ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов

Высшая математика II

САМОУЧИТЕЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Издание четвертое

*Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
в качестве учебного пособия для студентов
и преподавателей вузов*

Издательство Томского политехнического университета
Томск 2007

УДК 517
Т19

Тарбокова Т.В.
Т19 Высшая математика II. Самоучитель решения задач. Предел и непрерывность функции одного аргумента: учебное пособие / Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 84 с.

Самоучитель решения задач является второй частью комплекта учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на формирование и развитие познавательной самостоятельности студентов. Содержит теоретические сведения, наборы задач для индивидуальных домашних заданий и алгоритмы их решения по следующим разделам: предел и непрерывность функции одного аргумента. Для студентов всех специальностей вузов.

УДК 517

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор педагогических наук,
профессор, зав. кафедрой математики,
теории и методики обучения математике ТГПУ
Э.Г. Гельфман

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ
Н.Ю. Галанова

Содержание

Введение

Настоящее учебное пособие – самоучитель решения задач – предназначено в помощь первокурсникам любой формы обучения и содержит как теоретический материал, изложение которого иллюстрируется решенными примерами, так и варианты типовых домашних индивидуальных заданий **по теме: «Предел и непрерывность функции одного аргумента».**

Теоретический материал, как правило, излагается в виде ответов на поставленные перед студентом вопросы. Вопросы занумерованы: 1-е число соответствует номеру решаемой задачи, 2-е – порядковому номеру вопроса. Ответы можно найти в конце учебного пособия (с. 24–34). Рекомендуется сделать **три закладки** в книгу, отделяющие страницу изучаемого материала, ответы и индивидуальные задания. Отвечая на поставленные вопросы и делая записи в соответствии с рекомендациями, **студент не только справится с решением задач своего варианта, но хорошо усвоит теоретический материал** и даже создаст свой конспект по наиболее трудным для понимания вопросам из изучаемых разделов высшей математики.

С помощью самоучителя **легко проконтролировать качество усвоения теоретического материала**, так как основные определения и теоремы в пособии представлены специальным образом: вопросы и ответы на них разделены вертикальной чертой. Закрыв текст справа от черты, нужно лишь ответить самостоятельно на вопрос в устной, а еще лучше в письменной форме и, открыв текст справа, сверить результат.

Более тысячи задач – 39 индивидуальных заданий в 30 вариантах – позволят студентам выбрать задачи для самостоятельного решения и **закрепления навыков**, приобретенных при решении примеров одного из вариантов, а преподавателей обеспечат **богатым банком заданий**.

Пособие в основном ориентировано на студента среднего уровня подготовки, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания.

Чтобы получить **отличные знания**, необходимо в совершенстве овладеть теорией и практикой решения задач повышенного уровня сложности, и в этом окажут помощь учебники и сборники задач из списка рекомендуемой литературы, а также задания повышенного уровня сложности, содержащиеся в данном пособии.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

ЗАДАНИЕ 1.0 (1. № моего варианта)

Найти пределы заданных функций.

Несмотря на то, что вычисления в этом задании невелики, для их выполнения Вам потребуется изучить большой объем теоретического материала.

Подготовимся к решению примеров задания 1.

1.1. Сформулируйте определение **понятия функции** одного аргумента.

……………………………………………………………………………..

1.2. Какие функции называются **основными элементарными**?

К основным элементарным функциям относятся следующие функции:

……………………………………………………………………………..

1.3. Какие функции называют **элементарными**?

……………………………………………………………………………..

1.4. Сформулируйте определение **предела функции** в точке $x = a$.

……………………………………………………………………………...

1.5. Какая функция называется **непрерывной в точке** $x = x_0$?

……………………………………………………………………………...

1.6. Перечислите **три условия**, которые должны выполняться для **непрерывной в точке** $x = x_0$ функции.

……………………………………………………………………………...

1.7. В каких точках **непрерывны все элементарные** функции?

