и в точках, «подозрительных» на разрыв для кусочно-аналитической функции	Если хотя бы один из односторонних пределов в исследуемой точке равен бесконечности, то график функции имеет вертикальную асимптоту: $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty \Rightarrow x=a$ - вертикальная асимптота
3	Исследовать функцию на четность и нечетность	Если $f(-x)=f(x)$, то функция четная. Если $f(-x)=-f(x)$, то функция нечетная Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией общего вида	Если функция четная или нечетная, ограничиться исследованием функции на интервале $(0,\infty)$. График четной функции симметричен относительно оси *OY*, график нечетной функции симметричен относительно начала координат
4	Исследовать функцию на периодичность	$T\neq 0$ – период функции, - наименьшее из всех возможных значений, удовлетворяющих условиям: 1. $x-T\in D(f), x+T\in D(f)$; 2. $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$	Ограничиться исследованием на интервале по длине равном периоду *T*, за пределы интервала продолжить график функции периодическим образом
5	Найти точки пересечения с осями координат	Решив уравнение $y=f(x)=0$, найти $x_0 : f(x_0)=0$. Найти $y(0)=y_0$	Точка пересечения графика с осью OX: $(x_0,0)$. Точка пересечения графика с осью OY: $(0,y_0)$
6	Найти наклонные, в частности, горизонтальные, асимптоты	Вычислить пределы $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$	Если *k* и *b* – конечные числа, то уравнение наклонных асимтот $y=kx+b$, причем, при $\kappa=0$ асимптота горизонтальная $y=b$

Исследование с применением производной

Таблица 4

<table>
<tr><th>№</th><th>Цель исследования</th><th colspan="4">Действия и вывод</th></tr>
<tr><td rowspan="10">1</td><td rowspan="10">Найти интервалы монотонности и точки локальных экстремумов функции</td><td colspan="4">1; .1. Найти критические точки первого порядка $x_i, i = 1,2,...n$:
$y'(x_i) = 0$ или $y'(x_i) = \infty$, или $y'(x_i)$ – не существует
(необходимое условие существования экстремума функции в точке);
1.2.1. Применить первое достаточное условие существования экстремума функции в критической точке:</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_1$</td><td>x_1</td><td>$x > x_x$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>—</td><td>Критическая точка первого порядка</td><td>+</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>Функция убывает</td><td>$(x_1, y(x_1))$ – точка минимума</td><td>Функция возрастает</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_2$</td><td>x_2</td><td>$x > x_2$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>+</td><td>Критическая точка первого порядка</td><td>—</td></tr>
<tr><td>y</td><td>Функция возрастает</td><td>$(x_2, y(x_2))$ – точка максимума</td><td>Функция убывает</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">1.2.2.Если x_3, x_4 и x_5-стационарные точки $(y'(x_3) =, y'(x_4) = y'(x_5) = 0)$, можно применить второе достаточное условие существования экстремума функции в точке:
$y''(x_3) > 0 \Rightarrow (x_3, y(x_3))$ – точка локального минимума;
$y''(x_4) < 0 \Rightarrow (x_4, y(x_4))$ – точка локального максимума;
$y''(x_5) = 0 \Rightarrow$ требуются дополнительные исследования.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба</td><td colspan="4">2.1. Найти критические точки второго порядка $x_j, j = 1,2,...m$:
$y''(x_j) = 0$ или $y''(x_j) = \infty$, или $y''(x_j)$ – не существует
(необходимое условие существования точки перегиба графика);
2.2. Применить достаточные условия выпуклости и вогнутости графика и существования точек перегиба:</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$x < x_6$</td><td>x_6</td><td>$x > x_6$</td></tr>
<tr><td>y''</td><td>+</td><td>Критическая точка 2-го порядка, точка непрерывности</td><td>—</td></tr>
<tr><td>y</td><td>График функции вогнутый</td><td>$(x_6, y(x_6))$ – точка перегиба</td><td>График функции выпуклый</td></tr>
</table>



Например, на рисунке изображен график функции:

10.1. Укажите критические точки первого порядка изображенной на рисунке функции.

……………………………………………………………………………………...

10.2. Укажите критические точки второго порядка изображенной на рисунке функции.

……………………………………………………………………………………...

Проведем полное исследование функции $y = \ln\frac{x+6}{x}$ и на основании исследований построим график.

10.3. Найдем **область определения** данной функции.

……………………………………………………………………………………...

10.4. Найдем **вертикальные асимптоты** графика функции.

……………………………………………………………………………………...

10.5. Исследуем функцию на **четность и нечетность**.

……………………………………………………………………………………...

10.6. Исследуем функцию на **периодичность**.

……………………………………………………………………………………...

10.7. Найдем точки **пересечения** графика функции **с осями** координат.

…………………………………………………………………………………...

10.8. Найдем **наклонные асимптоты** графика функции.

…………………………………………………………………………………...

10.9. Исследуем функцию на **экстремум** и найдем **интервалы монотонности** функции.

10.10. Найдем **интервалы выпуклости** и **вогнутости** графика функции и точки **перегиба**.

10.11. **Построим график** функции.

Выполните задание 10а.