……………………………………………………………………………...

Из теоремы о непрерывности элементарных функций и определения непрерывной функции в точке $x = a$ следует, что **при вычислении предела элементарной функции**, прежде всего, вместо x **нужно подставить точку** a в выражение, задающее эту функцию $f(x)$.

Если при этом получается число A, то оно и является пределом данной функции $f(x)$ в данной точке $x = a$ (при $x \to a$), то есть

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = A.$$

Например, $\lim\limits_{x\to 5}(2x-1)=2\cdot 5-1=9$.

Но очень часто, подставляя точку $x = a$ в выражение, задающее функцию $f(x)$, получают неопределенности одного из следующих видов:

$$\left\{\frac{0}{0}\right\},\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\{0\cdot\infty\},\{\infty-\infty\},\{1^{\infty}\},\{0^{0}\},\{\infty^{0}\}$$

Такого вида неопределенности следует раскрывать при помощи соответствующих различных приемов.

Запишите пример **а) задания 1** Вашего варианта:

....

1.8. Какому числу равно значение a, к которому стремится x, в Вашем примере?

$a =$ …………………………………………………………………...

1.9. Для какой функции Вам нужно вычислить предел? Запишите эту функцию.

f(x) =……………………………………………………………………..

Подставьте в выражение для функции $f(x)$ вместо x значение a.

f(a) =*f* (   ) = ………………………………………………...

1.10. Что у Вас из этого получилось?

Получилась неопределенность вида: …………………………………..……

Например, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}=\left\{\dfrac{(-1)^3-3\cdot(-1)-2}{(-1)^2+2\cdot(-1)+1}\right\}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

1.11. Как следует поступить для того, чтобы вычислить предел дробно-рациональной функции в случае, если при $x \to a$ числитель и знаменатель функции имеют пределы, равные нулю?

……………………………………………………………………………..

В случаях, когда функция $f(x)$:

1. Представляет собой отношение многочленов

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n \quad \text{и}$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots\ldots + b_m;$$

2. Содержит **иррациональности** в виде корней квадратных или кубических: $\sqrt{u(x)}$ или $\sqrt[3]{v(x)}$, и x стремится к конечному числу a ($x \to a$, $|a| < \infty$), можно руководствоваться следующей **таблицей 1 рекомендаций**:

Таблица 1

$f(a) = \left\{\frac{0}{0}\right\}, \quad x \to a, \quad \lvert a \rvert < \infty$			$c = \text{const}$ $b = \text{const}$
№	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
1	$f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $P_n(a) = Q_m(a) = 0$	Разделить функции $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ на разность $(x - a)$, сократить $f(x)$ на эту разность $(x - a)$ и подставить вместо x значение $x = a$	1) $\left\{\frac{0}{c}\right\} = 0$; 2) $\left\{\frac{c}{0}\right\} = \infty$; 3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{c}{b} = A$ 4) $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – повторить прием
2	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt{u_1(x)} - \sqrt{u_2(x)}$	Умножить и разделить функцию f(x) на сопряженное иррациональное выражение $(\sqrt{u_1(x)} + \sqrt{u_2(x)})$, использовать формулу сокращенного умножения $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ и сократить f(x) на разность $(x - a)$	------ // ------

№	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
3	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt[3]{u_1(x)} - \sqrt[3]{u_2(x)}$ или $\sqrt[3]{u_1(x)} + \sqrt[3]{u_2(x)}$	Умножить и разделить разность кубических корней на неполный квадрат суммы, а сумму кубических корней – на неполный квадрат разности, воспользоваться формулами сокращенного умножения $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$ и сократить функцию $f(x)$ на разность $(x-a)$	1) $\left\{\frac{0}{c}\right\}=0$; 2) $\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{c}{b}=A$ 4) $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – - повторить прием

Замечание.

При делении многочлена $P_{\text{n}}(x)$ или $Q_{\text{m}}(x)$ на разность $(x-a)$ опираются на **теорему Безу**: если число $x = a$ является корнем многочлена (при $x = a$ многочлен равен нулю), то этот многочлен делится на разность $(x-a)$ без остатка.

Деление многочлена на разность $(x-a)$ осуществляется по тем же правилам, по которым делятся столбиком числа:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{\text{n}} & \quad x-a \\
\cline{2-2}
\quad \underline{a_0x^n - aa_0x^{n-1}} & a_0x^{n-1} + (a_1 + aa_0)x^{n-2} + \ldots = P_{n-1}(x) \\
\_\,(a_1 + aa_0)x^{n-1} + a_2x^{n-2} & \\
\quad \underline{(a_1 + aa_0)x^{n-1} - a(a_1 + aa_0)x^{n-2}} & \\
\_\,(a_2 + a(a_1 + aa_0))x^{n-2} + a_3x^{n-3} & \\
\qquad \underline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \\
\qquad \underline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Обратите внимание на то, что индекс n в обозначении многочлена $P_{\text{n}}(x)$ соответствует старшей степени x этого многочлена.

В результате деления получим представление многочлена $P_n(x)$ в виде произведения многочлена $P_{n-1}(x)$ на разность $(x-a)$:

$$P_n(x) = (x-a)\,P_{\text{n-1}}(x).$$

Например, убедимся в том, что корень многочлена $P_3(x) = x^3 - 3x - 2$ равен $x_1 = -1$.

$$P_3(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0.$$

По теореме Безу данный многочлен делится на разность $x - (-1) = x + 1$ без остатка. Действительно,

$$\begin{array}{l|l}
\underline{\quad} x^3 - 3x - 2 & \; x+1 \\ \cline{2-2}
\;\; \underline{x^3 + x^2} & \; x^2 - x - 2 \\
\quad\; \underline{\quad} -x^2 - 3x & \\
\quad\;\;\; \underline{-x^2 - x} & \\
\qquad\;\; \underline{\quad} -2x - 2 & \\
\qquad\;\;\;\; \underline{-2x - 2} & \\
\qquad\qquad\;\; 0 &
\end{array}$$

Поэтому $P_3(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$.
Умножение скобок должно давать исходный многочлен. Проверьте!
Используя полученный результат, вычислим предел:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 2)}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 2)}{(x+1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x - 2) = -3.$$

Замечание. Корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ можно находить при помощи формулы $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ или по теореме Виета: $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 x_2 = c/a$.
И тогда квадратный трехчлен можно разложить на сомножители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

В учебных примерах корни многочленов более высоких порядков обычно находят подбором. Подставляя в многочлен значения $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$ и т. д., находят то, при котором многочлен равен нулю.

1.12. Найдите корни x_1, x_2 и x_3 многочлена $P_3(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ и разделите этот многочлен на разности $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, $(x - x_3)$.

Рассуждать следует так: корни данного многочлена не могут быть положительными, поскольку в этом случае все слагаемые данного многочлена тоже положительны, поэтому и их сумма не может быть равной нулю.

Вычислим

$P_3(-3)$ =………………………………=

$P_3(-2)$ =……………………………….=

$P_3(-1)$ =……………………………….=

Следовательно, корнями данного многочлена являются числа x_1 =….. и x_2 =….. .

Замечание. Если представление многочлена в виде сомножителей содержит *к*-ю степень разности $(x - x_c)$, то есть сомножитель $(x - x_c)^к$, то говорят, что корень x_c является **кратным корнем многочлена, и кратность этого корня равна *к*.** Это означает, что корень $x = x_c$ *к* раз обращает данный многочлен в нуль.

Разделите многочлен P_3(x) на разность $(x - x_1)$:

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \ \Big|\underline{\qquad\qquad}$$

Разделите многочлен $P_3(x)$ на разность $(x - x_2)$:

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \ \Big|\underline{\qquad\qquad}$$

Запишите многочлен $P_3(x)$ в виде сомножителей:

$P_3(x)$ =…………………………………………………………………

Сделайте проверку, перемножив скобки. Получается многочлен $P_3(x)$?

1.13. Имеет ли многочлен $P_3(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ кратный корень? Какому числу равен кратный корень? Какова кратность этого корня?

……………………………………………………………………..........

Вычислите предел в **задании 1.** номер варианта **. а).**

Запишите, какой предел Вам нужно найти:

……………………………………………………………………………

Выполните преобразования и вычисления, руководствуясь рекомендациями таблицы 1 (с. 8–9) и сократив полученные при этом одинаковые сомножители в числителе и знаменателе

……………………………………………………………………………

Ответ 1. … а). ….……………………………………………………..

Для закрепления навыков вычисления пределов выполните задания 1, 2, 6, 12.

1.14. Запишите определение предела функции при $x \to \infty$.

……………………………………………………………………………………..........

1.15. Какой предел дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + ... + b_m}$$

получится, если $x \to \infty$?

1) $m > n \geq 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ ………………;

2) $n = m \geq 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ ………………;

3) $n > m \geq 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ ....

Более того, если функция $f(x)$ представляет собой отношение линейных комбинаций степенных функций, показатели которых неотрицательны (то есть m и n необязательно целые, но обязательно неотрицательные), то при $x \to \infty$ можно оставить в числителе и в знаменателе только **слагаемые наибольших степеней *x*,** а остальными пренебречь. Предел функции при $x \to \infty$ из-за отбрасывания слагаемых, содержащих меньшие степени x (в том числе и $x^0 = 1$), не изменяется, то есть

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n_1} + ... + a_k x^0}{b_0 x^m + b_1 x^{m_1} + ... + b_l x^0} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m},$$

где $n > n_1 > n_2 > ... \geq 0$, $m > m_1 > m_2 > ... \geq 0$ (слагаемые записываются в порядке убывания степеней x).

1.16. Какой предел функции $f(x) = \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$ получится при $x \to \infty$, если

1) $n > m \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} =$ ……………;

2) $n = m \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} =$ ……………;

3) $m > n \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} =$ ……………..……?

1.17. Как следует поступить при вычислении предела отношения показательных функций $u(x) = a^{x+r}$, где r – вещественное число, если $x \to \infty$?

……………………………………………………………………………………………

1.18. Пусть $f(x) = q^x$, $q = \text{const}$.

Каким будет предел этой функции, если

1) $|q| < 1 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x =$ …………………;

2) $q = 1 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x =$ …………………..;

3) $1 < q < \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x =$ ………………..;

4) $-\infty < q \le -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} q^x =$ ……………?

1.19. Существуют ли пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$?

…………………………………………………………………………………..

Обобщим все рассмотренные случаи в **таблице 2 рекомендаций** к решению примера задания $1._{\text{номер варианта}}$. б).

Таблица 2

$x \to \infty$			
№	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
1	Функция $f(x)$ равна отношению линейных комбинаций **степенных** функций x^n, $n = \text{const}$, $n \ge 0$	В числителе и знаменателе $f(x)$ оставить слагаемые, содержащие самые большие степени x.	См. 1.16
2	Функция $f(x)$ равна отношению линейных комбинаций **показательных** функций a^x, $a = \text{const}$, $a > 0$, $a \ne 1$	Разделить числитель и знаменатель функции $f(x)$ на самую большую при $x \to \infty$ показательную функцию	См. 1.18

Запишите **задание $1._{\text{номер варианта}}$. б)** и вычислите предел данной в этом задании функции.

…………………………………………………………………………………..

Ответ 1. … б). ……...……………………………………………………….

Для закрепления навыков вычисления пределов выполните задания 3, 4, 5.

Для того, чтобы решить следующий пример, Вам нужно хорошо изучить бесконечно малые функции, их свойства, их сравнение, применение к вычислению пределов.

1.20. Какие функции называют **бесконечно малыми** при $x \to a$?

…………………………………………………………………………………...

1.21. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции (б. м. ф.) при $x \to a$; запишите, какими соотношениями они связаны, если

1) $\alpha(x)$ – б. м. ф. **более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = ... \Leftrightarrow \alpha(x) = o\ (\beta(x));$$

2) $\alpha(x)$ – б. м. ф. **более низкого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = ... \Leftrightarrow \beta(x) = o\ (\alpha(x));$$

3) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б. м. ф. **одинакового порядка** малости при $x \to a$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = ..., ... \neq 0 \ \Leftrightarrow \alpha(x) = c\ (\beta(x));$$

4) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б. м. ф., **эквивалентные** при $x \to a$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = ... \Leftrightarrow \ \alpha(x) \sim \beta(x);$$

5) $\alpha(x)$ – б. м. ф. ***k*-того порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ – б. м. ф. при $x \to a$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = ... \Leftrightarrow \alpha(x) = c\ (\beta^k(x)).$$

1.22. Сформулируйте теорему о **пределе отношения** двух бесконечно малых функций.

…………………………………………...…………………………………

1.23. Запишите теорему о **первом замечательном** пределе.

…………………………………………………………………………………...

1.24. Запишите теорему о **втором замечательном** пределе.

…………………………………………………………………………………..

Применение первого и второго замечательных пределов позволяет доказать справедливость формул в **таблице 3 эквивалентных** бесконечно малых функций при $x \to a$.

Таблица 3

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$			
1	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
2	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6а	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
4	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7а	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu} - 1 \sim \mu\, \alpha(x)$

1.25. Вычислите предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

……………………………………………………………………………………...

Ответ…………………………………………………………………….

Замечание 1. В случаях, когда аргумент $\alpha(x)$ функции в вычисляемом пределе стремится не к нулю, а к отличному от нуля числу, например, $\alpha(x) \to a$, $a \neq 0$, вводят новую переменную $t = \alpha(x) - a$.

Тогда, если $\alpha(x) \to a$, то $t \to 0$ (функция $t(x)$ должна быть непрерывной функцией в окрестности точки $t = 0$).

Новая переменная $t \to 0$ (при $\alpha(x) \to a$), и для нее легко можно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Например, вычислим предел

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln(\operatorname{tg} x)} = \left\{ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\ln 1} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left| x - \frac{\pi}{4} = t \Leftrightarrow x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \to 0. \right| =$$

Предварительно сделаем следующие преобразования:

$$x = t + \frac{\pi}{4};$$

$$\sin x = \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \sin t \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t);$$

$$\cos x = \cos(t+\frac{\pi}{4}) = \cos t\cos\frac{\pi}{4} - \sin t\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t);$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(t+\frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg} t\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} t + 1}{1-\operatorname{tg} t} = \frac{1-\operatorname{tg} t + 2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t} = 1 + \frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t};$$

$$\frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t} \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to 0.$$

И воспользуемся результатами преобразований:

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)}{\ln(1+\frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t})} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{2\frac{\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\, t}{2\frac{t}{1-t}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Замечание 2. При вычислении предела функции в задании $1._{\text{номер варианта}}.$в) можно применять первый и второй замечательные пределы непосредственно (без применения эквивалентных бесконечно малых функций), но решения тогда получаются часто более длинные, с громоздкими преобразованиями.

Запишите решение примера **задания 1**$._{\text{номер варианта}}$**.в).**

…………………………………………………………………………………...

Ответ 1. … в) ……………………………………………...……………

Для закрепления навыков вычисления пределов выполните задания 9, 10, 11.

1.26. Сформулируйте определение **бесконечно большой** функции при $x \to a$.

…………………………………………………………………………………...

Бесконечно большие функции (б. б. ф.), также как и бесконечно малые, можно сравнивать между собой.

Если предел отношения двух бесконечно больших функций равен:

1. бесконечности, тогда в числителе − б. б. ф. более высокого порядка роста;
2. нулю, тогда в числителе – б. б. ф. более низкого порядка роста;
3. постоянному числу, не равному нулю или единице, тогда эти бесконечно большие функции одинакового порядка роста;
4. единице, тогда бесконечно большие функции эквивалентны.

Полезно иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $x \to \infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(x) = a^x$; степенная функция $f(x) = x^n$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:

$$\log_a x << x^n << a^x, \quad x \to \infty .$$

1.27. Исследуйте, какого вида неопределенность получается в задании 1.$_{\text{номер варианта}}$.г).

…………………………………………………………………………………...

1.28. Какой предел обычно применяют, раскрывая неопределенность такого вида? Запишите этот предел.

…………………………………………………………………………………...

Чтобы вычислить данный предел, можно применить следующую последовательность тождественных преобразований $(u \to 1, v \to \infty)$:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}(1+(u-1))^v = \lim_{x\to a}(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}\cdot(u-1)\cdot v} = e^{\lim\limits_{x\to a}(u-1)\cdot v}$$

Неопределенность $\{0 \cdot \infty\}$ в показателе экспоненты раскрывают, применяя приемы предыдущих примеров.

Решите пример **задания 1**.$_{\text{номер варианта}}$.г).

…………………………………………………………………………………..

Ответ 1. … г)……………………………………………………………..

Для закрепления навыков вычисления пределов выполните задания 7,8.

1.29. Какого вида неопределенность получится при вычислении предела в задании 1.$_{\text{номер варианта}}$.д)?

…………………………………………………………………………………

1.30. Как поступают, раскрывая неопределенности такого вида?

…………………………………………………………………………………...

Вычислите предел в **задании 1.$_{\text{номер варианта}}$.д).**

…………………………………………………………………………………..

Ответ 1. … д)……………………………………………………………..

Для закрепления приобретенных навыков решите примеры 14,15.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА
ЗАДАНИЕ 2.0(2.№$_{\text{моего варианта}}$)

– Исследовать функцию на непрерывность;

– найти точки разрыва графика функции и установить характер точек разрыва;

– в случае устранимого разрыва доопределить функцию до непрерывной;

– в пункте 2.б) построить график.

2.1. Перечислите **условия**, которые должны выполняться для **непрерывной в точке** $x = x_0$ функции:

1) ……………………………………………………………………

2) ……………………………………………………………………

3) ……………………………………………………………………

2.2. В каких точках **непрерывны все элементарные** функции?

…………………………………………………………………………..

2.3 Сформулируйте определение **непрерывной на интервале** (a, b) функции.

…………………………………………………………………………..

2.4. Запишите определение **предела справа (правостороннего)** для функции $y = \boldsymbol{f(x)}$.

…………………………………………………………………………..

2.5. Определите понятие **предела слева (левостороннего**) для функции y = $\boldsymbol{f(x)}$.

…………………………………………………………………………..

2.6. Укажите **связь**, которая существует **между односторонними** (предел справа, предел слева) пределами функции $y = \boldsymbol{f(x)}$ **и пределом** этой функции в некоторой точке $x = a$?

…………………………………………………………………………..

2.7. Сформулируйте определение функции, **непрерывной на отрезке** $[a, b]$?

…………………………………………………………………………..

2.8. Какие точки называют **точками разрыва** графика функции?

……………………………………………………………………………...

2.9. В каком случае функция терпит **устранимый** разрыв?

…………………………………………………………………………………

2.10. Когда функция терпит **разрыв первого рода**?

……………………………………………………………………………………...

2.11. Сформулируйте условия, при которых функция имеет **разрыв второго рода.**

……………………………………………………………………………………...

2.12. Является ли функция в задании 2.$_{\text{номер варианта}}$.а) элементарной?

……………………………………………………………………………………...

2.13. В каких точках терпит разрыв элементарная функция?

……………………………………………………………………………………...

Итак, для исследования **элементарной** функции **на непрерывность** можно применить такой **план**:

1. Найти точки, которые не принадлежат области определения данной функции.
2. Вычислить односторонние пределы функции в этих точках.
3. Сделать вывод о характере разрыва функции в исследуемых точках.

Например, исследуем на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+x)}$.

1. Функция $f(x)$ определена на интервалах $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;\infty)$.

В точках $x=-1$ и $x=0$ знаменатель функции обращается в нуль, следовательно, эти точки не принадлежат области определения данной функция и являются точками разрыва функции.

2. Найдем односторонние пределы данной функции в точках разрыва функции.

$$x=-1:\ \lim_{x\to-1-0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+x)}=\left\{\frac{1-\cos(-1)}{(-1)^2(1+(-1-0))}\right\}=\left\{\frac{c}{-0}\right\}=-\infty.$$

Число $\boldsymbol{c=1-\cos(-1)}$ – положительное, так как $|\cos x|\le 1$ для всех вещественных значений аргумента x.

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+x)}=\left\{\frac{1-\cos(-1)}{(-1)^2(1+(-1+0))}\right\}=\left\{\frac{c}{+0}\right\}=+\infty .$$

$x = 0$:

Функции $y=\cos x$ и $y=x^2$ – четные, поэтому пределы функции $f(x)$ будут одинаковыми при $x\to +0$ и $x\to -0$.

Если $x\to 0$, то функция $y=1-\cos x$ является бесконечно малой, и ее можно заменить эквивалентной функцией: $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Если доопределить данную функцию $f(x)$ в точке $x = 0$ значением, равным ее пределу в этой точке, то функция станет непрерывной в точке $x = 0$. То есть разрыв можно устранить, но получится уже другая функция:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+x)}, & x\neq 0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

3. В соответствии с классификацией точек разрыва функции делаем вывод о том, что:
в точке $x = -1$ функция терпит разрыв второго рода,
а в точке $x = 0$ имеет устранимый разрыв.

Замечание. Иногда устранимый разрыв и разрыв первого рода – оба называют разрывами первого рода, говоря:
разрыв первого рода – устранимый,
разрыв первого рода – случай конечного скачка.

Выполните **задание 2.**$_{\text{номер варианта}}$**.а)** в соответствии с планом, предложенным на с. 18**.**

Ответ 2. … а) ………………………………………………………….

Запишите **задание 2.**$_{\text{номер варианта}}$**.б).**

……………………………………………………………………………………...

2.14. Является ли функция в задании 2.$_{\text{номер варианта}}$.б) элементарной?

……………………………………………………………………………………...

2.15. В каких точках может иметь разрыв кусочно-аналитическая функция?

……………………………………………………………………………………...

Найдите точки, в которых функция **задания 2.**$_{\text{номер варианта}}$**.б)** может иметь разрыв.

……………………………………………………………………………………...

2.16. Можно ли воспользоваться планом исследования на непрерывность элементарной функции для исследования на непрерывность функции кусочно-аналитической?

……………………………………………………………………………………...

Таким образом, для исследования **кусочно-аналитической** функции **на непрерывность** можно предложить такой **план**:

1. Найти точки, в которых данная функция не определена – точки разрыва графика функции.
2. Указать точки, в которых происходит переход от одной формулы задания функции к другой формуле, – точки, «подозрительные» на разрыв.
3. Вычислить односторонние пределы функции во всех этих точках (найденных по предыдущим двум пунктам плана).
4. Сделать вывод о характере разрыва или о непрерывности функции в исследуемых точках.

Например, исследуем на непрерывность кусочно-аналитическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\le x<1, \\ x-1, & 1<x\le 4, \\ 5, & x=1. \end{cases}$$

1. Функция определена во всех точках отрезка $\left[-1;4\right]$, поэтому ее можно исследовать на непрерывность только на этом отрезке.
2. Точка, «подозрительная» на разрыв, одна: $x = 1$.
3. Вычислим односторонние пределы данной функции в точке $x = 1$.

Слева от точки $x = 1$ функция задана при помощи основной элементарной функции $y = 2^x$, поэтому

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 2^x = 2,$$

как предел основной элементарной функции $y = 2^x$ в точке $x = 1$.

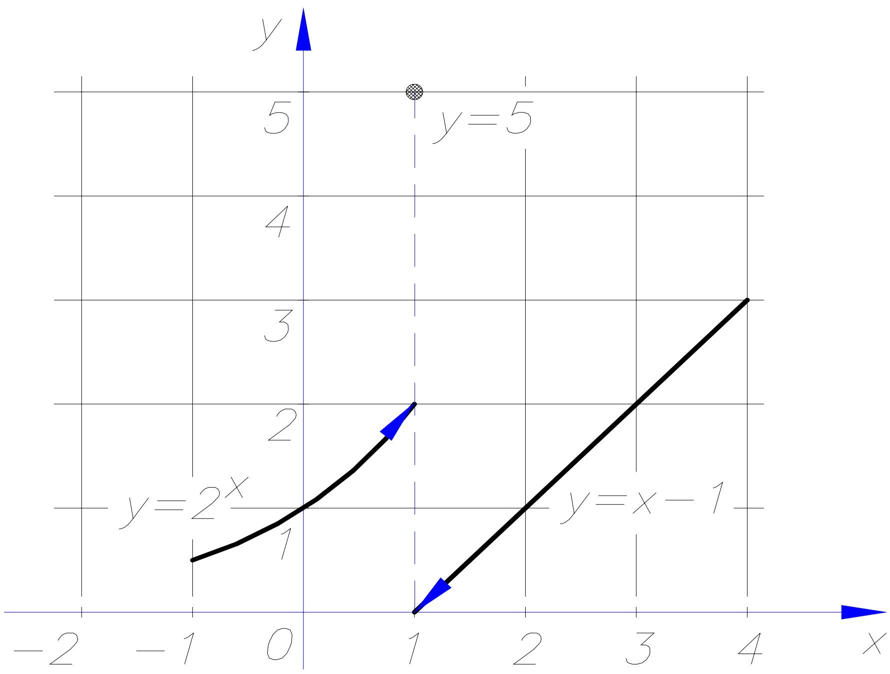
Справа от точки $x = 1$ функция задана при помощи элементарной функции $y = x - 1$, поэтому

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (x-1) = 0.$$

4. В соответствии с классификацией точек разрыва функции в точке $x = 1$ функция $f\left(x\right)$ терпит разрыв первого рода (случай конечного скачка):

$$\begin{cases} f(1) = 5, \\ f(1-0) = 2 \neq 5, \\ f(1+0) = 0 \neq 5. \end{cases}$$

Изобразим функцию на графике.



Замечание. Если бы в точке $x=1$ значение функции было равно двум: $f(1)=2$, то функция была бы непрерывной слева, а если бы выполнялось равенство: $f(1)=0$, то функция была бы непрерывной справа.

Выполните **задание 2.**$_{\text{номнр варианта}}$**.б)** полностью, в соответствии с планом, предложенным на с. 20.

Ответ 2. … б). ……………………………………………………………...

Постройте **график** функции, исследованной Вами на непрерывность в **задании 2.**$_{\text{номер варианта}}$**.б)**.

……………………………………………………………………………

Запишите замечания о трудностях, возникших у Вас при выполнении заданий 1 и 2.

1) ....

2) ....

3) ....

4) ....

5) ....

6) ....

7) ....

....

....

....